UNIVERSIDAD DEL CEMA

Valuación de bonos y tasas de interés

Santiago Taboada

Quant Finance

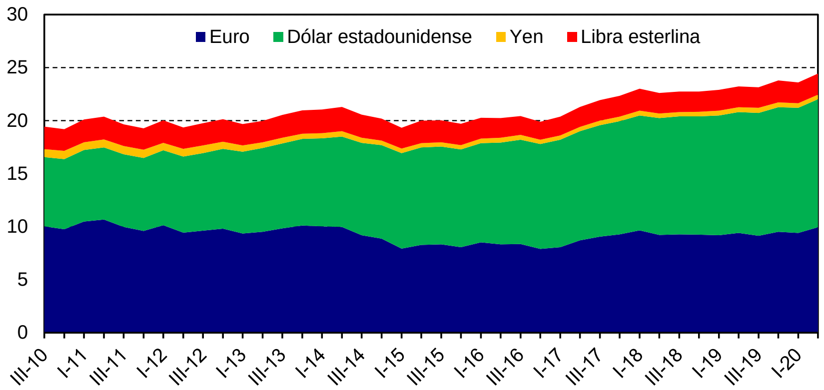
Diciembre de 2020

Introducción

Los instrumentos de renta fija constituyen uno de elementos fundamentales de los mercados de capitales a nivel global, permitiéndoles a gobiernos, empresas y organizaciones tomar prestado dinero de un gran número de inversores. Como su nombre lo indica, estos de instrumentos son una clase de inversiones que aseguran un retorno conocido al momento de la compra -ya sea mediante el pago de cupones y/o del principal al momento del vencimiento del título.

Los bonos son uno de los instrumentos de renta fija más conocidos. Según, el Banco de Pagos Internacionales (BIS, por sus siglas en inglés) estima que al segundo trimestre de este año el stock de *debt securities* en el mercado internacional totalizaba unos USD 25,78 billones, de los cuales un 46,8% estaba compuesto por instrumentos denominados en dólares estadounidenses. Por su parte, la Asociación de la Industria de Valores y Mercados Financieros (SIFMA, por sus siglas en inglés) estimó que el stock global de bonos ascendía a USD 105,9 billones hacia fines del año pasado

Stock global de debt securties en el mercado internacional
en billones de USD



Fuente: BIS

Ahora bien, concentrándonos en la cuestión más técnica, ¿qué se entiende por bono? Un bono es un contrato entre dos partes (emisor e inversor), en donde el primero pide prestado dinero y se compromete a devolverlo en un determinado plazo de acuerdo a lo estipulado en el **contrato o *indenture*.** Dentro del universo de bonos, existe una enorme cantidad de clases en donde cada una presenta sus propios desafíos a la hora de la valuarlo o ponerle un precio.

En líneas generales, los bonos se caracterizan por tener una fecha de **caducidad o *maturity***, en donde el emisor se compromete a devolver la totalidad del capital tomado. El dinero que un individuo invierte cuando compra un bono y el emisor se compromete a devolver en un determinado plazo, se conoce como **capital o principal**. Este último puede ser devuelto en un pago en la maturity del bono o en un esquema de pagos regulares. Luego tenemos el **cupón**, los cuales son los pagos que realiza el emisor a los tenedores de los títulos durante la vida del papel. Cabe destacar que el monto y la periodicidad de estos pagos son fijados previamente, es decir, son conocidos por el inversor desde el momento t=0. Si bien puede variar, el pago de cupones suele ser en intervalos regulares. Si son realizados una vez por año, se denominan cupones anuales, mientras que si son realizados cada seis meses, se dice que el bono tiene cupones semianuales. También existen títulos en donde el pago de los cupones se lleva a cabo de manera trimestral (esto resulta más común para los bonos a tasa flotante) o incluso mensual.

Como se mencionó previamente, en el mercado existen un gran universo de títulos con diferentes características que elevan consideraciones a la hora de la valuación. Como primer elemento, se encuentra el **cupón cero** (ZCB, por sus siglas en inglés). Tal como su nombre hace referencia, no realiza ningún desembolso a lo largo de su vida y solamente devuelven el capital prestado más un interés al momento de la *maturity* del instrumento. Posteriormente, se encuentran los **bonos con cupón fijo**, cuyo monto del pago de cada uno de los cupones se conoce desde el t=0. Aunque los mismos pueden ser fijos, crecientes, decrecientes. Asimismo, existen los **bonos a tasa flotante**, los que en lugar de pagar un tasa fija a lo largo de su vida, pagan un cupón variable que depende del valor de una tasa de referencia más o menos un spread, la cual se establece en el indenture del mismo. En este sentido, a los primeros se los suele denominar ***plain vanilla bonds*** o ***convential bonds*** (solo si la tasa del cuón es constante a lo largo de la vida del título), mientras que a los segundos se los suele llamar ***floating-rate notes*** (FRNs, por sus siglas en inglés). Más allá del tipo de cupón que puedan tener, los bonos también se suelen dividir según en la manera en que devuelven el capital. Por ello, existen dos grandes grupos: los **bonos amortizables**, aquellos que devuelven el capital de manera periódica, y los **bonos *bullet***, aquellos que devuelven la totalidad del capital en la *maturity*. Es importante señalar que dentro del universo de bonos, también existen otras clases como: bonos con opciones, bonos de doble moneda, entre otros. Si bien es importante dejar en claro este punto, este trabajo hará foco en aquellos títulos con cupón fijo.

Valuación de un bono

Como primer punto, es fundamental hacer la pregunta de: ¿cómo se calcula el precio de un bono cualquiera? El precio de un bono es el valor presente de su esperado flujo(s) de efectivo a lo largo de su vida. La forma más simple de valuar un bono resulta de construir el fujo o *cashflow* y descontarlos por una tasa de interés a la que se suele denominar tasa de descuento. Si bien a la hora de valuar, la misma puede ser elegida arbitrariamente por el inversor, en teoría la tasa de descuento es la tasa de retorno exigida por el inversor dado el riesgo de invertir en el bono en cuestión. Generalmente, se suele expresar la estructura de pagos en 100 unidades de valor nominal.

