Derivadas parciales por definición:

$$\partial fx_{(x_0,y_0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(1,0)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\partial fy_{(x_0,y_0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(0,1)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Ejemplo: Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2 + y^4} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) $\partial fx_{(x_0,y_0)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f((x_0, y_0) + t(1,0)) - f(x_0, y_0)}{t}$

$$\partial fx_{(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((t,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$\partial fx_{(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{t\,(0)^2}{t^2 + (0)^4} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

b) $\partial fy_{(x_0,y_0)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f((x_0, y_0) + t(0,1)) - f(x_0, y_0)}{t}$

$$\partial fy_{(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,t)) - f(0,0)}{t}$$

$$\partial fy_{(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{(0)\,t^2}{(0)^2 + t^4} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Ejemplo: Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2-2y^2} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\partial fx_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f((x_0,y_0)+t(1,0))-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$\partial fx_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f((t,0))-f(0,0)}{t}$$

$$\partial fx_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^3+(0)^3}{t^2-2(0)^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^3}=1$$

$$\partial fy_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f((x_0,y_0)+t(0,1))-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$\partial fy_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,t))-f(0,0)}{t}$$

$$\partial fy_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{(0)^3+t^3}{(0)^2-2t^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{-2t^3}=-\frac{1}{2}$$

1) Determinar las derivadas parciales en el origen de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$ **Rta:** $\partial fx_{(0,0)}=2$ $\partial fy_{(0,0)}=0$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\,y^2}{x+y} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$ **Rta:** $\partial fx_{(0,0)}=0$ $\partial fy_{(0,0)}=0$

Diferenciabilidad

Una función es diferenciable en el punto $P=(x_0,y_0)$ si se cumple:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-L_{(x_0,y_0)}\cdot[(x,y)-(x_0,y_0)]}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0$$

$$L_{(x_0,y_0)}=\left[\partial fx_{(x_0,y_0)},\ \partial fy_{(x_0,y_0)}\right]$$

Ejemplo 1: Verificar si la función es diferenciable en el origen

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\partial fx_{(0,0)}=0 \quad \partial fy_{(0,0)}=0 \Rightarrow \quad L_{(0,0)}=[0,0]$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}-0-[0,0]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$L_1=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x\,y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x\,(0)^2}{(x^2+(0)^4)\sqrt{x^2+(0)^2}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{x^3}\right)=0$$

$$L_2=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x\,y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{0\,y^2}{((0)^2+y^4)\sqrt{(0)^2+y^2}}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{0}{y^5}\right)=0$$

Limites Iterados iguales, puede existir límite

$$\lim_{x\to0}\frac{x\,(mx)^2}{(x^2+(mx)^4)\sqrt{x^2+(mx)^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^3\,m^2}{(x^2+m^4x^4)\sqrt{x^2+x\,m^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^3\,m^2}{x^3\,(1+m^4x^2)\sqrt{1+m^2}}=\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}}$$

Depende de m el limite no existe por lo tanto la función no es diferenciable

Ejemplo 2: Verificar si la función es diferenciable en el origen

Sea $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x\,y^2}{x+y} & si\,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \partial fx_{(0,0)} = 0 \\ \partial fy_{(0,0)} = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad L_{(0,0)}=[0,\,0]}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{2x\,y^2}{x+y}-0-[0,0]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{2x\,y^2}{x+y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x\,y^2}{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$L_1=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{2x\,y^2}{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2x(0)^2}{(x+0)\sqrt{x^2+(0)^2}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{x^2}\right)=0$$

$$L_2=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{2x\,y^2}{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{2(0)y^2}{(0+y)\sqrt{(0)^2+y^2}}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{0}{y^2}\right)=0$$

Limites Iterados iguales, puede existir límite, tomamos límite radial:

$$\lim_{x\to0}\frac{2x(mx)^2}{(x+mx)\sqrt{x^2+(mx)^2}}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3\,m^2}{x(1+m)\sqrt{x^2\left(1+m^2\right)}}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3\,m^2}{x^2\,(1+m)\sqrt{\left(1+m^2\right)}}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x\,m^2}{(1+m)\sqrt{\left(1+m^2\right)}}=0$$

No depende de m el limite existe (aplicamos la definición)

(I) $\|f(x,y)-L\| \leq \varepsilon$

$$\left|\frac{2xy^2}{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| \leq \left|\frac{2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{2\ \|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|} \leq \varepsilon \Rightarrow \boxed{\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}$$

(II) $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leq \delta$

$\|\mathbf{x}-(0,0)\| \leq \delta$

$\boxed{\|\mathbf{x}\| \leq \delta}$

Tomando un $\boxed{\delta \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}$ se cumple la definición y el limite es 0

El límite es 0 por lo tanto la función **es diferenciable**

2) Verificar si las siguientes funciones son diferenciales en el origen:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$ **Rta: No es diferenciable**

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\ y^2}{x+y} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$ **Rta: Es diferenciable**

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3|y|}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$ **Rta: Es diferenciable**

d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{4x^2+4y^2}} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$ **Rta: No es diferenciable**