1 Дифференциал

Минитеория:

1. $d(XY) = dX \cdot Y + X \cdot dY$
2. $dA = 0$
3. $d(X') = dX'$
4. $d \det X = \det X \operatorname{tr}(X^{-1} dX)$

1.1 Вспомним дифференциал :)

1. Известно, что $f(x) = x^2 + 3x$. Найдите $f'(x)$ и df. Чему равен df в точке $x = 5$ при $dx = 0.1$?
2. Известно, что $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1 x_2^3$. Найдите df. Чему равен df в точке $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ при $dx_1 = 0.1$ и $dx_2 = -0.1$?
3. Известно, что $F = \begin{pmatrix} 5 & 6x_1 \\ x_1 x_2 & x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$. Найдите dF.
4. Известно, что $F = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Найдите dF.
5. Матрица F имеет размер 2×2, в строке i столбце j у неё находится элемент f_{ij}. Выпишите выражение $\operatorname{tr}(F' dF)$ в явном виде без матриц.

1.2 Пусть t — скалярная переменная, r, s — векторные переменные, R, S — матричные переменные. Кроме того, a, b — векторы констант, A, B — матрицы констант.

Применив базовые правила дифференцирования найдите:

1. $d(ARB)$;
2. $d(r'r)$;
3. $d(r'Ar)$;
4. $d(R^{-1})$, воспользовавшись тем, что $R^{-1} \cdot R = I$;
5. $d \cos(r'r)$;
6. $d(r'Ar / r'r)$.

1.3 В методе наименьших квадратов минимизируется функция

$$Q(\hat{\beta}) = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}).$$

1. Найдите $dQ(\hat{\beta})$ и $d^2 Q(\hat{\beta})$;
2. Выпишите условия первого порядка для задачи МНК;
3. Выразите $\hat{\beta}$ предполагая, что $X'X$ обратима.

1.4 В методе LASSO минимизируется функция

$$Q(\hat{\beta}) = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) + \lambda \hat{\beta}'\hat{\beta},$$

где λ — положительный параметр, штрафующий функцию за слишком большие значения $\hat{\beta}$.

1. Найдите $dQ(\hat{\beta})$ и $d^2Q(\hat{\beta})$;
2. Выпишите условия первого порядка для задачи LASSO;
3. Выразите $\hat{\beta}$.

1.5 Пусть A и B — матрицы одного размера.

1. Докажите, что сумму $\sum_{ij} A_{ij}B_{ij}$ можно представить в виде $\operatorname{tr}(A'B)$.
2. Докажите, что $\operatorname{tr}(A'B) = \operatorname{tr}(AB') = \operatorname{tr}(B'A) = \operatorname{tr}(BA')$.

1.6 Выведите формулу для $d \det X$.

1.7 Пусть x_i — вектор-столбец $k \times 1$, y_i — скаляр, равный $+1$ или -1, $\hat{\beta}$ — вектор-столбец размера $k \times 1$. Рассмотрим функцию

$$Q(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \exp(-y_i x_i' \hat{\beta})) + \lambda \hat{\beta}' \hat{\beta}$$

1. Найдите dQ;
2. Найдите вектор-столбец $\operatorname{grad} Q$.

2 Линейная регрессия

2.1 Рассмотрим задачу линейной регресии

$$Q(w) = (y - Xw)^T (y - Xw) \to \min_w .$$

1. Найдите $dQ(w)$ и $d^2Q(w)$.
2. Выведите формулу для оптимального w.
3. Выведите формулу для матрицы-шляпницы (hat-matrix), связывающей вектор фактических y и вектор прогнозов $\hat{y} = H \cdot y$.

2.2 Рассмотрим задачу регрессии с одним признаком и без константы, $\hat{y}_i = w \cdot x_i$. Решите в явном виде задачи МНК со штрафом:

1. $Q(w) = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) + \lambda w^2$;
2. $Q(w) = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) + \lambda |w|$;

2.3 Храбрая и торопливая исследовательница Мишель хочет решить задачу линейной регрессии по n наблюдениям с вектором y и матрицей признаков X. Сначала исследовательница Мишель так торопилась, что совсем забыла последнее наблюдение и оценила задачу с более коротким вектором y^- и матрицей X^-, где не хватает последней строки. Затем Мишель взяла правильную матрицу X, но неправильный вектор y^*, в котором она вместо фактического последнего наблюдения вектора y вписала его прогноз, полученный с помощью регрессии с y^{-1} и X^-.

1. Как связаны $\hat{y}_n^-$ и $\hat{y}_n^*$ (прогнозы для последнего наблюдения полученные по модели без последнего наблюдения и модели с неверным последним наблюдением)?
2. Как выглядит вектор, равный разнице $y - y^*$?

3. Какие величины находятся в векторе $H \cdot (y - y^*)$? Чему равна последняя, n-ая, компонента этого вектора? Выразите её через H_{nn} и ошибку прогноза последнего наблюдения по модели без последнего наблюдения, $y_n - \hat{y}_n^-$.
4. Как связаны между собой ошибка прогноза n-го наблюдения по полной модели, ошибка прогноза n-го наблюдения по модели без последнего наблюдения и H_{nn}?
5. Как быстро провести кросс-валидацию с выкидыванием одного наблюдения для задачи линейной регрессии?

3 Линейные классификаторы

3.1 Рассмотрим плоскость в $\mathbb{R}^3$, задаваемую уравнением $5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 10 = 0$ и две точки, $A = (2, 1, 4)$ и $B = (4, 0, 4)$.

1. Найдите любой вектор, перпендикулярный плоскости.
2. Правда ли, что отрезок AB пересекает плоскость?
3. Найдите длину отрезка AB;
4. Не находя расстояние от точек до плоскости, определите, во сколько раз точка A дальше от плоскости, чем точка B;
5. Найдите расстояние от точки A до плоскости.

3.2 Рассмотрим простейший персептрон с константой, единственным входом x_1 и пороговой функцией активации. Подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал логическое отрицание (в ответ на 0 выдавал 1, и наоборот).

3.3 Рассмотрим простейший персептрон с константой, двумя входами x_1, x_2 и пороговой функцией активации.

Здесь ассистенты нарисуют в tikz картинку, достойную стоять вместо Джоконды в Лувре

1. Подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал логическое ИЛИ (OR).
2. Подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал логическое И (AND).
3. Докажите, что веса невозможно подобрать так, чтобы персептрон реализовывал исключающее логическое ИЛИ (XOR).
4. Добавьте персептрону вход $x_3 = x_1 \cdot x_2$ и подберите веса так, чтобы персептрон реализовывал XOR.
5. Реализуйте XOR с помощью трёх персептронов с двумя входами и константой. Укажите веса и схему их взаимосвязей.

3.4 В коробке завалялось три персептрона, у каждого два входа с константой и пороговая функция активации. Реализуйте с их помощью функцию

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x_2 \geqslant |x_1 - 3| + 2; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

3.5 Рассмотрим следующий набор данных:

x_i	z_i	y_i
-1	-1	0
1	-1	0
-1	1	0
1	1	0
0	2	1
2	0	1
0	-2	1
-2	0	1

1. Существует ли перспетрон с константой, двумя входами и пороговой функцией активации, способный идеально классифицировать y_i на данной выборке? А хватит ли двух таких персептронов? А может хватит трёх?
2. Введите такое преобразование исходных признаков $h_i = h(x_i, z_i)$, при котором с идеальной классификацией y_i справился бы даже персептрон с одним входом, константой и пороговой функцией активации.

3.6 Бандерлог из Лога[1] ведёт блог, любит считать логарифмы и оценивать логистические регрессии. С помощью нового алгоритма Бандерлог решил задачу классификации по трём наблюдениям и получил $b_i = \hat{\mathbb{P}}(y_i = 1|x_i)$.

y_i	b_i
1	0.7
-1	0.2
-1	0.3

1. Постройте ROC-кривую.
2. Найдите площадь под ROC-кривой и индекс Джини.
3. Постройте PR-кривую (кривая точность-полнота).
4. Найдите площадь под PR-кривой.
5. Как по-английски будет «бревно»?

3.7 Классификатор Бандерлога имеет вид

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_i > t; \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что площадь под ROC-кривой равна вероятности того, случайно выбранный положительный объект окажется позже случайно выбранного отрицательного объекта, если объекты ранжированы по возрастанию величины b_i.

3.8 Все средние издалека выглядят одинаково, среднее $= f^{-1}(0.5f(x_1) + 0.5f(x_2))$. Например, у среднего арифметического $f(t) = t$, у среднего гармонического $f(t) = 1/t$.

1. Какая f используется для среднего геометрического?

Для измерения качества бинарной классификации Ара использует среднее арифметическое точности и полноты, Гена — среднее геометрическое, а Гарик — среднее гармоническое.

[1] деревня в Кадуйском районе Вологодской области

2. У кого будут выходить самые «качественные» и самые «некачественные» прогнозы?

3.9 Бандерлог начинает все определения со слов «это доля правильных ответов»:

1. accuracy — это доля правильных ответов...
2. точность (precision) — это доля правильных ответов...
3. полнота (recall) — это доля правильных ответов...
4. TPR — это доля правильных ответов...

Закончите определения Бандерлога так, чтобы они были, хм, правильными.

3.10 Алгоритм бинарной классификации, придуманный Бандерлогом, выдаёт оценки вероятности $b_i = \hat{\mathbb{P}}(y_i = 1|x_i)$. Всего у Бандерлога 10000 наблюдений. Если ранжировать их по возрастанию b_i, то окажется что наблюдения с $y_i = 1$ занимают ровно места с 5501 по 5600.

Найдите площадь по ROC-кривой и площадь под PR-кривой.

3.11 Бандерлог собрал выборку из 900 муравьёв и 100 китов. Переменная y_i равна 1 для китов. Бандерлог хочет, чтобы его алгоритм классификации выдавал для каждого наблюдения число $b_i = f(x_i) \in [0; 1]$, оценку вероятности того, что наблюдение является китом. В качестве признака Бандерлог использует количество глаз, не задумавшись о том, что оно равно двум и для муравьёв, и для китов.

Решите задачу минимизации эмпирической функции риска и найдите все b_i для функций потерь:

1. $L(y_i, b_i) = (y_i - b_i)^2$, если для муравьёв $y_i = 0$;
2. $L(y_i, b_i) = |y_i - b_i|$, если для муравьёв $y_i = 0$;
3. $L(y_i, b_i) = \begin{cases} -\log b_i, & \text{если } y_i = 1 \\ -\log(1 - b_i), & \text{иначе.} \end{cases}$;
4. $L(y_i, b_i) = \begin{cases} 1/b_i, & \text{если } y_i = 1 \\ 1/(1 - b_i), & \text{иначе.} \end{cases}$;

3.12 Бандерлог утверждает, что открыл новую верхнюю границу для пороговой функции потерь, $\tilde{L}(M_i) = 1 + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(-x_i)$, где $M_i = y_i \cdot \langle w, x_i \rangle$. Прав ли бандерлог?

3.13 Бандерлог из Лога оценил логистическую регрессию по четырём наблюдениям и одному признаку с константой, получил $b_i = \hat{\mathbb{P}}(y_i = 1|x_i)$, но потерял последнее наблюдение:

y_i	b_i
1	0.7
-1	0.2
-1	0.3
?	?

1. Выпишите функцию потерь для задачи логистической регрессии.
2. Выпишите условие первого порядка по коэффициенту перед константой.
3. Помогите бандерлогу восстановить пропущенные значения!

