

**Universidad del CEMA**

**PROGRAMA EN FINANZAS CUANTITATIVAS**

---

**INFORME FINAL**

---

**MODELO DE SALTOS PARA TRAYECTORIAS DE EQUITY  
Y VALUACION DE OPCIONES**

---

*Gechidjian, Pablo Martin*

**Noviembre 2020**

## Contenido

<b>1.</b>	<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>3</b>
<b>2.</b>	<b>DINÁMICA DEL ACTIVO SUBYACENTE.....</b>	<b>4</b>
<b>3.</b>	<b>VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN SOBRE UN ACTIVO CON SALTOS.....</b>	<b>7</b>
<b>4.</b>	<b>OBTENCIÓN DE UNA FÓRMULA PARA EL VALOR DE LA OPCIÓN .....</b>	<b>12</b>
<b>5.</b>	<b>CASO: SALTOS CON INTENSIDAD LOGNORMAL .....</b>	<b>14</b>
<b>6.</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN.....</b>	<b>15</b>
<b>7.</b>	<b>ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD .....</b>	<b>17</b>
<b>7.1</b>	<b>ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD SIMPLE.....</b>	<b>18</b>
7.1.1	Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ).....	18
7.1.2	Precio de la Opción vs. Tasa de Ocurrencia Promedio de Saltos ( $\lambda$ ).....	18
7.1.3	Precio de la Opción vs. Intensidad Media de los Saltos ( $\beta$ ).....	19
7.1.4	Precio de la Opción vs. Desvío de la Intensidad de los Saltos ( $D$ ).....	19
7.1.5	Precio de la Opción vs. Tiempo a Expiración ( $TTM = T - t$ ) .....	20
7.1.6	Precio de la Opción vs. Volatilidad ( $\sigma$ ) .....	20
<b>7.2</b>	<b>ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD MÚLTIPLE .....</b>	<b>21</b>
7.2.1	Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ) vs. Intensidad Media de Saltos ( $\beta$ ).....	21
7.2.2	Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ) vs. Desvío de la Intensidad de los Saltos ( $D$ ).....	21
7.2.3	Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ) vs. Tasa de Arribo Promedio de Saltos ( $\lambda$ ) .....	22
7.2.4	Precio de la Opción vs. Intensidad Media de Saltos ( $\beta$ ) vs. Tasa de Arribo de Saltos ( $\lambda$ ) .....	22
7.2.5	Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ) vs. Tiempo a Expiración ( $TTM = T - t$ ) .....	23
7.2.6	Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ) vs. Volatilidad ( $\sigma$ ) .....	23
<b>8.</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>24</b>

## 1. Introducción

En ocasiones las trayectorias de cotización de instrumentos financieros abiertamente comercializados en mercados quedan insuficientemente explicados por un movimiento browniano geométrico.

Sea debido a anuncios políticos, grandes noticias, o más general, eventos extremos no anticipados; la manifestación de este fenómeno podría llegar a rastrearse, en el fondo, a un único factor: los imprevistos de mercado que devienen en relativamente <<rápidas>> correcciones de mercado en la trayectoria, donde no es volatilidad lo que se observa, sino que lisa y llanamente discontinuidades discretas en la trayectoria browniana previamente continua hasta el instante del salto.

Robert Merton [Merton p.241] destacó que la información novedosa causante del salto es usualmente propia del activo o a lo sumo de la industria o sector en la que la compañía se desempeña (puntualmente el caso de *equity*). Algunos ejemplos de eventos que podrían provocar saltos: descubrimiento de un yacimiento petrolífero; una presentación de balance al final de un trimestre que fue mejor o peor de lo anticipado; el fallo de un juicio en el que la compañía se viera implicada (a favor o en contra); el anuncio del default de obligaciones negociables; etc., existen tantos ejemplos como imprevistos u anuncios relativamente importantes uno pueda pensar. En estos casos, el riesgo inherente al salto es propio del activo (no es un riesgo sistemático del mercado), y por lo tanto diversificable, por lo que el mercado no premiará a un inversor que incurra en este tipo de riesgo [Merton p.246]. Eso último será fundamental al intentar valorar un derivado de este activo.

En el presente informe se esbozan los fundamentos a tener en cuenta al lidiar con un movimiento browniano geométrico que incluye una componente de saltos discretos, dada la naturaleza del fenómeno, que ocurren en instantes aleatorios. Este tipo de procesos se llaman de salto-difusión ("*jump-diffusion processes*" como es habitual encontrarlos en la literatura en inglés).

Dentro de los procesos con saltos, hay algunas variantes que es conveniente aclarar de antemano; existen los procesos:

- Con una componente de difusión y finitos saltos en intervalos acotados de tiempo;
- Con componente de difusión e infinitos saltos en intervalos acotados de tiempo;
- De saltos puros (el proceso únicamente se manifiesta a través de una sucesión de saltos, y se mantiene constante entre ellos).

La enumeración anterior bajo ningún concepto es taxativa, pero son las variantes principales. En esta presentación nos enfocamos en el primer caso: saltos finitos con difusión.

## 2. Dinámica del activo subyacente

El caso más básico de proceso de saltos es aquel en el cual el tiempo entre saltos está distribuido exponencialmente, por lo que los saltos arriban de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  (la misma que la del tiempo entre arribos distribuido exponencialmente). Los saltos con arribo Poisson, tienen intensidad constante igual a 1; sin embargo, pretender que todos los imprevistos del mercado tengan el mismo efecto en la trayectoria es inverosímil, por lo que se trata el caso de saltos con intensidad aleatoria, por lo que se dice que el arribo de dichos saltos sigue un proceso de Poisson compuesto.

Para ejemplificar, sabemos que un proceso de Poisson es un proceso de conteo en un intervalo continuo:

$$N(t) = \text{"Cant. de arribos entre 0 y } t \text{"} \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

En el caso de un proceso de Poisson compuesto en el cual todos los saltos:  $\forall i \in \mathbb{N}$ :  $Y_i$  son independientes e idénticamente distribuidos y además todos independientes de  $N(t)$ , se puede escribir el proceso compuesto como:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0$$

que nos dice el estado del proceso de saltos a tiempo  $t$ . Los modelos de saltos difieren según la distribución adoptada para modelar la intensidad de dichos saltos. El más conocido es el modelo de Robert Merton, donde  $1 + Y_i \sim \text{LogNormal}$  (recordar que esto es equivalente a  $\ln(1 + Y_i) \sim \text{Normal}$ ), y otro modelo conocido es el de S.G. Kou, donde  $\ln(1 + Y_i) \sim \text{DobleExponencial}$  sigue una distribución doblemente exponencial con ciertas restricciones. Algunas propiedades útiles para más adelante:  $\mathbb{E}[dN_t] = \lambda dt$  y  $\mathbb{E}[dQ_t] = \mathbb{E}[Y_i] \lambda dt = \beta \lambda dt$ .

Tal como fue expresado  $Q(t)$ , las unidades de  $Y_i$  son porcentuales, e  $Y_i > -1 \forall i \in \mathbb{N}$  de tal modo que  $1 + Y_i$  sea no-negativo para asegurar de que la trayectoria no tenga saltos que originen cotizaciones negativas. Habiendo hecha esta aclaración, podríamos pensar en agregar directamente este término al movimiento browniano geométrico y tendríamos el modelo buscado; sin embargo, nuestro nuevo proceso no puede tener "apuestas seguras" de manera sistemática, ya que se apartaría del fenómeno modelado; en otras palabras, la trayectoria del activo financiero al que se le incorpore la posibilidad de manifestar saltos debe mantener la condición de martingala  $\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_u] = S_u$ ,  $u \leq t$ .

El movimiento browniano geométrico con tendencia solo es una martingala bajo la medida de riesgo neutral, donde la componente de tendencia es la tasa libre de riesgo del mercado  $\mu = r$ , y como la suma de martingalas es martingala (por la linealidad de la esperanza condicional), basta con verificar que la componente de saltos lo sea.

No es el proceso de Poisson compuesto, sino (lo que se conoce como) el proceso compensado lo que presenta la propiedad de ser una martingala, como lo demuestra el siguiente teorema [Shreve. Vol. II p470].

**Teorema.** Sea  $Q(t)$  un proceso de Poisson compuesto; y  $\mathbb{E}[Y_i] = \beta$  la intensidad media de los saltos, entonces el proceso compensado:  $Q(t) - \beta\lambda t$  define una martingala.

Demostración: Debido a que el incremento en intensidad de saltos acumulados  $Q(t) - Q(s)$ , siendo  $0 \leq s < t$  es independiente de la filtración  $\mathcal{F}_s$  y tiene media  $\beta\lambda(t - s)$ , al plantear la condición de martingala sobre el proceso compensado en un instante futuro  $t$ , se obtiene que su mejor estimador para dicho instante, condicionada a la información disponible hasta el instante presente  $s$ , es su último valor observado.

