

Universidad de Costa Rica

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ciencias de la Computación e Informática

Computabilidad y Complejidad

Tarea Programada #2

Ariel Arévalo Alvarado

`ariel.arevalo@ucr.ac.cr`

Jorge Díaz Sagot

`jorge.diazsagot@ucr.ac.cr`

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

II-2024

Problema

Una organización necesita diseñar una red de comunicación robusta contra fallos como respaldo para recuperación de desastres. La construcción de esta red se modela de la siguiente forma:

Cada potencial enlace entre los nodos iniciales tiene:

- Un costo mayor a cero
- Una calificación de fiabilidad del cero al uno

A partir de estas características, para cualquier número de nodos iniciales con potenciales enlaces, se debe construir una red donde:

- Debe existir algún camino entre cualesquiera dos nodos de la red
- Se minimice el costo total de todos los enlaces en la red
- La suma de la fiabilidad de todos los enlaces a cada nodo sea mayor o igual a uno

Soluciones

1. Fuerza Bruta

Generar todas las posibles topologías de red, eliminar las que no cumplen los requisitos, y retornar la de menor costo.

2. Heurística

La heurística a utilizar es una modificación del **Algoritmo de Kruskal**, el cual permite encontrar árboles recubridores mínimos para un conjunto inicial de vértices y aristas.

Paso 1: Preprocesamiento de Aristas

1. Para cada arista a con costo c_a y fiabilidad f_a , calcular el peso modificado:

$$p'_a = \frac{c_a}{f_a}$$

Este peso prioriza las aristas que ofrecen mayor fiabilidad por unidad de costo.

2. Ordenar las aristas en orden ascendente según el peso modificado p'_a .

Paso 2: Inicialización

1. Cada nodo se considera inicialmente como un componente separado.
2. Para cada nodo n , inicializar la suma de fiabilidad acumulada:

$$F_n = \sum_{a \in N} f_a = 0$$

donde N es el conjunto de aristas que conectan a un nodo n .

Paso 3: Selección de Aristas con Restricciones

Iterar sobre las aristas ordenadas:

1. Seleccionar la siguiente arista a que conecta los nodos n y m .
2. Evaluar la factibilidad de la arista con los siguientes criterios:
 - Si n y m están en diferentes componentes, para evitar ciclos.
 - Si la adición de a ayuda a satisfacer $F_n \geq 1$ o $F_m \geq 1$.
3. Añadir a si:
 - Conecta dos componentes diferentes.
 - Contribuye a satisfacer la restricción de fiabilidad para m o n .
 - Es necesaria para mantener la conectividad de la red.

Actualizar las componentes y las sumas de fiabilidad:

$$F_n = F_n + f_a$$

$$F_m = F_m + f_a$$

4. Continuar hasta que:
 - $F_n \geq 1$ para todos los nodos n .
 - Todos los nodos estén conectados en un único componente.

Paso 4: Post-Procesamiento para Optimización de Costos

Revisar las aristas añadidas en orden descendente de costo:

- Intentar eliminar una arista a si:
 - La red permanece conectada sin a .
 - $F_n \geq 1$ y $F_m \geq 1$ después de eliminar a .
- Si se elimina a , actualizar F_n y F_m :

$$F_n = F_n - f_a$$

$$F_m = F_m - f_a$$

3. Metaheurística

La metaheurística a utilizar es el **Recocido Simulado**, el cual permite explorar el espacio de soluciones de manera probabilística para encontrar soluciones cercanas al óptimo global, evitando quedar atrapado en óptimos locales.

Paso 1: Inicialización

1. Seleccionar una solución inicial S utilizando la heurística descrita
2. Establecer la temperatura inicial T_0
3. Definir la temperatura mínima T_{\min} y la tasa de enfriamiento α
4. Inicializar la mejor solución encontrada $S_{\text{mejor}} = S$

Paso 2: Bucle Principal

Mientras la temperatura T sea mayor que la temperatura mínima T_{\min} :

1. Generar una solución vecina S' a partir de la solución actual S mediante una de las siguientes operaciones:
 - Añadir una arista $a \notin S$
 - Eliminar una arista $a \in S$
 - Reemplazar una arista $a_1 \in S$ por otra arista $a_2 \notin S$
2. Verificar que la solución vecina S' cumple con las restricciones:
 - La red representada por S' es conexa
 - Para cada nodo n , la suma de fiabilidad acumulada $F_n \geq 1$
3. Calcular la diferencia de costo:

$$\Delta C = C(S') - C(S)$$

donde el costo total de una solución S es:

$$C(S) = \sum_{a \in S} c_a$$

4. Decidir si se acepta la solución vecina S' :
 - Si $\Delta C \leq 0$, aceptar S' como la nueva solución actual S .
 - Si $\Delta C > 0$, aceptar S' con una probabilidad:

$$P = e^{-\Delta C/T}$$

Generar un número aleatorio R en el intervalo $[0, 1]$ y aceptar S' si $R < P$.

