1 Дифференциал

Минитеория:

1. $d(XY) = dX \cdot Y + X \cdot dY$
2. $dA = 0$
3. $d(X') = dX'$
4. $d \det X = \operatorname{tr}(...)$

1.1 Вспомним дифференциал :)

1. Известно, что $f(x) = x^2 + 3x$. Найдите $f'(x)$ и df. Чему равен df в точке $x = 5$ при $dx = 0.1$?
2. Известно, что $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2^3$. Найдите df. Чему равен df в точке $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ при $dx_1 = 0.1$ и $dx_2 = -0.1$?
3. Известно, что $F = \begin{pmatrix} 5 & 6x_1 \\ x_1x_2 & x_1^2x_2 \end{pmatrix}$. Найдите dF.
4. Известно, что $F = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Найдите dF.
5. Матрица F имеет размер 2×2, в строке i столбце j у неё находится элемент f_{ij}. Выпишите выражение $\operatorname{tr}(F'dF)$ в явном виде без матриц.

1.2 Пусть t — скалярная переменная, r, s — векторные переменные, R, S — матричные переменные. Кроме того, a, b — векторы констант, A, B — матрицы констант.

Применив базовые правила дифференцирования найдите:

1. $d(ARB)$;
2. $d(r'r)$;
3. $d(r'Ar)$;
4. $d(R^{-1})$, воспользовавшись тем, что $R^{-1} \cdot R = I$;
5. $d\cos(r'r)$;
6. $d(r'Ar/r'r)$.

1.3 В методе наименьших квадратов минимизируется функция

$$Q(\hat{\beta}) = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}).$$

1. Найдите $dQ(\hat{\beta})$ и $d^2Q(\hat{\beta})$;
2. Выпишите условия первого порядка для задачи МНК;
3. Выразите $\hat{\beta}$ предполагая, что $X'X$ обратима.

1.4 В методе LASSO минимизируется функция

$$Q(\hat{\beta}) = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) + \lambda\hat{\beta}'\hat{\beta},$$

где λ — положительный параметр, штрафующий функцию за слишком большие значения $\hat{\beta}$.

1. Найдите $dQ(\hat{\beta})$ и $d^2Q(\hat{\beta})$;
2. Выпишите условия первого порядка для задачи LASSO;
3. Выразите $\hat{\beta}$.

1.5 Пусть A и B — матрицы одного размера.

1. Докажите, что сумму $\sum_{ij} A_{ij}B_{ij}$ можно представить в виде $\operatorname{tr}(A'B)$.
2. Докажите, что $\operatorname{tr}(A'B) = \operatorname{tr}(AB') = \operatorname{tr}(B'A) = \operatorname{tr}(BA')$.

1.6 Выведите формулу для $d\det X$.

1.7 Пусть x_i — вектор-столбец $k \times 1$, y_i — скаляр, равный $+1$ или -1, $\hat{\beta}$ — вектор-столбец размера $k \times 1$. Рассмотрим функцию

$$Q(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \exp(-y_i x_i' \hat{\beta})) + \lambda \hat{\beta}' \hat{\beta}$$

1. Найдите dQ;
2. Найдите вектор-столбец $\operatorname{grad} Q$.

2 Линейная регрессия

2.1 Рассмотрим задачу линейной регресии

$$Q(w) = (y - Xw)^T (y - Xw) \to \min_w .$$

1. Найдите $dQ(w)$ и $d^2Q(w)$.
2. Выведите формулу для оптимального w.
3. Выведите формулу для матрицы-шляпницы (hat-matrix), связывающей вектор фактических y и вектор прогнозов $\hat{y} = H \cdot y$.

2.2 Рассмотрим задачу регрессии с одним признаком и без константы, $\hat{y}_i = w \cdot x_i$. Решите в явном виде задачи МНК со штрафом:

1. $Q(w) = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) + \lambda w^2$;
2. $Q(w) = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) + \lambda |w|$;

2.3 Храбрая и торопливая исследовательница Мишель хочет решить задачу линейной регрессии по n наблюдениям с вектором y и матрицей признаков X. Сначала исследовательница Мишель так торопилась, что совсем забыла последнее наблюдение и оценила задачу с более коротким вектором y^- и матрицей X^-, где не хватает последней строки. Затем Мишель взяла правильную матрицу X, но неправильный вектор y^*, в котором она вместо фактического последнего наблюдения вектора y вписала его прогноз, полученный с помощью регрессии с y^{-1} и X^-.

1. Как связаны $\hat{y}_n^-$ и $\hat{y}_n^*$ (прогнозы для последнего наблюдения полученные по модели без последнего наблюдения и модели с неверным последним наблюдением)?
2. Как выглядит вектор, равный разнице $y - y^*$?

3. Какие величины находятся в векторе $H \cdot (y - y^*)$? Чему равна последняя, n-ая, компонента этого вектора? Выразите её через H_{nn} и ошибку прогноза последнего наблюдения по модели без последнего наблюдения, $y_n - \hat{y}_n^-$.
4. Как связаны между собой ошибка прогноза n-го наблюдения по полной модели, ошибка прогноза n-го наблюдения по модели без последнего наблюдения и H_{nn}?
5. Как быстро провести кросс-валидацию с выкидыванием одного наблюдения для задачи линейной регрессии?

3 Линейные классификаторы

3.1 Рассмотрим плоскость в $\mathbb{R}^3$, задаваемую уравнением $5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 10 = 0$ и две точки, $A = (2, 1, 4)$ и $B = (4, 0, 4)$.

1. Найдите любой вектор, перпендикулярный плоскости.
2. Правда ли, что отрезок AB пересекает плоскость?
3. Найдите длину отрезка AB;
4. Не находя расстояние от точек до плоскости, определите, во сколько раз точка A дальше от плоскости, чем точка B;
5. Найдите расстояние от точки A до плоскости.

3.2 Рассмотрим простейший персептрон с константой, единственным входом x_1 и пороговой функцией активации. Подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал логическое отрицание (в ответ на 0 выдавал 1, и наоборот).

3.3 Рассмотрим простейший персептрон с константой, двумя входами x_1, x_2 и пороговой функцией активации.

Здесь ассистенты нарисуют в tikz картинку, достойную стоять вместо Джоконды в Лувре

1. Подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал логическое ИЛИ (OR).
2. Подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал логическое И (AND).
3. Докажите, что веса невозможно подобрать так, чтобы персептрон реализовывал исключающее логическое ИЛИ (XOR).
4. Добавьте персептрону вход $x_3 = x_1 \cdot x_2$ и подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал XOR.
5. Реализуйте XOR с помощью трёх персептронов с двумя входами и константой. Укажите веса и схему их взаимосвязей.