Sea una secuencia de pagos no negativa y regularmente espaciada de un bono: $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ que vence en T_n años, paga un cupón c, la estructura de pagos o *cashflows* del bono que paga un cupón fijo y devuelve el capital junto al cupón al momento de su maturity en T_n quedará definida de la siguiente manera:

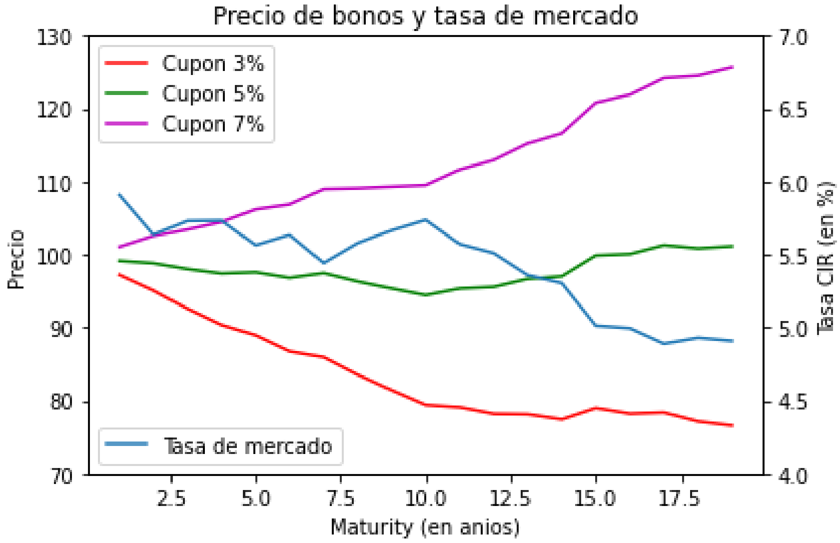
$$C_{T_i} = \begin{cases} 100c, & i = 1,2, \ldots, n-1 \\ 100(1+c), & i = n \end{cases} \quad (1)$$

Suponiendo un conjunto de tasas de descuento discretas con capitalización compuesta $\{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$, R_i resulta la tasa de descuento del período $i \; para \; i = 1,2, \ldots, n$. De esta manera, el vencimiento de cada flujo de pago coincide con la maturity de cada una de las tasas de descuento, aunque en este primer caso, se asumirá una única tasa de interés de mercado. Entonces, descontando cada uno por esta tasa R, podemos obtener el valor presente del cashflow, por lo que el valor del bono será el valor presente descontado de la suma de los pagos C_i descontados a la tasa R_i. Como expresamos la estructura de pagos en términos de 100 unidades de valor nominal, el valor del bono quería expresado genéricamente de la siguiente manera:

Versión de capitalización discreta: $Valor\ del\ bono = \sum_{i=1}^{n} C_{T_i}(1 + R_{T_i})^{-T_i}$ (2.1)

Versión de capitalización continua: $Valor\ del\ bono = \sum_{i=1}^{n} e^{(-r_{T_i}T_i)} C_{T_i}$ (2.2)

Si el resultado de descontar estos pagos por la tasa de descuento elegida es igual a 100, se dice que el bono cotiza a la par. Por otra parte, si el valor presente descontado del *cashflow* es menor a 100, se dice que el título cotiza bajo la par, mientras que si es mayor a 100, el papel cotiza sobre la par. Pero ¿de qué depende esto? En líneas generales, cuando la tasa del cupón es igual a la tasa de descuento, se "pricea" a la par, mientras que si la del cupón es menor a la tasa de descuento el título cotiza bajo la par. En último lugar, si la tasa del cupón es mayor a la tasa de descuento, el papel cotiza sobre la par.

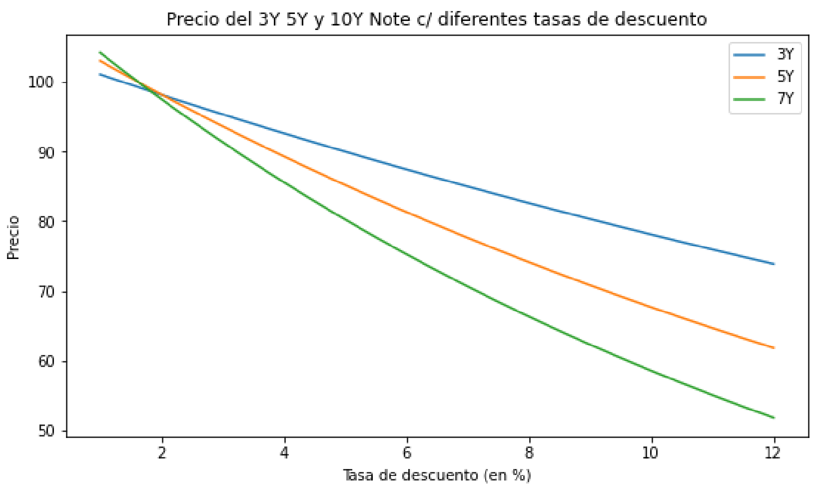


Fuente: Estimaciones propias

Es importante señalar que toda esta formulación se corresponde con lo que sería el valor técnico del bono, es decir, es el valor que debería de tener el bono según las condiciones de emisión. Por lo tanto, es natural que este precio sea diferente del que se podría observar en el mercado secundario dado que en este último los precios son determinados a partir de la oferta y demanda. Esto no quiere decir que los inversores no tengan en cuenta la valuación técnica del título a la hora de operar en el mercado financiero. Todo lo contrario, la valuación técnica de un bono resulta fundamental al momento de comprar y vender un instrumento de renta fija ya que, entre otras cuestiones, permite discernir si un instrumento está caro o barato.

Dada la definición formal presentas más arriba, tomamos un ejemplo de la realidad y aplicamos esta formulación. Para ello, elegimos una 3-year Note del Tesoro de los Estados Unidos (T-Note). Como la tasa del cupón se define según los resultados de las distintas subastas que lleva adelante el Tesoro estadounidense, tomamos como referencia la licitación del día 9 de septiembre de 2017. En este sentido, el resultado de la misma determinó una tasa de cupón de 1,375%, por lo que vamos a utilizar esta para la primera valuación. Por lo tanto, utilizando la fórmula cerrada de precio en Python, obtenemos que el valor de un título de las siguientes características y descontado a una tasa de 1,5%, tiene un precio de 99,63 por cada 100 unidades de valor nominal. Este valor se encuentra en línea con lo que señalamos previamente. Dado que el valor del cupón es menor que la tasa de descuento, el bono posee un valor técnico bajo la par.

De este último punto se desprende una cuestión que si bien es obvia, vale la pena resaltar: a mayor tasa de descuento, menor será el precio del instrumento de renta fija. Entonces, existe una relación inversa entre la tasa/s de mercado utilizadas para la valuación y el precio del activo.