5. Si se acepta la solución vecina S' :
 - Actualizar $S = S'$
 - Recalcular eficientemente $C(S)$ y F_n para los nodos afectados
6. Si $C(S) < C(S_{\text{mejor}})$, actualizar la mejor solución encontrada:

$$S_{\text{mejor}} = S$$

7. Actualizar la temperatura:

$$T = \alpha \cdot T$$

Paso 3: Terminación

El algoritmo termina cuando la temperatura T cae por debajo de T_{\min} o se alcanza el número máximo de iteraciones permitidas. La solución final es la mejor solución encontrada S_{mejor} .

Ejemplo

En este ejemplo, diseñaremos una red de comunicación robusta para 5 nodos: A, B, C, D y E.

Datos Iniciales

Las posibles conexiones entre los nodos tienen asociados un costo y una fiabilidad. Representamos todas las conexiones potenciales en el siguiente grafo completo, donde cada arista está etiquetada con su costo y fiabilidad.

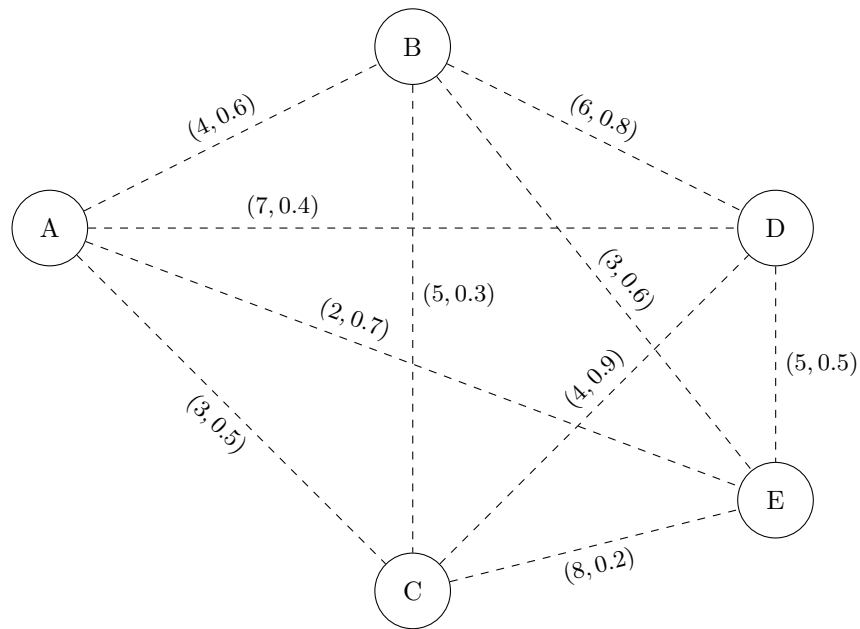


Figura 1: Grafo completo con costos y fiabilidades

Solución Heurística

Aplicamos la heurística modificada del algoritmo de Kruskal para diseñar la red, siguiendo los pasos definidos.

Paso 1: Selección de Aristas

Calculamos el peso modificado p'_a para cada arista usando la fórmula:

$$p'_a = \frac{c_a}{f_a}$$

y seleccionamos las aristas en orden ascendente.

| Arista | c_a | f_a | p'_a |
|--------|-------|-------|--------|
| A-E | 2 | 0.7 | 2.86 |
| C-D | 4 | 0.9 | 4.44 |
| B-E | 3 | 0.6 | 5.00 |
| A-C | 3 | 0.5 | 6.00 |
| A-B | 4 | 0.6 | 6.67 |
| B-D | 6 | 0.8 | 7.50 |
| D-E | 5 | 0.5 | 10.00 |
| A-D | 7 | 0.4 | 17.50 |
| B-C | 5 | 0.3 | 16.67 |
| C-E | 8 | 0.2 | 40.00 |

Tabla 1: Cálculo del peso modificado para cada arista en orden ascendente

Paso 1.1: Añadimos la arista A-E
Añadimos la arista A-E al grafo.