3.4 В коробке завалялось три персептрона, у каждого два входа с константой и пороговая функция активации. Реализуйте с их помощью функцию

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x_2 \geqslant |x_1 - 3| + 2; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

3.5 Рассмотрим следующий набор данных:

x_i	z_i	y_i
-1	-1	0
1	-1	0
-1	1	0
1	1	0
0	2	1
2	0	1
0	-2	1
-2	0	1

1. Существует ли перспетрон с константой, двумя входами и пороговой функцией активации, способный идеально классифицировать y_i на данной выборке? А хватит ли двух таких персептронов? А может хватит трёх?
2. Введите такое преобразование исходных признаков $h_i = h(x_i, z_i)$, при котором с идеальной классификацией y_i справился бы даже персептрон с одним входом, константой и пороговой функцией активации.

3.6 Бандерлог из Лога[1] ведёт блог, любит считать логарифмы и оценивать логистические регрессии. С помощью нового алгоритма Бандерлог решил задачу классификации по трём наблюдениям и получил $b_i = \hat{\mathbb{P}}(y_i = 1|x_i)$.

y_i	b_i
1	0.7
-1	0.2
-1	0.3

1. Постройте ROC-кривую.
2. Найдите площадь под ROC-кривой и индекс Джини.
3. Постройте PR-кривую (кривая точность-полнота).
4. Найдите площадь под PR-кривой.
5. Как по-английски будет «бревно»?

3.7 Классификатор Бандерлога имеет вид

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_i > t; \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что площадь под ROC-кривой равна вероятности того, случайно выбранный положительный объект окажется позже случайно выбранного отрицательного объекта, если объекты ранжированы по возрастанию величины b_i.

3.8 Все средние издалека выглядят одинаково, среднее $= f^{-1}(0.5f(x_1) + 0.5f(x_2))$. Например, у среднего арифметического $f(t) = t$, у среднего гармонического $f(t) = 1/t$.

1. Какая f используется для среднего геометрического?

Для измерения качества бинарной классификации Ара использует среднее арифметическое точности и полноты, Гена — среднее геометрическое, а Гарик — среднее гармоническое.

[1] деревня в Кадуйском районе Вологодской области

2. У кого будут выходить самые «качественные» и самые «некачественные» прогнозы?

3.9 Бандерлог начинает все определения со слов «это доля правильных ответов»:

1. accuracy — это доля правильных ответов…
2. точность (precision) — это доля правильных ответов…
3. полнота (recall) — это доля правильных ответов…
4. TPR — это доля правильных ответов…

Закончите определения Бандерлога так, чтобы они были, хм, правильными.

3.10 Алгоритм бинарной классификации, придуманный Бандерлогом, выдаёт оценки вероятности $b_i = \hat{\mathbb{P}}(y_i = 1|x_i)$. Всего у Бандерлога 10000 наблюдений. Если ранжировать их по возрастанию b_i, то окажется что наблюдения с $y_i = 1$ занимают ровно места с 5501 по 5600.

Найдите площадь по ROC-кривой и площадь под PR-кривой.

3.11 Бандерлог собрал выборку из 900 муравьёв и 100 китов. Переменная y_i равна 1 для китов. Бандерлог хочет, чтобы его алгоритм классификации выдавал для каждого наблюдения число $b_i = f(x_i) \in [0; 1]$, оценку вероятности того, что наблюдение является китом. В качестве признака Бандерлог использует количество глаз, не задумавшись о том, что оно равно двум и для муравьёв, и для китов.

Решите задачу минимизации эмпирической функции риска и найдите все b_i для функций потерь:

1. $L(y_i, b_i) = (y_i - b_i)^2$, если для муравьёв $y_i = 0$;
2. $L(y_i, b_i) = |y_i - b_i|$, если для муравьёв $y_i = 0$;
3. $L(y_i, b_i) = \begin{cases} -\log b_i, & \text{если } y_i = 1 \\ -\log(1 - b_i), & \text{иначе.} \end{cases}$;
4. $L(y_i, b_i) = \begin{cases} 1/b_i, & \text{если } y_i = 1 \\ 1/(1 - b_i), & \text{иначе.} \end{cases}$;

3.12 Бандерлог утверждает, что открыл новую верхнюю границу для пороговой функции потерь, $\tilde{L}(M_i) = 1 + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(-x_i)$, где $M_i = y_i \cdot \langle w, x_i \rangle$. Прав ли бандерлог?

3.13 Бандерлог из Лога оценил логистическую регрессию по четырём наблюдениям и одному признаку с константой, получил $b_i = \hat{\mathbb{P}}(y_i = 1|x_i)$, но потерял последнее наблюдение:

y_i	b_i
1	0.7
-1	0.2
-1	0.3
?	?

1. Выпишите функцию потерь для задачи логистической регрессии.
2. Выпишите условие первого порядка по коэффициенту перед константой.
3. Помогите бандерлогу восстановить пропущенные значения!

3.14 У Бандерлога три наблюдения, первое наблюдение — кит, остальные — муравьи. Киты кодируются $y_i = 1$, муравьи — $y_i = -1$. На этот раз Бандерлог, чтобы быть уверенным, что x_i различаются, сам лично определил $x_i = i$. После этого Бандерлог оценивает логистическую регрессию с константой.

1. Выпишите эмпирическую функцию риска, которую минимизирует Бандерлог;
2. При каких оценках коэффициентов логистической регрессии эта функция достигает своего минимума?

3.15 Рассмотрим целевую функцию логистической регрессии с константой

$$Q(w) = \frac{1}{\ell}\sum L(y_i, b_i),$$

где $b_i = 1/(1+\exp(-\langle w, x_i\rangle))$ и $L(y_i, b_i) = \begin{cases} -\log b_i, & \text{если } y_i = 1 \\ -\log(1-b_i), & \text{иначе.} \end{cases}$.

1. Найдите $dQ(w)$ и $d^2Q(w)$;
2. Найдите $dQ(0)$ и $d^2Q(0)$;
3. Выпишите квадратичную аппроксимацию для $Q(w)$ в окрестности $w = 0$;
4. С какой задачей совпадает задача минимизации квадратичной аппроксимации?

3.16 Винни-Пух знает, что мёд бывает правильный, $honey_i = 1$, и неправильный, $honey_i = 0$. Пчёлы также бывают правильные, $bee_i = 1$, и неправильные, $bee_i = 0$. По 100 своим попыткам добыть мёд Винни-Пух составил таблицу сопряженности:

	$honey_i = 1$	$honey_i = 0$
$bee_i = 1$	12	36
$bee_i = 0$	32	20

Винни-Пух использует логистическую регрессию с константой для прогнозирования правильности мёда с помощью правильности пчёл.

1. Какие оценки коэффициентов получит Винни-Пух?
2. Какой прогноз вероятности правильности мёда при встрече с неправильными пчёлами даёт логистическая модель? Как это число можно посчитать без рассчитывания коэффициентов?

3.17 Винни-Пух оценил логистическую регрессию для прогнозирования правильности мёда от высоты дерева (м) x_i и удалённости от дома (км) z_i: $\ln odds_i = 2 + 0.3x_i - 0.5z_i$.

