{Limite}

Definicion. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y (a) un punto de acumulación de dom(F). Diremos que el punto (b)$\in \mathbb{R}^m$ es el limite de F en (a) , que denotamos $\lim_{x\to a} F(x) = b$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 <\|$ x − a $\| < \delta$ y $x \in$ dom(F) implica que$\|$ F(x) − b $\|< \varepsilon$.

Teorema. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y (a) un punto de acumulación de dom(F). Si F=(F_1 ,...,F_m) y b=(b_1 ,...,b_m), entonces $\lim_{x\to a} F(x) = b$ si y solo si $\lim_{x\to a} F_i(x) = b_i$ para i= 1,2,...,m .

{Continuidad}

Definicion. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y (a) $\in$ dom(F). Diremos que f es continua en a si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|$ x − a $\| < \delta$ y $x \in$ dom(F) si y solo si $\|$ F(x) − $F(a)$ $\|< \varepsilon$.

{$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ / $\forall\ x \in$ dom(F) donde $\|$ x − a $\| < \delta \Longrightarrow \|$ F(x) − $F(a)$ $\|< \varepsilon$}

Observacion. Si (a) es un punto de acumulación de dom(F) entonces F es continua en a si $\lim_{x\to a} F(x) = F(a$

Observacion. La definicion de continuidad en terminos de entornos equivale a que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que F(B_δ(a)$\cap$ $dom(F)$) $\subset B_\varepsilon$(F(a)).

Si a $\in$ dom(F) no es punto de acumulacion de dom(F) existe $\delta > 0$ tal que B_δ(a)={a}, por lo tanto F(B_δ(a)$\cap$ $dom(F)$)=F({a})={F(a)} $\subset$ $B_\varepsilon(F(a))$para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto F es continua en a.

{Diferenciabilidad}

Definicion. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y x ∈ dom(F). Diremos que F es diferenciable en x si existe $r > 0$ tal que B_r(x) ⊂ dom(F) y existen una aplicaion lineal L_x: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y una función Y_x: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tales que para h≠ 0 con x+h ∈ B_r(x)

F(x+h) = F(x) + L_x(h) +φ_x(h) con $\lim_{h\to 0} \frac{\|F(x+h)-F(a)-L_x(\mathrm{h})\|}{\|h\|} = 0$

Teorema. La transformacion lineal de la definicion es unica

Observacion. Si F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en x ∈ dom(F), la aplicación lineal L_x: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ asociada a f en el punto x se denomina diferencial (o derivada) de f en x y lo denotamos$(dF)_x$

Con Ta($\mathbb{R}^n$) denotaremos al espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ con origen en el punto a ∈ $\mathbb{R}^n$.

Definicion. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, x ∈ dom(F) y V ∈ $T_x(\mathbb{R}^n)$. La derivada de F en el punto x respect del vector V, que denotaremos $(D_V\mathrm{F})_{(X)}$ o $\frac{dF}{dV}$(x), esta dada por $(D_V\mathrm{F})_{(X)}$= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(x+tV)-F(x)]

Observacion. Si $\|V\|$=1, se denomina D_VF derivada direccional de F en la direccion dada por el vector V en el punto.

Propiedades.

1. D_V(F+G) = D_VF +D_VG

Demostracion.

D_V(F+G) = D_VF +D_VG

= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [(F+G)(x+tV)- (F+G)(x)]= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(x+tV)+ G(x+tV) - F(x)-G(x)]=

=$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(x+tV)- F(x)] + $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [G(x+tV)- G(x)] = $(D_V\mathrm{F})_{(X)}$ + $(D_V\mathrm{G})_{(X)}$

Propiedades.

2. $D_{V_1+\ V_2}$F = DV_1F + DV_2F

Demostracion.

$D_{V_1+\ V_2}$F = DV_1F + DV_2F

= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(x+t(V_1+ V_2))- F(x)]= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(x+tV_1+ tV_2)- F(x)]= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(x+tV_1+ tV_2) + F(x+ t V_1) - F(x+ t V_1) -F(x)]=

*x + t V_1= a(t) * $\lim_{t\to 0} a(t) = x$

= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(a+ tV_2)- F(a)] + $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(x+ tV_1)- F(x)] =D_{V2}F(a) + D_{V1}F(x) = $(D_{V2}\mathrm{F})_x$ + $(D_{V1}\mathrm{F})_x$

3. $D_V(F\cdot G) = (D_V F)$ ·G + F ·$(D_V G)$

Demostracion.