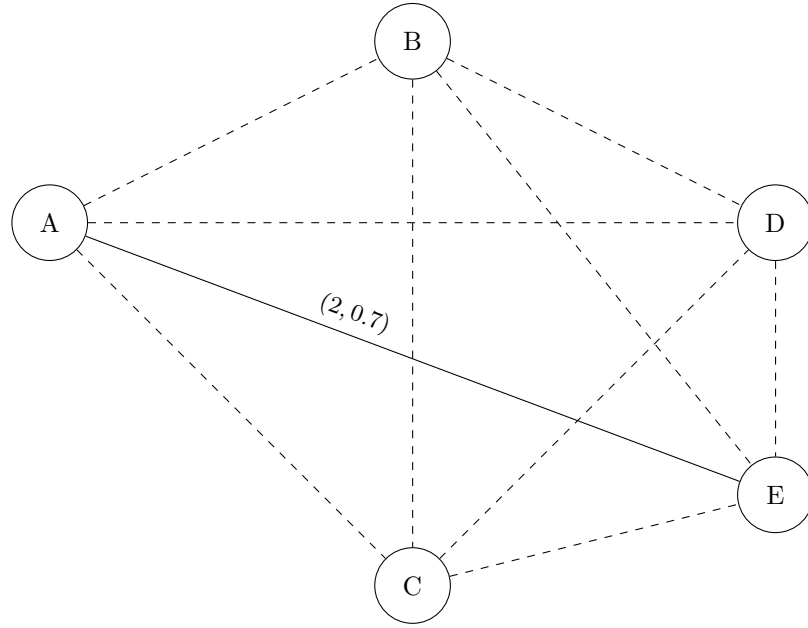


Figura 2: Paso 1.1: Añadimos la arista A-E

| Nodo | F_n |
|--------------------|----------|
| A | 0.7 |
| E | 0.7 |
| B | 0 |
| C | 0 |
| D | 0 |
| Costo Total | 2 |

Tabla 2: Fiabilidades acumuladas después de añadir A-E

Paso 1.2: Añadimos la arista C-D
Añadimos la arista C-D al grafo.

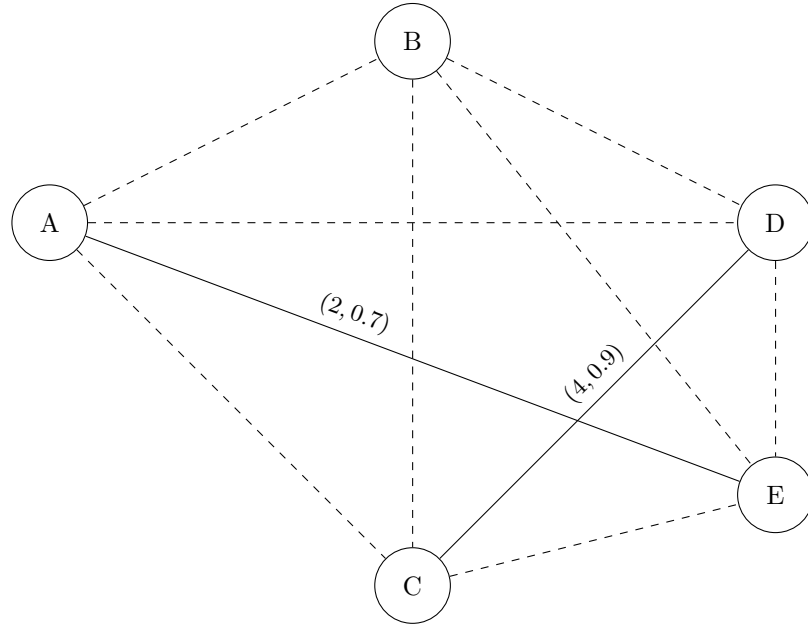


Figura 3: Paso 1.2: Añadimos la arista C-D

| Nodo | F_n |
|--------------------|-------------|
| A | 0.7 |
| E | 0.7 |
| C | 0.9 |
| D | 0.9 |
| B | 0 |
| Costo Total | $2 + 4 = 6$ |

Tabla 3: Fiabilidades acumuladas después de añadir C-D

Paso 1.3: Añadimos la arista B-E
Añadimos la arista B-E al grafo.