3.14 У Бандерлога три наблюдения, первое наблюдение — кит, остальные — муравьи. Киты кодируются $y_i = 1$, муравьи — $y_i = -1$. На этот раз Бандерлог, чтобы быть уверенным, что x_i различаются, сам лично определил $x_i = i$. После этого Бандерлог оценивает логистическую регрессию с константой.

1. Выпишите эмпирическую функцию риска, которую минимизирует Бандерлог;
2. При каких оценках коэффициентов логистической регрессии эта функция достигает своего минимума?

4 Логистическая функция

Логистическое распределение? Перевод y=0/1 в y=-1/1. Максимум правдоподобия в минимум штрафа? Предельные эффекты?

4.1 Рассмотрим логистическую функцию $\Lambda(w) = e^w/(1+e^w)$.

1. Как связаны между собой $\Lambda(w)$ и $\Lambda(-w)$?
2. Как связаны между собой $\Lambda'(w)$ и $\Lambda'(-w)$?
3. Постройте графики функций $\Lambda(w)$ и $\Lambda'(w)$.
4. Найдите $\Lambda(0)$, $\Lambda'(0)$, $\ln\Lambda(0)$.
5. Найдите обратную функцию $\Lambda^{-1}(p)$.
6. Как связаны между собой $\frac{d\ln\Lambda(w)}{dw}$ и $\Lambda(-w)$?
7. Как связаны между собой $\frac{d\ln\Lambda(-w)}{dw}$ и $\Lambda(w)$?
8. Разложите $h(\beta_1, \beta_2) = \ln\Lambda(y_i(\beta_1 + \beta_2 x_i))$ в ряд Тейлора до второго порядка в окрестности точки $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$.

4.2 Исследовательница Октябрина пытается предсказать, купит ли покупатель слона. Октябрина предполагает, что у каждого покупателя есть ненаблюдаемая полезность от покупки слона, y_i^*, складывающаяся из величины w_i, зависящей от характеристик покупателя, и случайной составляющей u_i:

$$y_i^* = w_i + u_i, \quad u_i \sim Logistic$$

Покупка слона, y_i, (1 — купит, 0 — не купит) однозначно определяется полезностью покупки:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } y_i^* \geqslant 0 \\ 1, & \text{если } y_i^* < 0 \end{cases}$$

1. Выпишите логарифмическую функцию правдоподобия и функцию потерь при известных w_i.
2. Как изменится ответ, если факт покупки слона будет кодироваться по-другому: 1 — купит, (-1) — не купит?
3. Разложите функцию потерь в ряд Тейлора до второго члена в окрестности точки $w_0 = (w_{01}, w_{02}, \ldots, w_{0n})$.

4.3 Рассмотрим целевую функцию логистической регрессии с константой

$$Q(w) = \frac{1}{\ell}\sum L(y_i, b_i),$$

где $b_i = 1/(1+\exp(-\langle w, x_i\rangle))$ и $L(y_i, b_i) = \begin{cases} -\log b_i, & \text{если } y_i = 1 \\ -\log(1-b_i), & \text{иначе.} \end{cases}$.

1. Найдите $dQ(w)$ и $d^2Q(w)$;
2. Найдите $dQ(0)$ и $d^2Q(0)$;
3. Выпишите квадратичную аппроксимацию для $Q(w)$ в окрестности $w = 0$;
4. С какой задачей совпадает задача минимизации квадратичной аппроксимации?

4.4 Винни-Пух знает, что мёд бывает правильный, $honey_i = 1$, и неправильный, $honey_i = 0$. Пчёлы также бывают правильные, $bee_i = 1$, и неправильные, $bee_i = 0$. По 100 своим попыткам добыть мёд Винни-Пух составил таблицу сопряженности:

	$honey_i = 1$	$honey_i = 0$
$bee_i = 1$	12	36
$bee_i = 0$	32	20

Винни-Пух использует логистическую регрессию с константой для прогнозирования правильности мёда с помощью правильности пчёл.

1. Какие оценки коэффициентов получит Винни-Пух?
2. Какой прогноз вероятности правильности мёда при встрече с неправильными пчёлами даёт логистическая модель? Как это число можно посчитать без рассчитывания коэффициентов?

4.5 Винни-Пух оценил логистическую регрессию для прогнозирования правильности мёда от высоты дерева (м) x_i и удалённости от дома (км) z_i: $\ln odds_i = 2 + 0.3x_i - 0.5z_i$.

1. Оцените вероятность того, что $y_i = 1$ для $x = 15$, $z = 3.5$.
2. Оцените предельный эффект увеличения x на единицу на вероятность того, что $y_i = 1$ для $x = 15$, $z = 3.5$.
3. При каком значении x предельный эффект увеличения x на единицу в точке $z = 3.5$ будет максимальным?

5 Разложения матриц

5.1 Известна матрица X,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

1. Найдите QR-разложение матрицы $X'X$;
2. Найдите QR-разложение матрицы XX';
3. Найдите спектральное разложение матрицы $X'X$;
4. Найдите спектральное разложение матрицы XX';
5. Найдите сингулярное разложение (SVD) матрицы X;

5.2 Объясните геометрический смысл QR, SVD и спектрального разложений.

5.3 Бандрелог выполнил SVD-разложение матрицы регрессоров X. Помогите Бандерлогу поскорее найти формулу для матрицы-шляпницы H, которая проецирует y на пространство столбцов матрицы X, $\hat{y} = Hy$.

5.4 Бандрелог выполнил QR-разложение матрицы регрессоров X. Помогите Бандерлогу поскорее найти формулу для матрицы-шляпницы H, которая проецирует y на пространство столбцов матрицы X, $\hat{y} = Hy$.

5.1 SVD-фея

5.5 Посмотрие на классное отражение ходулочника в воде :)

Рис. 1: Frank Schulenburg, CC BY-SA 3.0

1. Найдите матрицу, которая выполняет отражение относительно плоскости, ортогональной вектору $w' = (1, 2, 3)$.
2. Как будет выглядеть матрица отражения U относительно гипер-плоскости ортогональной вектору w в общем случае?
3. Пусть U матрица произвольного отражения. Верно ли, что $U^T = U$? Верно ли, что $U^2 = I$?

5.6 Найдите такой вектор w, чтобы отражение относительно плоскости, ортогональной вектору w, переводило вектор $(2, 5, -3)'$ в вектор $(a, 0, 0)$. Выпишите матрицу соответствующего отражения.

5.7 Задана матрица X:

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите такую последовательность отражений, которая превращает матрицу X в бидиагональную матрицу Σ. То есть у матрицы Σ только на главной диагонали и на линии выше главной диагонали могут стоять ненулевые числа. Отражения можно применять слева и справа:

$$X = U_2 U_1 \Sigma V_1'$$

5.8 Как выглядит матрица U, поворачивающая двумерные вектора на угол α по часовой стрелке? Как связаны U^T и U^{-1}?

6 Метод опорных векторов

6.1 На плоскости имеются точки двух цветов. Красные: $(1,1)$, $(1,-1)$ и синие: $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

1. Найдите разделяющую гиперплоскость методом опорных векторов при разных C.
2. Укажите опорные вектора.

6.2 На плоскости имеются точки двух цветов. Красные: $(1,1)$, $(1,-1)$ и синие: $(-1,1)$, $(-1,-1)$ и $(2,0)$.

1. Найдите разделяющую гиперплоскость методом опорных векторов при разных C.
2. Укажите опорные вектора.

6.3 Эконометресса Авдотья решила использовать метод опорных векторов с гауссовским ядром с параметром $\sigma = 1$ и штрафным коэффициентом $C = 1$. Соответственно, она минимизировала целевую функцию

$$\frac{w'w}{2} + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

где разделяющая плоскость задаётся $w'x - w_0 = 0$, а ξ_i — размеры «заступа» за разделяющую полосу.

Затем Автдотья подумала, что неплохо бы выбрать наилучшие C и σ. Ей лень было использовать кросс-валидацию, поэтому Авдотья минимизировала данную функцию по $C \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$. Какие значения она получила?

6.4 Задан вектор $w = (2,3)$ и число $w_0 = 7$.

1. Нарисуйте прямые $\langle w, x\rangle = w_0$, $\langle w, x\rangle = w_0 + 1$, $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$.
2. Найдите ширину полосы между $\langle w, x\rangle = w_0 + 1$ и $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$.
3. Найдите расстояние от точки $(5,6)$ до прямой $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$.

6.5 Заданы две прямые, l_0: $x^{(1)} + 3x^{(2)} = 9$ и l_1: $x^{(1)} + 3x^{(2)} = 13$. Найдите подходящий вектор w и число w_0 так, чтобы прямая l_0 записывалась как $\langle w, x\rangle = w_0 - 1$, а прямая l_1 как $\langle w, x\rangle = w_0 + 1$.

6.6 Даны наблюдения

$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	y
1	0	0
2	0	0
0	3	1
0	4	1

1. Нарисуйте разделяющую полосу наибольшей ширины.

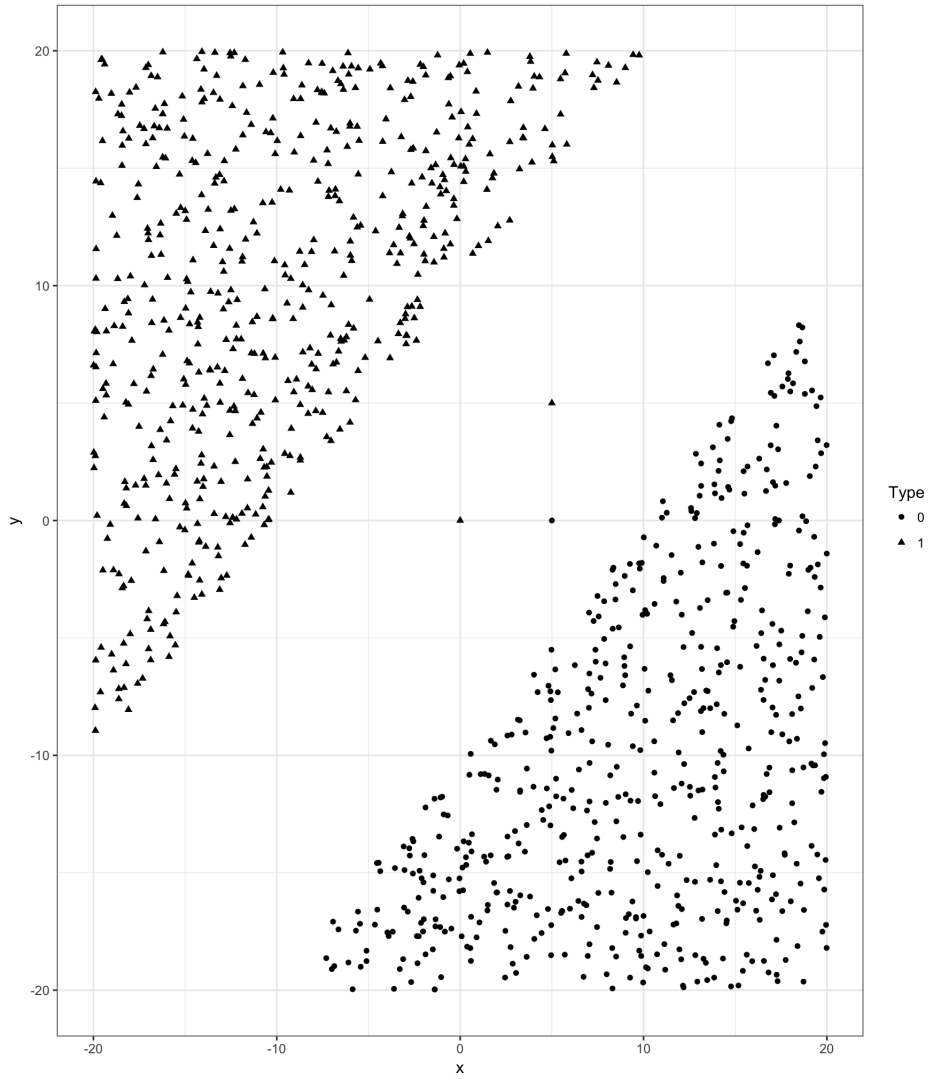
2. Решите задачу оптимизации

$$\min_{w,w_0} \frac{1}{2}\langle w, w\rangle$$

при ограничении: для $y_i = 1$ выполнено условие $\langle w, x\rangle \geqslant w_0 + 1$, а для $y_i = 0$ выполнено условие $\langle w, x\rangle \leqslant w_0 - 1$.