$D_V(F\cdot G) = (D_V F)$ ·G + F ·$(D_V G)$

= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [(F ·G)(x+tV)- (F ·G)(x)]= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(x+tV) · G(x+tV) - F(x) ·G(x)]=

$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(x+tV) · G(x+tV) - F(x) ·G(x)- F(x) · G(x+tV)+ F(x) · G(x+tV]=

$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [(F(x+tV) - F(x)) · G(x+tV)] $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}$ [F(x) · (G(x+tV- G(x))]= $(D_V F)_{(x)}$ · $\mathrm{G}_{(x)}$ + $\mathrm{F}_{(x)}$ · $(D_V G)_{(x)}$

Propiedades.

4. $(D_V(F \times G) = (D_V F) \times G + F \times (D_V G)$

Demostracion.

$D_V(F \times G) = (D_V F) \times G + F \times (D_V G)$

$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [(F \times G)(x+tV) - (F \times G)(x)] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [F(x+tV) \times G(x+tV) - F(x) \times G(x)] =$

$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [F(x+tV) \times G(x+tV) - F(x) \times G(x) - F(x) \times G(x+tV) + F(x) \times G(x+tV)] =$

$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [(F(x+tV) - F(x)) \times G(x+tV)] \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [F(x) \times (G(x+tV - G(x))] = (D_V F)_{(x)} \times G_{(x)} + F_{(x)} \times (D_V G)_{(x)}$

5. $D_V(fF) = (D_V f)\, F + f\,(D_V F)$

Demostracion.

$D_V(fF) = (D_V f)\, F + f\,(D_V F)$

$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [(fF)(x+tV) - (fF)(x)] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(x+tV) \cdot F(x+tV) - f(x) \cdot F(x)] =$

$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(x+tV) \cdot F(x+tV) - f(x) \cdot F(x) - f(x) \cdot F(x+tV) + f(x) \cdot F(x+tV)] =$

$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [(f(x+tV) - f(x)) \cdot F(x+tV)] \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(x) \cdot (F(x+tV - F(x))] = (D_V f)_{(x)} \cdot F_{(x)} + f_{(x)} \cdot (D_V F)_{(x)}$

6. $D_{Vf} F = f\, D_V F$

Demostracion.

$D_{Vf} F = f\, D_V F$

$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [(F)(x+tfV) - (F)(x)] = \{ * s=tf \; * t=s/f \} = \lim_{s \to 0} \frac{1/s}{f} [(F)(x+sV) - (F)(x)] = \lim_{s \to 0} \frac{f}{s} [(F)(x+sV) - (F)(x)] =$

$= f \cdot \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} [(F)(x+sV) - (F)(x)] = f(x) \cdot (D_V F)\,(x)$

Propiedades.

7. $D_V(\frac{f}{g}) = \frac{1}{g^2(x)}[(D_V\mathrm{f})_{(x)}\mathrm{g}(\mathrm{x}) - (D_V\mathrm{g})_{(x)}f(x)]$

Demostracion.

$D_V(\frac{f}{g}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[\frac{f(x+tV)}{g(x+tV)} - \frac{f(x)}{g(x)}]$

$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[\frac{f(x+tV)}{g(x+tV)} - \frac{f(x)}{g(x)}] = \lim_{t\to 0}\,[\frac{f(x+tV)g(x)-f(x)g(x+tV)}{tg(x+tV)g(x)}] = \lim_{t\to 0}\,[\frac{f(x+tV)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+tV}{tg(x+tV)g(x)}] =$

$= \lim_{t\to 0}\frac{g(x)[f(x+tV)-f(x)]}{tg(x+tV)g(x)} - \frac{f(x)[g(x)+g(x+tV)}{tg(x+tV)g(x)} = \lim_{t\to 0}\,[\frac{1}{g(x+tV)g(x)}\cdot\frac{f(x+tV)-f(x)]}{t}] - \lim_{t\to 0}\,[\frac{f(x)}{g(x+tV)g(x)}\cdot\frac{g(x+tV)-g(x)]}{t}]$

$= \frac{1}{g(x)}(D_V\mathrm{f})_{(x)} - \frac{f(x)}{g^2(x)}(D_V\mathrm{g})_{(x)} = \frac{1}{g^2(x)}[(D_V\mathrm{f})_{(x)}\mathrm{g}(\mathrm{x}) - (D_V\mathrm{g})_{(x)}f(x)]$

Teorema. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, x ∈ dom(F) y V ∈ $T_x(\mathbb{R}^n)$, entonces.