Fuente: Estimaciones propias

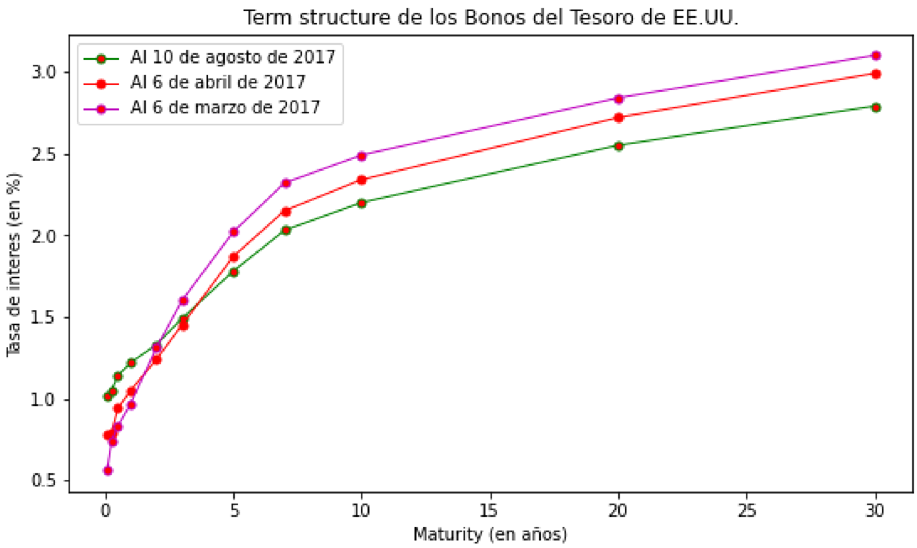
Si bien esta manera de valuar un bono es correcta, lo cierto es que la misma puede no ser del todo precisa. Desde un punto de vista teórico, no es del todo apropiado usar una única tasa de para descontar pagos que se producen en distintos momentos del tiempo dado que podríamos estar subestimando o sobreestimando alguno de los pagos del bono, aunque esto depende de la evolución de la tasa de mercado en cada momento del tiempo.

Una método de valuación más preciso resulta el de utilizar una tasa de descuento distinta para cada pago, es decir, se descuenta cada desembolso por una tasa consistente con ese plazo. En caso de estar valuando un bono con cupones, se puede realizar una tira o separación de los pagos del mismo, por lo que en lugar pensar la estructura de pagos de una 3-year Note como una serie de pagos de cupones en donde en el último desembolso se devuelve el principal junto con el cupón, podemos pensarla como una sucesión de bonos cupón cero. Pensar el *cashflow* de esta manera, es perfectamente consistente con la teoría de valor-tiempo y además, facilita la valuación en muchos casos. En este sentido, sea un bono cupón cero cuya *maturity* ocurre en el momento n, el precio del misma quedará expresado de la siguiente manera en sus dos versiones:

Versión de capitalización discreta: $Bono\ cupón\ cero = C_{T_n}(1 + R_{T_n})^{-T_n}$ (2.1)

Versión de capitalización continua: $Bono\ cupón\ cero = C_{T_n}e^{(-r_{T_n}T_n)}$ (2.2)

Dicho esto, surge el siguiente interrogante: ¿qué tasas de interés deberíamos usar para valuar un bono bajo este método? Para esto se pueden utilizar las tasas de interés implícitas en los precios de los ZCB que emite un gobierno, en particular los bonos cupón cero emitidos por el gobierno de los Estados Unidos. La curva que vincula la tasa de interés para distintas maturities de los bonos, se la conoce como ***term structure*** o ***yield curve***. A su vez, a la *term structure* de los ZCB, se la denomina **curva cero** o **curva de descuento**. Por otro lado, también es cierto que algunos analistas/instituciones utilizan la ***curva de swap rates*** para la valuación de sus instrumentos. ¿Por qué sucede esto? Por un lado depende de la liquidez de ambos mercados en cada país. Por el otro, también importa la exposición que pueda tener cada analista/institución en esto dos mercados. Por ejemplo, la banca mayorista en EE.UU. utilizan la curva de *swaps* debido a que suelen "hedgear" sus posiciones mediante swaps. Cabe señalar que valuar un bono utilizando ya se usando cualquiera de estas dos curvas como *benchmark*, genera una valuación de libre arbitraje.



Fuente: Departamento del Tesoro de EE.UU.

Generalmente, la *term structure* de la curva cero suele tener una pendiente creciente. Esto es razonable para un mercado financiero desarrollado como el estadounidense. En este sentido, los plazos más cortos pagan una tasa más baja. En los últimos años esta tendencia se profundizó producto de la coyuntura económica global y la decisión de la Reserva Federal de los EE.UU. de mantener las tasas en estos niveles el tiempo necesario. Por el contrario, en la parte más larga de la curva tenemos tasas más elevadas producto de dos motivos: por un lado el mercado exige un retorno más elevado debido a mayores *maturities*; por el otro también influyen las expectativas de inflación del mercado, las cuales esperan un mayor crecimiento del nivel de precios en el futuro. No obstante, en ciertas ocasiones se han observado *term structures* con pendiente negativa o invertidas, especialmente previo a los períodos de recesión.

Más allá de que la forma que efectivamente pueda tomar la *term structure,* existen 4 teorías tradicionales que buscan explicar los factores económicos que le dan forma a la curva.

- ***Expectations Theory:*** argumenta que una tasa forward es un buen predictor de la tasa spot futura, en palabras más simples, una tasa forward representa la expectativa del mercado sobre las tasas spot futuras, por lo que la *term structure* en t=0 representa las expectativas del mercado sobre las tasas de interés en t+1.
- ***Liquidity Preference Theory:*** sostiene que los inversores que tienen instrumentos de más largo plazo deberían ser compensados con una tasa mayor debido al riesgo de tener dinero inmovilizado durante mayor tiempo. Entonces las *term structure* no solo reflejan las expectativas de mercado, sino que también “contienen” una prima de riesgo para los tramos más largos de la curva.
- ***Preferred Habitat Theory:*** acepta lo propuesto por las dos primeras teorías aunque argumenta que existen tramos más y menos líquidos dentro de la curva, por lo que la *term structure* no solo debe reflejar las expectativas de mercado y ofrecer un prima de riesgo por estar posicionado más o menos largo dentro de la curva, sino que esta prima debe ser lo suficiente positiva o negativa como para inducir a que los inversores que se ubican en los tramos menos líquidos, se vuelquen a las partes con mayor liquidez de la *term structure*.
- ***Market Segmentation Theory:*** esta teoría sostiene que existe una marcada segmentación dentro de la curva, ya sea por las mismas preferencias de los inversores o por cuestiones regulatorias. Entonces, argumenta que la forma de la *term structure* se explica por la oferta y demanda de instrumentos en cada tramo en particular de la curva.