Sin pérdida de generalidad:

$$\mathbb{E}[Q(t) - \beta\lambda t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[Q(t) - Q(s) + Q(s) - \beta\lambda t | \mathcal{F}_s] =$$

En el instante  $s$ ,  $Q(s)$  ya es un valor observado, por lo que coincide con su esperanza:

$$= \mathbb{E}[Q(t) - Q(s) | \mathcal{F}_s] + Q(s) - \beta\lambda t =$$

El incremento  $Q(t) - Q(s)$  es independiente de la filtración hasta  $s$  debido a la falta de memoria del proceso Poisson; esto significa que el conteo de arribos no depende del instante temporal, sino que del tiempo transcurrido entre 2 instantes:

$$= \beta\lambda(t - s) + Q(s) - \beta\lambda t = Q(s) - \beta\lambda s$$

Queda entonces demostrado que  $\mathbb{E}[Q(t) - \beta\lambda t | \mathcal{F}_s] = Q(s) - \beta\lambda s$ , satisfaciendo la condición de martingala, por lo que ahora podemos incorporarla a la trayectoria del activo. ■

El proceso de Poisson, y el proceso compuesto, son temporalmente homogéneos. Esto quiere decir que  $N(t) - N(s) = N(t - s)$  en distribución, y que el conteo no depende del instante del arribo, sino del tiempo transcurrido entre 2 instantes; y de igual manera ocurre para  $Q(t)$ . Se dice que el proceso “no tiene memoria” cuando presenta esta propiedad.

Al incorporar el proceso de Poisson compuesto compensado al movimiento browniano, la ecuación diferencial estocástica que rige el comportamiento de la trayectoria del activo queda:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + d(Q_t - \beta\lambda t)$$

con condición inicial  $S(0) > 0$ , ya que si  $S(0) = 0$ , entonces  $S(t) = 0 \forall t \geq 0$ . Como es sabido, el termino  $\sigma dW_t$  modela la incertidumbre de las fluctuaciones del retorno en condiciones normales de mercado, mientras que  $dQ_t$  pretende capturar las fluctuaciones anormales provocadas por los saltos.  $dW_t$  y  $dQ_t$  son procesos independientes.

En la medida de riesgo neutral  $\mu = r$ . Al reordenar términos:

$$dS_t = (r - \beta\lambda)S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t^- dQ_t$$

#### Nomenclatura

$S_t^-$  significa el valor de  $S_t$  continuo por izquierda, ya que si en  $t$  se da un salto,  $S_t^-$  registra el último valor de  $S_t$  hasta antes de pegar el salto.

La componente diferencial del proceso compuesto  $dQ_t$  debe interpretarse del siguiente modo:

$$dS_t = \begin{cases} (r - \beta\lambda)S_t dt + \sigma S_t dW_t, & \text{si no ocurre el salto en } t \\ (r - \beta\lambda)S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t - Y_i, & \text{si el } i - \text{ésimo salto ocurre en } t \end{cases}$$

Su solución, tomada de [Shreve. Vol. II p513] (**Teorema 11.7.3**) es:

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)t + \sigma W_t} \prod_{i=1}^{N(t)} (Y_i + 1)$$

(▷ En azul la distinción frente al movimiento browniano geométrico, usado en el modelo de Black-Scholes).

Demostración: Nos limitamos a demostrar que la solución presentada satisface la ecuación diferencial estocástica construida. La demostración consiste en expresar la solución como un producto de 2 procesos convenientemente y, aplicando la regla de Itô para el producto, llegar a la forma diferencial presentada.

Tomando  $X(t) = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)t + \sigma W_t}$  por un lado, y  $J(t) = \prod_{i=1}^{N(t)} (Y_i + 1)$ , de modo que pueda escribirse la trayectoria como el producto  $S(t) = X(t)J(t)$ ; por la fórmula de Itô sabemos que la forma diferencial de  $X(t)$  se escribe:

$$dX_t = (r - \beta\lambda)X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

y por otro lado, en el instante del  $i$ -ésimo salto, la componente de saltos puros se expresa como los saltos acumulados (cantidad e intensidad) hasta el instante anterior del  $i$ -ésimo salto, más la intensidad del  $i$ -ésimo salto:

$$J_t = J_{t-} (1 + Y_i)$$

y por lo tanto, la variación en el proceso de saltos antes y después del  $i$ -ésimo salto puede expresarse:

$$\Delta J_t = J(t) - J(t - dt) = J_t - J_{t-} = J_{t-} (1 + Y_i) - J_{t-} = J_{t-} Y_i = J_{t-} \Delta Q_t$$

Esta última expresión también es válida en instantes en los que no se producen saltos, siendo 0 en ambos lados de la igualdad, por lo que en todo instante admite la forma diferencial:

$$dJ_t = J_{t-} dQ_t$$

La regla de Itô para el producto de 2 procesos  $A_t$  y  $B_t$  es:

$$d(A_t B_t) = A_t dB_t + B_t dA_t + d[A_t, B_t]$$

y en su forma integral:  $A_t B_t = A_0 B_0 + \int_0^t A_t dB_t + \int_0^t B_t dA_t + [A_t, B_t]$ , donde este último término es la variación cruzada o covariación entre ambos procesos. En nuestro caso, hay que

hacer un retoque al integrar respecto del proceso de saltos (el integrando será el proceso continuo por izquierda):

$$S_t = X_t J_t = S_0 + \int_0^t X_s - dJ_s + \int_0^t J_s dX_s + [X_t, J_t]$$

y además como el proceso de saltos puros  $J_t$  es constante a tramos salvo en un conjunto finito discreto (los instantes en los que se producen los saltos), la covariación con  $X_t$  es  $[X_t, J_t] = 0$ .

Finalmente, al reemplazar las expresiones para  $dX_s$  y  $dJ_s$  se consigue:

$$S_t = X_t J_t = S_0 + \int_0^t X_s - J_s - dQ_s + (r - \beta\lambda) \int_0^t J_s X_s ds + \sigma \int_0^t J_s X_s dW_s$$

cuya forma diferencial no es otra sino la ecuación diferencial estocástica intentábamos resolver:

$$\begin{aligned} dS_t &= d(X_t J_t) = X_t - J_t - dQ_t + (r - \beta\lambda) X_t J_t dt + \sigma X_t J_t dW_t = \\ &= S_t - dQ_t + (r - \beta\lambda) S_t dt + \sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

■

### 3. Valuación de una opción sobre un activo con saltos

Para valuar un contrato a tiempo  $t$ ,  $V(S_t, t)$ , con una estructura de pagos  $g(S_T)$  al vencimiento  $t = T$ , donde el subyacente presente una dinámica de salto-difusión, partiendo del Teorema Fundamental de la Valuación de Activos, se puede obtener el precio del contrato descontando en la medida de riesgo neutral el *payoff*  $g(S_T)$ , [a la tasa libre de riesgo]:

$$V(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Existen numerosas alternativas para llegar al valor de  $V(S_t, t)$ :

- Conociendo la dinámica del proceso bajo la medida de riesgo neutral, bastaría con resolver la ecuación de Fokker-Planck con los parámetros del proceso, para encontrar la distribución de probabilidad que gobierna el movimiento del proceso y con ella tomar la esperanza de  $g(S_T)$  en  $t = T$  y descontar el resultado a la tasa libre de riesgo  $r$ ;
- Usar la fórmula de Feynman-Kac para procesos con saltos;
- Usar el lema de Itô para procesos con salto, para encontrar la dinámica del derivado en todo momento. Este será el enfoque en lo que resta de la presentación.

El lema de Itô para funciones de procesos de salto-difusión es [R.Cont, P.Tankov, p.285 – Ch.08 – Prop. 8.19]:

$$V(S_t, t) = V(S_0, t_0) + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial V(S_{u-}, u)}{\partial S} dS_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 V(S_{u-}, u)}{\partial S^2} d[S, S]_u^c + \sum_{\substack{0 \leq u < t \\ S_u - S_{u-} \neq 0}} V(S_u, u) - V(S_{u-}, u) - (S_u - S_{u-}) \frac{\partial V(S_{u-}, u)}{\partial S}$$

*¡Traducción de lo último por favor!*

$$\sum_{\substack{0 \leq u < t \\ S_u - S_{u-} \neq 0}} V(S_u, u) - V(S_{u-}, t) - (S_u - S_{u-}) \frac{\partial V(S_{u-}, u)}{\partial S} = \sum_{i=1}^{N(t)} V((1 + Y_i)S_t, t) - V(S_{t-}, t) - ((1 + Y_i)S_{t-} - S_{t-}) \frac{\partial V(S_{t-}, t)}{\partial S}$$

#### Nomenclatura

$d[S, S]_t^c$  es la variación cuadrática de la parte continua de  $S_t$ , y en este caso vale  $d[S, S]_t^c = dS_t^c dS_t^c = \sigma^2 S^2 dt$ .

y su forma diferencial es:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + (V(S_t, t) - V(S_{t-}, t)) dN_t - S_{t-} \frac{\partial V}{\partial S} dQ_t$$

(► En azul las diferencias respecto del lema de Itô para la difusión pura, utilizada en el modelo de Black-Scholes)

Reemplazando la trayectoria del activo en el término de  $dS_t$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} dS_t &= \frac{\partial V}{\partial S} ((r - \beta\lambda)S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_{t-} dQ_t) = \\ &= (r - \beta\lambda)S \frac{\partial V}{\partial S} dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t + S_{t-} \frac{\partial V}{\partial S} dQ_t \end{aligned}$$

y la expresión de  $dV$ , al reacomodar términos queda:

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + (r - \beta\lambda)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left( \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW_t + S_{t-} \frac{\partial V}{\partial S} dQ_t + (V(S_t, t) - V(S_{t-}, t)) dN_t - S_{t-} \frac{\partial V}{\partial S} dQ_t$$