$(D_V\mathrm{F})_{(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[\mathrm{F(x+tV)- F(x)}] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[\mathrm{F(x)}+(\mathrm{dF})_x(\mathrm{tV})+\varphi_x(\mathrm{tV}) - \mathrm{F(x)}]$

$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[(\mathrm{dF})_x(\mathrm{tV})+\varphi_x(\mathrm{tV})] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[\mathrm{t}(\mathrm{dF})_x(\mathrm{V})+\varphi_x(\mathrm{tV})] = \lim_{t\to 0}\,[(\mathrm{dF})_x(\mathrm{tV})+\frac{1}{t}\varphi_x(\mathrm{tV})] = (dF)_{(x)}(V)$

{Derivada Parcial}

Definicion. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, x ∈ dom(F) y $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica de $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ entonces

$(D_{ei}f)_{(x)}$= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x+tei)-f(x)]$= $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x_1, x_2, \dots, x_i t, x_n, \dots)-f(x_1, \dots, x_n)]$

Esta ultima expression es la derivada de la function de la variables x_i, quedando fijas las variables restantes. Se denomina a esta derivada, derivada parcial de f respecto de la variable x, en el punto x y las notaciones usuales son $\frac{\partial f}{\partial x}$ (x) , $(\partial if)_{(x)}$, $(D_{xi}f)_{(x)}$, $f_{xi\,(x)}$.

{Matriz Jacobiana} *$\bar{e}$ reemplazar por $\tilde{e}$*

Definicion. Sea $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sean $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $B' = \{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ las bases canonicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, entonces: $f = f_1\overline{e_1}, f_2\overline{e_2}, \dots, f_m\,\overline{e_m}$.

Por lo tanto, $(df)_x(ei) = (D_{ei})_{\,(x)}$= $(D_{ei}\ \sum_{j=1}^m f_j\tilde{e}_j\,)_{(x)} = \sum_{j=1}^m (D_{ei}(f_j\tilde{e}_j))_{(x)} = \sum_{j=1}^m [(D_{ei}f_j)_{(x)}\tilde{e}_j + (f_j)_{(x)}(D_{ei}\tilde{e}_j)_{(x)}] =$

= $\sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\,\tilde{e}_j$, por lo tanto los valores de $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ son las entradas de la matriz de la aplicación lineal $(df)_x$ respecto de las bases canonicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Esta matriz recibe el nombre de matriz jacobiana de f y la denotamos JF, esto es, e_{ij}(JF) $= \frac{df_j}{dx_i}$

{Regla de la cadena}

Teorema. Sean F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y G:$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diferenciables y tales que im(f) ∩ $dom(f) \neq \emptyset$. Si x ∈ dom(F), entonces G ∘ F es $diferenciable$ en x y d(G ∘ F)$\,_{(x)}$ = $(dG)_{f(x)} \circ (dF)_{(x)}$

Demostracion.

Si $h \neq 0$; (G ∘ F)(x+h)=G(F(x)+h)=G(F(x)+h)= G(F(x) + $(df)_x$(h) + φ_x(h) . Sea F(x)= Y, y $(df)_x$(h) + φ_x(h) = K , entonces (G ∘ F)(x+h)=G(Y+K)=G(Y)+ $(dG)_y$(K) + G_y(K)

= G(F(x))+ $(dG)_{f(x)}((df)_x$(h) + φ_x(h))+$G_{f(x)}((df)_x$(h) + $(dG)_{f(x)}(\varphi_x$(h))+ $G_{f(x)}((df)_x$(h) + φ_x(h))

=(G ∘ F)$\,_{(x)}$+ $(dG)_{f(x)}((df)_x$(h))+$(dG)_{f(x)}(\varphi_x$(h)+$G_{f(x)}((df)_x$(h) + φ_x(h))

= (G ∘ F)$\,_{(x)}$+ $(dG)_{f(x)} \circ (df)_x$(h) +$\lambda_x(h)$

(Luego d(G ∘ F)$\,_x$= $(dG)_{f(x)} \circ (df)_x$

Observacion. J(G ∘ F)=(JG(∘ F)(JF)

{Vector Gradiente}

Definicion. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, x $\in$ dom(F) y $V_G T_x(\mathbb{R}^n), si\ V = \{v_1 e_1, \dots, v_n e_n\}$

$(\mathrm{D}_v f)\ _x = (df)_x(V) = (df)_x \sum_{i=1}^n v_i e_i = \sum_{i=1}^n v_i\ (df)_x(e_i) = \sum_{i=1}^n v_i\ (\mathrm{D}_{e_i} f)\ _{(x)} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x})$

Esta expression puede verse como el product punto entre los vectores$(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}),\dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{x}))$ y V=$(v_1, \dots, v_n)$. *Este vector se denomina vector gradiente de F en el punto x y lo denotamos* $(\nabla f)_{(x)}$

Entonces: $(\mathrm{D}_v f)\ _x = (df)_x(V) = (\nabla f)_{(x)} \cdot V$

Teorema. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase C^n *entonces f es diferenciable*

Deemostracion. Sea x $\in$ dom(F) y h $\neq$ 0. tal que x+h $\in$ dom(F). Queremos ver que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - (\nabla f)_{(x)} \cdot h}{\|h\|} = 0$$