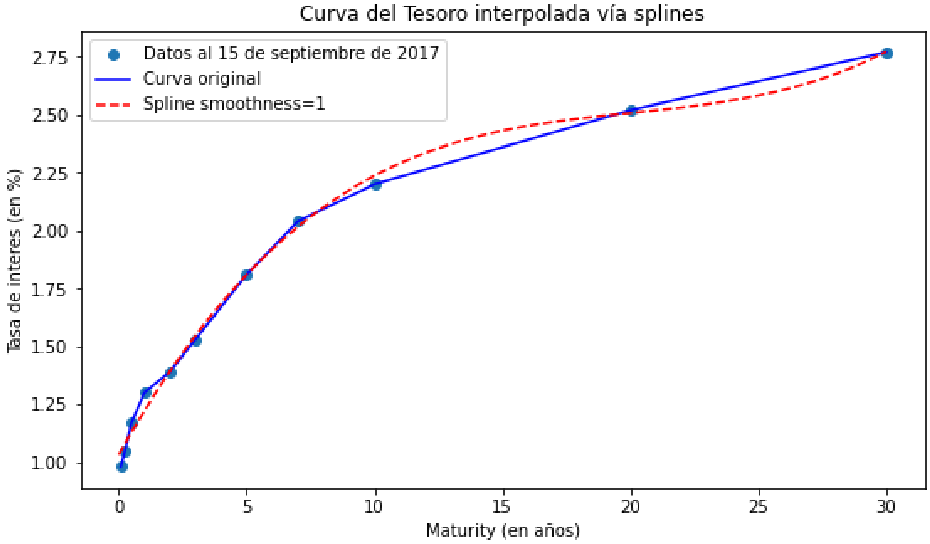
La *term structure* presentada en el ejemplo anterior no cuenta con mucha suavidad en su forma, por lo que podría traer problemas en la valuación de instrumentos de renta fija. A su vez, el conjunto de plazos del instrumento a valuar puede no estar disponible para la *term structure* con la que contamos. En este caso, no podríamos descontar los flujos de pagos del instrumento, es decir, no estaríamos en condiciones de valuarlo. Para lidiar con este inconveniente, existen una serie de métodos útiles para completar los “trozos faltantes” de la *term structure* que vamos a utilizar.

En primer lugar, existe el método de *bootstrapping*, el cual es un método iterativo que permite obtener la curva cero a partir de datos reales de mercado. Esta forma de estimar la curva de descuento pertenece a la familia de métodos de estimación no paramétrica. La mayor ventaja de este método radica en que a partir de unos pocos datos, se puede derivar una *term structure* completa. No obstante, la curva resultante puede carecer de suavidad, llevándonos a imprecisiones en la valuación del instrumento en cuestión.

Posteriormente, se encuentran los métodos de estimación paramétrica y permiten una estimación más suave de la curva de descuento mediante la utilización de un número acotado de parámetros. Dentro del conjunto de estimaciones paramétricas, tenemos las familias de funciones lineales como el método de *splines*. Éstas últimas son funciones del tipo C2 en todo su dominio. La principal ventaja de este método es que hace una suerte de *trade-off* entre el buen ajuste a los datos y la regularidad en la curva, siendo $f(u)$ la curva forward implícita en las tasas spots de los bonos cupón cero y α el parámetro que regula la suavidad y la bondad de ajuste de la curva con respecto a los datos.

$$\min_{f \in H}\left[\int_0^T \left(f'(u)\right)^2 du + \alpha \sum_{i=1}^{N} (Y_i T_i - \int_0^T f(u)\, du)^2\right] \ (3)$$

En la práctica son muy utilizadas, aunque es importante señalar que pueden existir ciertos desajustes de la curva con respecto a los datos en especial en la parte más corta de la curva. Cabe señalar que la Reserva Federal de los EE.UU. utiliza el método de *smoothing splines* para estimar la *term structure* de los bonos del Tesoro[1].



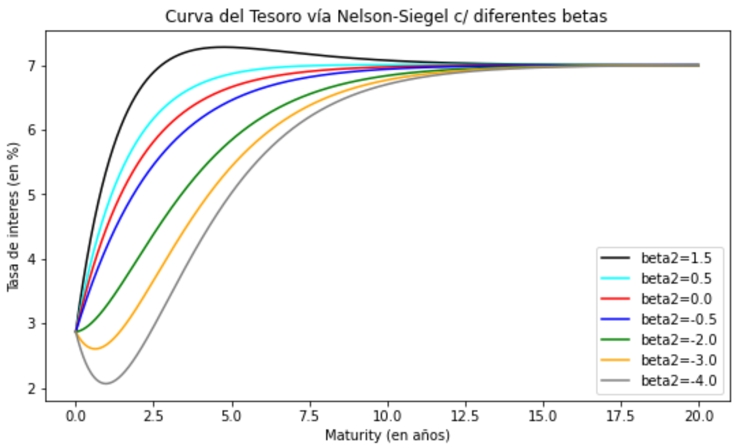
Fuente: Estimaciones propias en base al Departamento del Tesoro de EE.UU.

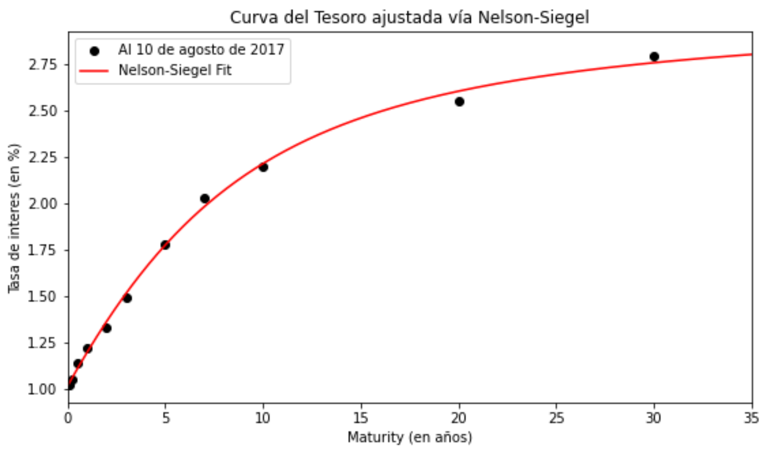
Otro método paramétrica muy común entre los bancos centrales es el de Nelson-Siegel, los cuales son una familia de funciones exponenciales. A la hora de estimar se utiliza la siguiente función:

$$\phi_{NS}(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 T)e^{\left(-\frac{T}{\tau_1}\right)} (4)$$

y se estiman los parámetros β_s y el τ. A partir de los distintos valores que se pueden tomar para los parámetros, se puede ajustar la curva a los datos observados en la realidad. A su vez, la curva de Svensson resulta una extensión de la ecuación de Nelson-Siegel y dota de mayor flexibilidad a la estimación dado que permite dos tiempos de decaimiento mediante el segundo término exponencial:

$$\phi_{NS}(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2 T)e^{\left(-\frac{T}{\tau_1}\right)} + \beta_3 T e^{\left(\frac{-T}{\tau_2}\right)} \ (5)$$



