Имя, фамилия и номер группы:

....

Ровно 228 лет назад, 30 марта 1791 Национальное собрание Франции ввело определение метра: одна сорокамиллионная часть длины парижского меридиана.

1. Рассмотрим логит-модель $\mathbb{P}(y_i = 1) = \Lambda(X_{i.}\beta)$, где $X_{i.}$ — i-ая строчка матрицы регрессоров. Людовик XIV знает, что оценки логит-модели в явном виде аналитически не считаются. Поэтому он использует две технологии.

   Технология 1. Разложить лог-функцию правдоподобия в ряд Тейлора до членов второго порядка и максимизировать полученную функцию.

   Технология 2. Стартуя из точки $\beta = 0$ сделать один шаг равный градиенту лог-функции правдоподобия.

   а) Помогите Людовику получить обе аппроксимации оценок логит-модели.

   б) С каким известным алгоритмом совпадает одна из этих оценок?

2. Храбрый исследователь Шарль Ожье́ де Бац де Кастельмо́р, граф д'Артанья́н, оценивает модель $y_i = \beta x_i + u_i$ по трём наблюдениям. Ошибки u_i имеют многомерное нормальное распределение с нулевым ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Наблюдения известны:

y_i	1	2	1
x_i	0	3	-1

   а) Найдите наиболее эффективную оценку в классе линейных по игреку несмещённых оценок.

   б) Какой уровень доверия обеспечивает интервал $[\hat{\beta} - 1; \hat{\beta} + 1]$?

   в) Постройте 95%-й предиктивный интервал для y_4, если известно, что u_4 не зависит от предыдущих ошибок и имеет дисперсию $3\sigma^2$.

3. Монетку подбросили 100 раз. Мария Антуанетта помнит, что в первых 70-и бросках было 30 орлов. А графиня де Полиньяк помнит, что в последних 60-и бросках было 20 орлов.

   а) Постройте GMM оценку вероятности орла с единичной взвешивающей матрицей.

   б) Постройте оптимальную GMM оценку.

   в) Постройте 95% доверительный интервал, используя каждую из оценок

4. Подарок для тех, кто прорешал прошлогодний вариант :)

   Исследовательница Несмеяна вывела хитрую формулу для $\hat{a}$ — несмещённой оценки неизвестного векторного параметра a. Обозначим $s(a)$ — вектор-столбец градиент логарифмической функции правдоподобия. Докажите, что для оценки Несмеяны выполнено неравенство Крамера-Рао, а именно, что матрица M положительна определена.

$$M = \operatorname{Var}(s(a)) \cdot \operatorname{Var}(\hat{a}) - I_{k \times k}.$$

   Подсказки:

   а) Вспомните, чему равно $\mathrm{E}(s(a))$. Достаточно просто вспомнить, доказывать не требуется!

   б) Найдите скаляры $\operatorname{Cov}\left(\hat{a}_1, \frac{\partial \ell}{\partial a_1}\right)$, $\operatorname{Cov}\left(\hat{a}_1, \frac{\partial \ell}{\partial a_2}\right)$ и матрицу $\operatorname{Cov}(\hat{a}, s(a))$.

   в) Рассмотрим два произвольных случайных вектора R и S и два вектора констант подходящей длины α и β. Найдите минимум функции $f(\alpha, \beta) = \operatorname{Var}(\alpha^T R + \beta^T S)$ по β. Выпишите явно $\beta^*(\alpha)$ и $f^*(\alpha)$.

   г) Докажите, что для произвольных случайных векторов положительно определена матрица

$$\operatorname{Var}(R) - \operatorname{Cov}(R, S) \operatorname{Var}^{-1}(S) \operatorname{Cov}(S, R)$$

   д) Завершите доказательство векторного неравенства Крамера-Рао.

   Без угрызений совести можно храбро переставлять интегралы и производные :)

5. Докажите, что в методе главных компонент с масштабированием переменных средняя величина R^2 по всем парным регрессиям исходных переменных на первую главную компоненту равна наибольшему сингулярному значению матрицы исходных переменных.

6. Докажите закон больших чисел в форме Бернштайна.

   Если величины y_1, y_2, ..., y_n имеют одинаковое ожидание, $\mathrm{E}(y_i) = \mu$, ограниченную дисперсию и $\operatorname{Cov}(y_j, y_j) \to 0$ при $|i - j| \to \infty$, то $\bar{y}$ сходится по вероятности к μ.