Sea g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $g(t) = f(x+th)$, *entonces* $f(x+h) - f(x) = g(1) - g(0)$, *lo cual equivale a* $\int_0^1 g'(t)dt = \int_0^1 (\nabla f)(x+th) \cdot h\, \mathrm{dt}$, por lo tanto $f(x+h) - f(x) - (\nabla f)_{(x)} \cdot h = \int_0^1 (\nabla f)(x+th) \cdot h\, dt\ - \int_0^1 (\nabla f)_{(x)} \cdot h\, dt = \int_0^1 [(\nabla f)(x+th) - (\nabla f)_{(x)}] \cdot h\, dt$

luego $0 \leq \frac{|f(x+th) - f(x) - (\nabla f)_{(x)} \cdot h|}{\|h\|} = \frac{1}{\|h\|} \left| \int_0^1 [(\nabla f)(x+th) - (\nabla f)_{(x)}] \cdot h\, dt \right| \leq \frac{1}{\|h\|} \int_0^1 \left| [(\nabla f)(x+th) - (\nabla f)_{(x)}] \cdot h \right| dt$

$\leq \frac{1}{\|h\|} \int_0^1 \left\| [(\nabla f)(x+th) - (\nabla f)_{(x)}] \right\| \|h\|\, dt = \int_1^1 \left\| [(\nabla f)(x+th) - (\nabla f)_{(x)}] \right\| dt \longrightarrow 0$

cuando $h \to 0$ *puesto que la funcion* h $\to \left\| [(\nabla f)(x+th) - (\nabla f)_{(x)}] \right\|$ es continua por hipotesis

{Funcion Inversa}

Teorema. Sea F :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ $y\ a \in$ dom(F) tal que$(df)_a$ $es\ biyectiva. Entonces\ existe\ un\ r <$ $0\ tal\ que\ F{:}\, B_r$(a) → F(B_r(a)) es biyectiva con F^{-1} F(B_r(a)) = B_r(a) de clase C^∞ y $JF^{-1}(x) = [(JF)(F^{-1}(x)]^{-1}$

Ademas la function $A_{f(a)}(x) = a + (dF)^{-1}(x - F(a))$ $aproxima\ a\ F^{-1}\ en\ el\ entorno\ F(B_r(a))$

Se denomina a $A_{f(a)}$ function afin de F^{-1} .

Existe un r> $0\ tal\ que\ F{:}\, B_r$(a) → F(B_r(a)) es biyectiva con B_r(a) $\subset dom(F), ademas\ (d\, F^{-1})_y$= (dF)$^{-1}{}_{F^{-1}(y)}$

{Funcion Implicita}

Teorema. Sea F :$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ $y\ (a,b) \in$ dom(F). Para cada $(x,y) \in$ dom(F) sean las funciones $F_x{:}\, \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ y $F^y{:}\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dadas por F_x(y) = F(x, y) y $F^y(x) = F(x,y)$. $Si\ (dF_a)_b$es biyectiva, entonces existe r>0 y una funcion h: B_r(a) $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ tal que h(a) = b, F(x, h(x)) y (Jh)(x) = $-\left[(JF_x)(h(x))\right]^{-1}\left[(JF^{h(x)})(x)\right]$ $para\ todo\ x \in B_r$(a)$. Ademas\ la\ funcion$ (0,0)

$A_{(h(x))}(x) = h(x) + (dh)_a(x - a)\ aproxima\ a\ h\ en\ B_r$(a).

{Ecuaciones Diferenciales}

Definicion. Sea F: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ de clase C^n $y\ sea\ Y{:}\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^n .

La expression $Y^n = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1})$ $se\ denomina\ ecuacion\ diferencial\ de\ orden$ n.

El problema a resolver es hallar una funcion $Y{:}\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defina en algun interval (a,b) tal que $y^{(n)}{}_{(x)} =$ $f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right)$ $para\ todo\ x \in$ (a,b).

{Reduccion del orden}

Dada la ecuacion diferencial $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1})$ sean las funciones $U_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas como sigue:

$U_0\colon y$, $U_1\colon y', U_1\colon y''$, … , $U_{n-1} = y^{(n-1)}$ y sea H= $\begin{matrix} u_0 \\ \cdots \\ u_{n-1} \end{matrix}$, entonces.

$$H' = \begin{bmatrix} {u_0}' \\ \ldots \\ {u_{n-1}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{n-1} \\ f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{bmatrix} = g(x, h)$$

Definicion. Sea f:$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Diremos que f satisfice la condicion de Lipischitz si existe una constante positiva L tal que: $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L\|y - z\|$ *para todo* $(x, y), (x, z)$*en dom*(f).

