Continuidad

Una función es continua en un punto si se cumplen las siguientes condiciones:

$$I) \quad f(x_0, y_0) \quad \exists$$

$$II) \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \exists$$

$$III) \quad f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Si una/s de las condiciones no se cumple se dice que la función es discontinua, hay dos tipos de discontinuidad:

Discontinua

- Evitable: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \boxed{\exists}$
- No evitable: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \boxed{\nexists}$

Ejemplo 1: Analizar la continuidad en el origen de la siguiente función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+3y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

I) $f(0,0)=0 \qquad \exists$

II) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+3y^2}=\dfrac{(0)^3+(0)^2}{(0)^2+3(0)^2}=\dfrac{0}{0}$

Tomamos límites Iterados:

$$L_1=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2-y^2}{x^2+3y^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-(0)^2}{x^2+3(0)^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}(1)=1$$

$$L_2=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2-y^2}{x^2+3y^2}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{(0)^2-y^2}{(0)^2+3y^2}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{-y^2}{3y^2}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{-1}{3}$$

Limites Iterados distintos, $\boxed{\text{no existe límite}}$

La Función es discontinua No evitable en (0,0)

Ejemplo 2: Analizar la continuidad en el origen de la siguiente función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+3y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 4 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

I) $f(0,0)=4 \quad \exists$

II) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{x^2+3y^2}=\dfrac{3(0)(0)}{(0)^2+3(0)^2}=\dfrac{0}{0}$

Tomamos límites Iterados:

$$L_1=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3xy}{x^2+3y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2+3(0)^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right)=0$$

$$L_2=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3xy}{x^2+3y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{(0)^2+3y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{3y^2}\right)=0$$

Limites Iterados iguales, puede existir límite

Tomamos limite radial a través de

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x\,m\,x}{x^2+3(m\,x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3mx^2}{x^2+3m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3m\,x^2}{x^2(1+3m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3m}{(1+3m^2)}=\frac{3m}{(1+3m^2)}$$

Depende de m no existe limite

La Función es discontinua No evitable en (0,0)

Ejemplo 3: Analizar la continuidad en el origen de la siguiente función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+2y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

I) $f(0,0)=0 \quad \exists$

II) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^2+2y^2}=\dfrac{2(0)(0)^3}{(0)^2+2(0)^2}=\dfrac{0}{0}$

Tomamos límites Iterados:

$$L_1=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{xy^3}{x^2+2y^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{x^2+2(0)^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{x^2}\right)=0$$

$$L_2=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{xy^3}{x^2+2y^2}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{0}{(0)^2+2y^2}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{0}{2y^2}\right)=0$$

Limites Iterados iguales, puede existir límite

Tomamos limite radial a través de $y=mx$

$$\lim_{x\to0}\frac{x(mx)^3}{x^2+2(mx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{m^3x^4}{x^2+2m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{m^3x^4}{x^2(1+m^2)}=\lim_{x\to0}\frac{m^3x^2}{(1+m^2)}=\frac{m^3(0)^2}{(1+m^2)}=0$$

No depende de m aplicamos la definición

(I) $|f(x,y)-L|<\varepsilon$

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+2y^2}-0\right| \leq \left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}-0\right| \leq \frac{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{x}\|^3}{\|\mathbf{x}\|^2} \leq \|\mathbf{x}\|^2 < \varepsilon \Rightarrow \boxed{\|\mathbf{x}\| < \sqrt{\varepsilon}}$$

(II) $0<\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\delta$

$0<\|\mathbf{x}-(0,0)\|<\delta$

$\boxed{0<\|\mathbf{x}\|<\delta}$

$\Rightarrow$ Tomando $\boxed{\delta<\sqrt{\xi}}$ se cumple la definición y el limite existe

Entonces II) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+2y^2}=0 \quad \exists$

III) $f(0,0)=0 \quad = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+2y^2}=0$

La Función es Continua en (0,0)

1) Analizar la continuidad en el origen de la siguiente función

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4xy}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Rta: Discontinua No evitable

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{\sqrt{x^6+y^2}} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Rta: Es Continua

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3|y|}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Rta: Es Continua

d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{\sqrt{4x^2+4y^2}} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 2 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Rta: Discontinua evitable

e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{3x^{5/2}+x^2y} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Rta: Discontinua No evitable