Continuidad

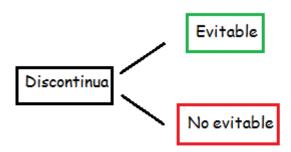
Una función es continua en un punto si se cumplen las siguientes condiciones:

$$I)$$
 $f(x_0, y_0)$ \exists

II)
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \exists$$

III)
$$f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Si una/s de las condiciones no se cumple se dice que la función es discontinua, hay dos tipos de discontinuidad:



$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \exists$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \boxed{\exists}$$





Ejemplo 1: Analizar la continuidad en el origen de la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

I)
$$f(0,0) = 0$$
 \exists

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2} = \frac{(0)^3 + (0)^2}{(0)^2 + 3(0)^2} = \frac{0}{0}$$

Tomamos límites Iterados:

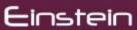
$$L_{1} = \lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{x^{2} - y^{2}}{x^{2} + 3y^{2}} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^{2} - (0)^{2}}{x^{2} + 3(0)^{2}} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^{2}}{x^{2}} \right) = \lim_{x \to 0} (1) = 1$$

$$L_2 = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2} \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{(0)^2 - y^2}{(0)^2 + 3y^2} \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{-y^2}{3y^2} \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{-1}{3} \right) = \frac{-1}{3}$$

Limites Iterados distintos, no existe límite

La Función es discontinua No evitable en (0,0)





Ejemplo 2: Analizar la continuidad en el origen de la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2 + 3y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 4 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

I)
$$f(0,0) = 4 \quad \exists$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x^2 + 3y^2} = \frac{3(0)(0)}{(0)^2 + 3(0)^2} = \frac{0}{0}$$

Tomamos límites Iterados:

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{3xy}{x^2 + 3y^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{0}{x^2 + 3(0)^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{0}{x^2} \right) = 0$$

$$L_2 = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{3xy}{x^2 + 3y^2} \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{0}{(0)^2 + 3y^2} \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{0}{3y^2} \right) = 0$$

Limites Iterados iguales, puede existir límite

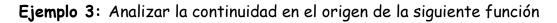
Tomamos limite radial a través de

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x m x}{x^2 + 3(m x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3mx^2}{x^2 + 3m^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3mx^2}{x^2(1 + 3m^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{3m}{(1 + 3m^2)} = \frac{3m}{(1 + 3m^2)}$$

Depende de m no existe limite

La Función es discontinua No evitable en (0,0)





$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + 2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

I)
$$f(0,0) = 0 \quad \exists$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + 2y^2} = \frac{2(0)(0)^3}{(0)^2 + 2(0)^2} = \frac{0}{0}$$

Tomamos límites Iterados:

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{xy^3}{x^2 + 2y^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{0}{x^2 + 2(0)^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{0}{x^2} \right) = 0$$

$$L_2 = \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{xy^3}{x^2 + 2y^2} \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{0}{(0)^2 + 2y^2} \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{0}{2y^2} \right) = 0$$

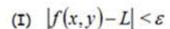
Limites Iterados iguales, puede existir límite

Tomamos limite radial a través de y = m x

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(m \, x)^3}{x^2 + 2(m \, x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{m^3 x^4}{x^2 + 2m^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{m^3 \, x^4}{x^2 (1 + m^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{m^3 \, x^2}{(1 + m^2)} = \frac{m^3 (0)^2}{(1 + m^2)} = 0$$

No depende de m aplicamos la definición





$$\left|\frac{xy^3}{x^2 + 2y^2} - 0\right| \le \left|\frac{xy^3}{x^2 + y^2} - 0\right| \le \left|\frac{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}\|^3}{\|\mathbf{x}\|^2} \le \|\mathbf{x}\|^2 < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{x}\| < \sqrt{\varepsilon}$$

(II)
$$0 < \| \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \| < \delta$$

 $0 < \| \mathbf{X} - (0,0) \| < \delta$
 $0 < \| \mathbf{X} \| < \delta$

 \Rightarrow Tomando $\delta \leq \sqrt{\xi}$ se cumple la definición y el limite existe

Entonces II)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + 2y^2} = 0$$
 \exists

III)
$$f(0,0) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + 2y^2} = 0$$

La Función es Continua en (0,0)

1) Analizar la continuidad en el origen de la siguiente función

a)
$$f(x, y) =\begin{cases} \frac{4x y}{x^2 + y^2} & si(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Rta: Discontinua No evitable

b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{\sqrt{x^6 + y^2}} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Rta: Es Continua

c)
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3|y|}{x^2 + y^2} & si(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Rta: Es Continua

d)
$$f(x, y) =\begin{cases} \frac{2x^3y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} & si(x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & si(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Rta: Discontinua evitable

e)
$$f(x, y) =\begin{cases} \frac{xy^3}{3x^{5/2} + x^2y} & si(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Rta: Discontinua No evitable