1. Оцените вероятность того, что $y_i = 1$ для $x = 15$, $z = 3.5$.
2. Оцените предельный эффект увеличения x на единицу на вероятность того, что $y_i = 1$ для $x = 15$, $z = 3.5$.
3. При каком значении x предельный эффект увеличения x на единицу в точке $z = 3.5$ будет максимальным?

4 Матрицы

4.1 Известна матрица X,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

1. Найдите QR-разложение матрицы $X'X$;
2. Найдите QR-разложение матрицы XX';
3. Найдите спектральное разложение матрицы $X'X$;
4. Найдите спектральное разложение матрицы XX';
5. Найдите сингулярное разложение (SVD) матрицы X;

4.2 Объясните геометрический смысл QR, SVD и спектрального разложений.

4.3 Бандрелог выполнил SVD-разложение матрицы регрессоров X. Помогите Бандерлогу поскорее найти формулу для матрицы-шляпницы H, которая проецирует y на пространство столбцов матрицы X, $\hat{y} = Hy$.

4.4 Бандрелог выполнил QR-разложение матрицы регрессоров X. Помогите Бандерлогу поскорее найти формулу для матрицы-шляпницы H, которая проецирует y на пространство столбцов матрицы X, $\hat{y} = Hy$.

5 Метод опорных векторов

5.1 На плоскости имеются точки двух цветов. Красные: $(1,1)$, $(1,-1)$ и синие: $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

1. Найдите разделяющую гиперплоскость методом опорных векторов при разных C.
2. Укажите опорные вектора.

5.2 На плоскости имеются точки двух цветов. Красные: $(1,1)$, $(1,-1)$ и синие: $(-1,1)$, $(-1,-1)$ и $(2,0)$.

1. Найдите разделяющую гиперплоскость методом опорных векторов при разных C.
2. Укажите опорные вектора.

5.3 Эконометресса Авдотья решила использовать метод опорных векторов с гауссовским ядром с параметром $\sigma = 1$ и штрафным коэффициентом $C = 1$. Соответственно, она минимизировала целевую функцию

$$\frac{w'w}{2} + C\sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

где разделяющая плоскость задаётся $w'x - w_0 = 0$, а ξ_i — размеры «заступа» за разделяющую полосу.

Затем Автдотья подумала, что неплохо бы выбрать наилучшие C и σ. Ей лень было использовать кросс-валидацию, поэтому Авдотья минимизировала данную функцию по $C \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$. Какие значения она получила?

5.4 Задан вектор $w = (2,3)$ и число $w_0 = 7$.

1. Нарисуйте прямые $\langle w, x\rangle = w_0$, $\langle w, x\rangle = w_0 + 1$, $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$.

2. Найдите ширину полосы между $\langle w, x\rangle = w_0 + 1$ и $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$.

3. Найдите расстояние от точки $(5, 6)$ до прямой $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$.

5.5 Заданы две прямые, l_0: $x^{(1)} + 3x^{(2)} = 9$ и l_1: $x^{(1)} + 3x^{(2)} = 13$. Найдите подходящий вектор w и число w_0 так, чтобы прямая l_0 записывалась как $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$, а прямая l_1 как $\langle w, x\rangle = w_0 + 1$.

5.6 Даны наблюдения

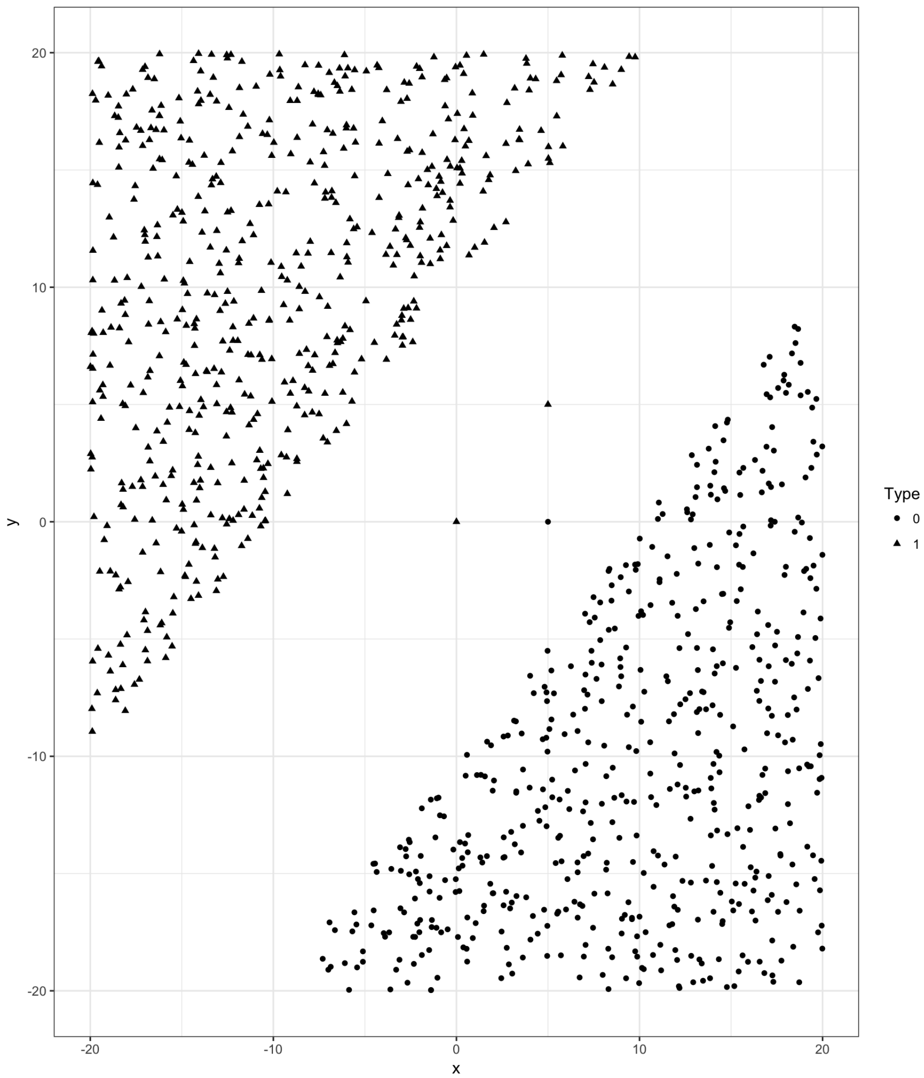
$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	y
1	0	0
2	0	0
0	3	1
0	4	1

1. Нарисуйте разделяющую полосу наибольшей ширины.

2. Решите задачу оптимизации
$$\min_{w,w_0} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle$$
при ограничении: для $y_i = 1$ выполнено условие $\langle w, x\rangle \geqslant w_0 + 1$, а для $y_i = 0$ выполнено условие $\langle w, x\rangle \leqslant w_0 - 1$.