3. Для точки $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) = (1, 1)$ найдите значение $\langle w, x\rangle - w_0$ и постройте прогноз $\hat{y}$.

6.7 По картинке качественно решите задачу разделения точек:



Целевая функция имеет вид:

$$\min_{w,w_0} \frac{1}{2}w'w + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

Уравнение разделяющей поверхности — $w'x = w_0$, уравнения краёв полосы: $w'x = w_0 + 1$ и $w'x = w_0 - 1$. Нарушителями считаются наблюдения, которые попали на нейтральную полосу или на чужую территорию. Здесь $\xi_i = |w| \cdot d_i$, где d_i — длина «заступ» наблюдения за черту «своих».

1. Как пройдёт разделяющая полоса при $C = 1$? Найдите w, w_0, и величины штрафов ξ_i.
2. Как пройдёт разделяющая полоса при $C = +\infty$? Найдите w, w_0, и величины штрафов ξ_i.

6.8 ююю

7 Ядра к бою!

7.1 Ядерная функция, скалярное произведение в расширяющем пространстве, имеет вид $K(a, b) = \exp(-|a - b|^2)$.

Имеются вектора $a = (1, 1, 1)$ и $b = (1, 2, 0)$.

Найдите длину векторов и косинус угла между ними в исходном и расширяющем пространстве.

7.2 Рассмотрим два вектора, $v_1 = (1, 1, 2)$ и $v_2 = (1, 1, 1)$. Переход в спрямляющее пространство осуществляется с помощью гауссовской ядерной функции с параметром γ, $k(v, v') = \exp(-\gamma|v - v'|^2)$.

1. Как от γ зависят длины векторов в спрямляющем пространстве?
2. Как от γ зависит угол между векторами в спрямляющем пространстве?

7.3 Имеются три наблюдения A, B и C:

	x	y
A	1	-2
B	2	1
C	3	0

1. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC.
2. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC в расширенном пространстве с помощью гауссовского ядра с $K(x, x') = \exp(-|x - x'|^2)$.
3. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC в расширенном пространстве с помощью полиномиального ядра второй степени.

7.4 Переход из двумерного пространства в расширяющее задан функцией

$$f : (x_1, x_2) \to (1, x_1, x_2, 3x_1x_2, 2x_1^2, 4x_2^2).$$

Найдите соответствующую ядерную функцию.

7.5 Ядерная функция имеет вид

$$K(x, y) = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2.$$

Как может выглядеть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ переводящие исходные векторы в расширенное пространство?

7.6 Является ли функция $K(x, z)$ ядром?

1. $K(x,z) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = z; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$;
2. $K(x,z) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = z; \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$;
3. $K(x, z) = \sin(x^T z)$;
4. $K(x, z) = \cos(x^T x) \sin(z^T z)$;

7.7 Пусть x и z — строки символов, возможно разной длины. Рассмотрим две функции. Функция $K_1(x, z)$ равна единице, если строки x и z совпадают. Функция $K_2(x, z)$ — число совпадающих подстрок. Функция K_3 — произведение количеств букв «а» в обоих словах.

1. Найдите K_1(«мама», «ам») и K_2(«мама», «ам»), K_3(«мама», «ам»)
2. Является ли функция K_1 ядром?
3. Является ли функция K_2 ядром?
4. Является ли функция K_3 ядром?

7.8 На прямой аллее растёт три дуба. Находятся в точках с координатами $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = -3$. Исследователь Винни-Пух проверил и выяснил, что на первом Дубе водятся правильные пчёлы, а на остальных — неправильные.

1. Являются ли пчёлы линейно разделимыми в пространстве исходной аллеи?
2. Помогите Винни-Пуху выписать прямую задачу метода опорных векторов в пространстве исходной аллеи;
3. Помогите Винни-Пуху выписать двойственную задачу метода опорных векторов в пространстве исходной аллеи;
4. Помогите Винни-Пуху выписать двойственную задачу метода опорных векторов в бесконечномерном пространстве с ядерной функцией $K(x, z) = \exp(-(x - z)^2)$; Являются ли точки в нём линейно разделимыми?
5. Помогите Винни-Пуху выписать прямую и двойственную задачу метода опорных векторов в спрямляющем пространстве с ядерной функцией $K(x, z) = (xz + 1)^2$; Являются ли точки в нём линейно разделимыми?

7.9 Стомерный Морской Ёж всплывает со дна стомерной пучины. У Стомерного Морского Ежа ровно сто иголок. Длина каждой иголки равна единице, а угол между любыми двумя иголками ровно прямой. Проблема в том, что 42 иголки повреждены. Чтобы повреждённые иголки регенерировались, Стомерному Морскому Ежу необходимо всплыть так, чтобы повреждённые иголки оказались над водой, а целые — под водой.

1. При любом ли расположении повреждённых игл Стомерный Морской Ёж сможет их регенерировать?
2. Верно ли, что гауссовское ядро $K(x, x') = \exp(-\gamma||x - x'||^2)$ позволяет идеально разделить любые наблюдения кроме совпадающих при достаточно большом параметре γ?

8 Двойственные задачи

8.1 Выпишите двойственную задачу для минимизации $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ при ограничении $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10$.

8.2 Выпишите двойственную задачу для $x_1+2x_2+3x_3 \to \max$ при ограничениях $x_1+x_2+x_3 \leqslant 10$, $2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10$, все $x_i \geqslant 0$.

8.3 Выпишите двойственную задачу для максимизации $1/x_1+2/x_2$ при ограничении $2x_1+3x_2 = 10$ и $x_1 \in [1; 10]$, $x_2 \in [2; 6]$.

8.4 Выпишите двойственную задачу для минимизации $f(x) = \frac{1}{2}x'Hx + g'x$ при ограничении $A'x = b$.

8.5 Выпишите двойственную задачу для минимизации $f(x) = \frac{1}{2}x'Hx + g'x$ при ограничении $A'x \leqslant b$.

8.6 Выпишите прямую и двойственную задачу для метода опорных векторов в исходном пространстве.

8.7 Выпишите прямую и двойственную задачу для метода опорных векторов в спрямляющем пространстве с использованием ядра $K(.,.)$.

9 Метод главных компонент

9.1 Найдите прямую, у которой сумма квадратов расстояний до точек $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ будет минимальной. Чему равна при этом доля объяснённого разброса точек?

9.2 Есть две переменных, $x = (1, 0, 0, 3)'$, $z = (3, 2, 0, 3)'$. Найдите первую и вторую главные компоненты.

9.3 Известна матрица выборочных ковариаций трёх переменных. Для удобства будем считать, что переменные уже центрированы.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Выразите первую и вторую главные компоненты через три исходных переменных.
2. Выразите первую и вторую главные компоненты, через три исходных переменных, если перед методом главных компонент переменные необходимо стандартизировать.

9.4 Пионеры, Крокодил Гена и Чебурашка собирали металлолом несколько дней подряд. В распоряжение иностранной шпионки, гражданки Шапокляк, попали ежедневные данные по количеству собранного металлолома: вектор g — для Крокодила Гены, вектор h — для Чебурашки и вектор x — для Пионеров. Гена и Чебурашка собирали вместе, поэтому выборочная корреляция $\text{sCorr}(g, h) = -0.9$. Гена и Чебурашка собирали независимо от Пионеров, поэтому выборочные корреляции $\text{sCorr}(g, x) = 0$, $\text{sCorr}(h, x) = 0$. Если регрессоры g, h и x центрировать и нормировать, то получится матрица $\tilde{X}$.

1. Найдите параметр обусловленности матрицы $(\tilde{X}'\tilde{X})$.

2. Вычислите одну или две главные компоненты (выразите их через вектор-столбцы матрицы. $\tilde{X}$), объясняющие не менее 70% общей выборочной дисперсии регрессоров.
3. Шпионка Шапокляк пытается смоделировать ежедневный выпуск танков, y. Выразите оценки коэффициентов регрессии $y = \beta_1 + \beta_2 g + \beta_3 h + \beta_4 x + \varepsilon$ через оценки коэффициентов регрессии на главные компоненты, объясняющие не менее 70% общей выборочной дисперсии.

9.5 Храбрая Микроша придумала метод бесполезных компонент. Как и в методы главных компонент, бесполезные компоненты являются линейными комбинациями исходных переменных. Бесполезные компоненты также ортогональны между собой. Вектор весов, с которыми исходные переменные входят в бесполезную компоненту, всегда имеет единичную длину. В отличие от метода главных компонент, первая бесполезная компонента обладает наименьшей выборочной дисперсией. Вторая бесполезная компонента ортогональна первой и обладает наименьшей выборочной дисперсией при условии ортогональности. И так далее.

Как связаны метод бесполезных компонент и метод главных компонент?

10 Энтропия

10.1 Для случайных величин X и Y найдите индекс Джини, энтропию и спутанность (perplexity):

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0.2	0.8

,

y	0	1	5
$\mathbb{P}(Y = y)$	0.2	0.3	0.5

10.2 Найдите энтропию X, спутанность (perplexity) X, индекс Джини X, если

1. величина X равновероятно принимает значения 1, 7 и 9;
2. величина X равновероятно принимает $k \geqslant 2$ значений;
3. величина X равномерно распределена на отрезке $[0; a]$;
4. величина X нормальна $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$;

10.3 У Васи была дискретная случайная величина X, принимавшая натуральные значения. Вася решил изменить закон распределения величины X. Он увеличил количество возможных значений величины X в два раза, разделив каждое событие $X = k$ на два равновероятных подсобытия: $X = k - 0.1$ и $X = k + 0.1$. Как при этом изменились энтропия, спутанность (perplexity) и индекс Джини?

10.4 Кот исследователя Василия случайно нажимает на клавиатуре клавиши А, Б и В n раз. Коту больше нравится клавиша А, поэтому вероятность этой буквы равна $1/2$, а у Б и В вероятности равны по $1/4$. Василий хочет заархивировать послание Кота для потомков, ведь, возможно, в послании кроется Великий Смысл. Поскольку буква А встречается чаще, Василий кодирует её более короткой последовательностью битов, а именно, одним битом 0. Букву Б Василий кодирует кодом 10, а букву В — кодом 11.

1. Найдите ожидаемое отношение длины заархивированного сообщения к количеству букв.
2. Докажите, что код, предложенный Василием, имеет наименьшую ожидаемую длину архива.
3. Найдите энтропию с логарифмом по основанию 2 и спутанность (perplexity) для нажатия Котом одной буквы.

10.5 Случайная величина X принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1 - p$.

1. Постройте график зависимости индекса Джини и энтропии от p.
2. Являются ли функции монотонными? выпуклыми?
3. При каком p энтропия и индекс Джини будут максимальны?

