II Sistemas de Ecuaciones Lineales y Matrices

1. Introducción

Se denomina ecuación lineal a aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado, es decir, las incógnitas sólo están elevadas a la potencia uno y no aparecen multiplicadas entre si. Por ejemplo $5x+3y-4z = 5$ es una ecuación lineal con tres incógnitas.
Nuestro objetivo ahora es el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, es decir, un conjunto de varias ecuaciones lineales. Mas precisamente, un sistema de ecuaciones lineales con incógnitas en un cuerpo , es una expresión dada por

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

donde los $a_{ij} \in \mathsf{K}$ para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$ se denominan los coeficientes del sistema, y los b_i para $1 \leq i \leq m$ se denominan los términos independientes del sistema. Si $b_j = 0$ para $1 \leq j \leq m$, el sistema se denomina homogéneo.
En caso contrario, es decir, si $b_i \neq 0$ para algún valor de $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, el sistema de ecuaciones se denomina no homogeneo. Finalmente, las incógnitas del sistema son $x_1,\ldots,x_n$ perteneciendo al cuerpo K. En nuestro caso, el cuerpo de escalares será casi exclusivamente el cuerpo R de los números reales, con algunas esporádicas excursiones al cuerpo C de los números complejos. Escribiremos como $(x_1,\ldots,x_n)$ a los elementos del conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales, esto es, $x_1,\ldots,x_n$ satisfacen cada una de las ecuaciones del mismo.
El objetivo es entonces encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales arbitrario. Comenzar un curso de álgebra lineal con este tema tiene varias razones:
1. Un gran número de tareas dentro del álgebra lineal requieren precisamente de resolver un sistema de ecuaciones lineales.
2. Este tema permite introducir a un nivel elemental el concepto de matrices, uno de los objetos de estudio del álgebra lineal y herramienta indispensable.
3. Las ecuaciones lineales tienen una interpretación geométrica muy sencilla en los espacios Euclideos de dimension dos, el plano, y dimensión tres, el espacio. Estas interpretaciones permiten intuir como es el comportamiento de sistemas de ecuaciones con mas de tres variables, donde una interpretación geométrica ya no es posible.
Un problema típico que aparece en matemática y en otras ciencias es el análisis y resolución de un sistema de ecuaciones lineales con incógnitas y éste está ıntimimamente ligado al estudio de una matriz rectangular de escalares definida por los coeficientes de las ecuaciones (Ya veremos los que es una matriz). Esta relación parece que ha sido observada desde el momento mismo en que aparecieron estos

problemas.
El primer análisis registrado de ecuaciones simultáneas lo encontramos en el libro chino Jiu zhang Suan-shu (Véase McTutor y Carlos Maza) escrito alrededor del año 200 antes de Cristo. En uno de los capítulos aparece un problema que hoy en día lo formularíamos como un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas de la manera siguiente:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

donde, x, y y z representan el precio de una medida (de la época) de tres clases de cereales. Los chinos vieron el problema esencial, colocaron los coeficientes de este sistema, representados por cañas de bambú de color, como un cuadrado sobre un tablero de contar, y manipulaban las filas del cuadrado según ciertas reglas establecidas. Su tablero de contar y sus reglas encontraron su camino hacia Japón y finalmente aparecieron en Europa, con las cañas de color sustituidas por números y el tablero reemplazado por tinta y papel. En Europa, esta técnica llegó a ser conocida como eliminacion Gaussiana, en honor del matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).
Empleamos esta técnica en el sistema presentado mas arriba. Podemos eliminar la incógnita x en las dos primeras ecuaciones sumando a la primera ecuación la tercera multiplicada por -3 y sumando a la segunda ecuación la tercera multiplicada por -2, obteniendo

$$\begin{cases} -4y - 8z = -39 \\ -y - 5z = -18 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Ahora eliminamos la incógnita y en la primer y tercer ecuación sumando a la primera la segunda multiplicada por -4 y a la tercera la segunda multiplicada por 2. El resultado de hacer esto es

$$\begin{cases} 12z = 33 \\ -y - 5z = -18 \\ x - 7z = -10 \end{cases}$$

Por supuesto que podemos seguir con este método (que a esta altura se ha vuelto sistemático) y eliminar la incógnita z en la segunda y tercera ecuación y así llegar a la solución del sistema (dejamos esto como ejercicio).
La primera observación que podemos hacer es que no es necesario escribir las incógnitas, basta desplegar los coeficientes en un arreglo rectangular de filas y columnas que dio origen a lo que llamaremos matriz, y la segunda es que para resolver el sistema, el objetivo es que en la columna correspondiente a determinada incógnita tengamos todos ceros salvo en una de sus filas, lo que equivale a decir que esa incógnita sólo aparece en una de las ecuaciones y en ninguna otra, de donde se obtiene su valor.
El primero en usar el término matriz fue el matemático inglés James Joseph Sylvester (1814 - 1897) en 1850, quien definió una matriz como un "oblong arrangement of terms" (arreglo cuadrilongo de términos). A su regreso a Inglaterra en 1851, luego de un período migratorio en América, Sylvester

establece contacto con Cayley, un joven abogado quien compartía su interés por la Matemática y que pronto se dedicaría exclusivamente a ella. Cayley entendió rápidamente la importancia del concepto de matriz y en el año 1853 publica una nota en donde aparece por vez primera la inversa de una matriz. Mas tarde, en 1858, publica su "Memoir on the theory of matrices", la cual contiene la primera definición abstracta de matriz y donde se muestra que los arreglos de coeficientes estudiados anteriormente para las formas cuadráticas y las transformaciones lineales son casos especiales de este concepto general.