3. Для точки $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) = (1, 1)$ найдите значение $\langle w, x\rangle - w_0$ и постройте прогноз $\hat{y}$.

5.7 По картинке качественно решите задачу разделения точек:



Целевая функция имеет вид:

$$\min_{w,w_0} \frac{1}{2} w'w + C \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

Уравнение разделяющей поверхности — $w'x = w_0$, уравнения краёв полосы: $w'x = w_0 + 1$ и $w'x = w_0 - 1$. Нарушителями считаются наблюдения, которые попали на нейтральную полосу или на чужую территорию. Здесь $\xi_i = |w| \cdot d_i$, где d_i — длина «заступ» наблюдения за черту «своих».

1. Как пройдёт разделяющая полоса при $C = 1$? Найдите w, w_0, и величины штрафов ξ_i.
2. Как пройдёт разделяющая полоса при $C = +\infty$? Найдите w, w_0, и величины штрафов ξ_i.

5.8 юююю

6 Ядра к бою!

6.1 Ядерная функция, скалярное произведение в расширяющем пространстве, имеет вид $K(a, b) = \exp(-|a - b|^2)$.

Имеются вектора $a = (1, 1, 1)$ и $b = (1, 2, 0)$.

Найдите длину векторов и косинус угла между ними в исходном и расширяющем пространстве.

6.2 Рассмотрим два вектора, $v_1 = (1, 1, 2)$ и $v_2 = (1, 1, 1)$. Переход в спрямляющее пространство осуществляется с помощью гауссовской ядерной функции с параметром γ, $k(v, v') = \exp(-\gamma|v - v'|^2)$.

1. Как от γ зависят длины векторов в спрямляющем пространстве?
2. Как от γ зависит угол между векторами в спрямляющем пространстве?

6.3 Имеются три наблюдения A, B и C:

	x	y
A	1	-2
B	2	1
C	3	0

1. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC.
2. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC в расширенном пространстве с помощью гауссовского ядра с $K(x, x') = \exp(-|x - x'|^2)$.
3. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC в расширенном пространстве с помощью полиномиального ядра второй степени.

6.4 Переход из двумерного пространства в расширяющее задан функцией

$$f : (x_1, x_2) \to (1, x_1, x_2, 3x_1x_2, 2x_1^2, 4x_2^2).$$

Найдите соответствующую ядерную функцию.

6.5 Ядерная функция имеет вид

$$K(x, y) = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2.$$

Как может выглядеть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ переводящие исходные векторы в расширенное пространство?

6.6 Является ли функция $K(x, z)$ ядром?

1. $K(x, z) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = z; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$;
2. $K(x, z) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = z; \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$;
3. $K(x, z) = \sin(x^T z)$;
4. $K(x, z) = \cos(x^T x) \sin(z^T z)$;

6.7 Пусть x и z — строки символов, возможно разной длины. Рассмотрим две функции. Функция $K_1(x, z)$ равна единице, если строки x и z совпадают. Функция $K_2(x, z)$ — число совпадающих подстрок. Функция K_3 — произведение количеств букв «а» в обеих словах.

1. Найдите K_1(«мама», «ам») и K_2(«мама», «ам»), K_3(«мама», «ам»)
2. Является ли функция K_1 ядром?
3. Является ли функция K_2 ядром?
4. Является ли функция K_3 ядром?

6.8 На прямой аллее растёт три дуба. Находятся в точках с координатами $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = -3$. Исследователь Винни-Пух проверил и выяснил, что на втором Дубе водятся правильные пчёлы, а на остальных — неправильные.

1. Являются ли пчёлы линейно разделимыми в пространстве исходной аллеи?
2. Помогите Винни-Пуху выписать прямую задачу метода опорных векторов в пространстве исходной аллеи;
3. Помогите Винни-Пуху выписать двойственную задачу метода опорных векторов в пространстве исходной аллеи;
4. Помогите Винни-Пуху выписать двойственную задачу метода опорных векторов в бесконечномерном пространстве с ядерной функцией $K(x, z) = \exp(-(x - z)^2)$; Являются ли точки в нём линейно разделимыми?
5. Помогите Винни-Пуху выписать прямую и двойственную задачу метода опорных векторов в спрямляющем пространстве с ядерной функцией $K(x, z) = (xz + 1)^2$; Являются ли точки в нём линейно разделимыми?

7 Двойственные задачи

7.1 Выпишите двойственную задачу для минимизации $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ при ограничении $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$.

7.2 Выпишите двойственную задачу для $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$ при ограничениях $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10$, $2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10$, все $x_i \geqslant 0$.

7.3 Выпишите двойственную задачу для максимизации $1/x_1 + 2/x_2$ при ограничении $2x_1 + 3x_2 = 10$ и $x_1 \in [1; 10]$, $x_2 \in [2; 6]$.

7.4 Выпишите двойственную задачу для минимизации $f(x) = \frac{1}{2} x' H x + g' x$ при ограничении $A' x = b$.

7.5 Выпишите двойственную задачу для минимизации $f(x) = \frac{1}{2}x'Hx + g'x$ при ограничении $A'x \leqslant b$.

7.6 Выпишите прямую и двойственную задачу для метода опорных векторов в исходном пространстве.

7.7 Выпишите прямую и двойственную задачу для метода опорных векторов в спрямляющем пространстве с использованием ядра $K(.,.)$.

8 Метод главных компонент

8.1 Найдите прямую, у которой сумма квадратов расстояний до точек $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ будет минимальной. Чему равна при этом доля объяснённого разброса точек?

8.2 Есть две переменных, $x = (1,0,0,3)'$, $z = (3,2,0,3)'$. Найдите первую и вторую главные компоненты.

8.3 Известна матрица выборочных ковариаций трёх переменных. Для удобства будем считать, что переменные уже центрированы.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Выразите первую и вторую главные компоненты через три исходных переменных.
2. Выразите первую и вторую главные компоненты, через три исходных переменных, если перед методом главных компонент переменные необходимо стандартизировать.

8.4 Пионеры, Крокодил Гена и Чебурашка собирали металлолом несколько дней подряд. В распоряжение иностранной шпионки, гражданки Шапокляк, попали ежедневные данные по количеству собранного металлолома: вектор g — для Крокодила Гены, вектор h — для Чебурашки и вектор x — для Пионеров. Гена и Чебурашка собирали вместе, поэтому выборочная корреляция $\mathrm{sCorr}(g,h) = -0.9$. Гена и Чебурашка собирали независимо от Пионеров, поэтому выборочные корреляции $\mathrm{sCorr}(g,x) = 0$, $\mathrm{sCorr}(h,x) = 0$. Если регрессоры g, h и x центрировать и нормировать, то получится матрица $\tilde{X}$.