10.6 Шаман Ыуыуыуыыыыы по прошлым наблюдениям знает, большая охота на мамонта оказывается удачной с вероятностью 0.3. Если племя ждёт от Ыуыуыуыыыыы прогноз охоты, то Ыуыуыуыыыыы поплясав вокруг костра (10 минут) и постуча бубном (16 раз) прогнозирует удачную охоту с вероятностью 0.3 и неудачную с вероятностью 0.7. Конкурирующий шаман Уыуыуыуууууу всегда прогнозирует неудачную охоту, как более вероятную. Когда шаман даёт неверный прогноз, его бьют палками.

1. Какова вероятность того, что Ыуыуыуыыыыы ошибётся?
2. Кто чаще бывает бит палками, Ыуыуыуыыыыы или Уыуыуыууууу?
3. Чему равен индекс Джини для случайной величины равной удаче с вероятностью 0.3 и неудаче с вероятностью 0.7?

10.7 Шаман Ыуыуыуыыыыы заметил по прошлым данным, что в дождливые дни большая охота на мамонта удачна с вероятностью 0.7, а в сухие — с вероятностью 0.1. Поэтому в дождливый день Ыуыуыуыыыыы предскажет удачу с вероятностью 0.7, а в сухой — с вероятностью 0.1. Дождливых дней — 20%.

1. Какова вероятность того, что Ыуыуыуыыыыы ошибётся?
2. Чему равен индекс Джини выборки разделённой на две части: в части А шесть бананов и 14 апельсинов, а в части В — восемь бананов и 72 апельсина?

10.8 Как изменится энтропия дискретной величины X, если величину домножить на 10? А если у величины X есть функция плотности?

10.9 Величины X и Y независимы, и являются компонентами вектора V, $V = (X, Y)$. Как связаны энтропия V и энтропии X и Y?

10.10 Дискретные величины X и Y независимы, и являются компонентами вектора V, $V = (X, Y)$. Как связаны индекс Джини V и индексы Джини X и Y?

11 На природу! В лес! К деревьям!

11.1 Постройте регрессионное дерево для прогнозирования y с помощью x на обучающей выборке:

x_i	0	1	2	3
y_i	5	6	4	100

Критерий деления узла на два — минимизация RSS. Дерево строится до трёх терминальных узлов.

11.2 Постройте регрессионное дерево для прогнозирования y с помощью x на обучающей выборке:

y_i	x_i
100	1
102	2
103	3
50	4
55	5
61	6
70	7

Критерий деления узла на два — минимизация RSS. Узлы делятся до тех пор, пока в узле остаётся больше двух наблюдений.

11.3 Дон-Жуан предпочитает брюнеток. Перед Новым Годом он посчитал, что в записной книжке у него 20 блондинок, 40 брюнеток, две рыжих и восемь шатенок. С Нового Года Дон-Жуан решил перенести все сведения в две записные книжки, в одну — брюнеток, во вторую — остальных.

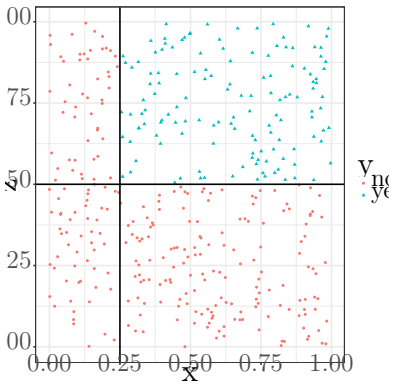
Как изменились индекс Джини и энтропия в результате такого разбиения?

11.4 Машка пять дней подряд гадала на ромашке, а затем выкладывала очередную фотку «Машка с ромашкой» в инстаграмчик. Результат гадания — переменная y_i, количество лайков у фотки — переменная x_i. Постройте классификационное дерево для прогнозирования y_i с помощью x_i на обучающей выборке:

y_i	x_i
плюнет	10
поцелует	11
поцелует	12
к сердцу прижмёт	13
к сердцу прижмёт	14

Дерево строится до идеальной классификации. Критерий деления узла на два — максимальное падение индекса Джини.

11.5 По данной диаграмме рассеяния постройте классификационное дерево для зависимой переменной y:



Дерево необходимо построить до идеальной классификации, в качестве критерия деления узла на два используйте минимизацию индекса Джини.

11.6 Рассмотрим обучающую выборку для прогнозирования y с помощью x и z:

y_i	x_i	z_i
y_1	1	2
y_2	1	2
y_3	2	2
y_4	2	1
y_5	2	1
y_6	2	1
y_7	2	1

Будем называть деревья разными, если они выдают разные прогнозы на обучающей выборке. Сколько существует разных классификационных деревьев для данного набора данных?

11.7 Исследовательница Мишель строит классификационное дерево для бинарной переменной y_i. Может ли при разбиении узла на два расти индекс Джини? Энтропия?

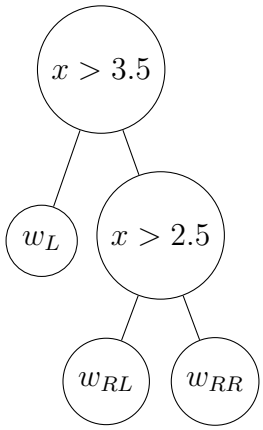
11.8 Приведите примеры наборов данных, для которых индекс Джини равен 0, 0.5 и 0.999.

11.9 Рассмотрим задачу построения классификационного дерева для бинарной переменной y_i. Приведите пример такого набора данных, что никакое разбиения стартового узла на два не снижает индекс Джини, однако двух разбиений достаточно, чтобы снизить индекс Джини до нуля.

11.10 Пятачок собрал данные о визитах Винни-Пуха в гости к Кролику. Здесь x_i — количество съеденого мёда в горшках, а y_i — бинарная переменная, отражающая застревание Винни-Пуха при выходе.

Для построения предиктивной модели Пятачок собирается использовать дерево с заданной структурой:

y_i	x_i
0	1
1	4
1	2
0	3
1	3
0	1



Пятачок использует квадратичную аппроксимацию для логистической функции потерь:

$$Obj(w) = \sum_{i=1}^{n} \left(loss(y_i, 0) + loss'_w(y_i, 0)(w_i - 0) + \frac{1}{2} loss''_{ww}(y_i, 0)(w_i - 0)^2 \right) + \frac{1}{2}\lambda |w|^2.$$

Помогите Очень Маленькому Существу подобрать оптимальные веса (w_i) при $\lambda = 1$.

11.11 Нарисовано дерево: деление 1, справа от первого деления — деление 2. Веса равны w_L, w_{RL}, w_{LL}. Дана выборка.

1. Выпишите в явном виде функцию правдоподобия и логистическую функцию потерь.

2. Оцените w методом максимального правдоподобия.
3. Тут другую функцию потерь написать!
4. Разложите функцию потерь в окрестности $w = (0, 0, 1)$ в ряд Тейлора до второго члена и примерно оцените w.

11.12 Кот Леопольд анкетировал 10 мышей по трём вопросам: x — «Одобряете ли Вы непримиримую к котам позицию Белого и Серого?», y — «Известно ли Вам куда пропала моя любимая кошка Мурка?» и z — «Известны ли Вам настоящие имена Белого и Серого?» Результаты опроса в таблице:

Сюда табличку!

1. Какой фактор нужно использовать при прогнозировании y, чтобы минимизировать энтропию?
2. Какой фактор нужно использовать при прогнозировании y, чтобы минимизировать индекс Джини?

11.13 Постройте классификационное дерево для прогнозирования y с помощью x и z на обучающей выборке:

x_i	0	0	0	1	1
z_i	1	2	3	3	5
y_i	0	1	1	0	0

Критерий деления узла на два — минимизация индекса Джини. Дерево строится до идеальной классификации.

12 Бэггинг и бустинг

12.1 У Винни-Пуха есть 100 песенок (кричалок, вопелок, пыхтелок и сопелок). Каждый день он выбирает и поёт одну из них равновероятно наугад. Одну и ту же песенку он может петь несколько раз. Сколько в среднем песенок оказываются неспетыми за 100 дней?

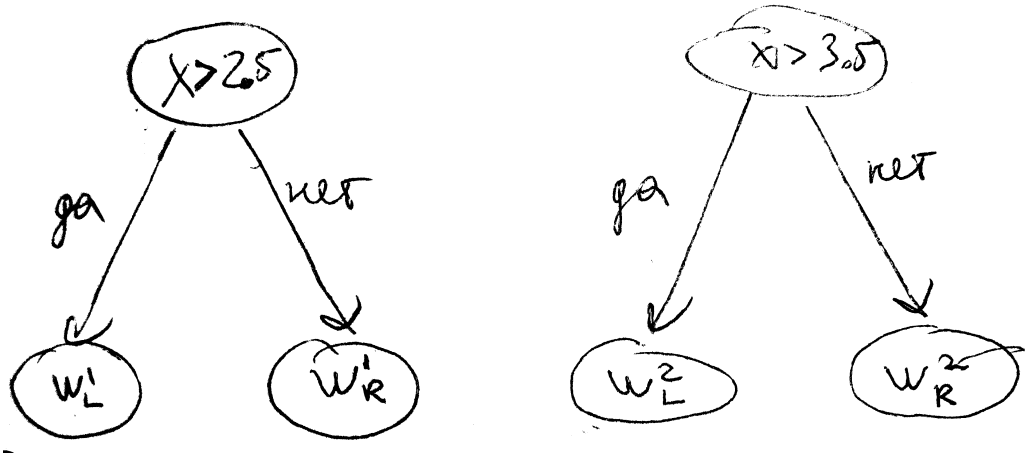
12.2 Вася поймал 3 рыбки, весом в 300, 600 и 1200 граммов. И посчитал среднее арифметическое, $\bar{x} = 700$.

1. Найдите закон распределения бутстрэп статистики для $\bar{x}$.
2. Найдите математическое ожидание и дисперсию бутстрэп статистики для $\bar{x}$.
3. Найдите закон распределения бутстрэп статистики для максимума и минимума для данной выборки.

12.3 Машин-лёрнер Василий лично раздобыл выборку из четырёх наблюдений.

x_i	1	2	3	4
y_i	6	6	12	18

Два готовых дерева для леса Василий подглядел у соседа:



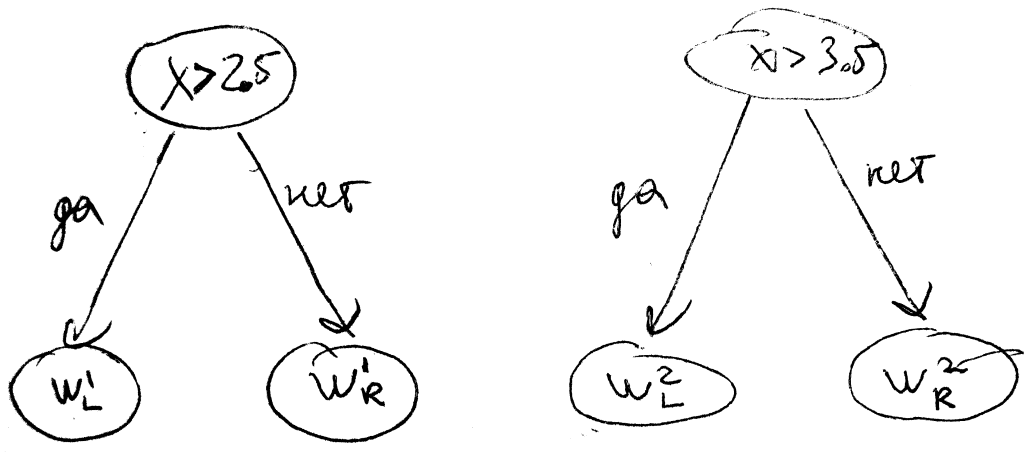
Василий решил использовать бэггинг. Первому дереву достались наблюдения номер 1, 1, 2 и 3. А второму дереву — 2, 3, 4 и 4. Прогнозы в каждом листе Василий строит минимизируя сумму квадратов ошибок.