Siguiendo la línea de razonamiento del modelo de Black-Scholes, construimos un portafolio  $\Pi_t$  libre de riesgo (pronto veremos que erradicar el riesgo no es posible en presencia de saltos), por lo que evoluciona de acuerdo a  $d\Pi_t = r\Pi_t dt$ , que consista en  $\Delta$  unidades *long* (compradas) del subyacente  $S_t$ , y un *short* (venta [*en corto*]) del derivado  $V(S_t, t)$ :



$$\Pi_t = \Delta \cdot S_t - V(S_t, t)$$

y su dinámica temporal:

$$d\Pi_t = (r\Delta \cdot S_t - rV(S_t, t))dt = \Delta \cdot dS_t - dV$$

En el segundo miembro, al reemplazar en  $dS_t$  la dinámica del subyacente, y usar la expresión obtenida del lema de Itô para la variación del precio del derivado  $dV$  se tiene:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = \Delta \cdot & \left( (r - \beta\lambda)S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t - dQ_t \right) \\ & - \left( \left( \frac{\partial V}{\partial t} + (r - \beta\lambda)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left( \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW_t \right. \\ & \left. + (V(S_t, t) - V(S_{t-}, t))dN_t \right) \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left( \Delta \cdot (r - \beta\lambda)S - \frac{\partial V}{\partial t} - (r - \beta\lambda)S \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \\ & + \left( \Delta \cdot \sigma S_t - \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW_t + \Delta \cdot S_t - dQ_t - (V(S_t, t) - V(S_{t-}, t))dN_t \end{aligned}$$

(▷ En azul las diferencias respecto del modelo de Black-Scholes).

En el modelo de Black-Scholes elegiríamos  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  para eliminar el riesgo de mercado, dado por el término de  $dW_t$  y así compensar continuamente la fluctuación de mercado en condiciones normales, consiguiendo que  $\Pi_t$  sea efectivamente libre de riesgo; sin embargo, en este caso puede verse que no hay un valor de  $\Delta$  que elimine tanto el riesgo de mercado como el riesgo proveniente de los saltos simultáneamente, que son las 2 fuentes de riesgo en este modelo (una de mercado, y otra exclusiva del activo -los saltos-).

Por más de que  $\Delta / \Pi_t$  sea libre de riesgo (de ambas fuentes de riesgo), de todos modos se toma  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  para remover el riesgo de mercado, y además puede simplificarse también:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left( \frac{\partial V}{\partial S} \cdot (r - \beta\lambda)S - \frac{\partial V}{\partial t} - (r - \beta\lambda)S \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \cdot S_t - dQ_t \\ & - (V(S_t, t) - V(S_{t-}, t))dN_t \end{aligned}$$

Como el riesgo proveniente del salto es idiosincrático del activo, no se trata de un riesgo sistemático del mercado y por lo tanto es diversificable; es decir, el mercado no premiará el riesgo incurrido por un inversor; Merton plantea en este caso que: el portafolio  $\Pi_t$  no será libre de riesgo, pero tenga retorno esperado libre de riesgo:

$$\mathbb{E}[d\Pi_t | \mathcal{F}_t] = (r\Delta \cdot S_t - rV(S_t, t))dt = \left( rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV(S_t, t) \right) dt$$

y por otro lado:

$$\mathbb{E}[d\Pi_t|\mathcal{F}_t] = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} S_{t-} \mathbb{E}[dQ_t|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[(V(S_t, t) - V(S_{t-}, t))dN_t|\mathcal{F}_t]$$

Como  $N_t$  y  $Q_t$  son procesos Poisson y Poisson compuesto respectivamente, al ser temporalmente homogéneos son procesos “sin memoria” y por lo tanto independientes de la filtración  $\mathcal{F}_t$ ; por lo que, en el primer caso:  $\mathbb{E}[dQ_t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[dQ_t] = \beta \lambda dt$ ; y en el segundo caso: como en un proceso de Poisson compuesto como el estudiado, la intensidad del salto  $Y$  (tomamos  $Y$  independiente e idénticamente distribuida que  $Y_i \forall i \in \mathbb{N}$ ) es independiente del proceso de conteo  $N(t)$ , la esperanza condicional del producto es el producto de las esperanzas:

$$\mathbb{E}[(V(S_t, t) - V(S_{t-}, t))dN_t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[V(S_t, t) - V(S_{t-}, t)|\mathcal{F}_t] \mathbb{E}[dN_t|\mathcal{F}_t]$$

Al igual que  $Q_t$ ,  $N_t$  es independiente de la filtración:  $\mathbb{E}[dN_t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[dN_t] = \lambda dt$ . La variable  $Y$  se encuentra en  $S_t = (1 + Y)S_{t-}$  en el caso de que en un intervalo  $dt$  se produzca un salto con intensidad  $Y$ ; y la probabilidad de que esto ocurra es además  $\lambda dt$ . Al reemplazar:

$$\mathbb{E}[(V(S_t, t) - V(S_{t-}, t))|\mathcal{F}_t] \mathbb{E}[dN_t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[V((1 + Y)S_{t-}, t) - V(S_{t-}, t)|\mathcal{F}_t] \lambda dt =$$

La variable  $Y$  no depende de la información disponible hasta  $t^-$ :

$$= \mathbb{E}[V((1 + Y)S_{t-}, t) - V(S_{t-}, t)] \lambda dt$$

Regresando a la ecuación del valor esperado del rendimiento del portafolio y reemplazando:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[d\Pi_t|\mathcal{F}_t] &= \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} S \beta \lambda dt - \mathbb{E}[V((1 + Y)S_{t-}, t) - V(S_{t-}, t)] \lambda dt = \\ &= \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \beta \lambda S \frac{\partial V}{\partial S} - \lambda \mathbb{E}[V((1 + Y)S_{t-}, t) - V(S_{t-}, t)]\right) dt \end{aligned}$$

Como ademas:

$$\mathbb{E}[d\Pi_t|\mathcal{F}_t] = \left(rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV(S_t, t)\right) dt$$

Al igualar ambos miembros:

$$rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \beta \lambda S \frac{\partial V}{\partial S} - \lambda \mathbb{E}[V((1 + Y)S_{t-}, t) - V(S_{t-}, t)]$$

que al reordenar términos (pasar todo a un mismo miembro) se obtiene la ecuación integro-diferencial en derivadas parciales que determina el precio del contrato derivado  $V(S_t, t)$  como es habitual encontrarla en la literatura:

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \beta \lambda) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV + \lambda \mathbb{E}[V((1 + Y)S, t) - V(S, t)] = 0$$

Y más explícitamente, reordenando algunos términos:

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \beta\lambda) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - (r + \lambda) V + \lambda \int_{-1}^{+\infty} V((1+y)S, t) f_Y(y) dy = 0$$

(▷ En azul, las novedades respecto del modelo de Black-Scholes. Notar que si  $\lambda = 0$  -ausencia de saltos- se recuperaría este modelo de valuación de derivados).

sujeta a la condición de contorno de valor terminal igual al *payoff* del contrato derivado:

$$V(S_T, T) = g(S_T)$$

Y adicionalmente, si se trata de una opción tipo call, también está sujeto a que el contrato no tenga valor al anularse el precio del subyacente:

$$V(0, t) = 0$$

Por otro lado, para el caso particular de una opción tipo put, además de la condición de valor terminal, también el precio está sujeto a:

$$V(0, t) = K e^{-(T-t)}$$

$$\lim_{S_t \rightarrow +\infty} V(S_t, t) = 0$$

Por último, como es sabido, para un call  $g(S_T) = \max(S_T - K, 0)$  y para un put  $g(S_T) = \max(K - S_T, 0)$ .

#### A tener en cuenta

Algunos autores [Merton], [Kou] modelan el salto como el incremento porcentual total y usan directamente la variable  $U_i$ , donde  $U = 1 + Y$ ; en este informe se trabajó con la metodología de [Shreve] modelar el porcentaje  $Y_i$ . Al usar la variable  $U$ , el modelo queda  $Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i - 1$ ,  $t \geq 0$  con  $U_i$  iid e independiente de  $N(t)$ . La dinámica del activo se expresa de la misma manera, solo que  $Q(t)$  ahora se escribe diferente:

$$dS_t = (r - \beta\lambda) S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t - dQ_t$$

Es común encontrar la dinámica también en función del proceso de cuenta  $N(t)$  en lugar del proceso de Poisson compuesto, en cuyo caso debe agregarse la intensidad del salto en el instante  $t$ :  $Y_t$ , donde  $Y_t = 0$  en los instantes en los que no se produzca un salto:

$$dS_t = (r - \beta\lambda) S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t - Y_t dN_t$$

Y usando la variable  $U$ , también puede encontrarse en la literatura:

$$dS_t = (r - \beta\lambda) S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t - (U_t - 1) dN_t$$

Su solución en este caso se escribe:

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)t + \sigma W_t} \prod_{i=1}^{N(t)} U_i = U(n) S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)t + \sigma W_t}$$

Finalmente, la dinámica del instrumento derivado con la variable  $U = 1 + Y$ , luego de un cambio de variables y límites de integración  $Y \geq -1$  por lo que  $U \geq 0$  quedaría:

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \beta\lambda) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV + \lambda \mathbb{E}[V(US, t) - V(S, t)] = 0$$

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \beta\lambda) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - (r + \lambda)V + \lambda \int_0^{+\infty} V(uS, t) f_U(u) du = 0$$

#### 4. Obtención de una fórmula para el valor de la opción

Se define una variable aleatoria  $X_n$  que acumule el producto de  $n$  variables aleatorias  $Y_i$  iid, siendo  $Y_i$  la intensidad del  $i$ -ésimo salto; luego:

$$X_n = \prod_{i=0}^n (1 + Y_i) = \prod_{i=0}^n U_i, \quad X_0 \equiv 1$$

Usando

$$V(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g(S_T) | \mathcal{F}_t] =$$

(ya estamos en la medida de riesgo neutral, así que podemos omitir la especificación de la medida de probabilidad)

$$= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[ g \left( S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)T + \sigma W_T} \prod_{i=1}^{N(T)} (1 + Y_i) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = (*)$$

Aplicando el Teorema de la Esperanza Total:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ g \left( S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)T + \sigma W_T} \prod_{i=1}^{N(T)} (1 + Y_i) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ g \left( S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)T + \sigma W_T} \prod_{i=1}^n (1 + Y_i) \right) \middle| \mathcal{F}_t, N(T) = n \right] \mathbb{P}(N(T) = n | \mathcal{F}_t), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Como  $N(T)$  es el conteo de saltos ocurridos hasta la fecha de vencimiento  $t = T$ , la cantidad de saltos ocurridos entre  $t$  y  $T$  son  $N(T) - N(t)$ , pero como el proceso de Poisson tiene la propiedad de "falta de memoria" es homogéneo en el tiempo y por lo tanto:  $N(T) - N(t)$  tiene la misma distribución que  $N(T - t)$ ; y la probabilidad de que ocurran  $n$  eventos de Poisson en un intervalo de tiempo  $[t, T]$  es:

$$\mathbb{P}(N(T) = n | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(N(T-t) = n) = \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} e^{-\lambda(T-t)}$$

Luego:

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[ g \left( S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} X_n \right) \right] \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} e^{-\lambda(T-t)}$$

Observación: como la esperanza es condicional sobre la información disponible hasta  $t$ , entonces “parándonos en  $t^-$ ”, queda por ver cuántos saltos van a ocurrir entre  $t$  y  $T$  (que además son los únicos que repercutirán en el valor de la opción a partir de  $t$ ). Los saltos anteriores están “guardados” en  $S_{t^-}$ , y por eso ya no escribimos el movimiento del activo “desde  $t = 0$ , condicionada a la filtración  $\mathcal{F}_t$ ”. (traducción de esto último por favor! → “...condicionada a lo que sabemos que pasó hasta el instante  $t$  con el activo”).

Al reacomodar algunos términos, se obtiene una solución *parecida* a la solución que se presenta en [Merton, p.248]:

$$V(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} e^{-(r+\lambda)(T-t)} \mathbb{E} \left[ g \left( X_n S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} \right) \right]$$

(la esperanza debe tomarse sobre  $X_n$ ; y decimos que esta es *parecida* porque es apenas más general que la presentada en [Merton p.248], ya que no hemos especificado el payoff del derivado  $g(S_T)$  en esta línea de razonamiento).

La interpretación es inmediata: se trata de un promedio ponderado del valor esperado del *payoff* del contrato sabiendo que ocurren exactamente  $n$  saltos en lo que queda de vida útil del contrato. La ponderación está dada por la probabilidad de que ocurran exactamente esos  $n$  saltos, para cada  $n$  posible.

En [Merton p.248] se presenta que: tomando el valor de un call bajo el modelo de Black-Sholes; es decir, en ausencia de saltos:

$$V_{BS}(S, T-t, K, r, \sigma^2) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\left(\frac{h^2}{2}\right)} dh$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

el valor de dicho call en presencia de saltos será entonces:

$$V(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} e^{-(r+\lambda)(T-t)} \mathbb{E}[V_{BS}(S X_n e^{-\beta\lambda(T-t)}, T-t, K, r, \sigma^2)]$$

(la esperanza debe tomarse sobre  $X_n$ ).

En este punto todavía no se ha especificado una distribución para la intensidad de los saltos.

## 5. Caso: Saltos con intensidad Lognormal

En [Merton, pp.248-249] se plantea además el caso particular de que la intensidad de saltos  $U_i = 1 + Y_i \sim \text{LogNormal}$  de media  $\mathbb{E}[U_i] = \mathbb{E}[1 + Y_i] = 1 + \beta$  y varianza  $\text{Var}[U_i] = \text{Var}[1 + Y_i] = \text{Var}[Y_i] = D^2$ ; entonces, por la relación entre las distribuciones Lognormal y Normal, la variable:

$$Z_i = \ln(1 + Y_i) \sim \mathcal{N}$$

$$\mu_Z = \alpha = 2 \ln(1 + \beta) - \frac{1}{2} \ln(D^2 + (1 + \beta)^2)$$

$$\sigma_Z^2 = \theta^2 = -2 \ln(1 + \beta) + \ln(D^2 + (1 + \beta)^2)$$

(de modo que  $U_i = 1 + Y_i = e^{Z_i}$ , lo cual facilitará la implementación)

La ventaja de que la intensidad sea lognormal, hace que la variable construida  $X_n$ , al ser ahora producto de variables lognormales, también sea lognormal de parámetros:  $\mathbb{E}[X_n] = (1 + \beta)^n$  y varianza  $\text{Var}[X_n] = (D^2 + (1 + \beta)^2)^n - (1 + \beta)^{2n}$ ; sin embargo, por el Teorema Central del Limite, resulta más sencillo computar:  $\ln(X_n) \sim \mathcal{N}(n\alpha, n\theta^2)$ .

En este caso, el valor de una opción tipo call Europea toma la forma (aquí  $S = S_{t-}$ ):

$$c(S, T-t, K, r, \sigma^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(T-t))^n}{n!} e^{-\lambda(T-t)} \left( S e^{-\beta\lambda(T-t) + n\alpha + \frac{1}{2}n\theta^2} \Phi(d_{1,n}) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_{2,n}) \right)$$

siendo:

$$d_{1,n} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)(T-t) + n(\alpha + \theta^2)}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + n\theta^2}}$$

$$d_{2,n} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)(T-t) + n\alpha}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + n\theta^2}} = d_{1,n} - \frac{\sigma^2(T-t) + n\theta^2}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + n\theta^2}} =$$

$$= d_{1,n} - \sqrt{\sigma^2(T-t) + n\theta^2}$$

## 6. Implementación

Dado un intervalo  $[0; T]$ , una condición inicial  $S(0) = S_0$  y una cantidad de pasos  $M \in \mathbb{N}$ , el proceso:

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)t + \sigma W_t} \prod_{i=1}^{N(t)} U_i$$

se discretiza en pasos de tamaño  $\delta t = \frac{T}{M}$  bajo el siguiente esquema:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})} \prod_{j=N(t_i)+1}^{N(t_{i+1})} U_j$$

A tener en cuenta:

- $t_{i+1} - t_i = \delta t$ ;
- $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 = \delta t)$  por lo que  $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = R_1 \sqrt{\delta t}$ ,  $R_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ;
- $N(t)$  es un proceso de conteo temporalmente homogéneo, por lo que el conteo de saltos en el intervalo  $(t_i; t_{i+1}]$  es el mismo que el del intervalo  $(0; \delta t]$  por la propiedad de la falta de memoria:  $N(t_{i+1}) - N(t_i) = N(t_{i+1} - t_i) = N(\delta t)$ ; entonces ahora la probabilidad de que ocurra un salto en el intervalo de la discretización  $\delta t$  será  $\mathbb{P}(N(\delta t) = 1) = \frac{\lambda(\delta t)^1}{1!} e^{-\lambda t} = \lambda \delta t + \mathcal{O}(\delta t) \cong \lambda \delta t$  y además  $\mathbb{P}(N(\delta t) > 1) = 0$ , por lo que  $\mathbb{P}(N(\delta t) = 0) = 1 - \lambda \delta t$  es la probabilidad de no observar saltos en un paso de tamaño  $\delta t$ ;

De esta manera:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)\delta t + \sigma R_1 \sqrt{\delta t}} \prod_{j=1}^{N(\delta t)} U_j$$

Hasta aquí puede simularse el proceso sin especificar la distribución de la intensidad de los saltos. En el caso particular de que la intensidad  $U_j$  tenga distribución lognormal:

$$U_j = e^{Z_j}, \quad Z_j \sim \mathcal{N}(\alpha, \theta^2)$$

$$\ln \left( \prod_{j=1}^{N(\delta t)} U_j \right) = \sum_{j=1}^{N(\delta t)} \ln(U_j) = \sum_{j=1}^{N(\delta t)} Z_j$$

Como en este caso particular  $N(\delta t)$  solo puede valer 1 o 0, con probabilidad  $\lambda \delta t$  y  $1 - \lambda \delta t$  respectivamente, solo en este caso puntual vale:

$$\sum_{j=1}^{N(\delta t)} Z_j = N(\delta t) Z \sim \mathcal{N}(N(\delta t) \alpha, N(\delta t) \theta^2)$$