1. Найдите параметр обусловленности матрицы $(\tilde{X}'\tilde{X})$.
2. Вычислите одну или две главные компоненты (выразите их через вектор-столбцы матрицы. $\tilde{X}$), объясняющие не менее 70% общей выборочной дисперсии регрессоров.
3. Шпионка Шапокляк пытается смоделировать ежедневный выпуск танков, y. Выразите оценки коэффициентов регрессии $y = \beta_1 + \beta_2 g + \beta_3 h + \beta_4 x + \varepsilon$ через оценки коэффициентов регрессии на главные компоненты, объясняющие не менее 70% общей выборочной дисперсии.

9 На природу! В лес! К деревьям!

9.1 Для случайных величин X и Y найдите индекс Джини, энтропию и спутанность (perplexity):

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0.2	0.8

,

y	0	1	5
$\mathbb{P}(Y = y)$	0.2	0.3	0.5

9.2 Найдите энтропию X, спутанность (perplexity) X, индекс Джини X, если

1. величина X равновероятно принимает значения 1, 7 и 9;
2. величина X равновероятно принимает $k \geqslant 2$ значений;
3. величина X равномерно распределена на отрезке $[0; a]$;
4. величина X нормальна $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$;

9.3 У Васи была дискретная случайная величина X, принимавшая натуральные значения. Вася решил изменить закон распределения величины X. Он увеличил количество возможных значений величины X в два раза, разделив каждое событие $X = k$ на два равновероятных подсобытия: $X = k - 0.1$ и $X = k + 0.1$. Как при этом изменились энтропия, спутанность (perplexity) и индекс Джини?

9.4 Случайная величина X принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1 - p$.

1. Постройте график зависимости индекса Джини и энтропии от p.
2. Являются ли функции монотонными? выпуклыми?
3. При каком p энтропия и индекс Джини будут максимальны?

9.5 Шаман Ыуыуыуыыыыы по прошлым наблюдениям знает, большая охота на мамонта оказывается удачной с вероятностью 0.3. Если племя ждёт от Ыуыуыуыыыыы прогноз охоты, то Ыуыуыуыыыыы поплясав вокруг костра (10 минут) и постуча бубном (16 раз) прогнозирует удачную охоту с вероятностью 0.3 и неудачную с вероятностью 0.7. Конкурирующий шаман Уыуыуыууууу всегда прогнозирует неудачную охоту, как более вероятную. Когда шаман даёт неверный прогноз, его бьют палками.

1. Какова вероятность того, что Ыуыуыуыыыыы ошибётся?
2. Кто чаще бывает бит палками, Ыуыуыуыыыыы или Уыуыуыууууу?
3. Чему равен индекс Джини для случайной величины равной удаче с вероятностью 0.3 и неудаче с вероятностью 0.7?

9.6 Шаман Ыуыуыуыыыыы заметил по прошлым данным, что в дождливые дни большая охота на мамонта удачна с вероятностью 0.7, а в сухие — с вероятностью 0.1. Поэтому в дождливый день Ыуыуыуыыыыы предскажет удачу с вероятностью 0.7, а в сухой — с вероятностью 0.1. Дождливых дней — 20%.

1. Какова вероятность того, что Ыуыуыуыыыыы ошибётся?
2. Чему равен индекс Джини выборки разделённой на две части: в части А шесть бананов и 14 апельсинов, а в части В — восемь бананов и 72 апельсина?

9.7 Постройте регрессионное дерево для прогнозирования y с помощью x на обучающей выборке:

x_i	0	1	2	3
y_i	5	6	4	100

Критерий деления узла на два — минимизация RSS. Дерево строится до трёх терминальных узлов.

9.8 Постройте регрессионное дерево для прогнозирования y с помощью x на обучающей выборке:

y_i	x_i
100	1
102	2
103	3
50	4
55	5
61	6
70	7

Критерий деления узла на два — минимизация RSS. Узлы делятся до тех пор, пока в узле остаётся больше двух наблюдений.

9.9 Дон-Жуан предпочитает брюнеток. Перед Новым Годом он посчитал, что в записной книжке у него 20 блондинок, 40 брюнеток, две рыжих и восемь шатенок. С Нового Года Дон-Жуан решил перенести все сведения в две записные книжки, в одну — брюнеток, во вторую — остальных.

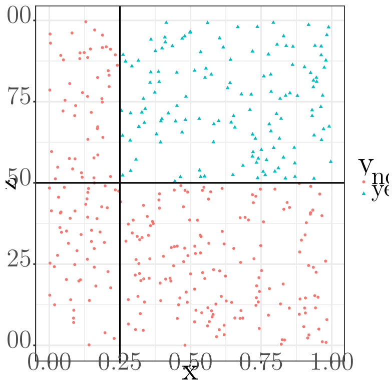
Как изменились индекс Джини и энтропия в результате такого разбиения?

9.10 Машка пять дней подряд гадала на ромашке, а затем выкладывала очередную фотку «Машка с ромашкой» в инстаграмчик. Результат гадания — переменная y_i, количество лайков у фотки — переменная x_i. Постройте классификационное дерево для прогнозирования y_i с помощью x_i на обучающей выборке:

y_i	x_i
плюнет	10
поцелует	11
поцелует	12
к сердцу прижмёт	13
к сердцу прижмёт	14

Дерево строится до идеальной классификации. Критерий деления узла на два — максимальное падение индекса Джини.

9.11 По данной диаграмме рассеяния постройте классификационное дерево для зависимой переменной y:



Дерево необходимо построить до идеальной классификации, в качестве критерия деления узла на два используйте минимизацию индекса Джини.

9.12 Рассмотрим обучающую выборку для прогнозирования y с помощью x и z:

y_i	x_i	z_i
y_1	1	2
y_2	1	2
y_3	2	2
y_4	2	1
y_5	2	1
y_6	2	1
y_7	2	1

Будем называть деревья разными, если они выдают разные прогнозы на обучающей выборке. Сколько существует разных классификационных деревьев для данного набора данных?

9.13 Исследовательница Мишель строит классификационное дерево для бинарной переменной y_i. Может ли при разбиении узла на два расти индекс Джини? Энтропия?

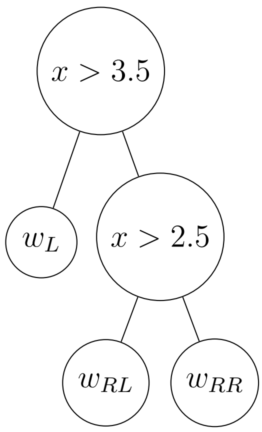
9.14 Приведите примеры наборов данных, для которых индекс Джини равен 0, 0.5 и 0.999.

9.15 Рассмотрим задачу построения классификационного дерева для бинарной переменной y_i. Приведите пример такого набора данных, что никакое разбиения стартового узла на два не снижает индекс Джини, однако двух разбиений достаточно, чтобы снизить индекс Джини до нуля.