1. Какие прогнозы внутри обучающей выборки получит Василий с помощью своего леса?
2. Сколько деревьев имеет смысл посадить Василию, чтобы получить хорошие вневыборочные прогнозы по четырём наблюдениям?

12.4 Машин-лёрнер Василий лично раздобыл выборку из четырёх наблюдений.

x_i	1	2	3	4
y_i	6	6	12	18

Два готовых дерева для бустинга Василий подглядел у соседа:



Василий решил использовать бустинг с темпом обучение η. Прогнозы в каждом листе конкретного дерева Василий строит минимизируя функцию:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{T} w_j^2,$$

где y_i — прогнозируемое значение для i-го наблюдения, n — количество наблюдений, w_j — прогноз в j-ом листе, T — количество листов на дереве.

1. Какие прогнозы внутри обучающей выборки получит Василий при $\eta = 1$ и $\lambda = 1$?
2. Какие прогнозы внутри обучающей выборки получит Василий при $\eta = 0.5$ и $\lambda = 1$?

3. Сколько деревьев имеет смысл посадить Василию, чтобы получить хорошие вневыборочные прогнозы по четырём наблюдениям?

13 Разложение на шум-смещение-разброс

13.1 Истинная зависимость имеет вид $y_i = x_i^2 + u_i$, где y_i — прогнозируемая переменная, x_i — предиктор и u_i — ненаблюдаемая случайная составляющая. Величины x_i независимы и равновероятно принимают значения 1 и 2. Величины u_i независимы и равновероятно принимают значения -1 и 1. Начинающий машин-лёрнер Василий может позволить себе обучающую выборку только из двух наблюдений.

Разложите ожидание квадрата ошибки прогноза на шум, смещение и разброс, если:

1. Вне зависимости от обучающей выборки из-за ошибки в коде в качестве прогноза всегда выдаётся 0.
2. Вне зависимости от обучающей выборки из-за ошибки в коде в качестве прогноза равновероятно выдаётся -1 или 1.
3. По обучающей выборке Василий строит регрессию на константу.
4. В качестве прогноза разработанный Василием новейший алгоритм всегда выдаёт последний y из обучающей выборки.
5. По обучающей выборке Василий строит регрессионное дерево минимизируя сумму квадратов остатков.

13.2 Истинная зависимость имеет вид $y_i = 3x_i^2 + u_i$, где y_i — прогнозируемая переменная, x_i — предиктор и u_i — ненаблюдаемая случайная составляющая. Величины x_i независимы и равновероятно принимаю значения 0, 1, 2. Величины u_i независимы и равновероятно принимают значения -1 и 1.

Исследователь Анатолий оценивает модель линейной регрессии $y_i = \hat{\beta} x_i$ с помощью МНК.

Разложите ожидание квадрата ошибки прогноза на шум, смещение и разброс.

14 Случайные проекции

14.1 Василий любит сочинять. Особенно он любит сочинять вектора в пространствах большой размерности n. Каждую компоненту каждого вектора он сочиняет по следующему принципу:

$$z \sim \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{a}}, \text{ с вероятностью } a^2; \\ 0, \text{ с вероятностью } 2(1-a)a; \\ \frac{1}{\sqrt{a}}, \text{ с вероятностью } (1-a)^2; \end{cases},$$

где a — некоторый параметр.

1. Найдите предел по вероятности квадрата длины вектора делённого на размерность пространства.
2. Найдите предел по вероятности косинуса угла между двумя векторами.

15 Кросс-валидация

15.1 Вася измерил вес трёх покемонов, $y_1 = 6$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$. Вася хочет спрогнозировать вес следующего покемона. Модель для веса покемонов у Васи очень простая, $y_i = \mu + u_i$, поэтому прогнозирует Вася по формуле $\hat{y}_i = \hat{\mu}$.

В результате Вася использует следующую целевую функцию:

$$\sum (y_i - \hat{\mu})^2 + \lambda \cdot \hat{\mu}^2$$

1. Найдите оптимальное $\hat{\mu}$ при $\lambda = 0$.
2. Найдите оптимальное $\hat{\mu}$ при произвольном λ.
3. Подберите оптимальное λ с помощью кросс-валидации «выкинь одного».
4. Найдите оптимальное $\hat{\mu}$ при λ_{CV}.

15.2 Задана зависимость $y_i = \beta x_i + u_i$, ошибки u_i нормальны $\mathcal{N}(0; 1)$. Исследователь Василий использует следующий способ построения прогнозов: $\hat{y}_f = \gamma \cdot \hat{\beta} x_f$, где $\hat{\beta}$ — это оценка МНК, а γ — некоторая константа. При каком γ ожидаемый квадрат ошибки прогноза будет минимальным? Как на практике подобрать такое γ?

Упр: Дано одно-два-три дерева. И 5 наблюдений. Посчитать кросс-валидационную ошибку.
Упр: На наборе данных в 5 наблюдений подобрать параметр жесткости с помощью кросс-валидации.

16 Сделай шаг

16.1 Исследователь Январий хочет поделить 1 на 7 с точностью до 10^{-10}. Проблема в том, что делить в столбик Январий не умеет, а умеет только умножать, складывать и вычитать. Разработайте для Января итерационный алгоритм вида $x_n = f(x_{n-1})$, который при старте с любого $x_0 \in (0; 2/7)$ бодро сходится к $1/7$.

16.2 Исследователь Антоний ищет корень уравнения $x^3 + 7x - 3 = 0$. Заметив, что в единице и нуле значения многочлена имеют разный знак, Антоний использует метод деления отрезка пополам. Помогите Анонию найти корень уравнения с точностью до $1/8$.

16.3 Исследователь Александр оценивает множественную регрессию $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + u_i$ с помощью МНК. Все регрессоры, включая единичный столбец, он поместил в матрицу X. Оказалось, что

$$X'X = \begin{pmatrix} 100 & 5 & -10 \\ 5 & 20 & 0 \\ -10 & 0 & 40 \end{pmatrix}; \quad X'y = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix};$$

Александр использует градиентный спуск для поиска $\hat{\beta}$. Стартует с точки $\hat{\beta}' = (0, 0, 0)$, а длина шага постоянна и равна $\gamma = 0.1$.

Какие оценки коэффициентов получит Александр после первых двух шагов градиентного спуска?

16.4 Исследователь Аристарх ищет минимум квадратичной функции $y(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, методом градиентного спуска. Аристарх стартует из точки x_0 и настолько ленив, что не хочет делать больше одного шага.

1. При каком значении длины шага γ Аристарх за один шаг окажется точно в точке минимума?
2. Аристарх освоил курс линейной алгебры, но остался таким же ленивым :) Теперь Аристарх хочет за одну итерацию найти минимум векторной функции

$$Q(x) = x'Ax + b'x + c$$

Подскажите, какую матрицу длины шага Γ хорошо бы взять Аристарху, если он делает шаг вида $x_n = x_{n-1} - \Gamma\nabla Q(x_{n-1})$.

3. Почему в методе Ньютона итерации делают по принципу $x_n = x_{n-1} - (H(x_{n-1}))^{-1}\nabla Q(x_{n-1})$, где H — матрица Гессе целевой функции?

16.5 Заблудившись в лесу Иван Сусанин в отчаянии бросает карту леса на землю. Докажите, что на земле найдётся такая точка, которая идеально точно находится под своим изображением на карте.

16.6 Вывод BB-метода http://www.math.ucla.edu/~wotaoyin/math273a/slides/Lec4a_Baizilai_Borwein_method_273a_2015_f.pdf.

16.7 SGD для обычной регрессии: сделать два шага.

16.8 SGD для логистической регрессии: сделать два шага.

16.9 Метод золотого сечения? Плохие числа?

16.10 Нарисуйте кляксу. Нарисуйте внутри кляксы треугольник. С помощью алгоритма Нелдера-Мида найдите точку, наиболее удалённую от границы кляксы.

17 Тятя! тятя! наши сети. Притащили мертвеца.

17.1 Найдите производную следующей функции по матрице W_1 при фиксированном $x \in R^n$.

$$L\left(W_1 \cdot f(W_2 x + b_2) + b_1\right)$$

где $f(x) = \max\{0, x\}$. Выразите ответ через производную L по её аргументу и значению $f(W_2x + b_2)$ в точке x. Как будет выглядеть градиентный шаг для W_2?

17.2 На выходе Soft-Max слоя мы получили матрицу размера 100 на 20 и попали в Dropout с вероятностью отключения нейрона равной 0.2. Какова вероятность, что выключится весь слой? Как можно считать градиент по Dropout слою?

18 Ближайшие соседи

18.1 На плоскости расположены колонии рыжих и чёрных муравьёв. Рыжих колоний три и они имеют координаты $(-1, -1)$, $(1, 1)$ и $(3, 3)$. Чёрных колоний тоже три и они имеют координаты $(2, 2)$, $(4, 4)$ и $(6, 6)$.

1. Поделите плоскость на «зоны влияния» рыжих и чёрных используя метод одного ближайшего соседа.
2. Поделите плоскость на «зоны влияния» рыжих и чёрных используя метод трёх ближайших соседей.

3. С помощью кросс-валидации с выкидыванием отдельных наблюдений выберите оптимальное число соседей k перебрав $k \in \{1, 3, 5\}$. Целевой функцией является количество несовпадающих прогнозов.

18.2 На плоскости расположены колонии рыжих и чёрных муравьёв. Рыжих колоний три и они имеют координаты $(-1, 1)$, $(1, -1)$ и $(1, 1)$. Чёрных колоний одна и она имеет координаты $(0, 0)$.

1. Поделите плоскость на «зоны влияния» рыжих и чёрных используя метод одного и трёх ближайших соседей.
2. С помощью кросс-валидации с выкидыванием отдельных наблюдений выберите оптимальное число соседей k перебрав $k \in \{1, 3\}$. Целевой функцией является количество несовпадающих прогнозов.

19 t-SNE

Ликбез. Дивергенция Кульбака-Лейблера из аппроксимирующего распределения q в истинное распределение p равна

$$D_{KL}(p||q) = \mathbb{E}(\ln p(X)) - \mathbb{E}(\ln q(X))$$

Ожидание считается по истинному распределению $p()$.

19.1 Найдите дивергенцию Кульбака-Лейблера, если она определена,

1. из биномиального $Bin(n = 2, p = 1/3)$ в равновероятное на 0, 1, 2;
2. из равновероятного на 0, 1, 2 в биномиальное $Bin(n = 2, p = 1/3)$;
3. из $\mathcal{N}(0; l)$ в $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$;
4. из $\mathcal{N}(0; 1)$ в экспоненциальное с $\lambda = 1$;
5. из $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$ в $\mathcal{N}(0; l)$;
6. из экспоненциального с $\lambda = 1$ в $\mathcal{N}(0; 1)$;

19.2 Докажите, что дивергенция Кульбака-Лейблера из аппроксимирующего q в истинное распределение p неотрицательна.

19.3 На плоскости расположены три точки, $A = (0, 0)$, $B = (3, 4)$ и $C = (6, 0)$. Джеймс Бонд равновероятно забрасывается в одну из трёх точек. Затем Джеймс Бонд перемещается в одну из оставшихся точек, чтобы спутать следы. Вероятность перемещения из точки заброски Z в точку X пропорциональна $f(d)$, где d — расстояние от точки заброски Z до точки X, а f — функция плотности нормального распределения $\mathcal{N}(0; \sigma_Z^2)$. Параметр σ_Z^2 — это сила, оставшаяся у Джеймса-Бонда после заброски в точку Z.

