Ровно 207 лет назад, 19 октября 1812 года, Наполеон покинул Москву! :)

1. Известно, что A — постоянная симметричная матрица, r — вектор и $f(r) = r^T Ar/r^T r$.

   а) Найдите df.

   б) Перепешите условие $df = 0$ в виде $Ar = const \cdot r$. Докажите, что в любом экстремуме функции f вектор r будет собственным вектором матрицы A.

2. Рассмотрим модель $y = X\beta + u$ с неслучайными регрессорами X, $\mathbb{E}(u) = 0$ и $\mathbb{V}\text{ar}(u) = \sigma^2 I$.

   а) Найдите $\mathbb{V}\text{ar}(\hat{y})$, $\mathbb{V}\text{ar}(y - \hat{y})$, $\mathbb{E}(y - \hat{y})$. Укажите размеры каждой найденной матрицы.

   Есть дополнительная тестовая выборка, y^{new}, X^{new}, и для неё $y^{new} = X^{new}\beta + u^{new}$ с $\mathbb{E}(u^{new}) = 0$ и $\mathbb{V}\text{ar}(u^{new}) = \sigma^2 I$ В тестовой выборке n^{new} наблюдений. Ошибки двух выборок некоррелированы, $\mathbb{C}\text{ov}(u, u^{new}) = 0$. Прогнозы для тестовой выборки мы строим, используя старые оценки $\hat{\beta}$, то есть $\hat{y}^{new} = X^{new}\hat{\beta}$.

   б) Найдите $\mathbb{V}\text{ar}(\hat{y}^{new})$, $\mathbb{V}\text{ar}(y^{new} - \hat{y}^{new})$, $\mathbb{E}(y^{new} - \hat{y}^{new})$. Укажите размеры каждой найденной матрицы.

3. В выборке всего 5 наблюдений. Исследователь Бонапарт оценивает парную регрессию $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$. Однако, истинная модель имеет вид $y_i = 1 + 2z_i + u_i$. Известно, что $u \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2 \cdot I)$, $x^T = (1, 2, 3, 4, 5)$.

   а) Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta})$, $\mathbb{V}\text{ar}(\hat{\beta})$, $\mathbb{E}(RSS)$, если $z^T = (2, 3, 4, 5, 6)$.

   б) Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta})$, $\mathbb{V}\text{ar}(\hat{\beta})$, $\mathbb{E}(RSS)$, если $z^T = (5, 4, 3, 2, 1)$.

4. Грета Тунберг, Илон Маск и Джеки Чан выбрали ортогональный базис в 5-мерном пространстве, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Вектор v_1 — это вектор из единичек.

   Грета Тунберг построила регрессию y на v_1, v_2 и v_3. Илон Маск построил регрессию того же вектора y на v_1, v_4, v_5. Джеки Чан построил регрессию того же вектора y на все элементы базиса.

   а) Изобразите в 5-мерном пространстве остатки и прогнозы всех трёх регрессий.

   б) Как связаны между собой RSS, ESS и TSS всех трёх регрессий?

   в) Как связаны между собой оценки коэффициентов всех трёх регрессий?

5. Рассмотрим модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$ с неслучайным регрессором.

   а) Максимально аккуратно сформулируйте теорему Гаусса-Маркова. С «если» и «то». С формальным пояснением к любому используемому статистическому термину.

   Дополнительно известно, что $\beta_2 = 0$.

   б) Найдите $\mathbb{E}(R^2)$.

   в) Найдите $\mathbb{E}(R^2_{adj})$.