9.16 Пятачок собрал данные о визитах Винни-Пуха в гости к Кролику. Здесь x_i — количество съеденого мёда в горшках, а y_i — бинарная переменная, отражающая застревание Винни-Пуха при выходе.

Для построения предиктивной модели Пятачок собирается использовать дерево с заданной структурой:

y_i	x_i
0	1
1	4
1	2
0	3
1	3
0	1



Пятачок использует квадратичную аппроксимацию для логистической функции потерь:

$$Obj(w) = \sum_{i=1}^{n} \left(loss(y_i, 0) + loss'_w(y_i, 0)(w_i - 0) + \frac{1}{2} loss''_{ww}(y_i, 0)(w_i - 0)^2 \right) + \frac{1}{2}\lambda |w|^2.$$

Помогите Очень Маленькому Существу подобрать оптимальные веса (w_i) при $\lambda = 1$.

9.17 Нарисовано дерево: деление 1, справа от первого деления — деление 2. Веса равны w_L, w_{RL}, w_{LL}. Дана выборка.

1. Выпишите в явном виде функцию правдоподобия и логистическую функцию потерь.
2. Оцените w методом максимального правдоподобия.
3. Тут другую функцию потерь написать!
4. Разложите функцию потерь в окрестности $w = (0, 0, 1)$ в ряд Тейлора до второго члена и примерно оцените w.

10 Бэггинг

10.1 У Винни-Пуха есть 100 песенок (кричалок, вопелок, пыхтелок и сопелок). Каждый день он выбирает и поёт одну из них равновероятно наугад. Одну и ту же песенку он может петь несколько раз. Сколько в среднем песенок оказываются неспетыми за 100 дней?

10.2 Вася поймал 3 рыбки, весом в 300, 600 и 1200 граммов. И посчитал среднее арифметическое, $\bar{x} = 700$.

1. Найдите закон распределения бутстрэп статистики для $\bar{x}$.
2. Найдите математическое ожидание и дисперсию бутстрэп статистики для $\bar{x}$.
3. Найдите закон распределения бутстрэп статистики для максимума и минимума для данной выборки.

10.1 Разложение на шум-смещение-разброс

10.3 Истинная зависимость имеет вид $y_i = 3x_i^2 + u_i$. Величины x_i независимы и равновероятно принимаю значения 0, 1, 2. Величины u_i независимы и равновероятно принимают значения -1 и 1.

Исследователь Анатолий оценивает модель линейной регрессии $y_i = \hat{\beta} x_i$ с помощью МНК.

Разложите ожидание квадрата ошибки прогноза на шум, смещение и разброс.

10.2 Случайные проекции

10.4 Василий любит сочинять. Особенно он любит сочинять вектора в пространствах большой размерности n. Каждую компоненту каждого вектора он сочиняет по следующему принципу:

$$z \sim \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{a}}, & \text{с вероятностью } a^2; \\ 0, & \text{с вероятностью } 2(1-a)a; \\ \frac{1}{\sqrt{a}}, & \text{с вероятностью } (1-a)^2; \end{cases},$$

где a — некоторый параметр.

1. Найдите предел по вероятности квадрата длины вектора делённого на размерность пространства.
2. Найдите предел по вероятности косинуса угла между двумя векторами.

11 Решения

1.1.

1. $f'(x) = 2x + 3$, $df = 2xdx + 3dx$, $df = 1.3$
2. $df = 2x_1dx_1 + 3dx_1 \cdot x_2^3 + 3x_1 \cdot 3x_2^2dx_2$, $df = -1.9$

1.2.

1. $A(dR)B$
2. $2r'dr$
3. $r'(A' + A)dr$
4. $R^{-1} \cdot dR \cdot R^{-1}$
5. $-\sin(r'r) \cdot 2r'dr$
6. $\frac{r'(A'+A)dr \cdot r'r - r'Ar2r'dr}{(r'r)^2}$

1.3.

1. $dQ(\hat\beta) = 2(y - X\hat\beta)^T(-X)d\hat\beta$, $d^2Q(\hat\beta) = 2d\hat\beta X^TXd\hat\beta$
2. $dQ(\hat\beta) = 0$
3. $\hat\beta = (X^TX)^{-1}X^Ty$

1.4.

1. $dQ(\hat\beta) = -2((y - X\hat\beta)^TX + \lambda\hat\beta^T)d\hat\beta$, $d^2Q(\hat\beta) = 2d\hat\beta^T(X^TX - \lambda I)d\hat\beta$
2. $dQ(\hat\beta) = 0$
3. $\hat\beta = (X^TX - \lambda I)^{-1}X^Ty$

1.5.

1. $\sum_{ij} A_{ij}B_{ij} = \sum_j(\sum_i A_{ij}B_{ij}) = \sum_i(A'B)_{ii} = \mathrm{tr}(A'B)$
   Пояснение: зафиксируем номер столбца j, тогда A_{ij} — элемент исходной матрицы A, стоящий на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. Аналогично, B_{ij} — элемент матрицы B, стоящий на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. Тогда $\sum_i A_{ij}B_{ij}$ — это скалярное произведение j-ого столбца матрицы A на j-ый столбец матрицы B. Заметим, что этот элемент будет стоять на диагонали матрицы $A'B$. Далее, берём следующие столбцы, находим скалярное произведение и прибавляем его к уже полученному, и так далее. В итоге получаем сумму диагональных элементов матрицы $A'B$, что и требовалось доказать.

2. Докажем, что $\mathrm{tr}(A'B) = \mathrm{tr}(BA')$:

$$\mathrm{tr}(A'B) = \sum_i (A'B)_{ii} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij} = \sum_j \sum_i B_{ij} A_{ij} = \sum_j (BA')_{jj} = \mathrm{tr}(BA')$$

   Заметим, что при транспонировании матрицы, её главная диагональ не меняется, значит, и сумма элементов остаётся прежней, то есть $\mathrm{tr}(A'B) = \mathrm{tr}(AB')$.

1.6. Обозначим за $\widetilde{X}$ матрицу алгебраических дополнений матрицы X, тогда $\det X = \sum_j X_{ij}\widetilde{X}_{ij}$ для любого фиксированного i. Вспомним, что $X^{-1} = (\det X)^{-1}\widetilde{X}^T$.

$$\frac{\partial \det X}{\partial X_{ij}} = \widetilde{X}_{ij} \Rightarrow d\det X = \sum_{ij} \widetilde{X}_{ij} dX_{ij} = \det X \sum_{ij} (\det X)^{-1} \widetilde{X}_{ij} dX_{ij} = \det X\, \mathrm{tr}(X^{-1}dX)$$

1.7.

1. $dQ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\exp(-y_i x_i'\hat\beta)} \cdot \exp(-y_i x_i'\hat\beta) \cdot (-y_i x_i') d\hat\beta + 2\lambda\hat\beta' d\hat\beta$

2. $\mathrm{grad}\, Q = \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-y_i x_i'\hat\beta)}{1+\exp(-y_i x_i'\hat\beta)} \cdot (-y_i x_i) + 2\lambda\hat\beta$

2.1.