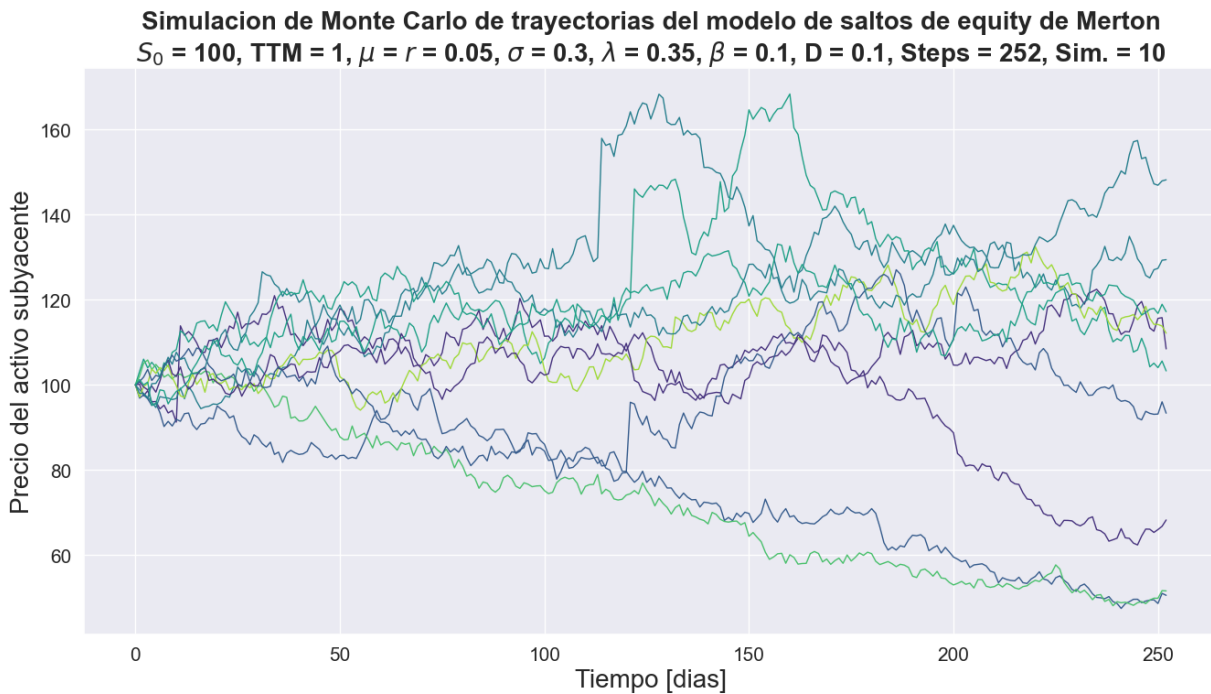
por lo que  $N(\delta t)Z = N(\delta t)\alpha + \theta R_2\sqrt{N(\delta t)}$ , con  $R_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ , y finalmente

$$\prod_{j=1}^{N(\delta t)} U_j = e^{\ln(\prod_{j=1}^{N(\delta t)} U_j)} = e^{N(\delta t)\alpha + \theta R_2\sqrt{N(\delta t)}}$$

quedando la discretización del proceso completo:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \beta\lambda\right)\delta t + \sigma R_1\sqrt{\delta t} + N(\delta t)\alpha + \theta R_2\sqrt{N(\delta t)}}$$

A continuación, se muestra una simulación de 10 trayectorias. Pueden apreciarse algunos saltos.



Por supuesto, cabe destacar que para valorar una opción de pago  $g(S_T)$ , basta con simular una cantidad de trayectorias de  $S_t$  tal que se obtengan resultados estables, donde cuyos saltos no necesariamente arriben de acuerdo a un proceso Poisson, ni sus saltos tengan necesariamente una distribución lognormal.

La clase `JumpDiffusionProcess()` proporciona instancias del proceso y la clase `Option()`, toma un proceso estocástico como argumento para valorar una opción donde el subyacente obedece la dinámica de dicho proceso.

El código Python está disponible como complemento del presente informe.



## 7. Análisis de Sensibilidad

Dado que la media y varianza entre el proceso con saltos y el movimiento browniano geométrico puro, usado en el modelo de Black-Scholes, a igualdad de condiciones en los parámetros que tienen en común  $r$  y  $\sigma$ , difieren según la parametrización de los saltos  $\lambda$ ,  $\beta$  y  $D^2$  (con  $\alpha$  y  $\theta^2$  asociados a  $\beta$  y  $D^2$ ), por supuesto aumentando la incertidumbre para este último caso, se tiene:

Parámetros	Movimiento Browniano Geométrico	Proceso de Salto - Difusión
$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \ln \left( \frac{S_t}{S_0} \right) \middle  \mathcal{F}_t \right]$	$\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$	$\left( r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\beta + \alpha\lambda \right) t$
$\text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[ \ln \left( \frac{S_t}{S_0} \right) \middle  \mathcal{F}_t \right]$	$\sigma^2 t$	$\sigma^2 t + \lambda(\alpha^2 + \theta^2) t$

Comparativamente, esto significa que si el mercado se comporta como un proceso de salto-difusión, pero un usuario ‘cree’ que la dinámica del activo es un movimiento geométrico puro (y por lo tanto, usa la fórmula de Black-Scholes), subvaluaría una opción al no contemplar el exceso de varianza global que aportan las características de los saltos  $\lambda(\alpha^2 + \theta^2)t$ , de modo que: al estimar la volatilidad implícita observaría  $\sigma_{\text{IMPLICITA}} > \sigma$ ; o bien, observaría una discrepancia entre su valor calculado según el modelo de Black-Scholes vs. aquel que proporcionaría una valuación considerando que el activo sigue un proceso de salto-difusión.

A modo comparativo, en la siguiente sección se presenta un análisis de sensibilidad simple (univariante) en los parámetros de la dinámica del subyacente bajo salto-difusión y el valor de una opción que sigue ese proceso; junto con el valor de la misma opción valuada según el modelo de Black-Scholes, a modo de referencia.

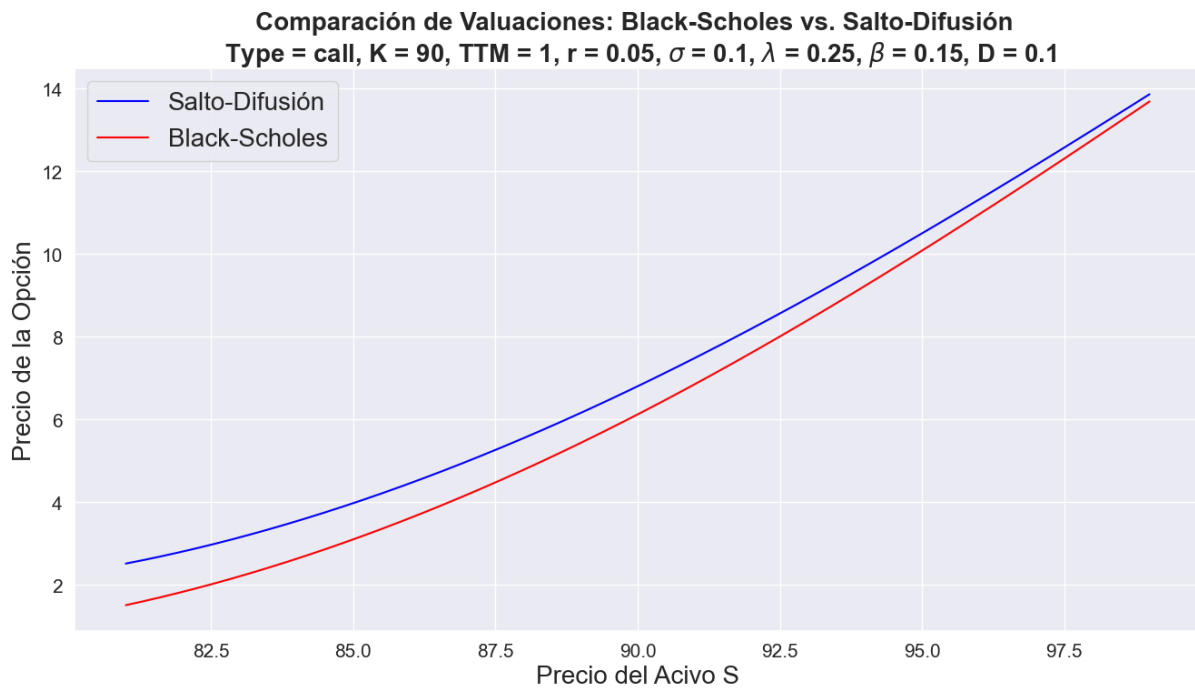
En la última sección se presenta un análisis de sensibilidad múltiple en donde puede visualizarse una superficie de precios de la opción al variar simultáneamente 2 parámetros del proceso de salto-difusión, revelando interacciones en los parámetros.