Майор Пронин устроил засады на всех трёх дорогах: AB, BC и AC.

1. Какова вероятность поимки Джеймса Бонда на каждой из дорог для $\sigma_A = 1$, $\sigma_A \to 0$, $\sigma_A \to \infty$, если по последним разведданным он был заброшен в точку A?
2. Какие возможные значения принимает спутанность (perplexity) распределения выбираемой дороги при произвольных σ_A, если известно, что Джеймс Бонд был заброшен в A? Хватит ли у Джеймса Бонда сил, чтобы обеспечить спутанность равную 3 в точке A?

3. Какие возможные значения принимает спутанность (perplexity) распределения выбираемой дороги при произвольных σ_B, если известно, что Джеймс Бонд был заброшен в B?
4. Найдите вероятность поимки Джеймса Бонда на каждой из дорог для случая равных σ_Z: $\sigma_Z = 1$, $\sigma_Z \to 0$, $\sigma_Z \to \infty$ и неизвестной точки заброски.

19.4 На плоскости расположены три точки, $A = (0, 0)$, $B = (3, 4)$ и $C = (3, 0)$. Джеймс Бонд равновероятно забрасывается в одну из трёх точек, а затем перемещается в одну из оставшихся, чтобы запутать следы. Вероятность перемещения из точки заброски в точку X пропорциональна $f(d)$, где d — расстояние от точки заброски до точки X.

Майор Пронин устроил засады на всех трёх дорогах: AB, BC и AC. По ошибке Майор Пронин считает, что пункты A, B и C равноудалены друг от друга.

1. Какова фактическая вероятность поимки Джеймса Бонда на каждой из дорог, если $f(a) = 1/a$? $f(a)$ — стандартная нормальная функция плотности? $f(a)$ — функция плотности распределения Коши?
2. Какова вероятность поимки Джеймса Бонда на каждой из дорог по мнению майора Пронина?
3. Найдите дивергенцию Кульбака Лейблера из аппроксимирующих вероятностей по мнению Пронина в истинные вероятности появления Джеймса Бонда на каждой из дорог для случая $f(a) = 1/a$.

19.5 На плоскости расположены три точки, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ и C. Джеймс Бонд равновероятно забрасывается в одну из трёх точек, а затем перемещается в одну из оставшихся, чтобы запутать следы. Вероятность перемещения из точки заброски в точку X пропорциональна $f(d)$, где d — расстояние от точки заброски до точки X, а f — функция плотности распределения Коши.

Майор Пронин устроил засады на всех трёх дорогах: AB, BC и AC.

Найдите расстояния AC и BC, если вероятность появления Джеймса Бонда на трёх дорогах равны $p_{AB} = 0.1$, $p_{BC} = 0.3$ и $p_{AC} = 0.6$.

20 Факторизационные машины

https://www.csie.ntu.edu.tw/~b97053/paper/Rendle2010FM.pdf

20.1 Рассмотрим факторизационную машину с прогнозом

$$a(x) = w_0 + \sum_{j=1}^{d} w_j x_j + \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=j+1}^{d} \langle v_j, v_k \rangle x_j x_k,$$

где скрытые вектора v_j имеют размерность r.

1. Сколько параметров имеет эта модель?
2. Какое r является теоретически максимально возможным для заданного d?
3. Сколько ограничений нужно добавить к задаче обыкновенного МНК с регрессорами w_j и $w_j w_k$ с $k > j$, чтобы она была эквивалентна факторизационной машине? Будут ли эти ограничения на параметры МНК линейными?
4. Найдите градиент $a(x)$ по вектору v_j.

20.2 Упростите выражение

$$2\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=j+1}^{d}\langle v_j, v_k\rangle x_j x_k + \sum_{i=1}^{d}\langle v_i, v_i\rangle x_i^2 - \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\langle v_j, v_k\rangle x_j x_k$$

20.3 Пусть $W = V \cdot V'$ и матрица V имеет размер $d \times 1$.

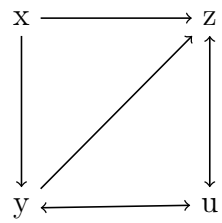
1. Найдите матрицу W, если $V_{j1} = j$ и $d = 3$;
2. Является ли матрица W положительно определённой? Положительно полуопределённой?
3. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы W;

20.4 Найдите разложение матрицы W вида $W = V \cdot V'$ с матрицей V минимального размера:

1. $W = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;
2. $W = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

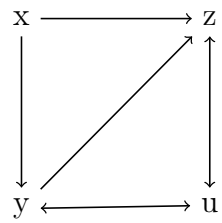
21 Ранжирование

21.1 Рассмотрим классический алгоритм PageRank с единичной вероятностью продолжать клики. Каждый пользователь стартует со случайной равновероятно выбираемой страницы. Затем пользователь равновероятно переходит по одной из ссылок на следущую страницу. И так далее.



Какой процент посещений от общего количества посещений будет у каждой страницы в долгосрочном периоде?

21.2 Рассмотрим классический алгоритм PageRank с вероятностью продолжать клики равной 0.8. Каждый пользователь стартует со случайной равновероятно выбираемой страницы. С вероятностью 0.2 после просмотра страницы пользователь выключает компьютер и идёт гулять в парк. Если пользователь решил остаться за компьютером, то он равновероятно переходит по одной из ссылок на следущую страницу. И так далее.



Какой процент посещений от общего количества посещений будет у каждой страницы в долгосрочном периоде?

22 Решения

1.1.

1. $f'(x) = 2x + 3$, $df = 2xdx + 3dx$, $df = 1.3$
2. $df = 2x_1dx_1 + 3dx_1 \cdot x_2^3 + 3x_1 \cdot 3x_2^2dx_2$, $df = -1.9$

1.2.

1. $A(dR)B$
2. $2r'dr$
3. $r'(A' + A)dr$
4. $R^{-1} \cdot dR \cdot R^{-1}$
5. $-\sin(r'r) \cdot 2r'dr$
6. $\frac{r'(A'+A)dr \cdot r'r - r'Ar2r'dr}{(r'r)^2}$

1.3.

1. $dQ(\hat{\beta}) = 2(y - X\hat{\beta})^T(-X)d\hat{\beta}$, $d^2Q(\hat{\beta}) = 2d\hat{\beta}X^TXd\hat{\beta}$
2. $dQ(\hat{\beta}) = 0$
3. $\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$

1.4.

1. $dQ(\hat{\beta}) = -2((y - X\hat{\beta})^TX + \lambda\hat{\beta}^T)d\hat{\beta}$, $d^2Q(\hat{\beta}) = 2d\hat{\beta}^T(X^TX - \lambda I)d\hat{\beta}$
2. $dQ(\hat{\beta}) = 0$
3. $\hat{\beta} = (X^TX - \lambda I)^{-1}X^Ty$

1.5.

1. $\sum_{ij} A_{ij}B_{ij} = \sum_j(\sum_i A_{ij}B_{ij}) = \sum_i(A'B)_{ii} = \mathrm{tr}(A'B)$

   Пояснение: зафиксируем номер столбца j, тогда A_{ij} — элемент исходной матрицы A, стоящий на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. Аналогично, B_{ij} — элемент матрицы B, стоящий на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. Тогда $\sum_i A_{ij}B_{ij}$ — это скалярное произведение j-ого столбца матрицы A на j-ый столбец матрицы B. Заметим, что этот элемент будет стоять на диагонали матрицы $A'B$. Далее, берём следующие столбцы, находим скалярное произведение и прибавляем его к уже полученному, и так далее. В итоге получаем сумму диагональных элементов матрицы $A'B$, что и требовалось доказать.

2. Докажем, что $\operatorname{tr}(A'B) = \operatorname{tr}(BA')$:

$$\operatorname{tr}(A'B) = \sum_i (A'B)_{ii} = \sum_i \sum_j A_{ij}B_{ij} = \sum_j \sum_i B_{ij}A_{ij} = \sum_j (BA')_{jj} = \operatorname{tr}(BA')$$

Заметим, что при транспонировании матрицы, её главная диагональ не меняется, значит, и сумма элементов остаётся прежней, то есть $\operatorname{tr}(A'B) = \operatorname{tr}(AB')$.

1.6. Обозначим за $\widetilde{X}$ матрицу алгебраических дополнений матрицы X, тогда $\det X = \sum_j X_{ij}\widetilde{X}_{ij}$ для любого фиксированного i. Вспомним, что $X^{-1} = (\det X)^{-1}\widetilde{X}^T$.

$$\frac{\partial \det X}{\partial X_{ij}} = \widetilde{X}_{ij} \Rightarrow d\det X = \sum_{ij} \widetilde{X}_{ij} dX_{ij} = \det X \sum_{ij} (\det X)^{-1}\widetilde{X}_{ij}dX_{ij} = \det X \operatorname{tr}(X^{-1}dX)$$

1.7.

1. $dQ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\exp(-y_i x_i'\hat{\beta})} \cdot \exp(-y_i x_i'\hat{\beta}) \cdot (-y_i x_i')d\hat{\beta} + 2\lambda\hat{\beta}'d\hat{\beta}$
2. $\operatorname{grad} Q = \sum_{i=1}^n \frac{\exp(-y_i x_i'\hat{\beta})}{1+\exp(-y_i x_i'\hat{\beta})} \cdot (-y_i x_i) + 2\lambda\hat{\beta}$

2.1.

1. $dQ(w) = 2(Xw - y)^T X dw$, $d^2Q(w) = 2dw^T X^T X dw$
2. $w = (X^T X)^{-1} X^T y$
3. $\hat{y} = Xw = X(X^T X)^{-1}X^T y \Rightarrow H = X(X^T X)^{-1}X^T$

2.2.

1. Выпишем $dQ(W)$ и найдём градиент:

$$dQ(w) = 2(Xw - y)^T X dw + 2\lambda w^T dw \Rightarrow \nabla Q(w) = 2X^T(Xw - y) + 2\lambda w$$

Приравняв градиент к нулю, получим:

$$w = (X^T X + \lambda I)^{-1} X^T y$$

2. Рассмотрим два случая.

- $w \geqslant 0 : Q(w) = (y - \hat{y})^T(y - \hat{y}) + \lambda w \to \min_w$. Решив, получим оптимальное значение:

$$w^+ = \frac{x^T y}{x^T x} - \frac{\lambda}{2x^T x}$$

- $w < 0 : Q(w) = (y - \hat{y})^T(y - \hat{y}) - \lambda w \to \min_w$. Решив, получим оптимальное значение:

$$w^- = \frac{x^T y}{x^T x} + \frac{\lambda}{2x^T x}$$

Далее нужно заметить, что $Q(w)$ — это парабола, после чего рассмотреть четыре возможных случая расположения w^+ и w^- и получить ответ:

- $w^+ < 0, w^- < 0 \Rightarrow w^* = w^-$
- $w^+ > 0, w^- > 0 \Rightarrow w^* = w^+$
- $w^+ < 0, w^- > 0 \Rightarrow w^* = 0$
- $w^+ > 0, w^- < 0$ — этот случай невозможен

2.3.

$$y_n - \hat{y}_n = (1 - H_{nn})(y_n - \hat{y}_n^-)$$

3.1.

1. $(5, 6, -7)$
2. Подставим точки A и B в уравнение плоскости:

$$A : 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 7 \cdot 4 + 10 = -2$$

$$B : 5 \cdot 4 + 6 \cdot 0 - 7 \cdot 4 + 10 = 2$$

Точки A и B лежат по разные стороны плоскости, следовательно, отрезок AB пересекает её.