{Condiciones de diferenciabilidad}

1. La fucnion sea continua
2. Existan derivadas parciales en el punto
3. Limite=0

Esto equivale a decir que existe una transformacion lineal

$L_x = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que F(x+h) = F(x) + L_x(h) +φ_x(h) con $\lim_{h\to 0} \frac{\|F(x+h)-F(a)-L_x(h)\|}{\|h\|} = 0$

{Relacion de diferenciabilidad y derivada de un vector nulo}

Teorema. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, x ∈ dom(F) y V ∈ $T_x(\mathbb{R}^n)$, entonces.

$(D_V F)_{(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}$ [F(x+tV)- F(x)]= $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}$ [F(x)+(dF)$_x$(tV)+ φ_x(tV) - F(x)]

= $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}$ [(dF)$_x$(tV)+ φ_x(tV)]= $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}$ [t(dF)$_x$(V)+ φ_x(tV)]= $\lim_{t\to 0}$ [(dF)$_x$(tV)+ $\frac{1}{t}\varphi_x$(tV)]=$(dF)_{(x)}(V)$

Definicion. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, x ∈ dom(F) y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica de $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ entonces

$(D_{ei}f)_{(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} [f(x + tei) - f(x)] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} [f(x_1, x_2, \ldots, x_i t, x_n, \ldots) - f(x_1, \ldots, x_n)]$

Esta ultima expression es la derivada de la function de la variables x_i, quedando fijas las variables restantes. Se denomina a esta derivada, derivada parcial de f respecto de la variable x, en el punto x y las notaciones usuales son $\frac{\partial f}{\partial x}$ (x) , $(\partial i f)_{(x)}$, $(D_{xi}f)_{(x)}$, $f_{xi_{(x)}}$.

{Derivada direccional}

$$\frac{\partial f}{\partial U}(x) = (\nabla f)_{(x)} \cdot U$$

Teorema. Si es diferenciable en (x_0, y_0) $y\ U = u_i + v_j\ es\ un\ vector\ \ unitario,\ entonces\ la\ derivada\ direccionalde$ $f\ en\ el\ punto\ (a{,}b) y\ en\ la\ direccion\ de\ u,\ se\ expresa\ como$

$$\frac{\partial f}{\partial U}(a, b) = (\nabla f)_{(a,b)} \cdot U$$

Demostracion.

$$\frac{\partial f}{\partial U}(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + tu, y_0 + tv) = \frac{d}{dt}\ f\big(x(t), y(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \ \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v = (\nabla f)_{(x_0,y_0)} \cdot U$$

{Divergencia}

Mientras que obtener el gradiente de un campo escalar produce un campo vectorial, el proceso de calcular la divergencia, hace lo contrario.

Definicion. Sea F:U$\subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, un campo vectorial diferenciable la divergencia de F se denota como div F∘F $\nabla, y\ es\ el\ campo\ escalar$:

div F = $\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial F_1} + \frac{\partial F_2}{\partial F_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial F_n}$

Donde x_1,...,x_n son las coordenadas para $\mathbb{R}^n$ y $F_1, \dots, F_n$ son las funciones components de F.

{Teorema de la Existencia y Unicidad}

Teorema. Dada $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface la condición de Lipschitz. Entonces la ecuación diferencial $y' = F(x,y)$ con condición inicial $y_0 = y(x_0)$ tiene una solución única en algún intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

{Ecuaciones diferenciales a variables separables]

Definición. Sean $F, G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C'. La ecuación diferencial $y' = \frac{F(x)}{G(y)}$ se denomina a variables separables. Para resolverla se hace:

$y' = \frac{F(x)}{G(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{F(x)}{G(y)} \Leftrightarrow \mathrm{G(y)dy = F(x)dx}$ y se integran

{Ecuación diferencial homogénea}

Definición. La ecuación diferencial $y' = F(x,y)$ se denomina homogénea si $F(x,y) = G\left(\frac{y}{x}\right)$.

Para resolver hacemos: $V = \frac{y}{x}$, entonces $y = xv$ y por lo tanto $y' = v + xv'$, de modo que $y' = G\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow v + xv' = G(v) \Leftrightarrow xv' = G(v) - v \Leftrightarrow v' = \frac{G(v)-v}{x}$ y esta última es a variables separadas

{Ecuación diferencial de Primer Orden}

Definición. La ecuación diferencial $y' = a(x)y + b(x)$ donde a y b son funciones continuas y se denomina ecuación diferencial lineal de primer orden. Si $b(x) = 0$ para todo x la ecuación se denomina homogénea y no homogénea si $b(x) \neq 0$. Para resolver la misma consideramos primero el caso $b(x) = 0$ donde

$$y' = a(x)y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = a(x) \Leftrightarrow \ln|y(x)| = \int a(x)dx + c_i \to y(x) = \pm e^{ci} e^{\int a(x)dx} = ce^{\int a(x)dx}$$