*Lamentablemente hay un bug en Matplotlib que no permite intersectar las superficies correctamente para dejar el modelo de Black-Scholes a modo de referencia en este último caso.*

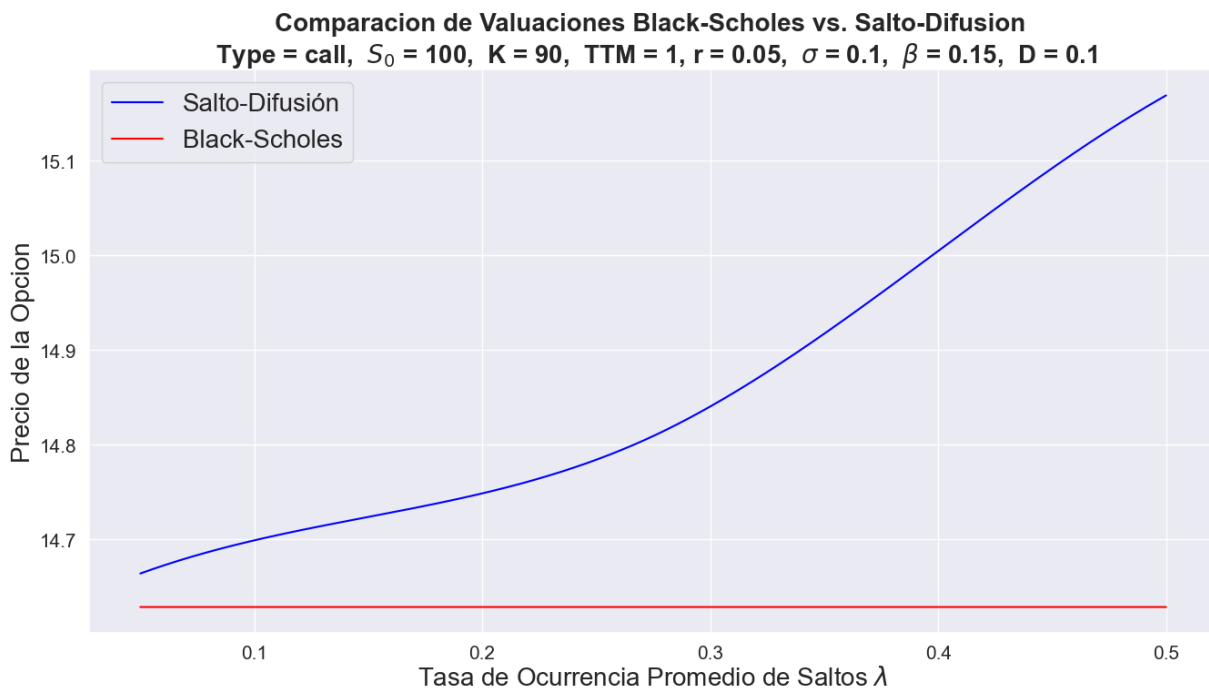
El código Python esta disponible como complemento del presente informe.

## 7.1 Análisis de Sensibilidad Simple

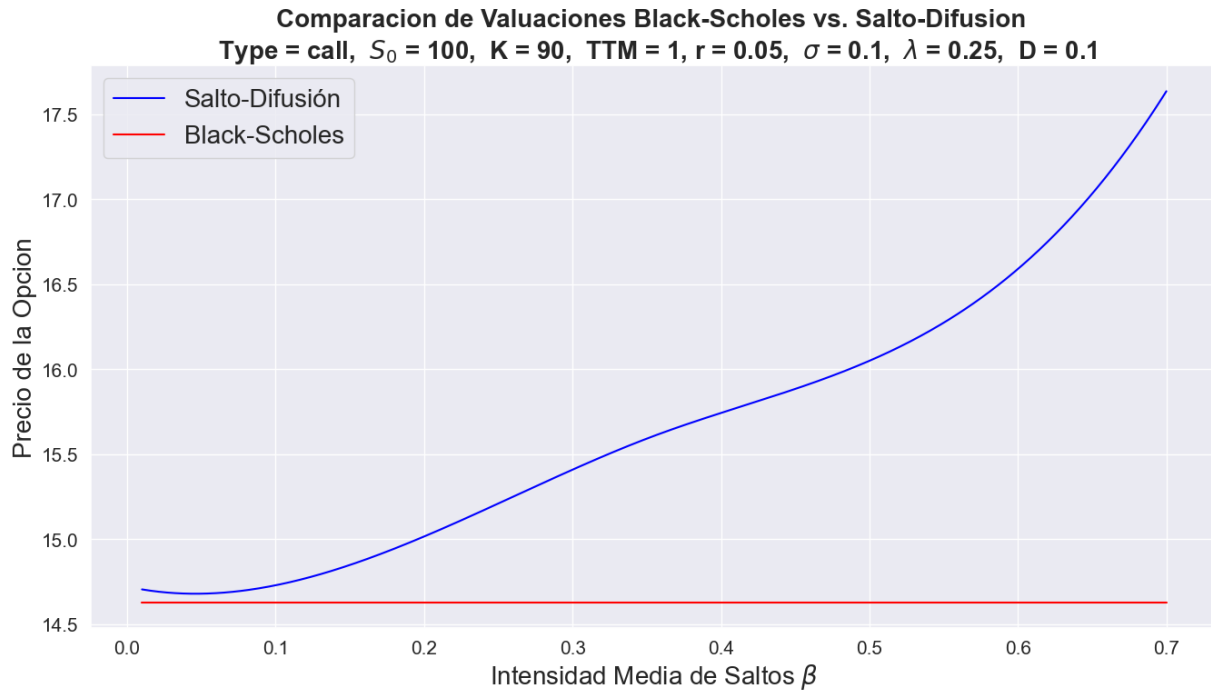
### 7.1.1 Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ )



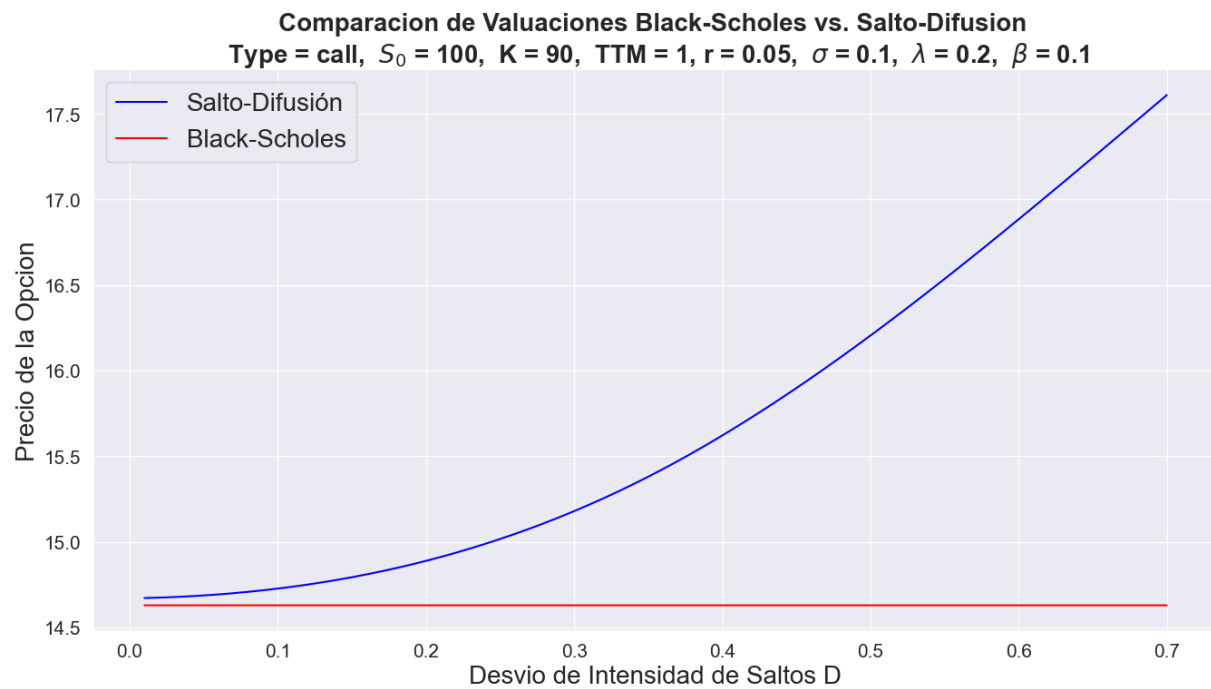
### 7.1.2 Precio de la Opción vs. Tasa de Ocurrencia Promedio de Saltos ( $\lambda$ )