3. $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0)$, $|AB| = \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}$
4. Расстояние одинаково
5. $\rho = \frac{|5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 7 \cdot 4 + 10|}{\sqrt{5^2 + 6^2 + 7^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

3.2. Например, $w_1 = -2$, $w_0 = 2$, где w_0 — вес при константе.

3.3.

1. Например, $w_1 = 2, w_2 = 2, w_0 = 0$
2. Например, $w_1 = 2, w_2 = 2, w_0 = -2$
3. Можно показать графически: нарисовать на плоскости точки $(0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1)$, причём для первых двух нейрон должен выдавать ответ 0, а для вторых — 1. Чтобы разделить эти точки, необходимо провести две прямые, в то время как один нейрон проводит только одну.
4. Например, подойдут веса $w_1 = 3, w_2 = 3, w_3 = -5, w_0 = -1$
5. Первый нейрон с весами $w_{11} = 1, w_{12} = 1, w_{10} = 1/2$ и второй нейрон с весами $w_{21} = 1, w_{22} = 1, w_{10} = -1/2$ должны подавать реузльтаты на вход третьему нейрону с весами $w_{31} = 3, w_{32} = -1, w_{30} = -2$

3.4.

3.5.

3.6.

3.7.

3.8.

1. $f(t) = \log(t)$
2. Среднее гармоническое $<$ среднее геометрическое $<$ среднее арифметическое

3.9.

1. accuracy $= \frac{\text{TP+TN}}{\text{TP+FP+FN+TN}}$
2. precision $= \frac{\text{TP}}{\text{TP+FP}}$
3. recall $= \frac{\text{TP}}{\text{TP+FN}}$
4. TPR $= \frac{\text{TP}}{\text{TP+FN}}$

3.10.

3.11.

1. Поскольку все признаки одинаковы, то $\forall i \quad b_i = f(x_i) = b$, и функционал ошибки иммет вид:

$$Q(b) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} L(y_i, b) = \frac{1}{1000}\left(\sum_{i=1}^{900} b^2 + \sum_{i=1}^{100}(1-b)^2\right) \to \min_b$$

   Дифференцируем и находим b:

$$2 \cdot 900 \cdot b - 2 \cdot 100 \cdot (1-b) = 0 \Rightarrow b = 0.1$$

2. Аналогично:

$$Q(b) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} |y_i - b| = \frac{1}{1000}\left(900 \cdot b + 100|1-b|\right) \to \min_b$$

   При $b = 1$, получаем: $Q(1) = 0.9$ При $b < 1$: $Q(b) = \frac{1}{1000}\left(900b + 100 - 100b\right) = \frac{1}{1000}\left(900b + 100\right) \to \min_b$. Минимум функционала ошибки достигается при $b = 0$ и равен 0.1.

3. Снова выпишем функционал ошибки:

$$Q(b) = \frac{1}{1000}\left(-900\log(1-b) + 100\log b\right) \to \min_b$$

Берём производную и получаем оптимальный b:

$$\frac{1}{1000}\left(\frac{900}{1-b} - \frac{100}{b}\right) = 0 \Rightarrow b = 0.1$$

4.

$$Q(b) = \frac{1}{1000}\left(\frac{900}{1-b} - \frac{100}{b}\right) \to \min_b$$

Дифференцируя, получим:

$$\frac{900}{(1-b)^2} = \frac{100}{b^2} \Rightarrow b = 0.25$$

3.12. Нет. Не выполнено $\tilde{L} \geqslant L$ для всех $M \in \mathbb{R}$.

3.13. $\hat{\mathbb{P}}(y_i = 1|x_i) = \frac{1}{1+\exp(-\beta_1-\beta_2 x_i)}$

1. $loss(\beta_1, \beta_2) = -\sum_{i=1}^{l}\left([y_i = 1]\ln\frac{1}{1+\exp(-\beta_1-\beta_2 x_i)} + [y_i = -1]\ln\left(1 - \frac{1}{1+\exp(-\beta_1-\beta_2 x_i)}\right)\right)$
2. $\frac{\partial loss}{\partial \beta_1} = -\sum_{i=1}^{l}\left([y_i = 1]\cdot\frac{1}{1+\exp(\beta_1+\beta_2 x_i)} + [y_i = -1]\cdot(-1)\cdot\frac{1}{1+\exp(-\beta_1-\beta_2 x_i)}\right)$
3. $y_4 = 1,\ x_4 = 0.8$

3.14.

4.1.

1. $\Lambda(w) + \Lambda(-w) = 1$
2. $\Lambda'(w) = -\Lambda'(-w)$
3.
4. $\Lambda(0) = 0.5,\ \Lambda'(0) = 0.25,\ \ln\Lambda(0) = -\ln 2$
5. $\Lambda^{-1}(p) = \ln\frac{p}{1-p}$
6. $\frac{d\ln\Lambda(w)}{dw} = \Lambda(-w)$
7. $\frac{d\ln\Lambda(-w)}{dw} = -\Lambda(w)$
8.

4.2.

4.3.

4.4.

1. Выпишем аппроксимацию функции потерь:

$$loss(\beta_1, \beta_2) \approx 100 \ln 2 + 6\beta_1 + 12\beta_2 + \frac{1}{2}(25\beta_1^2 + 2 \cdot 12\beta_1\beta_2 + 12\beta_2^2) \to \min_{\beta_1,\beta_2}$$

   Взяв производные по β_1 и β_2, получим $\hat{\beta}_1 = \frac{6}{13}$, $\hat{\beta}_2 = -\frac{19}{13}$.

2. $\hat{P}(honey_i = 1 | bee_i = 0) = \frac{1}{1+\exp(-6/13)} \approx 0.615$.

   Это же число можно было получить из таблицы: $\frac{32}{32+20} \approx 0.61$.

4.5. Предельный эффект максимален при максимальной производной $\Lambda'(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z)$, то есть при $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z = 0$.

5.1.

1. $X'X = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 4/\sqrt{5} \\ 0 & 3/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

2. $XX' = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 3/\sqrt{6} & -3/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $X'X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1s/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4. $XX' = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

5. $X = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

5.2.

5.3. $H = UU'$

5.4. $H = QQ'$

5.5. $U = I - \frac{2}{w'w}ww'$, $U^2 = I$ и $U' = U$.

5.6. Замечаем, что отражение сохраняет длины, поэтому $a^2 = 2^2 + 5^2 + (-3)^2$. А дальше берём $w = (2, 5, -3)' - (a, 0, 0)'$, так как эта разница ортогональна плоскости, относительно которой выполняется отражение. Матрица отражения равна $I - \frac{2}{w'w}ww'$.

5.7. $I - \frac{2}{w'w}ww'$

5.8.

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

6.1.

6.2.

6.3. $C = 0$ и $\sigma = +\infty$

6.4.

1. Нужно нарисовать прямые $2x_1 + 3x_2 = 7$, $2x_1 + 3x_2 = 8$, $2x_1 + 3x_2 = 6$.
2. $2/\sqrt{13}$
3. $22/\sqrt{13}$

6.5. $w = (1/2, 1/2)$, $w_0 = 5.5$

6.6.

6.7.

6.8.

7.1. В исходном пространстве: $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{0.6}$.
В расширяющем пространстве: $|h(\vec{a})| = 1$, $|h(\vec{b})| = 1$, $\cos(h(\vec{a}), h(\vec{b})) = e^{-2}$.

7.2. Длина равна 1 и не зависит от γ. При $\gamma \approx 0$ вектора примерно совпадают, при больших γ вектора примерно ортогональны.

7.3.

1. $|AB| = \sqrt{10}$, $\cos(ABC) = \frac{1}{\sqrt{5}}$
2. $|AB| = 1$, $\cos(ABC) = e^{-8}$

7.4. $K(x, y) = 1 + x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_1x_2 \cdot 3y_1y_2 + 2x_1^2 \cdot 2y_1^2 + 4x_2^2 \cdot 4y_2^2$

7.5. $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2)$

7.6. Ядром является только функция в пункте 1.

7.7.

1. $K_1(\text{«мама»}, \text{«ам»}) = 0$, $K_2(\text{«мама»}, \text{«ам»}) = 3$, $K_3(\text{«мама»}, \text{«ам»}) = 2$
2. Да
3. Да
4.

7.8.

7.9. Да, при любом. Подходящую плоскость можно задать так: взять x_i с номерами повреждённых иголок с плюсом, а x_i с номерами целых иголок — с минусом. И сравнить эту сумму с нулём.

Да, при большом γ гауссовское ядро превращает любой вектор в вектор единичной длины и спрямляет углы. То есть набор данных из n наблюдений с ростом γ можно считать n-мерным Морским Ежом :)

8.1. Выпишем лагранжиан:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 10)$$

Затем условие первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow & x_1 = -\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow & x_2 = -\frac{3}{2}\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + 5\lambda = 0 \Rightarrow & x_3 = -\frac{5}{2}\lambda \end{cases}$$

Двойственная задача имеет вид:

$$g(\lambda) = (-\lambda)^2 + \left(-\frac{3}{2}\lambda\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\lambda\right)^2 + \lambda\left(-2\lambda + 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\lambda + 5\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\lambda - 10\right) \to \max_{\lambda}$$

8.2.

8.3.

8.4.

8.5.

8.6. Прямая задача:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{l}\xi_i \to \min_{w,b,\xi} \\ y_i(\langle w, x_i\rangle + b) \geqslant 1 - \xi_i, \quad i = 1\ldots l, \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1\ldots l. \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{l}\lambda_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\lambda_i\lambda_j y_i y_j \langle x_i, x_j\rangle \to \max_{\lambda} \\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant C, \quad i = 1\ldots l, \\ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i y_i = 0. \end{cases}$$

8.7.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{l}\lambda_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\lambda_i\lambda_j y_i y_j K(x_i, x_j) \to \max_{\lambda} \\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant C, \quad i = 1\ldots l, \\ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i y_i = 0. \end{cases}$$

9.1.

9.2. Матрица с центрированными столбцами имеет вид: $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $\widetilde{X}'\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Её собственные числа: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 2$, собственные вектора $v_1 = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2})'$, $v_2 = (1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2})$. Найдём главные компоненты:

$$P = XV = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Первая и вторая главные компоненты — это первый и второй столбцы матрицы P соответственно.

9.3.

9.4.

9.5. Те же компоненты, только в обратном порядке.

10.1. $I_X = 1 - 0.2^2 - 0.8^2 = 0.32$, $H(X) = -(0.2 \ln 0.2 + 0.8 \ln 0.8) \approx 0.5$, preplexity $\approx e^{0.5}$
$I_Y = 1 - 0.2^2 - 0.3^2 - 0.5^2 = 0.62$, $H(Y) = -(0.2 \ln 0.2 + 0.3 \ln 0.3 + 0.5 \ln 0.5) \approx 1.03$, perplexity $\approx e^{1.03}$

10.2.

1. $H(X) = \ln 3$, $I_X = 2/3$, спутанность равна 3.
2. $I_X = 1 - \frac{1}{k}$, $H(X) = \ln k$, спутанность равна k.
3. Если величина X равновероятно принимает k значений, то спутанность равна k. У равномерной на $[0; a]$ спутанность равна a. $H(X) = -\int_0^a \frac{1}{a} \cdot \ln \frac{1}{a} dx = \ln a$.
4. Обозначим $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, тогда $H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(f(x)) dx$.

10.3. Энтропия, спутанность (perplexity) и индекс Джини вырастут.

10.4.

