Rolit

Presentación

PMC

Ingenieria del Software II

Índice

SCRUM

En este tema, salvo que se especifique lo contrario, I denotará un intervalo no trivial, esto es, con más de un punto.

Definición (derivada)

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Si existe el límite:

$$L = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

decimos que f es *derivable* o *diferenciable* en c y que L es la *derivada de f en c*, para la que usaremos la notación $f'(c)$. Si f es derivable en cada $c \in I$, decimos que f es derivable en I.

Observaciones:

1. De forma análoga se define la derivada de una función $f : A \to \mathbb{R}$ en un punto de acumulación c de A, perteneciente a A.

2. El *cociente incremental* $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos $(c, f(c))$ y $(x, f(x))$ de la gráfica de f. Cuando x tiende a c, las cuerdas "tienden a" la recta tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$. De hecho se define esta recta tangente como la recta de ecuación: $y = f(c) + f'(c)(x - c)$, si f es derivable en c.
3. Otras notaciones para la derivada de f en c: $\frac{df}{dx}(c), Df(c), \frac{dy}{dx}(c)$

Definición

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable en I, se llama función derivada de f a la función $f' : I \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in I$ le asigna $f'(x)$.

Ejemplos

1. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ fijo. Para cada $c \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{k - k}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{0}{x - c} = 0$$

Ejemplos

f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función constante igual a 0.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Para cada $c \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} \frac{x - c}{x - c} = \lim_{x\to c} 1 = 1 = f'(c)$$
Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función constante igual a 1.
3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Veamos que no es derivable en 0.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$
Como el cociente incremental no tiene límite en 0, f no es derivable en 0. Sin embargo, $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{c\} : f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } c > 0 \\ \text{-1} & \text{si } c < 0 \end{cases}$

Ejemplos

4. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es derivable en 0. En efecto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{-2}{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Proposición

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en $c \in I$, entonces f es continua en c.

Demostración.
Sea c un punto de acumulación de I.
Además, $\forall x \in I \setminus \{c\} : f(x) - f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x - c)$.

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \text{ y } \lim_{x\to c}(x - c) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) - f(c) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Por tanto, f es continua en c.

$\square$

Observación: El recíproco no es cierto. Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es continua en 0, pero no es derivable en 0. Existen funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\mathbb{R}$ que no son derivables en ningún punto. El primer ejemplo conocido (Weirstrass, 1872) es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} cos(3^n x)$.

Proposición

Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $c \in I$. Entonces:

(a) Si $b \in \mathbb{R}$, la función bf es derivable en c y $(bf)'(c) = bf'(c)$

(b) La función $f + g$ es derivable en c y $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

(c) La función fg es derivable en c y $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

(d) Si, además, $\forall x \in I : g(x) \neq 0$, la función f/g es derivable en c y $(f/g) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$

Demostración.

(a) Es consecuencia de (c).

(b) Se deja como ejercicio.

(c) $\forall x \in I \setminus \{c\} : \dfrac{(fg)(x) - (fg)(c)}{x - c} = \dfrac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} =$

$= \dfrac{(f(x) - f(c))g(x) + f(c)(g(x) - g(c)}{x - c} =$

$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} g(x) + f(c)\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$.

Tomando el límite en c,

$(fg)'(c) = \left(\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)\left(\lim\limits_{x \to c} g(x)\right) + f(c) \lim\limits_{x \to c} \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c} =$

$= f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

$\square$

(d) $\forall x \in I \setminus \{c\} : \dfrac{(f/g)(x) - (f/g)(c)}{x - c} = \dfrac{f(x)/g(x) - f(c)/g(c)}{x - c} =$

$= \dfrac{f(x)g(c) - f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x - c)} = \dfrac{(f(x) - f(c))g(c) - f(c)(g(x) - g(c)}{g(x)g(c)(x - c)} =$

$= \dfrac{1}{g(x)g(c)}\left(\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} g(c) - f(c)\dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}\right)$.

Tomando el límite en c,

$(f/g)'(c) =$

$$\frac{1}{g(x)\lim\limits_{x\to c} g(x)} \left(\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) + f(c)\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c} =$$

$= f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$