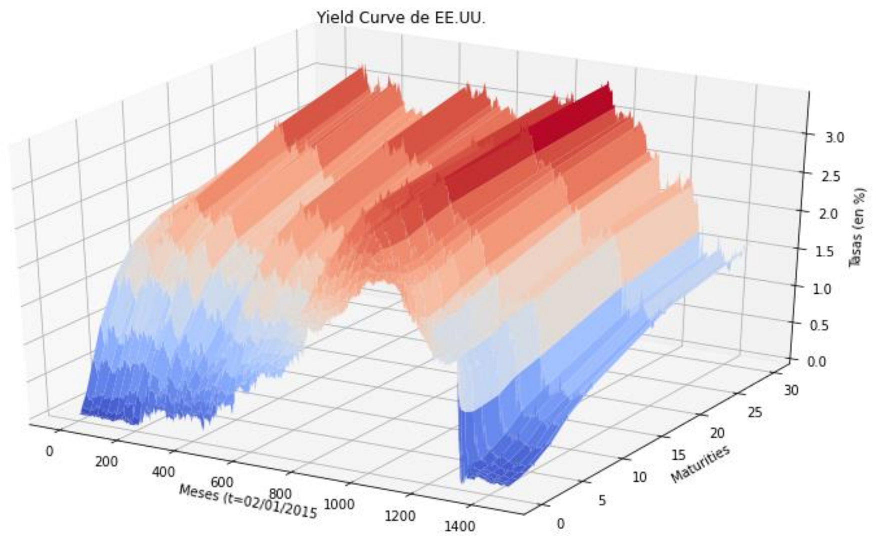


[1] Ver Zero-coupon yield curves: technical documentation, BIS Papers No 25, October 2005

Fuente: Estimaciones propias

Volviendo al método de valuación mediante la partición de los *cashflows*, podemos valuar el mismo instrumento de antes -3-Year Note- utilizando la curva de tasas publicada por el Departamento del Tesoro de EE.UU. para el día de la valuación que será el de la emisión de la *T-Note* en cuestión, 15 de septiembre de 2017. Dada la *indenture* de este título, sabemos que es un bono con cupón semianual (todos los 15 de marzo y 15 de septiembre de cada año). Asimismo, se asume que la convención de días será del tipo *Actual*/360. De esta manera, la 3-Y Note que antes nos había arrojado un precio de 99,63 por cada 100 unidades de valor nominal, ahora obtenemos un valor de 102,46 por cada 100. ¿Por qué ocurre esto? Fundamentalmente porque la curva de tasas del Tesoro en se encontraba levemente por debajo del cupón, en especial en los primeros desembolsos.

Si bien en algunos casos, se podría tener a disposición una curva de tasas publicada por un organismo oficial como en el caso anterior o contar con algunos tramos de la curva, no siempre puede ser este el caso, dependerá en gran medida cuán líquidos sean los instrumentos con los que estamos trabajando. Por otra parte, también podemos completar los faltantes mediante *bootstrapping* o alguno de los otros métodos que mencionamos más arriba. Más allá de esto, lo cierto es que solamente nos permiten valuar el instrumento en un momento del tiempo. Dado el gráfico de la *yield curve* de los últimos 5 años, tenemos una evidencia clara de que la misma no se mantiene constante a lo largo del tiempo, sino todo lo contrario. existe una manera más interesante de construir una *term structure* y así valuar cualquier bono. Para este punto podemos utilizar alguno de los modelos de tasa corta, generar precios de ZCB y construir una *yield curve* a partir de estos precios. Además, valiéndonos de esta clase de modelos podemos relajar completamente el supuesto de tasas de interés constantes, por lo que la valuación del activo se vuelve más interesante.



Fuente: Estimaciones propias en base al Departamento del Tesoro de EE.UU.

Los modelos de tasa corta describen la evolución estocástica de la tasa de interés instantánea $r(t)$ La tasa de interés contínuamente compuesta anualizada a la que se presta dinero por un plazo infinitesimal, en el *money market*. Particularmente, los modelos de tasa corta de un solo factor, es decir, con una sola fuente de incertidumbre, la cual sigue un proceso Browniano.

Sea una tasa corta $r(t)$ que sigue un proceso Browniano $W(t)$, podemos imaginar una martingala de la siguiente forma:

$$r(t) = \sigma_r W(t) \; (6)$$

en donde $\sigma_r > 0$ y $W(t)$ es un proceso Browniano en un mundo de riesgo neutral. Asimismo, para tener un buen ajuste con los datos observados del mercado, los modelos de tasa corta de un factor incorporan un término determinístico. De esta manera, la dinámica de la tasa corta queda explicada por:

$$dr(t) = u(t,r)dt + w(t,r)dW^* \ (7)$$

Como asumimos que estamos en un mundo de riesgo neutral, sabemos que la ecuación de los ZCB es:

$$P(t,T) = E_t^Q\left(e^{-\int_t^T r(u)du}\right) \ (8)$$

Simplificando la notación, si $R(t,T)$ es la tasa de interés continuamente compuesta en t para un intervalo $T-t$, entonces:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \ (9)$$

despejando,

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} \ (10)$$

Con esta última ecuación, podemos obtener la *term structure* de la tasa de interés para cada instante del tiempo t , para ser obtenido a partir del valor de r en ese momento y asumiendo neutralidad al riesgo. Los tres modelos de tasas corta de un factor más conocidos son el de Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross y Ho & Lee. En este trabajo, vamos a utilizar el segundo dado que posee reversión a la media, lo cual es un supuesto bastante realista dado el comportamiento de la tasas de interés, y el ZCB tiene solución analítica. Entonces, la ecuación de la tasa del modelo CIR queda definida de la siguiente manera:

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dW^* \ (11)$$

que genera la ecuación de precio de los ZCB:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \ (12)$$

donde

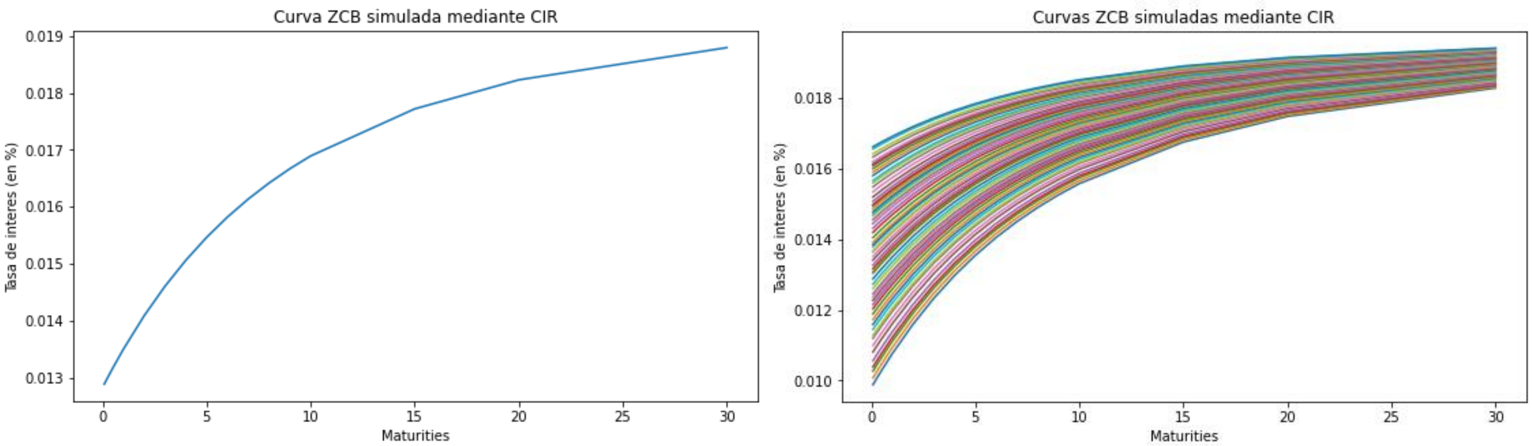
$$B(t,T) = \frac{2\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right)}{(\gamma+a)(e^{\gamma(t-t)} - 1) + 2\gamma} \ (13)$$

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}\right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \ (14)$$

con $\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$

lo que nos deja que la tasa de los ZCB al momento t para un intervalo $T-t$ es:

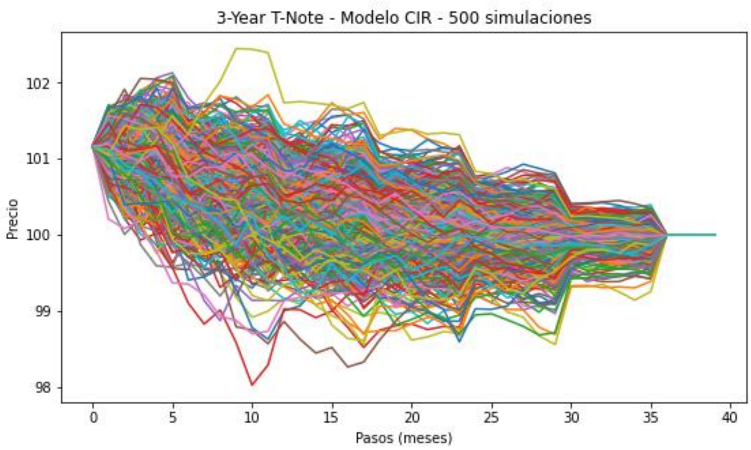
$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln\left(A(t,T) + \frac{1}{T-t}B(t,T)r(t)\right) \ (15)$$

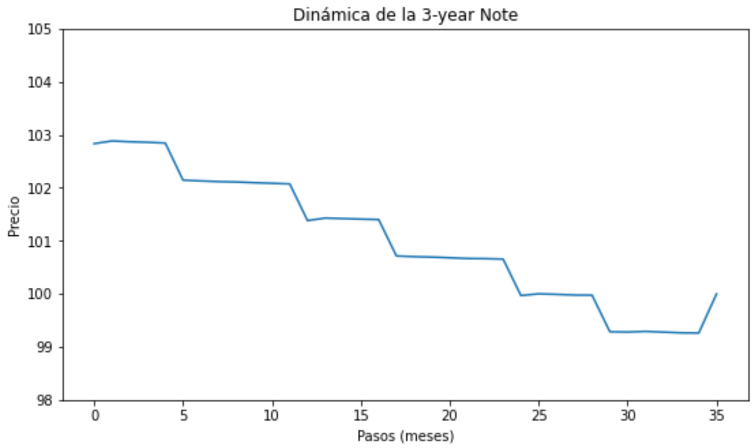


Fuente: Estimaciones propias

Para llevar adelante la simulación en Python, utilizamos la serie histórica de la *3-month Treasury Bill* que publica la Reserva Federal de *St. Louis* (FRED), la cual suele ser utilizada por los analistas del como curva de cupón cero o *benchmark*. Además, asumimos que el valor de largo plazo de la tasa b es 2%, mientras que suponemos que el parámetro a, el cual mide la velocidad de la tasa con respecto a su valor de largo plazo, es igual a 0,2. De acuerdo con el promedio de los últimos 10 años, el valor de sigma es igual a 0,0076. Por su parte, tomamos como valor inicial de la tasa $r(0)$ el dato de la *3-month T-Bill* observada el 9 de septiembre de 2017, día de la emisión de la 3-Y Note: 0,98%. Para tener una cantidad fiable de datos, aplicamos el método de Montecarlo y realizamos 500 simulaciones de la evolución de la tasa mensual, al tiempo que establecemos un horizonte temporal de 5 años para adelante, implicando 60 pasos de la tasa para calcular en cada una de las simulaciones.

De esta manera, no solo calculamos la evolución de la tasa corta y su valor promedio, sino que también obtenemos las distintas *term structures* que se obtienen para cada valor promedio de la *3-month T-Bill*. Como vemos en el gráfico de más arriba, la forma de la curva obtenida para uno de los valores de la tasa promedio es compatible con alguna de los posibles variantes que se pueden obtener del modelo[2]. A partir de la ecuaciones (15), es que el nivel de la *term structure* en el tiempo t obtenida es linealmente dependiente del valor que toma la tasa $r(t)$ en el momento t, mientras que la forma de la curva independiente de esta última pero en cambio sí depende de t .





Fuente: Estimaciones propias

En cuanto a la valuación de la 3-Year Note, en el primer gráfico de la izquierda tomamos como tasa de descuento cada una de las tasas simuladas con el modelo CIR, es decir, "priceamos" el bonos del Tesoro mediante una tasa fija de descuento. Lo más interesante que resulta de este gráfico es que se puede visualizar claramente como a medida que nos acercamos hacia al vencimiento del papel, su valor va convergiendo a su *face value* o valor nominal, sea cual sea la trayectoria. Si bien este método no estaba incorrecto, lo cierto era que nos podíamos valer de la curvas de descuento de los ZCB generados y así incrementar la precisión a la hora de valuar. Entonces, a partir de la curva cero que simulamos para el día de la valuación del activo (9 de septiembre de 2017), descontamos los *cashflows* del bono y obtenemos un precio de 102,83 por cada 100, lo cual es bastante similar al precio que conseguimos descontando los pagos mediante la curva de tasas publicada por el Departamento del Tesoro de los EE.UU.