Asimismo, Cayley desarrolla el álgebra matricial definiendo las operaciones básicas de suma, multiplicación y multiplicación por escalares, así como la inversa de una matriz invertible, junto con una construcción de la inversa de una matriz invertible en términos de su determinante (ya veremos estos conceptos) y demuestra que, en el caso de matrices , una matriz satisface su propia ecuación característica. Además, señala que tiene chequeado este resultado para matrices 3×3, indicando su demostración, pero afirma: "I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree" (No he creído necesario llevar a cabo el trabajo de una demostración formal del teorema en el caso general de una matriz de cualquier grado).

En 1870, el matemático francés Camille Jordan (1838 - 1922) publica su "Traité des substitutions et des équations algébriques", en donde estudia una forma canónica para sustituciones lineales sobre cuerpos finitos de orden primo. En este contexto aparece por vez primera lo que hoy conocemos como la forma canónica de Jordan.

Arthur Cayley es considerado como el fundador de la teoría de matrices, aunque históricamente fueron los matemáticos chinos los pioneros en esta materia y el término matriz es debido a Sylvester. Uno de los principales méritos de Cayley fue la introducción de las operaciones básicas de suma y multiplicación de matrices, aunque indicios de éstas ya aparecen en trabajos anteriores de Euler, Lagrange y Gauss. Cayley probó además que la multiplicación de matrices es asociativa e introduce las potencias de una matriz, así como las matrices simétricas y antisimétricas. Por tanto, Arthur Cayley merece ser considerado como el fundador del álgebra de matrices.

2. Matrices

El arreglo rectangular de filas y columnas de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales que mencionamos anteriormente es lo que comunmente denominamos matriz, aunque en rigor de verdad ese arreglo es la representación de una matriz. Damos primero la definición rigurosa de matriz y luego hacemos una importante observación.

2.1 Definición. Sea K un cuerpo y sean $m, n \in \mathsf{Z}^+$. Una matriz A de orden $m \times n$ es una función $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathsf{K}$. Para cada par ordenado (i, j) de enteros, el escalar $A(i, j)$ se denomina la entrada de la matriz A correspondiente al par ordenado (i, j).

2.2 Observación. Dispondremos las entradas de una matriz en un arreglo rectangular de filas y columnas y seguiremos llamando matriz a esta representación con la convención que el primer elemento del par corresponde a la fila y el segundo a la columna, así $A(i,j)$ es la entrada de la matriz A que en la representación se ubica en la i –ésima fila y la j –ésima columna. De ahora en adelante usaremos la notación $e_{ij}(A)$ en lugar de $A(i,j)$ y con $\mathsf{K}^{m\times n}$ denotaremos al conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas cuyas entradas pertenezcan a K. Finalmente, $\mathrm{f}_i(A)$ y $\mathrm{c}_j(A)$ indican la i –ésima fila y j –ésima columna de A respectivamente.

Volviendo a los sistemas de ecuaciones lineales, existe una variante de la eliminación Gaussiana, conocida como método de Gauss-Jordan. Aunque hay confusión con respecto al nombre, este método fue usado por Wilhelm Jordan (1842-1899), profesor de geodesia alemán, y no por Camille Jordan (1838-1922), un matemático francés. Las características que distinguen el método de Gauss-Jordan de la eliminación Gaussiana son los siguientes: En cada paso, la entrada (en la matriz de coeficientes) utilizada para anular los restantes en la columna correspondiente tiene que ser 1. Como ya dijimos, todos los términos por encima de ese 1, así como todos los que están por debajo deben ser anulados. Esto nos lleva a una clase especial de matrices que definimos a continuación.

2.3 Definición. Sea K un cuerpo y $m,n \in \mathsf{Z}^+$. Una matriz R se dice escalón reducida por filas si:

(1) Si R tiene filas nulas, éstas se ubican debajo de las filas no nulas.

(2) El primer elemento no nulo de cada fila no nula es 1.

(3) En la columna correspondiente al primer elemento no nulo de cada fila no nula, los elementos restantes son 0.

(4) Si R tiene r filas no nulas y los primeros elementos no nulos de las filas $1,2,\ldots,r$ están en las columnas $k_1,\ldots,k_r$ respectivamente, entonces $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

2.4 Observación. Si R cumple las condiciones (2) y (3) se dice que es reducida por filas simplemente.

Los siguientes son ejemplos de matrices escalón reducidas por filas

2.4 Ejemplo. La matriz en $\mathsf{K}^{m\times n}$ cuyas entradas son todas nulas se denomina matriz nula, la denotaremos con 0 y es escalón reducida por filas ya que no tiene filas no nulas.