Para un caso general proponemos como solución $y(x) = U(x)e^{\int a(x)dx}$ entonces

$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \Leftrightarrow U'(x)e^{\int a(x)dx} + U(x)e^{\int a(x)dx}a(x) = a(x)U(x)e^{\int a(x)dx} + b(x) \Leftrightarrow U'(x)e^{\int a(x)dx} = b(x) \Leftrightarrow U'(x) = b(x)e^{-\int a(x)dx} \to \mathrm{U(x)} = \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + c$

Luego $y(x) = e^{\int a(x)dx}\left[c + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right]$

{Ecuación Diferencial Exacta}

$P(x,y)dx + Q(x,y) = 0$ es exacta si existe una función U:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que

$$\frac{dv}{dx} = P \quad y\frac{dv}{dy} = Q$$

La expresión $U(x,y) = C$ proporciona la solución general de la misma ya que

$$du(x,y) = \frac{dv}{dx}(x,y)dx + \frac{dv}{dy}(x,y)dy = 0$$

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Además

$$\frac{dp}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{dQ}{dx}$$

{Ecuación Diferencial de Bernoulli}

La ecuación diferencial $y' + a(x)y = b(x)y^r$ con r $\neq$0,1 se denomina ecuación diferencial de Bernoulli. Para resolverla sea $z = y^{1-r}$, entonces $z' = (1-r)y^{-r}y^1$ y multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(1-r)y^r$ tenemos:

$$(1-r)y^{-r}y^1 + (1-r)y^{-r}a(x)y = (1-r)y^{-r}b(x)y^r \Leftrightarrow z' + (1-r)a(x)z = (1-r)b(x) \Leftrightarrow z'$$
$$= (1-r)a(x)z + (1-r)b(x)$$

Y esta ultima es una ecuación lineal de primer orden que sabemos resolver donde z es la ecuación incógnita.

{Desarrollo de Taylor}

Sean $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $a = (a_1, .., a_n) \in$ dom(t) y $r > 0$ tal que $Br(a) \subset$ dom(f). Para cada $x \in$ Br(a), sea $g(t) = f(a + t(x - a))$, entonces por el teorema de Taylor para funciones reales de una variable real, tomando $t_0 = 0$ y $t = 1$, tenemos

$$g(1) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + Rm(1)$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + Rm(1)$$

Por otro lado, g(1)=f(x) de modo que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(D^k{}_{x-a}\, f\right)(a) + Rm(x)$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} \frac{\partial^x f}{\partial xi \ldots \partial xik}(a)(xi, \ldots, ain)$$

{Taylor en un punto}

Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ y a(punto crítico) $\in$ Dom(f), entonces sea r>0 tal que $B_r(a) \in$ Dom(f). Para $x \in B_r(a)$

=$f(x) = f(a) + (\nabla \mathrm{f}).a(\mathrm{x}-a) + \frac{1}{2}(x-a)Hf(a)(x-a)^T + Rz(x)$

Como $\nabla f.a = 0$

=$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}(x-a)Hf(a).(x-a)^T + Rz(x)$

Tomando r>0 suficientemente pequeño, $|R_z(x)|$ es despreciable respecto a $\frac{1}{2}(x-a)Hf(a)(x-a)^T$, de modo que: $f(x) - f(a) = \frac{1}{2}(x-a)\ Hf(a).(x-a)^T + R_z(x)$

=$[f(x) - f(a)] = \left[\frac{1}{2}(x-a)Hf(a).(x-a)^T\right]$

Por resultado algebraico, $\frac{1}{2}(x-a)Hf(a)(x-a)^T > 0$ si y solo si $\Delta\mathrm{K}\left(\mathrm{Hf}(a)\right) > 0$

1)Si $\Delta K(Hf(a))$>0, a es Mínimo Local

2)Si $\Delta K(-1)^K(Hf(a))$>0, a es Máximo Local

3)Si $\Delta K(Hf(a))$=0, pero no se cumplen ni uno ni otro, el punto es ensilladura

{Teorema de Fubini}

Teorema. Sea F:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y sea $R = [a,b]\times[c,d] \subset$ dom(f). La integral de F sobre R, que denotamos $\int_e \ f = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] dy$

Observación. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y $R = [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_n, b_n] \subset$ dom(f), entonces:

$$\int_R F(x_1, \dots, x_n) dx \cap dx_2 \cap \cdots \cap dx_n = \int_{an}^{bn} \left[\int_{an-1}^{bn-1} \dots \int_{a2}^{b2} \left[\int_{a1}^{b1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1\right] dx_2 \dots\right] dxn$$