1. Пусть X — длина заархивированного сообщения, $X = X_1 + ... + X_n$, где X_i — длина одной заархивированной буквы.

$$\mathbb{E}(X) = n\mathbb{E}(X_1) = n\left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2\right) = n \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\mathbb{E}(X)}{n} = \frac{3}{2}$$

3. $H(X) = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$

10.5. $I = 2p(1-p)$, энтропия и индекс Джини максимальны при $p = 0.5$.

10.6.

$$I = 2 \cdot 0.7 \cdot 0.3$$

10.7.

$$I = 0.2I_L + 0.8I_R$$

10.8. У дискретной величины энтропия не изменится.

10.9.

$$H(V) = H(X) + H(Y)$$

10.10.

11.1. Первое разбиение по порогу $x_i < 2.5$, второе — по $x_i < 1.5$.

11.2. Первое разбинение по порогу $x_i < 3.5$. Левый лист разбивается по порогу $x_i < 5.5$, правый — по порогу $x_i < 1.5$.

11.3. Было: $I = 1 - \left(\frac{20}{70}\right)^2 - \left(\frac{40}{70}\right)^2 - \left(\frac{2}{70}\right)^2 - \left(\frac{8}{70}\right)^2 = \frac{708}{1225} \approx 0.58$,
$H = -\left(\frac{20}{70}\ln\frac{20}{70} + \frac{40}{70}\ln\frac{40}{70} + \frac{2}{70}\ln\frac{2}{70} + \frac{8}{70}\ln\frac{8}{70}\right) \approx 1.03$.
Стало: $I_L = 0$, $I_R = 1 - \left(\frac{20}{30}\right)^2 - \left(\frac{2}{30}\right)^2 - \left(\frac{8}{30}\right)^2 = 0.48$, $I = \frac{40}{70} \cdot 0 + \frac{30}{70} \cdot 0.48 \approx 0.21$,
$H_L = 0$, $H_R = -\left(\frac{20}{30}\ln\frac{20}{30} + \frac{2}{30}\ln\frac{2}{30} + \frac{8}{30}\ln\frac{8}{30}\right) \approx 0.8$, $H = \frac{40}{70} \cdot 0 + \frac{30}{70} \cdot 0.8 \approx 0.34$.

11.4. Первое разбиение по порогу $x_i < 12.5$, второе — по порогу $x_i < 10.5$.

11.5. Сначала делим по z, потом по x, так как индекс Джини в таком порядке падает сильнее.

11.6.

11.7. Нет, в силу выпуклости функций.

11.8. Все y_i одинаковые; поровну y_i двух типов; 1000 разных типов y_i, по одному наблюдению каждого типа.

11.9.

y_i	x_i	z_i
1	1	1
1	2	2
0	1	2
0	2	1

11.10.

11.11.

11.12.

11.13. Сначала делим по условию $x > 0.5$, затем по условию $z > 1.5$.

12.1. $100 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{100} \approx 100/e \approx 37$

12.2.

1. $S = \bar{x}$

s	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200
$\mathbb{P}(S=s)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$

2. $\mathbb{E}(X) = 700$, $\mathrm{Var}(X) = 14000/3$

3.
   - $S = \max\{x_1, x_2, x_3\}$

s	300	600	1200
$\mathbb{P}(S=s)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$

   - $S = \min\{x_1, x_2, x_3\}$

s	300	600	1200
$\mathbb{P}(S=s)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{27}$

12.3.

12.4.

13.1.

13.2.

14.1.

15.1. $\hat{\mu}_{\lambda=0} = 22/3$ При минимизации RSS^{CV} разумно сделать замену $t = 4/(2+\lambda)$, тогда $RSS^{CV} = 2(6-4t)2 + (10-3t)^2$. $\lambda_{CV} = 4/39$, $\hat{\mu} = \frac{22}{3+4/39}$

15.2.

$$\mathbb{E}((y_f - \hat{y}_f)^2) = 1 + \gamma^2 x_f^2 \frac{1}{\sum x_i^2} + \beta^2 x_f^2 (1-\gamma)^2$$

Оптимальное γ равно

$$\gamma = \frac{\beta^2 \sum x_i^2}{\beta^2 \sum x_i^2 + 1}$$

На практике эта формула в явном виде неприменима, так как содержит неизвестный параметр β. Способ 1: двухшаговая оценка. Оцениваем $\hat{\beta}$ с помощью МНК, затем находим $\hat{\gamma}$ используя $\hat{\beta}$ вместо β. Способ 2: кросс-валидация. Минимизируем сумму квадратов вневыборочных прогнозов по γ.

16.1. Например, можно рассуждать так. Мы хотим, чтобы расстояние от x_n до $1/7$ с ростом сокращалось, поэтому нам пойдет например, алгоритм

$$x_n - 1/7 = (x_{n-1} - 1/7)/42$$

Проблема с этим алгоритмом в том, что он требует делений. Приходит в голову идея заменить деление на 42 на возведение в квадрат, тогда при малом расстоянии оно будет и дальше сокращаться:

$$x_n - 1/7 = (x_{n-1} - 1/7)^2$$

Но здесь ещё остаётся деление! Чтобы избавиться от него, домножим правую часть на 7 и изменим знак:

$$x_n - 1/7 = -7(x_{n-1} - 1/7)^2$$

После сокращения получаем итерационный алгоритм

$$x_n = 2x_{n-1} - 7x_{n-1}^2.$$

16.2.

16.3.

16.4. При $\gamma = 1/2a$, $\Gamma = A^{-1}/2$.

Метод Ньютона предполагает, что функция похожа на квадратичную, а для квадратичной функции хватило бы единственного такого шага для нахождения экстремума.

16.5.

16.6.

16.7.

16.8.

16.9.

16.10. http://www.jasoncantarella.com/downloads/NelderMeadProof.pdf и http://www.scholarpedia.org/article/Nelder-Mead_algorithm

17.1.

17.2.

18.1. При $k = 1$ получаем 4 ошибки, при $k = 3$ получаем 2 ошибки, при $k = 5$ получаем ... Оптимальное $k = 3$.

18.2. При трёх соседях вся плоскость под влиянием рыжих. При одном соседе область влияния чёрных — прямоугольник бесконечный влево вниз. При кросс-валидации с $k = 1$ получаем 4 ошибки, при кросс-валидации с $k = 3$ получаем одну ошибку. Оптимальное $k = 3$.

19.1.

1. $D_{KL}(p||q) = 3 \cdot \frac{1}{3}\ln 3 - \left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \ln 3 - \frac{4}{3}\ln 2 \approx 0.17$
2. $D_{KL}(p||q) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \ln\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{9}\ln 2 - \ln 3 \approx 0.134$

3. Для удобства запишем выражение как логарифм частного:

$$D_{KL}(p||q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{x^2}{2} - \ln \sigma \right) dx$$

Дальше интеграл нужно разбить на сумму трёх, два из них берутся по частям (пригодится Гауссов интеграл: $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{\frac{-x^2}{\beta^2}} = \alpha\beta\sqrt{\pi}$). В итоге получится:

$$D_{KL}(p||q) = \frac{1}{2}(\sigma^2 - 1 - \ln \sigma^2)$$

4.

5. Аналогично пункту 3:

$$D_{KL}(p||q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{x^2}{2} + \ln \sigma \right) dx$$

$$D_{KL}(p||q) = \ln \sigma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma^2}$$

здесь не существует?

19.2. Заметим, что

$$D_{KL}(p||q) = \sum_x p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)} = -\sum_x p(x) \ln \frac{q(x)}{p(x)}$$

Поскольку $-\ln z$ — выпуклая функция, воспользуемся неравенством Йенсена:

$$D_{KL}(p||q) \geqslant -\ln \left(\sum_x q(x) \frac{p(x)}{p(x)} \right) \geqslant -\ln 1 = 0$$

19.3.

1. $p_{AB} = \frac{f(5)}{f(5)+f(6)} = \frac{1}{f(6)/f(5)+1}$
   $p_{AC} = \frac{f(6)}{f(5)+f(6)} = \frac{1}{f(5)/f(6)+1}$
   $p_{BC} = 0$
   При $\sigma_A = 1$: $p_{AB} = \frac{1}{1+e^{-5.5}} \approx 0.996$, $p_{AC} = \frac{1}{1+e^{5.5}} \approx 0.004$
   При $\sigma_A \to 0$: $p_{AB} \to 1$, $p_{AC} \to 0$
   При $\sigma_A \to \infty$: $p_{AB} \to 0.5$, $p_{AC} \to 0.5$

2. При $\sigma_A \to 0$ perplexity $\to 1$
   При $\sigma_A \to \infty$ perplexity $\to 2$

3. Если Джеймс Бонд заброшен в точку B, то он выбирает дороги AB и BC равновероятно, не зависимо от σ_B. Спутанность равна 2.

4. При неизвестной точке заброса вероятности равны:

$$p_{AB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{f(5)}{f(5)+f(6)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{f(5)}{f(5)+f(5)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+e^{-5.5/\sigma^2}} + \frac{1}{6}$$

$$p_{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{f(5)}{f(5)+f(6)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{f(5)}{f(5)+f(5)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+e^{-5.5/\sigma^2}} + \frac{1}{6}$$

$$p_{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{f(6)}{f(5)+f(6)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{f(6)}{f(5)+f(6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+e^{5.5/\sigma^2}}$$

При $\sigma_Z = 1$: $p_{AB} \approx 0.49865$, $p_{BC} \approx 0.49865$, $p_{AC} \approx 0.0027$

При $\sigma_Z \to 0$: $p_{AB} \to 0.5$, $p_{BC} \to 0.5$, $p_{AC} \to 0$

При $\sigma_Z \to \infty$: $p_{AB} \to 1/3$, $p_{BC} \to 1/3$, $p_{AC} \to 1/3$

19.4.

1. Для $f(a) = 1/a$:

$$p_{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1/3}{1/3+1/5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1/3}{1/3+1/4} = \frac{67}{168}$$

$$p_{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1/4}{1/4+1/5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1/4}{1/4+1/3} = \frac{62}{189}$$

$$p_{AB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1/5}{1/5+1/3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1/5}{1/5+1/4} = \frac{59}{216}$$

Для $f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}$:

$$p_{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+e^{-8}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+e^{-3.5}} \approx 0.6568$$

$$p_{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+e^{-4.5}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+e^{3.5}} \approx 0.3394$$

$$p_{AB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+e^{4.5}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+e^{8}} \approx 0.0038$$

Для $f(a) = \frac{1}{\pi(1+a^2)}$:

$$p_{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+(1+3^2)/(1+5^2)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+(1+3^2)/(1+4^2)} = \frac{73}{162}$$

$$p_{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+(1+4^2)/(1+5^2)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+(1+4^2)/(1+3^2)} = \frac{1132}{3483}$$

$$p_{AB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+(1+5^2)/(1+3^2)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+(1+5^2)/(1+4^2)} = \frac{521}{2322}$$

2. Из условия: «Майор Пронин считает, что пункты A, B и C равноудалены друг от друга», следовательно, $p_{AB} = p_{AC} = p_{BC} = 1/3$.

3. $D_{KL}(p||q) = \frac{67}{168} \ln \frac{67}{168} + \frac{62}{189} \ln \frac{62}{189} + \frac{59}{216} \ln \frac{59}{216} + \ln 3 \approx 0.012$

19.5.

20.1.

1. $1 + d + rd$
2.
3. $\frac{d^2-d}{2} - rd$

20.2. 0

20.3.

1. $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
2. Является положительно полуопределённой
3. $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-3, 0, 1)$, $v_3 = (-2, 1, 0)$

20.4.

1. $V = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$
2. $V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

21.1.

21.2.

23 Источники мудрости