2.5 Ejemplo. La matriz $I_n \in \mathsf{K}^{n\times n}$ dada por

$$e_{ij}(I_n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

se denomina matriz identidad y es claramente escalón reducida por filas.
Queremos ahora considerar operaciones sobre las filas de una matriz que se correspondan con las realizadas en los sistemas de ecuaciones para la eliminación de incógnitas. Esto da origen a las llamadas operaciones elementales de filas que definimos a continuación.

2.6 Definición. Sea K un cuerpo y $m,n \in \mathsf{Z}^+$. Una operación elemental de filas e sobre una matriz $A \in \mathsf{K}^{m\times n}$ es una función $e : \mathsf{K}^{m\times n} \to \mathsf{K}^{m\times n}$ de los tipos que se detallan a continuación:
(1) Multiplicación de la fila i de A por un escalar no nulo c.
(2) Reemplazar la fila i de A por la fila i mas un múltiplo escalar de la fila j de A donde $i \neq j$ y c es el múltiplo escalar.
(3) Intercambio de dos filas de A.
Las notaciones que usaremos para las mismas son $e = cF_i$, $e = F_i + cF_j$ y $e = F_{i,j}$ respectivamente.

2.7 Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

y sea $e = F_2 + 3F_1$, entonces

$$e(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

La principal razón por la que que nos restringimos al uso de estos tres tipos de operaciones elementales de fila, es que ellas permiten retornar a la matriz original mediante operaciones elementales del mismo tipo.

2.8 Teorema. Toda operación elemental de filas e tiene una operación elemental de filas inversa (respecto de la composición) y es del mismo tipo que e.
Demostración. Ejercicio.

2.9 Definición. Sea K un cuerpo, $m,n \in \mathsf{Z}^+$ y $A,B \in \mathsf{K}^{m\times n}$. Diremos que B es equivalente por filas a A si existe una sucesión finita $\{e_j\}_{j=1}^{k}$ de operaciones elementales de fila tales que $B = e_k \circ e_{k-1} \circ \cdots \circ e_2 \circ e_1(A)$. Si B es equivalente por filas a A lo denotaremos $B \sim A$.

Queda como ejercicio demostrar que toda matriz es equivalente por filas a ella misma, que si $B \sim A$ entonces $A \sim B$ y que si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$, esto es, la relación de equivalencia por filas es una relación de equivalencia.

2.10 Teorema. Cada matriz $m \times n$ sobre K es equivalente a una matriz escalón reducida por filas.
Demostración. Sea $A \in \mathsf{K}^{m \times n}$. Si $A = 0$ el resultado es inmediato. Supongamos $A \neq 0$ y asumamos que A tiene r filas no nulas ($r \leq m$ obviamente). Por medio de intercambios de filas llegamos a una matriz equivalente por filas a A que tiene las primeras r filas no nulas.
A continuación ubicamos el primer elemento no nulo de la primer fila, si ese elemento es 1 sumamos múltiplos adecuados de la fila 1 a las restantes filas no nulas de modo que los elementos correspondientes a esa columna en las filas siguientes sean cero. Si el elemento no es 1 se multiplica la fila por el inverso del mismo y así tenemos un 1 como primer elemento y se procede como en el paso anterior. Repitiendo el procedimiento para las filas no nulas restantes obtenemos una matriz reducida por filas equivalente por filas a A. Luego (si fuese necesario) por medio de intercambios de filas llegamos a una matriz escalón reducida por filas que es equivalente por filas a A.

Observación. Puede demostrarse que la matriz escalón reducida por filas equivalente por filas a una matriz dada es única.

2.11 Definición. Sea $A \in \mathsf{K}^{m \times n}$, el rango de filas de A, que denotamos $r_{\mathrm{f}}(A)$, es el número de filas no nulas de cualquier matriz reducida por filas equivalente por filas a A.

3. Operaciones con Matrices

3.1 Definición. Sea K un cuerpo, $m, n \in \mathsf{Z}^{+}$, $A, B \in \mathsf{K}^{m \times n}$ y $c \in \mathsf{K}$. La suma de A y B, que denotamos $A + B$ y la multiplicación de c por A, que denotamos cA están dadas por