{Teorema de Green}

Sea F= $(F1, F2)$ =:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^∞ y sea R una región contenida en dom(F) tal que Fr(R) es curva cerrada simple de clase C^∞. Entonces:

$$\int_{Fr(R)} F = \int_R \ (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

{Teorema de Gauss}

Teorema. Sea F:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de clase* C^∞ y sea R una región sólida en $\mathbb{R}^3$ tal que: $\mathbb{R}^3 \cup$ Fr(R) $\subset$ dom(F). Si Fr(R) es una superficie cerrada entonces:

$$\int_{Fr(R)} F = \int_R \ div(F)$$

{Teorema de Stokes}

Teorema. Sea F:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de clase* C^∞ *y* S una superficie contenida en dom(F)tal que Fr(S) es una curva cerrada simple de clase C^∞. Entonces:

$$\int_{Fr(S)} F = \int_S \ rot(F)$$

{Campo Vectorial Conservativo}

Un campo vectorial F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es conservativo si existe una función $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que dom(F)=dom(φ) y $\nabla\varphi = F$

.La matriz JF es simétrica $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = Fi$

$\partial_i\varphi =$ Fi para i=1,...,n $\quad \frac{\partial Fi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$

$=\partial_i F_j = \partial_i\left(\partial_J\varphi\right) = \partial_J(\partial_i\varphi) = \partial_J Fi$

.La integral de línea de F a lo largo de una curva es independiente a la trayectoria

Γ curva contenida en dom(f) $Y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ parametrización

h(t)=$\varphi\left(Y(t)\right)$, $h'(t) = (\nabla\varphi)\left(Y(t)\right).Y'(t)$

$$\int_\Gamma F = \int_a^b F\left(Y(t)\right).Y'(t)dt = \int_a^b (\nabla\varphi)\left(Y(t)\right).Y'(t)dt = \int_a^b h'(t)dt = h(b) - h(a)$$

$=\varphi\left(Y(b)\right) - \varphi(Y(a))$

$\int_\Gamma F$ solo depende de los puntos inicial y final

{Independencia de la trayectoria}

.Si la integral es independiente a la trayectoria, el campo es conservativo

$a \in$ dom(f) es un punto fijo y para cada $x \in$ dom(F)

$\varphi(x) = \int_a^x F$ integral curva que une los puntos a y x

Veamos que $\partial_j\varphi = Fj \qquad j = 1, \dots, n$

$$\left\langle\partial_j\varphi\right\rangle(x) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}(\varphi(x+tej) - \varphi(x))\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\int_a^{x+tej} F - \int_a^x F\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\int_a^x F + \int_x^{x+tej} F - \int_a^x F\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\int_x^{x+tej} F\,dt\right]$$

$\vartheta(S) = x + stej$ parametrización de recta que une x con $x + stej$ $0 \leq s \leq 1$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\int_x^{x+tej} F = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^1 F(x + stej).tej\; ds = \lim_{t\to 0}\int_0^1 F_j(x + stej).tej\; ds\right]$$

$$\int_0^1 F_j(x) = F_j(x)$$

$.dom(F)$ es un conjunto convexo y JF es una matriz simétrica. Entonces F es conservativo

Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in$ dom(F) y para cada $x(x_1, .., x_n) \in$ dom(F)

$$\varphi(x) = \sum_{t=1}^{n} (xi - ai) \int_0^1 Fi\big(a + t(x - a)\big)dt$$

$.\nabla\varphi = F$

$$(\partial_j\varphi)(x) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_j(x_1 - a_1)) \int_0^1 Fj(a + t(x - a)dt + \sum_{i=!}^{n} (x_i - a_i) \int_0^1 \partial_j(Fi\big(a + t(x - a)\big)\, dt$$

$$= \int_0^1 Fj\big(a + t(x - a)\big)dt + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \int_0^1 t(\partial_j Fi)(a + t(x - a))dt$$

Como $\partial_j Fi = \partial_i F_j$

$=\int_0^1 F_j\big(a + t(x - a)\big)dt + \int_0^1 t\big(\sum_{i=1}^{n} (a_i F_j\big)(a + t(x - a))dt$

$=\int_0^1 F_j\big(a + t(x - a)\big)dt + \int_0^1 t\frac{d}{dt}F_j\big(a + t(x - a)\big)dt$

$$(\partial_j\varphi)(x) = \int_0^1 F_j\big(a + t(x - a)\big)dt + \big[tF_j(a + t(x - a))\big]_0^1 - \int_0^1 F_j\big(a + t(x - a)\big)dt$$

$$\big[tF_j(a + t(x - a))\big]_0^1 = F_j(x)$$

{Teorema de la conservación de la energía}

Teorema. Sea F:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^∞. Si $\int_\Gamma F$ es independiente de la trayectoria para toda la curva $\Gamma \subset$ dom(F), entonces F es conservativo.