Como señalamos previamente, uno de las puntos más relevantes de añadirle un componente de estocasticidad a la tasa de interés es que la valuación del instrumento deja de ser estática y se vuelve dinámica. Esta idea puede apreciarse en el gráfico de la derecha, en donde utilizamos las *term structures* vigentes en cada step (mes) y fuimos descontando los pagos por su tasa

[2] Ver Hull J.C., Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall (2010), capítulo 30.

correspondiente dentro de la curva. Cabe destacar que para este punto, utilizamos el promedio de las tasas obtenidas del modelo CIR con el fin de que se pudiera observar de manera más clara la convergencia del título a su valor nominal a medida que se acerca a la maturity.

Cabe señalar que este proceso de modelado de una tasa corta, generación de precios de ZCB, derivación de las *term structure* y valuación del activo, puede ser hecho de la misma manera para el modelo de Vasicek y Ho & Lee, dado que estos la formulación de estos modelos es bastante similar y además, cuentan con una solución analítica para calcular los precios de los bonos cupón cero y derivación de las curvas de descuento. Otro enfoque válido sería el de construir un árbol binominal de tasa de interés y descontar los cashflows. Este último método no solo es útil para bonos comunes, sino que resulta fundamental para la valuación de bonos con opciones y también

	Tasa_constante	Yields_tesoro	CIR
3Y T-Note	99.63	102.46	102.83

Fuente: Estimaciones propias

¿Cómo afecta la tasa de interés al precio de un bono?

Dado que ya sabemos que es realista asumir que las tasas de interés del mercado no son constantes a lo largo del tiempo y que el hecho de suponer lo contrario tiene cierta incidencia en la valuación de cualquier bono. Entonces, tiene sentido preguntarnos de que otra manera afectan la evolución de las tasas de interés sobre el precio del bono. En general, existen cuatro relaciones fundamentales entre un cambio en la tasa de interés y un cambio en el precio de un bono:

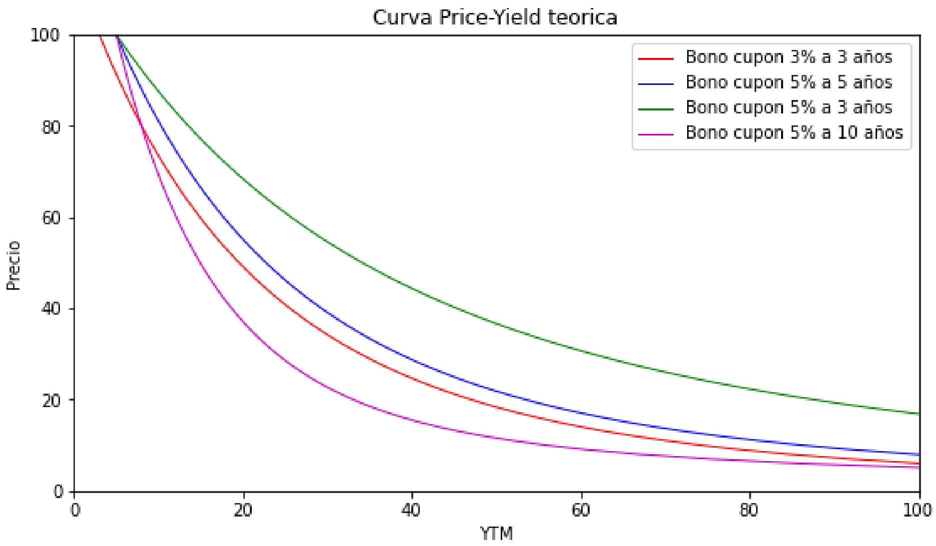
- **Efecto inverso:** como señalamos previamente, el precio de un bono posee un relación inversa con la tasa de interés. Cuando las tasas suben, el precio del bono disminuye.
- **Efecto de convexidad:** para dos instrumentos con el mismo cupón e idéntica *maturity*, el cambio porcentual del precio es mayor cuando las tasas de descuento disminuyen en lugar de cuando se incrementen. Esto se explica por la relación no lineal presente entre el precio del bono y las tasas de interés, lo que se conoce como convexidad de un bono.
- **Efecto cupón:** Para la misma *maturity*, un instrumento con un cupón más bajo exhibe una variación porcentual mayor en comparación con un título con un cupón más alto. Este punto se deduce inmediatamente a partir de la fórmula de precio de cualquier bono.
- **Efecto maturity:** generalmente, los bonos más largos evidencian un mayor cambio porcentual que aquellos más cortos, ante un cambio en las tasas de mercado. De aquí se desprende la idea de que los títulos de mayor plazo exhiben una mayor volatilidad en su precio (mayor riesgo) siendo todo lo demás constante.

El Efecto inverso también aplica para la tasa interna de retorno o *yield to maurity* del bono. Esta medida de retorno está representada por la variable y es la constante que es la solución de esta ecuación para cualquier de sus dos variantes

Versión discreta: $P_t = \sum_{i=1}^{n}(1+y)^t C_{t_i} \quad (16.1)$

Versión continua: $P_t = \sum_{i=1}^{n} e^{(-yt_i)} C_{t_i} \quad (16.2)$

donde P_t es el valor de mercado del bono a tiempo t y C_t es el cupón que paga el bono en el momento t.



Fuente: Estimaciones propias

En el gráfico de la curva *price-yield* no sólo se puede observar la relación inversa entre el precio y la tasa, sino también la relación no lineal explicada por la convexidad de la curva. También es importante remarcar que un aumento de la maturity de un bono incrementa la convexidad y hace que la curva sea más empinada. Entonces, es evidente que existe una relación convexa y no lineal entre el precio de un bono y la *yield*, pero para medir con precisión cómo evolución ambas variables tenemos la medida de ***Duration***. Esta métrica permite medir la sensibilidad del precio del instrumento ante movimientos paralelos de toda la curva de rendimiento.