$$e_{ij}(A + B) = e_{ij}(A) + e_{ij}(B)$$
$$e_{ij}(cA) = ce_{ij}(A)$$

Las propiedades básicas de estas operaciones (queda como ejercicio su demostración) son:
i) $(A + B) + C = A + (B + C)$ para todo $A, B, C \in \mathsf{K}^{m \times n}$
ii) $A + B = B + A$ para todo $A, B \in \mathsf{K}^{m \times n}$
iii) Existe una matriz en $\mathsf{K}^{m \times n}$ que denotamnos 0, tal que $A + 0 = A$ para todo $A \in \mathsf{K}^{m \times n}$
iv) Para cada $A \in \mathsf{K}^{m \times n}$ se cumple que $A + (-A) = 0$, donde $e_{ij}(-A) = -e_{ij}(A)$
v) $c(A + B) = cA + cB$ para todo $A, B \in \mathsf{K}^{m \times n}$ y para todo $c \in \mathsf{K}$
vi) $(c + d)A = cA + dA$ para todo $A \in \mathsf{K}^{m \times n}$ y para todo $c, d \in \mathsf{K}$
vii) $c(dA) = (cd)A$ para todo $A \in \mathsf{K}^{m \times n}$ y para todo $c, d \in \mathsf{K}$
viii) $1A = A$ para todo $A \in \mathsf{K}^{m \times n}$ y donde 1 es el neutro multiplicativo de K.

3.2 Ejemplo. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & \pi \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ en $\mathsf{R}^{2\times 3}$, entonces

$$\sqrt{3}A + B = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} + \sqrt{2} & 3\sqrt{3} - 1 & 5\sqrt{3} + \pi \\ -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} + 1 & 7 \end{bmatrix}$$

3.3 Definición. Sea K un cuerpo y sean $m, n, p \in \mathsf{Z}^+$. Dadas matrices $A \in \mathsf{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathsf{K}^{n\times p}$, la multiplicación de A y B es la matriz AB en $\mathsf{K}^{m\times p}$ dada por

$$e_{ij}(AB) = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}(A)e_{kj}(B)$$

♦ Es importante hacer la observación siguiente: para que la multiplicación de matrices esté definida, el número de columnas de la matriz de la izquierda debe coincidir con el número de filas de la matriz de la derecha. Con frecuencia escribiremos directamente la multiplicación (o producto) sin mencionar explícitamente la cantidad de columnas y de filas de los factores, dando por sobreentendido que la misma tiene sentido. Por otra parte, aún cuando los productos AB y BA estén definidos, en general $AB \neq BA$, esto es, la multiplicación de matrices no es conmutativa.

3.4 Ejemplo.
a) Si I es la matriz identidad $m \times m$ (ejemplo 2.5) y A es una matriz $m \times n$, entonces $IA = A$ y similarmente, si I es la matriz identidad $n \times n$, entonces $AI = I$.
b) Si 0 es la matriz nula $k \times m$, entonces $0A$ es la matriz nula $k \times n$ y análogamente, si 0 es la matriz nula $n \times k$, entonces $A0 = 0$ es la matriz nula $m \times k$.

3.5 Ejemplo. Sea A una matriz $m \times n$ y X la matriz $n \times 1$ dada por

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si $e_{i,j}(A) = a_{ij}$ la i –ésima fila de AX es $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$, de modo que si Y es la matriz $m \times 1$ dada por

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Entonces $AX = Y$ representa el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & y_m \end{cases}$$

De ahora en adelante usaremos la notación $AX = Y$ para denotar tanto a un sistema de ecuaciones lineales, como a la multiplicación de A y X que tiene a Y como resultado.
En el caso especial $AX = 0$, llamado sistema homogéneo, es claro que $X = 0$ es una solución del mismo. Se la conoce como solución trivial.

3.6 Teorema. Sea K un cuerpo y $m,n,p,q \in \mathsf{Z}^+$. Si $A \in \mathsf{K}^{m\times n}$, $B \in \mathsf{K}^{n\times p}$ y $C \in \mathsf{K}^{p\times q}$, entonces

$$(AB)C = A(BC)$$

Demostración. Claramente, $(AB)C$ y $A(BC)$ son matrices $m \times q$. Para comprobar que son iguales veamos que $e_{ij}((AB)C) = e_{ij}(A(BC))$:

$$\begin{aligned} e_{ij}((AB)C) &= \sum_{k=1}^{p} e_{ik}(AB)e_{kj}(C) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{r=1}^{n} e_{ir}(A)e_{rk}(B)\right)e_{kj}(C) \\ &= \sum_{r=1}^{n} e_{ir}(A)\left(\sum_{k=1}^{p} e_{rk}(B)e_{kj}(C)\right) = \sum_{r=1}^{n} e_{ir}(A)e_{rj}(BC) \\ &= e_{ij}(A(BC)) \end{aligned}$$

3.7 Teorema. Sean A, B y C matrices sobre K del orden adecuado y sea $c \in \mathsf{K}$, entonces

i) $A(B+C) = AB + AC$

ii) $(A+B)C = AC + BC$

iii) $(cA)B = c(AB) = A(cB)$

iv) $\mathrm{f}_i(AB) = \sum_k e_{ik}(A)\mathrm{f}_k(B) = \mathrm{f}_i(A)B$

v) $\mathrm{c}_i(AB) = \sum_k e_{ki}(B)\mathrm{c}_k(A) = A\mathrm{c}_i(B)$

Demostración. Ejercicio.

3.8 Definición. Una matriz $E \in \mathsf{K}^{m\times m}$ se dice que es una matriz elemental si se obtiene al aplicar una sola operación elemental de filas a la matriz identidad $m \times m$.