Demostración. Sea $F = (F1, F2, \dots, Fn)$ y sea $x_0 \in$ dom(F) fijo. Si $x \in$ dom(F) sea $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $dada\ por\ \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} F$, entonces dom($\varphi$) $= dom(F)$. $Veamos\ que\ \nabla\varphi = F$:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(x+tei) - \varphi(x)] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\int_{x_0}^{x+tei} F - \int_{x_0}^{x} F\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\int_{y_0}^{y} F + \int_{x}^{x+tei} F - \int_{x_0}^{x} F\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{x}^{x+tei} F = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^1 F(x+stei).tei\ ds = \lim_{t\to 0}\int_0^1 F(x+stei).ei\ ds$$

$$=\lim_{t\to 0}\int_0^1 Fi(x+tsei)ds = \int_0^1\left[\lim_{t\to 0} Fi(x+stei)\right]ds = \int_0^1 Fi(x)ds = Fi(x)$$

$$para\ i = 1,2,\dots,n\ por\ lo\ tanto\ \nabla\varphi = Fi$$

{Sea función real h:$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(Tx) = T^K h(x) \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Dom(h)}$ y para todo $T \in \mathbb{R}$, donde $k \in z^t$.
Demuestre que: $h(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial xi}(x)xi$}

Se trata de una ecuación homogénea de grado K. Según teoremas anteriores sobre funciones homogéneas, se debe cumplir:

$$f(Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n) = T^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Este teorema dice que si la función es homogénea y de grado n, podemos afirmar

$$x1\frac{\partial f}{\partial x1} + x2\frac{\partial f}{\partial x2} + \cdots + xn\frac{\partial f}{\partial xn} = n.f$$

Aplicándolo a este caso x=x1,x2,...,xn

n=k

$$kf(x) = \sum_{i=1}^{n} xi\ \frac{\partial f}{\partial xi}$$

$$f(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial xi} xi$$

{Sea F: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y U un vector unitario que pertenece a $\mathbb{R}^n$. Defina derivada direccional de F en la dirección dada por U en un punto $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que si F es diferenciable en un punto x entonces:$\frac{df}{du}(x) = \nabla\mathrm{f(x)}.\mathrm{U}$}

$$\frac{df}{dU}(x_0, y_0) = \frac{d}{dT}F(x_0 + T_u, y_0 + ty) = \frac{d}{dt}\ F(x(Ti\ y\ (T))$$

$$= \frac{dF}{dx}.\frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy}.\frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dx}U + \frac{dF}{dy}V = \nabla\mathrm{F}(x_0, y_o).U$$

{Sea C una curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por y:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Demustre que la curvature h esta dada por :}

$$k = \frac{\|y' \times y''\|}{\|y'\|^3} \qquad y' = \lambda' \cdot t$$

$$k = \frac{\|(\lambda' t) \times (\lambda'' t) + (\lambda')^2\ Kn\|}{\|\lambda' t\|^3} \qquad y'' = \lambda'' \cdot t + \lambda' \cdot t \to k\ \lambda' N$$

$$k = \frac{\|(\lambda' t) \times (\lambda'' t) + (\lambda' t) \times (\lambda')^2\ Kn\|}{\|\lambda'\|^3} \qquad y'' = \lambda'' \cdot t + (\lambda')^2 \cdot kN$$

$$k = \frac{\left\|(\lambda')^3 \cdot k \cdot B\right\|}{\|\lambda'\|^3} \qquad B = T \times N \qquad B\ y\ t\ (vectores\ unitarios)$$

$$k = k$$

$\{$Sea Γ una curva en $\mathbb{R}^3 y\ sea\ y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3\ una\ parametrizacion\ por\ longitud\ de\ arco\ de\ la\ misma.$

$Si\ k(t) = c > 0\ (\ c\ constante)\ T(t) = 0, demuestre\ que\ \Gamma\ es\ una\ circunferencia\ de\ radio\ r = \frac{1}{c}\}$

$\gamma(\mathrm{t}) = (\mathrm{r} \cdot \cos(t)\,, r \cdot sen(t), 0)$

$\gamma'(t) = (-\,\mathrm{r} \cdot \mathrm{sen}(t)\,, r \cdot cos(t), 0)$

$\|\gamma'(t)\| = r$

$T(t) = (-sen(t), \cos(t)\,, 0)$

$T'(t) = (-sen(t), \cos(t)\,, 0)$

$\|T'(t)\| = 1$

$C = k(t) = \dfrac{1}{r}$