1. $dQ(w) = 2(Xw-y)^T X dw$, $d^2Q(w) = 2dw^T X^T X dw$
2. $w = (X^TX)^{-1}X^Ty$
3. $\hat y = Xw = X(X^TX)^{-1}X^Ty \Rightarrow H = X(X^TX)^{-1}X^T$

2.2.

1. Выпишем $dQ(W)$ и найдём градиент:

$$dQ(w) = 2(Xw-y)^T X dw + 2\lambda w^T dw \Rightarrow \nabla Q(w) = 2X^T(Xw-y) + 2\lambda w$$

   Приравняв градиент к нулю, получим:

$$w = (X^TX + \lambda I)^{-1}X^Ty$$

2. Рассмотрим два случая.
   - $w \geqslant 0 : Q(w) = (y-\hat y)^T(y-\hat y) + \lambda w \to \min_w$. Решив, получим оптимальное значение:

$$w^+ = \frac{x^Ty}{x^Tx} - \frac{\lambda}{2x^Tx}$$

   - $w < 0 : Q(w) = (y-\hat y)^T(y-\hat y) - \lambda w \to \min_w$. Решив, получим оптимальное значение:

$$w^- = \frac{x^Ty}{x^Tx} + \frac{\lambda}{2x^Tx}$$

Далее нужно заметить, что $Q(w)$ — это парабола, после чего рассмотреть четыре возможных случая расположения w^+ и w^- и получить ответ:

- $w^+ < 0, w^- < 0 \Rightarrow w^* = w^-$
- $w^+ > 0, w^- > 0 \Rightarrow w^* = w^+$
- $w^+ < 0, w^- > 0 \Rightarrow w^* = 0$
- $w^+ > 0, w^- < 0$ — этот случай невозможен

2.3.

$$y_n - \hat{y}_n = (1 - H_{nn})(y_n - \hat{y}_n^-)$$

3.1.

1. $(5, 6, -7)$

2. Подставим точки A и B в уравнение плоскости:

$$A : 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 7 \cdot 4 + 10 = -2$$

$$B : 5 \cdot 4 + 6 \cdot 0 - 7 \cdot 4 + 10 = 2$$

   Точки A и B лежат по разные стороны плоскости, следовательно, отрезок AB пересекает её.

3. $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0)$, $|AB| = \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}$

4. Расстояние одинаково

5. $\rho = \frac{|5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 7 \cdot 4 + 10|}{\sqrt{5^2 + 6^2 + 7^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

3.2. Например, $w_1 = -2$, $w_0 = 2$, где w_0 — вес при константе.

3.3.

1. Например, $w_1 = 2, w_2 = 2, w_0 = 0$

2. Например, $w_1 = 2, w_2 = 2, w_0 = -2$

3. Можно показать графически: нарисовать на плоскости точки $(0,0), (1,1), (1,0), (0,1)$, причём для первых двух нейрон должен выдавать ответ 0, а для вторых — 1. Чтобы разделить эти точки, необходимо провести две прямые, в то время как один нейрон проводит только одну.

4. Например, подойдут веса $w_1 = 3, w_2 = 3, w_3 = -5, w_0 = -1$

5. Первый нейрон с весами $w_{11} = 1, w_{12} = 1, w_{10} = 1/2$ и второй нейрон с весами $w_{21} = 1, w_{22} = 1, w_{10} = -1/2$ должны подавать реуzльтаты на вход третьему нейрону с весами $w_{31} = 3, w_{32} = -1, w_{30} = -2$

3.4.

3.5.

3.6.

3.7.

3.8.

1. $f(t) = \log(t)$
2. Среднее гармоническое $<$ среднее геометрическое $<$ среднее арифметическое

3.9.

1. accuracy $= \frac{\text{TP}+\text{TN}}{\text{TP}+\text{FP}+\text{FN}+\text{TN}}$
2. precision $= \frac{\text{TP}}{\text{TP}+\text{FP}}$
3. recall $= \frac{\text{TP}}{\text{TP}+\text{FN}}$
4. TPR $= \frac{\text{TP}}{\text{TP}+\text{FN}}$

3.10.

3.11.

1. Поскольку все признаки одинаковы, то $\forall i \quad b_i = f(x_i) = b$, и функционал ошибки иммет вид:
$$Q(b) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} L(y_i, b) = \frac{1}{1000}\left(\sum_{i=1}^{900} b^2 + \sum_{i=1}^{100}(1-b)^2\right) \to \min_b$$
Дифференцируем и находим b:
$$2 \cdot 900 \cdot b - 2 \cdot 100 \cdot (1-b) = 0 \Rightarrow b = 0.1$$

2. Аналогично:
$$Q(b) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} |y_i - b| = \frac{1}{1000}(900 \cdot b + 100|1-b|) \to \min_b$$
При $b = 1$, получаем: $Q(1) = 0.9$ При $b < 1$: $Q(b) = \frac{1}{1000}(900b + 100 - 100b) = \frac{1}{1000}(900b + 100) \to \min_b$. Минимум функционала ошибки достигается при $b = 0$ и равен 0.1.

3. Снова выпишем функционал ошибки:

$$Q(b) = \frac{1}{1000}\left(-900\log(1-b) + 100\log b\right) \to \min_b$$

Берём производную и получаем оптимальный b:

$$\frac{1}{1000}\left(\frac{900}{1-b} - \frac{100}{b}\right) = 0 \Rightarrow b = 0.1$$

4.

$$Q(b) = \frac{1}{1000}\left(\frac{900}{1-b} - \frac{100}{b}\right) \to \min_b$$

Дифференцируя, получим:

$$\frac{900}{(1-b)^2} = \frac{100}{b^2} \Rightarrow b = 0.25$$

3.12. Нет. Не выполнено $\tilde{L} \geqslant L$ для всех $M \in \mathbb{R}$.

3.13. $\hat{\mathbb{P}}(y_i = 1|x_i) = \frac{1}{1+\exp(-\beta_1-\beta_2 x_i)}$

1. $loss(\beta_1, \beta_2) = -\sum_{i=1}^{l}\left([y_i = 1]\ln\frac{1}{1+\exp(-\beta_1-\beta_2 x_i)} + [y_i = -1]\ln\left(1 - \frac{1}{1+\exp(-\beta_1-\beta_2 x_i)}\right)\right)$

2. $\frac{\partial loss}{\partial \beta_1} = -\sum_{i=1}^{l}\left([y_i = 1]\cdot\frac{1}{1+\exp(\beta_1+\beta_2 x_i)} + [y_i = -1]\cdot(-1)\cdot\frac{1}{1+\exp(-\beta_1-\beta_2 x_i)}\right)$

3. $y_4 = 1$, $x_4 = 0.8$

3.14.