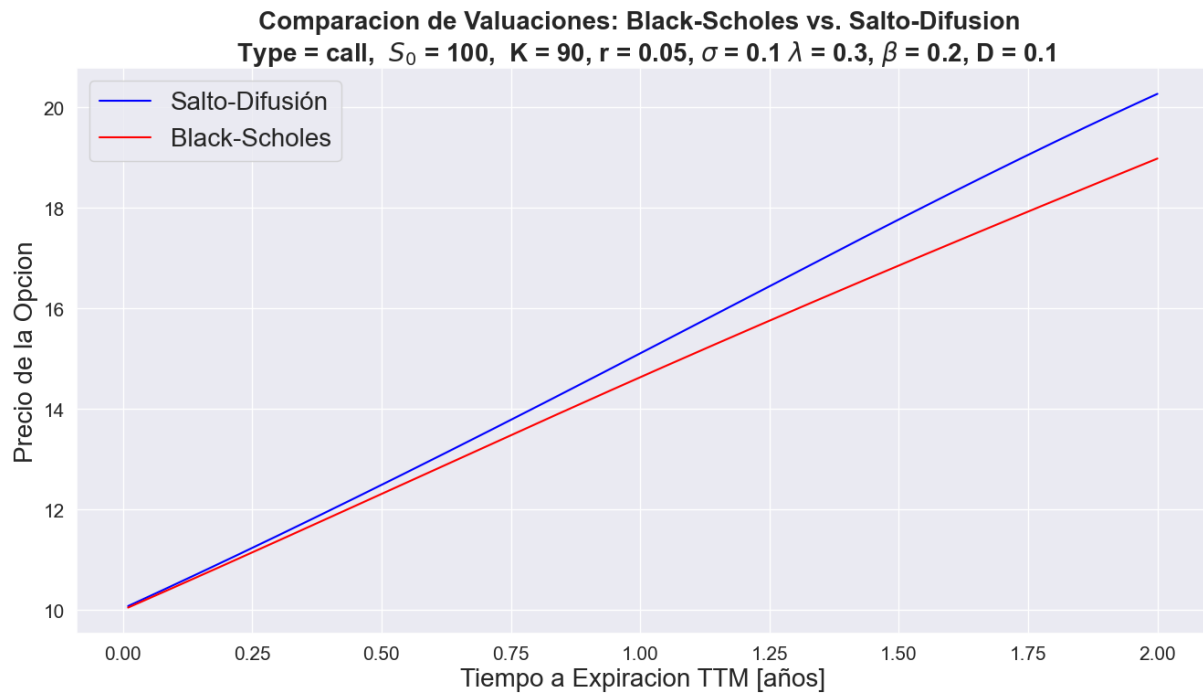
### 7.1.3 Precio de la Opción vs. Intensidad Media de los Saltos ( $\beta$ )



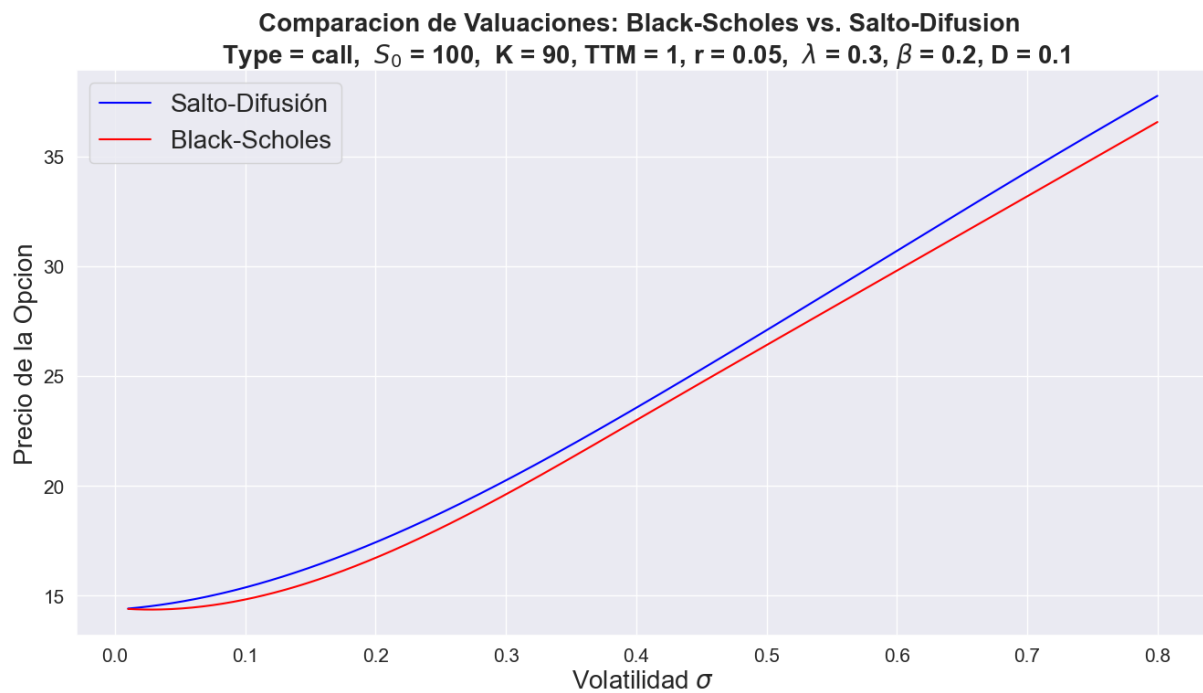
### 7.1.4 Precio de la Opción vs. Desvío de la Intensidad de los Saltos ( $D$ )



### 7.1.5 Precio de la Opción vs. Tiempo a Expiración ( $TTM = T - t$ )



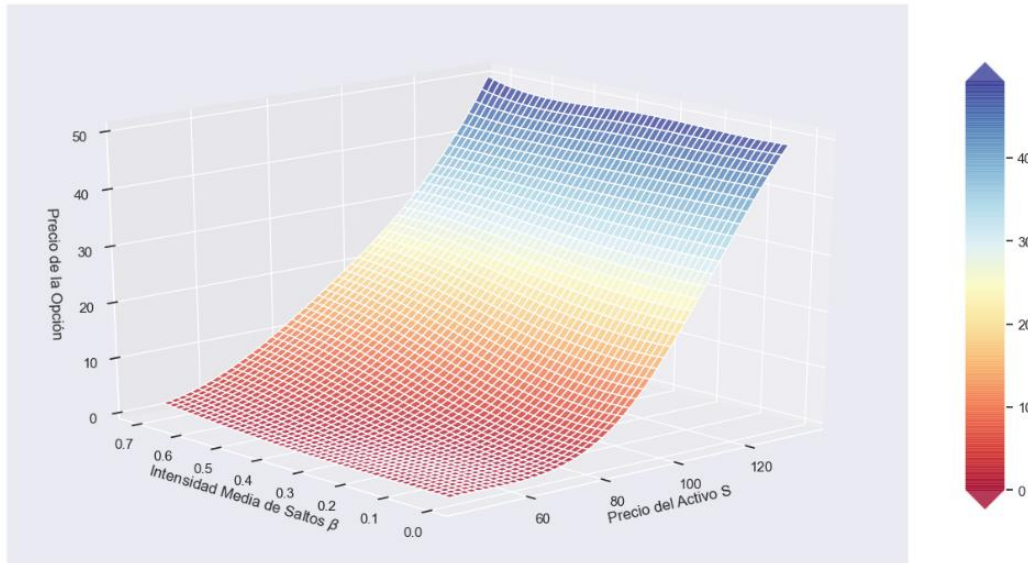
### 7.1.6 Precio de la Opción vs. Volatilidad ( $\sigma$ )



## 7.2 Análisis de Sensibilidad Múltiple

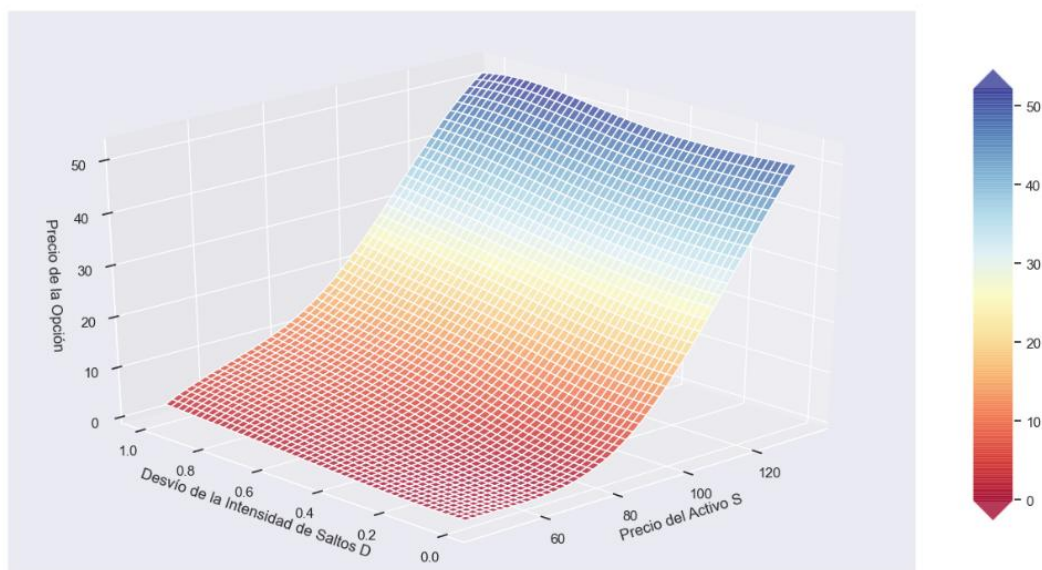
### 7.2.1 Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ) vs. Intensidad Media de Saltos ( $\beta$ )

Precio de la Opción bajo Salto-Difusión  
 $S_0 = 100$ ,  $K = 90$ ,  $TTM = 1$ ,  $r = 0.05$   $\sigma = 0.1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $D = 0.1$