3.9 Teorema. Sea $A \in \mathsf{K}^{m\times n}$ y e una operación elemental de filas. Entonces $e(A) = e(I)A$ donde I es la matriz identidad $m \times m$.
Demostración. Sea $e = F_i + cF_j$ con $i \neq j$, entonces

$$\mathrm{f}_r(e(A)) = \begin{cases} \mathrm{f}_r(A) & \text{si } \ r \neq i \\ \mathrm{f}_i(A) + c\mathrm{f}_j(A) & \text{si } \ r = i \end{cases}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathrm{f}_r(e(I)A) &= \mathrm{f}_r(e(I))A \\ &= \begin{cases} \mathrm{f}_r(I)A & \text{si } \ r \neq i \\ \mathrm{f}_i(I)A + c\mathrm{f}_j(I)A & \text{si } \ r = i \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathrm{f}_r(IA) & \text{si } \ r \neq i \\ \mathrm{f}_i(IA) + c\mathrm{f}_j(IA) & \text{si } \ r = i \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathrm{f}_r(A) & \text{si } \ r \neq i \\ \mathrm{f}_i(A) + c\mathrm{f}_j(A) & \text{si } \ r = i \end{cases} \end{aligned}$$

La demostración para los otros dos tipos de operaciones elementales de fila quedan como ejercicio.

3.10 Corolario. Sean $A, B \in \mathsf{K}^{m\times n}$. Entonces B es equivalente por filas a A si, y sólo si $B = PA$, donde P es un producto de matrices elementales.
Demostración. Si B es equivalente por filas a A existe una sucesión finita $\{e_j\}_{j=1}^{k}$ de operaciones elementales de fila, tal que $B = e_k \circ e_{k-1} \circ \cdots \circ e_2 \circ e_1(A)$. Aplicando 3.9 tenemos $B = e_k(I)e_{k-1}(I)\cdots e_2(I)e_1(I)A = PA$, donde $P = e_k(I)e_{k-1}(I)\cdots e_2(I)e_1(I)$. El resultado recíproco es inmediato.

Como otra aplicación del teorema 3.9 veamos que si A y B son matrices equivalentes por filas, entonces los sistemas de ecuaciones que tienen a A y a B como matrices de coeficientes tienen exactamente las mismas soluciones. En este caso diremos que los sistemas son equivalentes, esto es, sistemas equivalentes tienen exactamente las mismas soluciones.

3.11 Teorema. Si A y B son matrices equivalentes por filas, entonces los sistemas de ecuaciones lineales que tienen a A y a B como matrices de coeficientes tienen exactamente las mismas soluciones.
Demostración. Si e es una operación elemental de filas, basta ver que $AX = Y$ y $e(A)X = e(Y)$ tienen las mismas soluciones. Sea S_1 el conjunto solución de $AX = Y$ y sea S_2 el conjunto solución de

$e(A)X = e(Y)$. Queremos ver que $\mathsf{S}_1 = \mathsf{S}_2$.
i) $\mathsf{S}_1 \subset \mathsf{S}_2$: $X \in \mathsf{S}_1 \Rightarrow AX = Y$, entonces $e(A)X = e(AX) = e(Y)$, esto es, $X \in \mathsf{S}_2$.
ii) $\mathsf{S}_2 \subset \mathsf{S}_1$: $X \in \mathsf{S}_2 \Rightarrow e(A)X = e(Y)$, entonces $AX = e^{-1}(e(A))X = e^{-1}(e(A)X) = e^{-1}(e(Y)) = Y$, de modo que $X \in \mathsf{S}_1$.

Volvemos ahora a los sistemas de ecuaciones lineales ya que contamos con la notación $AX = Y$ para los mismos, lo que nos permitirá demostrar los resultados con mayor simpleza y efectividad.
Dado el sistema $AX = Y$, si adjuntamos a la matriz $m \times n$ A la columna Y obtenemos una matriz $m \times (n+1)$ que llamamos matriz aumentada o matriz ampliada, y la denotamos $A|Y$.

3.12 Teorema (Teorema de Rouché – Frobenius). Sea $A \in \mathsf{K}^{m\times n}$. El sistema de ecuaciones lineales $AX = Y$ tiene solución, si y sólo si $r_{\mathrm{f}}(A) = r_{\mathrm{f}}(A|Y)$.
Demostración. Sea R la matriz escalón reducida por filas equivalente por filas a A. Por el teorema 3.11 los sistemas $AX = Y$ y $RX = Z$ tienen las mismas soluciones. Si $r_{\mathrm{f}}(A) = r \leq m$ tenemos $\mathrm{f}_{r+1}(R) = \cdots = \mathrm{f}_m(R) = 0$, de modo que el sistema tiene solución si y sólo si $\mathrm{f}_{r+1}(Z) = \cdots = \mathrm{f}_m(Z) = 0$, esto es, si y sólo si $r_{\mathrm{f}}(A) = r_{\mathrm{f}}(A|Y)$ ya que $A|Y$ y $R|Z$ son equivalentes por filas.

Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX = Y$ con $r_{\mathrm{f}}(A) = r$. Considerando el sistema equivalente $RX = Z$, donde R es una matriz reducida por filas equivalente por filas a A, sean $k_1, \ldots, k_r$ las columnas correspondientes a los primeros elementos no nulos de las filas no nulas de R, de modo que las incógnitas correspondientes $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$, denominadas incógnitas principales, quedan determinadas por las restantes, que reciben el nombre de incógnitas no principales.
En el caso de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo $AX = 0$ con $A \in \mathsf{K}^{m\times n}$ y $m < n$ (esto es, más incógnitas que ecuaciones), como $r_{\mathrm{f}}(A) = r \leq m$, tenemos $n - r > 0$, lo que indica que hay incógnitas no principales, por lo que un sistema de este tipo, siempre admite solución distinta de la trivial.

A continuación presentamos algunos conceptos extras sobre matrices. Las demostraciones de las afirmaciones y propiedades quedan a cargo del lector.

3.13 Definición. Sea K un cuerpo y $A \in \mathsf{K}^{m\times n}$. La transpuesta de A que denotamos A^t es la matriz $n \times m$ dada por $e_{ij}(A^t) = e_{ji}(A)$.
Sean $A, B \in \mathsf{K}^{m\times n}$, $C \in \mathsf{K}^{n\times p}$ y $c \in \mathsf{K}$, entonces
(a) $(A^t)^t = A$
(b) $(A+B)^t = A^t + B^t$
(c) $(cA)^t = cA^t$
(d) $(AC)^t = C^tA^t$

3.14 Definición. Sea $A \in K^{n\times n}$. Diremos que A es una matriz simétrica si $A^t = A$.

Para la simetría de matrices tenemos las propiedades siguientes

(a) Si A y B son matrices simétricas y c es un escalar, entonces $cA + B$ es una matriz simétrica.
(b) Sea $A \in K^{m\times n}$, entonces AA^t y A^tA son matrices simétricas.
(c) Sean A y B matrices simétricas $n \times n$, entonces AB es simétrica si y sólo si $AB = BA$.

3.15 Definición. Sea $A \in K^{n\times n}$. La traza de A que denotamos $\mathrm{Tr}(A)$, es el elemento de K dado por

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} e_{jj}(A)$$

Esto es, la traza de una matriz, es la suma de las entradas de la diagonal principal.

Las propiedades de la traza son las siguientes

(a) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$
(b) $\mathrm{Tr}(cA) = c\mathrm{Tr}(A)$ (c un escalar)
(c) Si $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$, entonces $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
(d) Si $A \in K^{n\times n}$, entonces $\mathrm{Tr}(A^t) = \mathrm{Tr}(A)$

4. Matrices Inversibles

Como la matriz identidad I es un neutro multiplicativo (tanto a derecha como a izquierda) para la operación multiplicación de matrices, la pregunta surge casi naturalmente: dada una matriz $A \in K^{n\times n}$, ¿Existe una matriz $B \in K^{n\times n}$ tal que $AB = I$ o una matriz $C \in K^{n\times n}$ tal que $CA = I$? La respuesta es no, aunque hay una clase de matrices para las cuales esto ocurre, son las que llamaremos matrices inversibles.

4.1 Definición. Sea $A \in K^{n\times n}$. Si existe una matriz $B \in K^{n\times n}$ tal que $AB = I$, diremos que B es una inversa a derecha de A. Similarmente, si existe una matriz $C \in K^{n\times n}$ tal que $CA = I$, diremos que C es una inversa a izquierda de A. Si existe una matriz $M \in K^{n\times n}$ tal que $AM = MA = I$, diremos que M es una inversa bilátera (o a ambos lados) de A y en este caso se dice que A es inversible. Con $GL(n, K)$

denotaremos al conjunto de todas las matrices $n \times n$ sobre K inversibles, esto es, $GL(n, \mathsf{K}) = \{A \in \mathsf{K}^{n\times n} \mid A \text{ es inversible}\}$.

4.2 Teorema. Sea $A \in \mathsf{K}^{n\times n}$. Si existen matrices $B, C \in \mathsf{K}^{n\times n}$ tales que $AB = I$ y $CA = I$, entonces $B = C$, esto es, si A es inversible su inversa es única.
Demostración. $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$.

Si A es inversible denotaremos con A^{-1} a la inversa de A.

4.3 Teorema. Sean $A, B \in \mathsf{K}^{n\times n}$.
i) Si $A \in GL(n, \mathsf{K})$, entonces $A^{-1} \in GL(n, \mathsf{K})$ y $(A^{-1})^{-1} = A$.
ii) Si $A, B \in GL(n, \mathsf{K})$, entonces $AB \in GL(n, \mathsf{K})$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Demostración.
i) Ejercicio.
ii)

$$I = AA^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1})$$

y similarmente

$$I = B^{-1}B = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}A^{-1})(AB)$$

de modo que $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB.