3.15.

3.16.

1. Выпишем аппроксимацию функции потерь:

$$loss(\beta_1, \beta_2) \approx 100\ln 2 + 6\beta_1 + 12\beta_2 + \frac{1}{2}(25\beta_1^2 + 2\cdot 12\beta_1\beta_2 + 12\beta_2^2) \to \min_{\beta_1,\beta_2}$$

Взяв производные по β_1 и β_2, получим $\hat{\beta}_1 = \frac{6}{13}$, $\hat{\beta}_2 = -\frac{19}{13}$.

2. $\hat{P}(honey_i = 1|bee_i = 0) = \frac{1}{1+\exp(-6/13)} \approx 0.615$.

Это же число можно было получить из таблицы: $\frac{32}{32+20} \approx 0.61$.

3.17. Предельный эффект максимален при максимальной производной $\Lambda'(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z)$, то есть при $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z = 0$.

4.1.

1. $X'X = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 4/\sqrt{5} \\ 0 & 3/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

2. $XX' = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 3/\sqrt{6} & -3/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $X'X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1s/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4. $XX' = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

5. $X = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4.2.

4.3. $H = UU'$

4.4. $H = QQ'$

5.1.

5.2.

5.3. $C = 0$ и $\sigma = +\infty$

5.4.

1. Нужно нарисовать прямые $2x_1 + 3x_2 = 7$, $2x_1 + 3x_2 = 8$, $2x_1 + 3x_2 = 6$.
2. $2/\sqrt{13}$
3. $22/\sqrt{13}$

5.5. $w = (1/2, 1/2)$, $w_0 = 5.5$

5.6.

5.7.

5.8.

6.1. В исходном пространстве: $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{0.6}$.
В расширяющем пространстве: $|h(\vec{a})| = 1$, $|h(\vec{b})| = 1$, $\cos(h(\vec{a}), h(\vec{b})) = e^{-2}$.

6.2. Длина равна 1 и не зависит от γ. При $\gamma \approx 0$ вектора примерно совпадают, при больших γ вектора примерно ортогональны.

6.3.

1. $|AB| = \sqrt{10}$, $\cos(ABC) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

2. $|AB| = 1$, $\cos(ABC) = e^{-8}$

6.4. $K(x,y) = 1 + x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_1x_2 \cdot 3y_1y_2 + 2x_1^2 \cdot 2y_1^2 + 4x_2^2 \cdot 4y_2^2$

6.5. $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2)$

6.6. Ядром является только функция в пункте 1.

6.7.

6.8.

7.1. Выпишем лагранжиан:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 10)$$

Затем условие первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow & x_1 = -\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow & x_2 = -\frac{3}{2}\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + 5\lambda = 0 \Rightarrow & x_3 = -\frac{5}{2}\lambda \end{cases}$$

Двойственная задача имеет вид:

$$g(\lambda) = (-\lambda)^2 + \left(-\frac{3}{2}\lambda\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\lambda\right)^2 + \lambda\left(-2\lambda + 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\lambda + 5\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\lambda - 10\right) \to \max_{\lambda}$$

7.2.

7.3.

7.4.

7.5.

7.6.

7.7.

8.1.

8.2. Матрица с центрированными столбцами имеет вид: $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $\widetilde{X}'\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Её собственные числа: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 2$, собственные вектора $v_1 = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2})'$, $v_2 = (1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2})$. Найдём главные компоненты:

$$P = XV = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Первая и вторая главные компоненты — это первый и второй столбцы матрицы P соответственно.

8.3.

8.4.

9.1. $I_X = 1 - 0.2^2 - 0.8^2 = 0.32$, $H(X) = -(0.2\ln 0.2 + 0.8\ln 0.8) \approx 0.5$
$I_Y = 1 - 0.2^2 - 0.3^2 - 0.5^2 = 0.62$, $H(Y) = -(0.2\ln 0.2 + 0.3\ln 0.3 + 0.5\ln 0.5) \approx 1.03$

9.2.

1. $H(X) = \ln 3$, $I_X = 2/3$, спутанность равна 3.
2. $I_X = 1 - \frac{1}{k}$, $H(X) = \ln k$, спутанность равна k.
3. Если величина X равновероятно принимает k значений, то спутанность равна k. У равномерной на $[0; a]$ спутанность равна a. $H(X) = -\int_0^a \frac{1}{a} \cdot \ln \frac{1}{a} dx = \ln a$.
4. Обозначим $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, тогда $H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(f(x))dx$.

9.3.

9.4. $I = 2p(1-p)$, энтропия и индекс Джини максимальны при $p = 0.5$.

9.5.

$$I = 2 \cdot 0.7 \cdot 0.3$$

9.6.

$$I = 0.2 I_L + 0.8 I_R$$

9.7. Первое разбиение по порогу $x_i < 2.5$, второе — по $x_i < 1.5$.

9.8. Первое разбинение по порогу $x_i < 3.5$. Левый лист разбивается по порогу $x_i < 5.5$, правый — по порогу $x_i < 1.5$.

9.9. Было: $I = 1 - \left(\frac{20}{70}\right)^2 - \left(\frac{40}{70}\right)^2 - \left(\frac{2}{70}\right)^2 - \left(\frac{8}{70}\right)^2 = \frac{708}{1225} \approx 0.58$,
$H = -\left(\frac{20}{70}\ln\frac{20}{70} + \frac{40}{70}\ln\frac{40}{70} + \frac{2}{70}\ln\frac{2}{70} + \frac{8}{70}\ln\frac{8}{70}\right) \approx 1.03$.
Стало: $I_L = 0$, $I_R = 1 - \left(\frac{20}{30}\right)^2 - \left(\frac{2}{30}\right)^2 - \left(\frac{8}{30}\right)^2 = 0.48$, $I = \frac{40}{70} \cdot 0 + \frac{30}{70} \cdot 0.48 \approx 0.21$,
$H_L = 0$, $H_R = -\left(\frac{20}{30}\ln\frac{20}{30} + \frac{2}{30}\ln\frac{2}{30} + \frac{8}{30}\ln\frac{8}{30}\right) \approx 0.8$, $H = \frac{40}{70} \cdot 0 + \frac{30}{70} \cdot 0.8 \approx 0.34$.

9.10. Первое разбиение по порогу $x_i < 12.5$, второе — по порогу $x_i < 10.5$.

9.11. Сначала делим по z, потом по x, так как индекс Джини в таком порядке падает сильнее.

9.12.

9.13. Нет, в силу выпуклости функций.

9.14. Все y_i одинаковые; поровну y_i двух типов; 1000 разных типов y_i, по одному наблюдению каждого типа.

9.15.

y_i	x_i	z_i
1	1	1
1	2	2
0	1	2
0	2	1

9.16.

9.17.

10.1. $100 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{100} \approx 100/e \approx 37$

10.2.

10.3.

10.4.

12 Источники мудрости