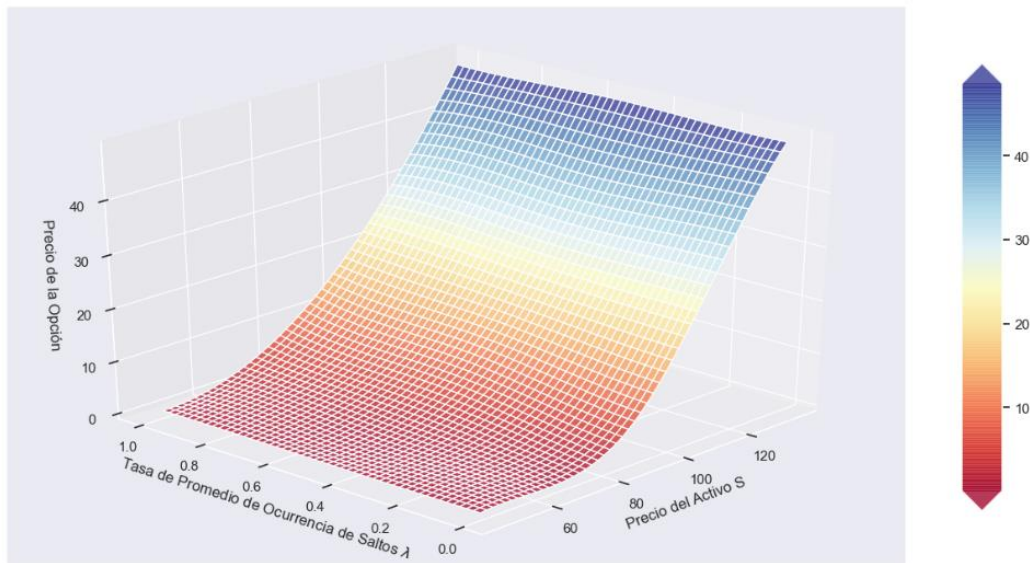
### 7.2.2 Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ) vs. Desvío de la Intensidad de los Saltos ( $D$ )

Precio de la Opción bajo Salto-Difusión  
 $S_0 = 100$ ,  $K = 90$ ,  $TTM = 1$ ,  $r = 0.05$   $\sigma = 0.1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$



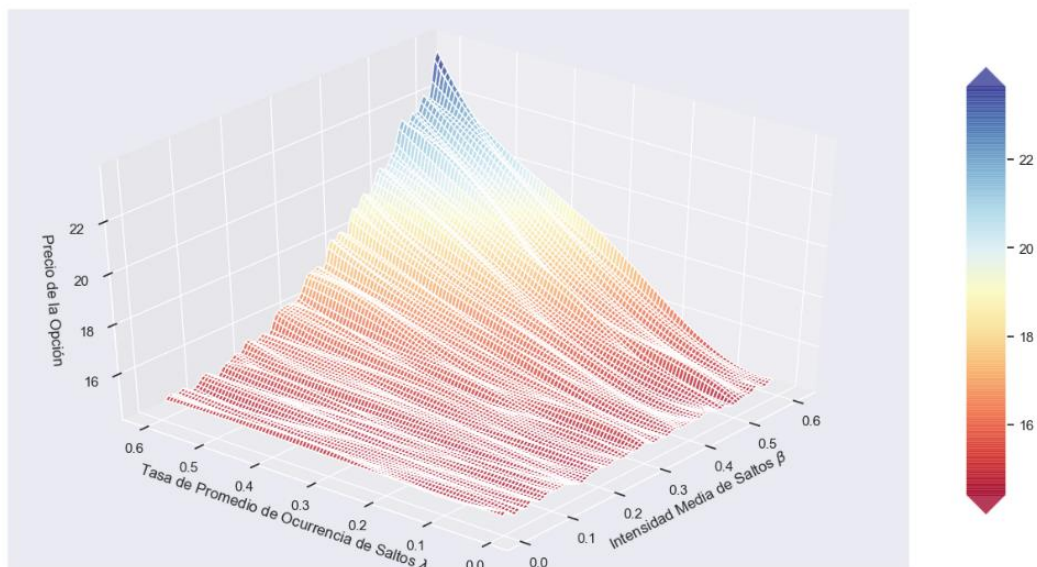
### 7.2.3 Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ) vs. Tasa de Arribo Promedio de Saltos ( $\lambda$ )

Precio de la Opción bajo Salto-Difusión  
 $S_0 = 100$ ,  $K = 90$ ,  $TTM = 1$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $D = 0.2$ ,  $\beta = 0.25$



### 7.2.4 Precio de la Opción vs. Intensidad Media de Saltos ( $\beta$ ) vs. Tasa de Arribo de Saltos ( $\lambda$ )

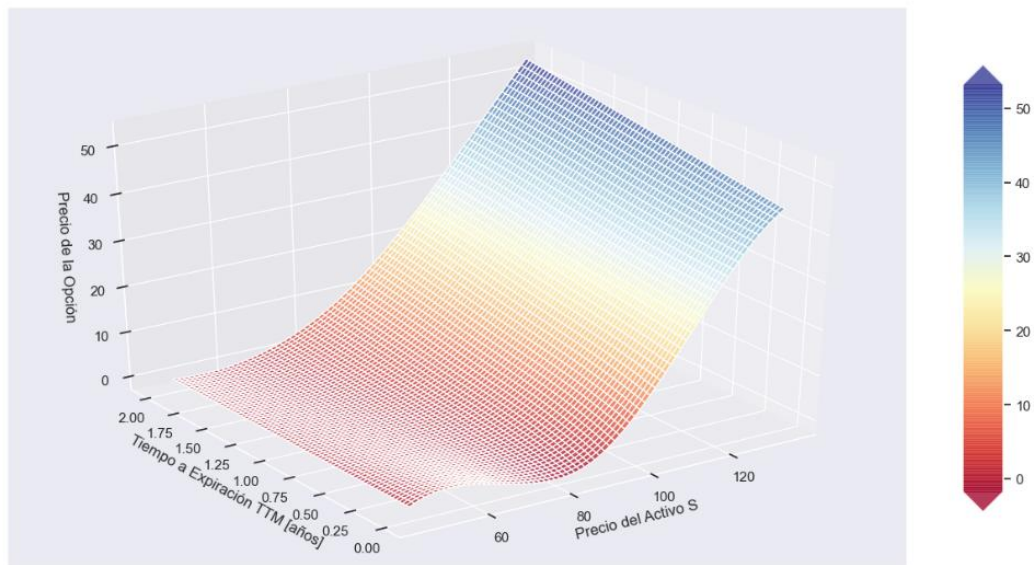
Precio de la Opción bajo Salto-Difusión  
 $S_0 = 100$ ,  $K = 90$ ,  $TTM = 1$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $D = 0.1$





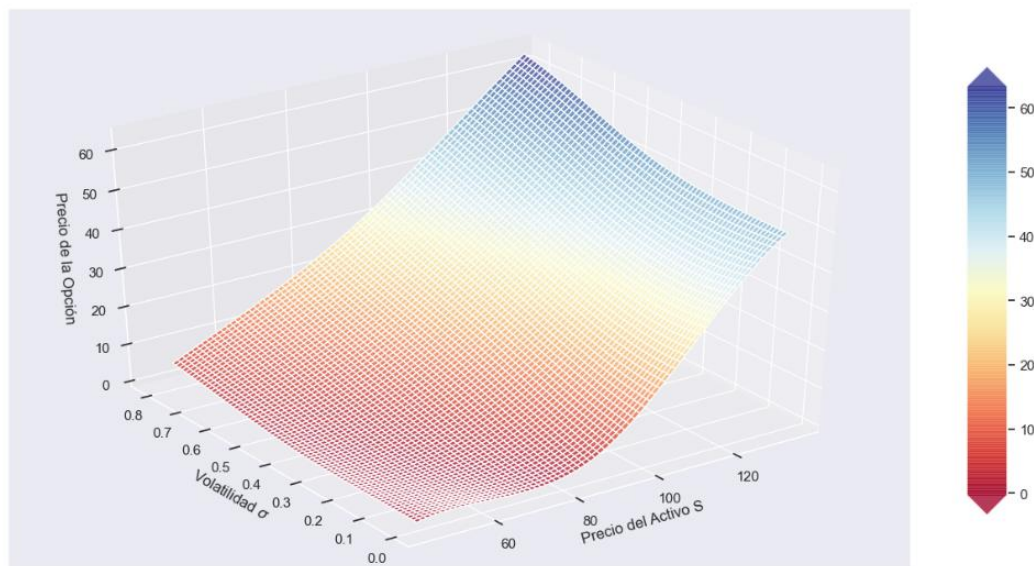
### 7.2.5 Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ) vs. Tiempo a Expiración ( $TTM = T - t$ )

Precio de la Opción bajo Salto-Difusión  
 $S_0 = 100$ ,  $K = 90$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $D = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$



### 7.2.6 Precio de la Opción vs. Precio del Activo ( $S$ ) vs. Volatilidad ( $\sigma$ )

Precio de la Opción bajo Salto-Difusión  
 $S_0 = 100$ ,  $K = 90$ ,  $r = 0.05$ ,  $TTM = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $D = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$



---

## 8. Bibliografía

- Steven Shreve “Stochastic Calculus for Finance - Vol. II” – Chapter 11 – “Introduction to Jump Processes”
- S.G. Kou “A Jump-Diffusion Model for Option Pricing”
- Robert Merton “Continuous Time Finance” – Chapter 09 – “Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous”
- Rama Cont, Peter Tankov “Financial Modelling with Jump Processes” – Chapter 08 – “Stochastic Calculus for Jump Processes”