Utilizando la ecuación (16.2):

$$P_t = \sum_{i=1}^{n} e^{(-yt_i)} C_{t_i}$$

Derivando con respecto a y_{t_i}, obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} -t_i e^{(-yt_i)} C_{t_i} \quad (17)$$

dividimos la ecuación (17) por el precio y llegamos a la siguiente expresión:

$$D = -\frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} -t_i e^{(-yt_i)} C_{t_i}}{P} \quad (18)$$

La ecuación (18) se denomina ***Macaulay Duration*** y como puede observar no es otra cosa que el promedio ponderado por los distintos t_i de los *cashflows* en proporción del valor presente descontado del bono. En líneas generales, esta métrica representa el tiempo promedio que debemos aguardar para obtener el repago del principal del título. De aquí se deduce que un bono cupón cero, por definición, tiene una *Macaulay Duration* igual a su *maturity*. Entonces, a mayor *Macaulay Duration*, mayor es el riesgo de la tasa de interés. En lugar de haber utilizado la versión continuamente compuesta de la yield, podríamos haber tomado la versión discreta, derivado y hubiéramos llegado a la *Modfied Duration*.

$$MD = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{D}{1+y} \quad (19)$$

La ***Modfied Duration*** es una extensión de la primera y puede ser derivada tomando la versión discreta y expresando el rendimiento del bono en términos anuales. A diferencia de la primera, la *Modfied Duration* permite medir la sensibilidad del precio ante un cambio de 1% en la tasa de interés. Cabe destacar que ambas medidas están expresadas en unidades de tiempo, es decir, en años. Ambas medidas son la aproximación de primer orden del cambio porcentual del precio del bono y la tasa y son bastante útiles cuando las magnitudes de los mismos son pequeñas. Para variaciones de la tasa más grandes, se suele utilizar otra métrica ya que bonos con la misma *duration* pueden tener curvas *price-yield* completamente distintas. Por ello, tenemos la ***Convexity*** o **Convexidad**, la cual es una medida de la curvatura de los cambios de los precios dado que habíamos mencionado que la relación entre el precio y la tasa era no lineal.

La *Convexity* la definimos como:

$$Convexity = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} -t_i{}^2 e^{(-yt_i)} c_{t_i}}{P} \quad (20)$$

Al ser la derivada segunda del precio con respecto a la *yield*, la *Convexity* mide como cambia la curvatura de la relación del bono y la *yield* Si la *Duration* de un bono se incrementa a medida que sube la *yield*, decimos que el bono tiene una *Convexity* positiva, en otras palabras, el precio del título disminuirá en mayor cuantía con una baja de tasas de interés en comparación con un suba de las mismas. Por el contrario, si la *Convexity* es negativa quiere decir que la *Duration* de un bono se incrementa a medida que crecen las tasas, por lo que el precio el bono caerá en mayor medida ante una suba de tasa que en lugar de una baja de las mismas.

	Cupon	Maturity	Precio_tasa_2	Mac_duration	Mod_duration	Convexity	Precio_tasa_3	Precio_tasa_1
0	0	3	94.205	6.000	2.971	10.295	91.454	97.052
1	2	3	100.000	5.853	2.898	9.960	97.151	102.948
2	3	3	102.898	5.786	2.865	9.807	100.000	105.896
3	5	3	108.693	5.663	2.804	9.525	105.697	111.793
4	0	5	90.529	10.000	4.953	26.967	86.167	95.135
5	2	5	100.000	9.566	4.738	25.411	95.389	104.865
6	3	5	104.736	9.378	4.645	24.739	100.000	109.730
7	5	5	114.207	9.050	4.482	23.562	109.222	119.461
8	0	7	86.996	14.000	6.937	51.494	81.185	93.256
9	2	7	100.000	13.134	6.508	47.266	93.728	106.744
10	3	7	106.502	12.780	6.333	45.540	100.000	113.489
11	5	7	119.506	12.188	6.039	42.650	112.543	126.977

Fuente: Estimaciones propias

En condiciones normales, cuanto mayor resulta el cupón del bono, menor será la *Convexity* del mismo, es decir, existe un menor riesgo de tasa de interés para un inversor cuanto más elevado resulta el cupón. Esto se debe a que las tasas se deben incrementarse significativamente para incidir sobre el rendimiento del título. Esto puede verse en el gráfico anterior que compara las curvas *price-yield* para bonos con distintos cupones. En particular, considerando una maturity de 3 años, el instrumento con un cupón igual a 5% posee una menor convexidad en su curva en relación al título con un cupón de 3%. Este mismo punto puede verse en la tabla presentada a continuación, para los papeles con la misma maturity pero distintos cupones. En consecuencia, los ZCB son aquellos instrumentos con el mayor grado de *Convexity* dado que como señalamos al comienzo, los mismos no realizan ningún desembolso hasta su maturity.

Conclusión

Sin dudas, los bonos son unos de los instrumentos financieros más importantes por lo que su correcta valuación resulta fundamental, en especial para instituciones financieras que cuentan con grandes posiciones en estos instrumentos. Como vimos a lo largo del trabajo, si bien la forma de calcular el precio de un bono descontando los cahsflows mediante una tasa constante era correcta, existen algunos métodos más sofisticados que dotan de mayor precisión a la hora de valuar. Más allá de que la posibilidad de construir una curva de descuento puede no ser factible en algunas situaciones debido a la falta de liquidez y profundidad en algunos mercados.

No obstante, la utilización de modelos de tasas de interés aporta un herramienta útil a la hora de valuación. Asimismo, el levantamiento del supuesto de tasas de interés constantes aporta una nueva dimensión en la valuación no solo de bonos sino también del resto de los instrumentos de renta fija dado que dejamos de lado una valuación estática y podemos llevar a adelante una valuación dinámica y analizar cómo fluctúa el valor del bono a lo largo de su vida.

Dado el levantamiento de este supuesto, resulta fundamental contar con métricas, como la *Duration* y *Convexity*, que nos permitan cuantificar y analizar el riesgo de tasa de interés sobre nuestra cartera de bonos y cómo cambia según las distintas clases de bonos que puede llegar a tener nuestra cartera. De esta manera, es posible manejar de una forma más eficiente el riesgo y evitar grande pérdidas.

Bibliografía

- Alexander Carol, Market Risk Analysis Volume III: Pricing, Hedging and Trading
- Financial Instruments, John Wiley & Sons Ltd, 2008
- Andersen, Leif B.G., and Vladimir V. Piterbarg. Interest rate modeling. Vol. 3, London: Atlantic Financial Press, 2010
- Fabozzi Frank, The Handbook of Fixed Income Securities, McGraw-Hill, 2005
- Filipovic Damir, Term-Structure Models: A Graduate Course, Springer, 2009
- Hull J.C., Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall, 2010
- Petitt Barbara S, Fixed Income Analysis, Wiley, 2019
- Weiming James Ma, Mastering Python for Finance, Packt Publishing, 2015
- Wilmott Paul, Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance, Wiley, 2007