

Имя, фамилия и номер группы:

.....

Ровно 228 лет назад, 30 марта 1791 Национальное собрание Франции ввело определение метра: одна сорокамиллионная часть длины парижского меридиана.

1. Рассмотрим логит-модель $\mathbb{P}(y_i = 1) = \Lambda(X_i, \beta)$, где X_i — i -ая строчка матрицы регрессоров. Людовик XIV знает, что оценки логит-модели в явном виде аналитически не считаются. Поэтому он использует две технологии.

Технология 1. Разложить лог-функцию правдоподобия в ряд Тейлора до членов второго порядка в окрестности $\beta = 0$ и максимизировать полученную функцию.

Технология 2. Стартуя из точки $\beta = 0$ сделать один шаг равный градиенту лог-функции правдоподобия.

- а) Помогите Людовику получить обе аппроксимации оценок логит-модели.
 - б) С каким известным алгоритмом совпадает одна из этих оценок?
2. Храбрый исследователь Шарль Ожэ де Бац де Кастельмёр, граф д'Артаньян, оценивает модель $y_i = \beta x_i + u_i$ по трём наблюдениям. Ошибки u_i имеют многомерное нормальное распределение с нулевым ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Наблюдения известны:

y_i	1	2	1
x_i	0	3	-1

- а) Найдите наиболее эффективную оценку в классе линейных по игреку несмещённых оценок.
 - б) Какой уровень доверия обеспечивает интервал $[\hat{\beta} - 1; \hat{\beta} + 1]$?
 - в) Постройте 95%-й предиктивный интервал для y_4 , если известно, что $x_4 = 1$, а u_4 не зависит от предыдущих ошибок и имеет дисперсию $3\sigma^2$.
3. Монетку подбросили 100 раз. Мария Антуанетта помнит, что в первых 70-и бросках было 30 орлов. А графиня де Полиньяк помнит, что в последних 60-и бросках было 20 орлов.
 - а) Постройте GMM оценку вероятности орла с единичной взвешивающей матрицей.
 - б) Постройте оптимальную GMM оценку.
 - в) Постройте 95% доверительный интервал, используя каждую из оценок

4. Подарок для тех, кто прорешал прошлогодний вариант :)

Исследовательница Несмеяна вывела хитрую формулу для \hat{a} — произвольной несмещённой оценки неизвестного векторного параметра a . Оценка \hat{a} не обязана быть оценкой метода максимального правдоподобия! Обозначим $s(a)$ — вектор-столбец градиент логарифмической функции правдоподобия. Докажите, что для оценки Несмеяны выполнено неравенство Крамера-Рао, а именно, что матрица M положительно определена.

$$M = \text{Var}(s(a)) \cdot \text{Var}(\hat{a}) - I_{k \times k}.$$

Подсказки:

- а) Вспомните, чему равно $E(s(a))$. Достаточно просто вспомнить, доказывать не требуется!
- б) Найдите скаляры $\text{Cov}(\hat{a}_1, \frac{\partial \ell}{\partial a_1})$, $\text{Cov}(\hat{a}_1, \frac{\partial \ell}{\partial a_2})$ и матрицу $\text{Cov}(\hat{a}, s(a))$.
- в) Рассмотрим два произвольных случайных вектора R и S и два вектора констант подходящей длины α и β . Найдите минимум функции $f(\alpha, \beta) = \text{Var}(\alpha^T R + \beta^T S)$ по β . Выпишите явно $\beta^*(\alpha)$ и $f^*(\alpha)$.
- г) Докажите, что для произвольных случайных векторов положительно определена матрица

$$\text{Var}(R) - \text{Cov}(R, S) \text{Var}^{-1}(S) \text{Cov}(S, R)$$

- д) Завершите доказательство векторного неравенства Крамера-Рао.

Без угрызений совести можно храбро переставлять интегралы и производные :)

- 5. Докажите, что в методе главных компонент с масштабированием переменных средняя величина R^2 по всем парным регрессиям исходных переменных на первую главную компоненту равна наибольшему сингулярному значению матрицы исходных переменных.
- 6. Докажите закон больших чисел в форме Бернштейна.

Если величины y_1, y_2, \dots, y_n имеют одинаковое ожидание, $E(y_i) = \mu$, ограниченную дисперсию и $\text{Cov}(y_i, y_j) \rightarrow 0$ при $|i - j| \rightarrow \infty$, то \bar{y} сходится по вероятности к μ .