4.4 Teorema. Las matrices elementales son matrices inversibles.
Demostración. Sea e una operación elemental de filas e I la matriz identidad . Queremos ver que $e(I)$ es inversible. Sea e^{-1} la operación elemental de filas inversa de e, entonces, por el teorema 3.9, $I = e^{-1}(e(I)) = e^{-1}(I)e(I)$ y $I = e(e^{-1}(I)) = e(I)e^{-1}(I)$, esto es, $e(I)$ es inversible y $e(I)^{-1} = e^{-1}(I)$.

4.5 Observación. Una conclusión extra que se deriva del teorema 4.4, es que además del resultado que una matriz elemental es inversible, su inversa es también una matriz elemental. Este hecho tiene importantes consecuencias.

4.6 Teorema. Sea $A \in \mathsf{K}^{n\times n}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes.
(a) A es inversible.
(b) A es equivalente por filas a la matriz identidad.
(c) A es un producto de matrices elementales.
Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) : Sea R la matriz escalón reducida por filas equivalente por filas a A, entonces, por el corolario 3.10, $R = PA$ con P un producto de matrices elementales (y por lo tanto inversible), de modo que R es inversible por ser producto de matrices inversibles, por lo tanto no tiene

filas nulas, así R es la matriz identidad.
(b) $\Rightarrow$ (c) : Nuevamente, por el corolario 3.10, $A = PI = P$ con P un producto de matrices elementales.
(c) $\Rightarrow$ (a) : Inmediato.

4.7 Observación. Si A es inversible, por la afirmación (b) del teorema 4.6, existe una sucesión finita de operaciones elementales de fila $\{e_j\}_{j=1}^{k}$ para las cuales

$$\begin{aligned} I &= e_k \circ e_{k-1} \circ \cdots \circ e_1(A) \\ &= e_k \circ e_{k-1} \circ \cdots \circ e_1(I)A \\ &= PA \end{aligned}$$

donde $P = e_k \circ e_{k-1} \circ \cdots \circ e_1(I)$, entonces P es la matriz inversa de A, es decir, aplicando la misma sucesión finita de operaciones elementales de fila utilizada para obtener I a partir de A, pero comenzando con la matriz identidad, se tiene como resultado A^{-1}.

4.8 Teorema. Sea $A \in \mathsf{K}^{n\times n}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes.
(a) A es inversible.
(b) El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene únicamente la solución trivial.
(c) El sistema no homogéneo $AX = H$ tiene solución única para cada $H \in \mathsf{K}^{n\times 1}$.
Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) : Si $X \neq 0$ es solución de $AX = 0$, entonces $X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}0 = 0$, contradiciendo la suposición $X \neq 0$, por lo tanto la única solución de $AX = 0$ es la trivial.
(b) $\Rightarrow$ (c) : Dado $AX = H$, sean X_1 y X_2 soluciones del mismo, entonces $AX_1 = AX_2$ o equivalentemente, $A(X_1 - X_2) = 0$, esto es, $X_1 - X_2$ es solución del sistema homogéneo $AX = 0$, y por la unicidad de la solución $X_1 - X_2 = 0$, de donde $X_1 = X_2$.
(c) $\Rightarrow$ (a) : Para $i = 1, 2, \ldots, n$, sea X_i la solución (única) del sistema $AX = \mathrm{c}_i(I)$ y sea $B \in \mathsf{K}^{n\times n}$ tal que $\mathrm{c}_i(B) = X_i$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces $\mathrm{c}_i(AB) = A\mathrm{c}_i(B) = AX_i = \mathrm{c}_i(I)$ para $i = 1, \ldots, n$, es decir, $AB = I$, de modo que $B = A^{-1}$ y A es inversible.

Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales ($\mathsf{K} = \mathsf{R}$).

(i) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(ii) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}$$

(iii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

¿Cambia algo si $\mathsf{K} = \mathsf{Q}$ o si $\mathsf{K} = \mathsf{C}$?

2. Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = y_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = y_2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases}$$

Determine los valores de y_1, y_2 e y_3 en R para los cuales el sistema admite solución.

3. Resuelva de acuerdo a los valores de a y b en R.

(i) $\begin{cases} (5-a)x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (2-a)x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + (5-a)x_3 = b \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

4. Determine todos los $k \in \mathsf{R}$ para que cada uno de los siguientes sistemas tenga solución única.

(i) $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} x_1 + (k-1)x_2 = 0 \\ x_1 + (3k-4)x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + (k-1)x_2 + \frac{1}{2}kx_3 = 0 \end{cases}$

5. Determine los números reales k para los cuales el sistema

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \\ k^3x_1 + x_2 + k^3x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 + k^2x_2 + kx_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$$

tiene alguna solución no trivial y resuelva para esos valores de k.

6. Determine los valores de $k \in \mathsf{R}$ en cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales para que los mismos tengan solución única, no tengan solución o tengan infitas soluciones.

(i) $\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ kx_1 + (k+4)x_2 + 3kx_3 = -2 \\ -kx_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (k+2)x_2 + (3k+1)x_3 = -1 \end{cases}$

7.

(i) Resuelva el siguiente sistema en $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (1-i)x_1 - ix_2 = 0 \\ 2x_1 + (1-i)x_2 = 0 \end{cases}$$

(ii) Resuelva en $\mathbb{C}$ el sistema $AX = 0$, donde

$$A = \begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix}$$

8. Resuelva los siguientes sistemas:

(i) $\begin{cases} x_1 + [2]x_2 + [2]x_3 + x_4 = [4] \\ [2]x_1 + [3]x_3 + x_4 = [2] \\ [4]x_2 + [2]x_3 + [4]x_4 = [1] \end{cases}$ en $\mathbb{Z}_5$

(ii) $\begin{cases} x + z = [2] \\ [2]y + z = [6] \\ x + [3]y = [0] \end{cases}$ en $\mathbb{Z}_7$

(iii) $\begin{cases} x + y + z = [1] \\ [2]x + y + [2]z = [0] \\ x + z = [2] \end{cases}$ en $\mathbb{Z}_3$

9. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales a coeficientes reales cuya solución general sea

$$\mathsf{S} = \{(1+\lambda, 1+2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

10. Obtenga condiciones necesarias y suficientes sobre A y B en $\mathbb{K}^{n\times n}$ para que

(a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

11. Demuestre que para A y B en $\mathbb{K}^{n\times n}$, no necesariamente vale $(AB)^2 = A^2B^2$.

12. Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es triangular superior si $e_{ij}(A) = 0$ para $i > j$ y es diagonal si $e_{ij}(A) = 0$ cuando $i \neq j$. Demuestre lo siguiente:

(i) Si A y B son matrices triangulares superiores, entonces AB es una matriz triangular superior.

(ii) Si A y B son matrices diagonales, entonces AB es una matriz diagonal.

(iii) Si $A \in \mathsf{K}^{n\times n}$ y $e_{ij}(A) = 0$ para $i \geq j$, entonces $A^n = 0$.

13. Sea $A \in \mathsf{K}^{n\times n}$. Demuestre que son equivalentes las afirmaciones siguientes:

(i) $A = 0$

(ii) $AA^t = 0$

(iii) $\mathrm{Tr}(AA^t) = 0$

14. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

(i) Halle b y c en R tales que $A^2 + bA + cI = 0$.

(ii) Calcule A^n para todo $n \in \mathsf{N}$.

15. Sean $A \in \mathsf{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathsf{K}^{n\times p}$. Demuestre las fórmulas siguientes:

(i) $\mathrm{f}_i(AB) = \mathrm{f}_i(A)B$ para $i = 1,2,\ldots,m$.

(ii) $\mathrm{f}_i(AB) = \sum_{j=1}^{n} e_{i,j}(A)\mathrm{f}_j(B)$ para $i = 1,2,\ldots,m$.

(iii) $\mathrm{c}_i(AB) = A\mathrm{c}_i(B)$ para $i = 1,2,\ldots,p$.

(iv) $\mathrm{c}_i(AB) = \sum_{j=1}^{n} e_{j,i}(A)\mathrm{c}_j(A)$ para $i = 1,2,\ldots,p$.

16. Sean las matrices $A \in \mathsf{R}^{3\times n}$ y $B \in \mathsf{R}^{2\times p}$ tales que $\mathrm{f}_1(B) = 3\mathrm{f}_1(A) - \mathrm{f}_2(A) + \mathrm{f}_3(A)$ y $\mathrm{f}_2(B) = \mathrm{f}_2(A) + 4\mathrm{f}_3(A)$. Determine una matriz C tal que $CA = B$.

17. Calcule el producto AB en los casos siguientes:

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ en R.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i & 4 \\ 0 & 1-2i & i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ en C.

(iii) $A = \begin{bmatrix} [2] & [3] \\ [2] & [4] \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} [2] & [2] & [3] \\ [1] & [4] & [1] \end{bmatrix}$ en Z_5.

18. Calcule (si existe) la inversa de la matriz A en los casos siguientes. Escriba las que lo sean como producto de matrices elementales.

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ en Q.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ en R.

(iii) $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}$.

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1-i & 1-2i & 1-3i \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & i & 2+i \end{bmatrix}$ en $\mathbb{C}$.

(v) $A = \begin{bmatrix} [1] & [1] & [4] \\ [2] & [3] & [5] \\ [3] & [1] & [6] \end{bmatrix}$ en $\mathbb{Z}_7$.

(vi) $A = \begin{bmatrix} [1] & [1] & [4] \\ [2] & [3] & [5] \\ [3] & [1] & [6] \end{bmatrix}$ en $\mathbb{Z}_{11}$.

19. Calcule $(ABC)^{-1}$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

20. Sean A y B matrices tales que $(A+3B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ y $2A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Calcule las matrices A y B.

21. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Halle (si es posible), la matriz $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ en los casos siguientes:

(i) $AX + B = I + CX$

(ii) $(AB + C)X = C + 2X$

(iii) $AX + I = 3X - BC$

(iv) $(A - B)X = I + C + XC$