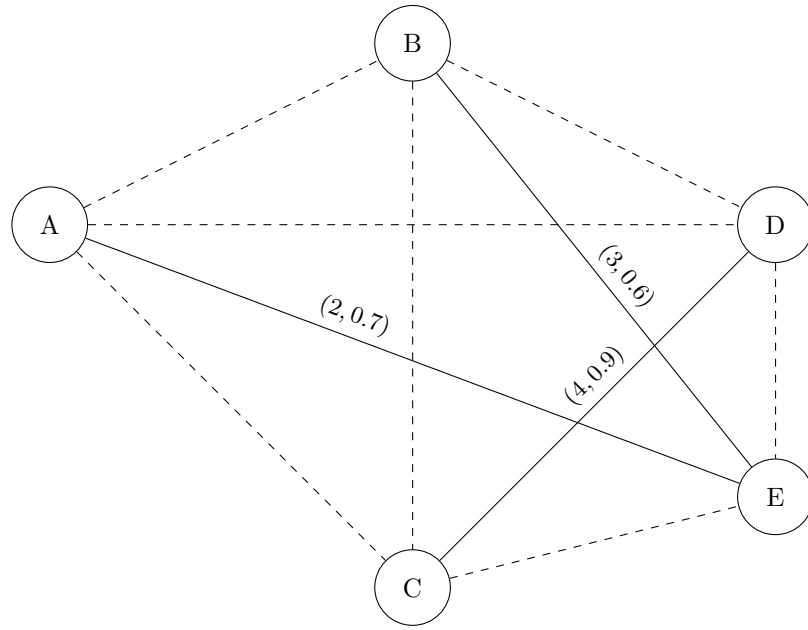


Figura 4: Paso 1.3: Añadimos la arista B-E

| Nodo | F_n |
|--------------------|-------------------|
| A | 0.7 |
| E | $0.7 + 0.6 = 1.3$ |
| B | 0.6 |
| C | 0.9 |
| D | 0.9 |
| Costo Total | $6 + 3 = 9$ |

Tabla 4: Fiabilidades acumuladas después de añadir B-E

Paso 1.4: Añadimos la arista A-C
Añadimos la arista A-C al grafo.

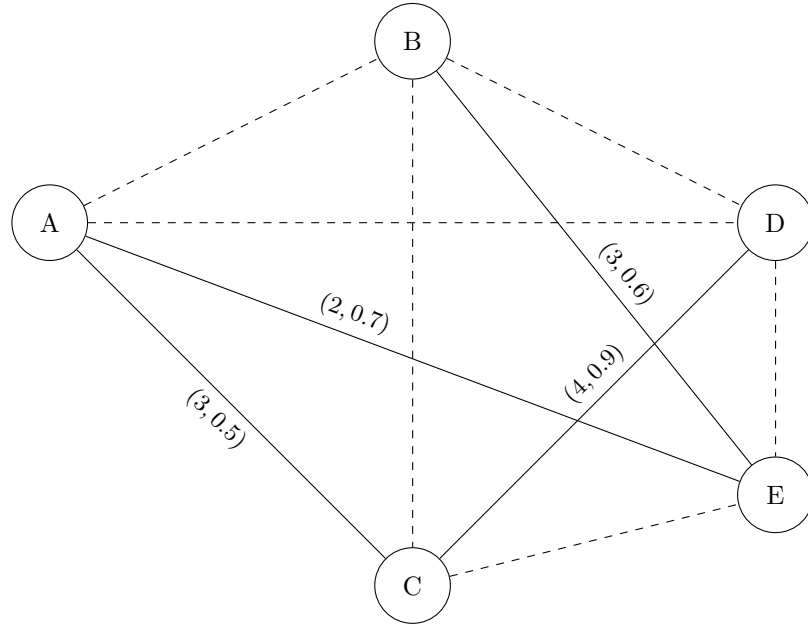


Figura 5: Paso 1.4: Añadimos la arista A-C

| Nodo | F_n |
|--------------------|-------------------|
| A | $0.7 + 0.5 = 1.2$ |
| E | 1.3 |
| B | 0.6 |
| C | $0.9 + 0.5 = 1.4$ |
| D | 0.9 |
| Costo Total | $9 + 3 = 12$ |

Tabla 5: Fiabilidades acumuladas después de añadir A-C

Paso 1.5: Añadimos la arista A-B
 Añadimos la arista A-B al grafo.

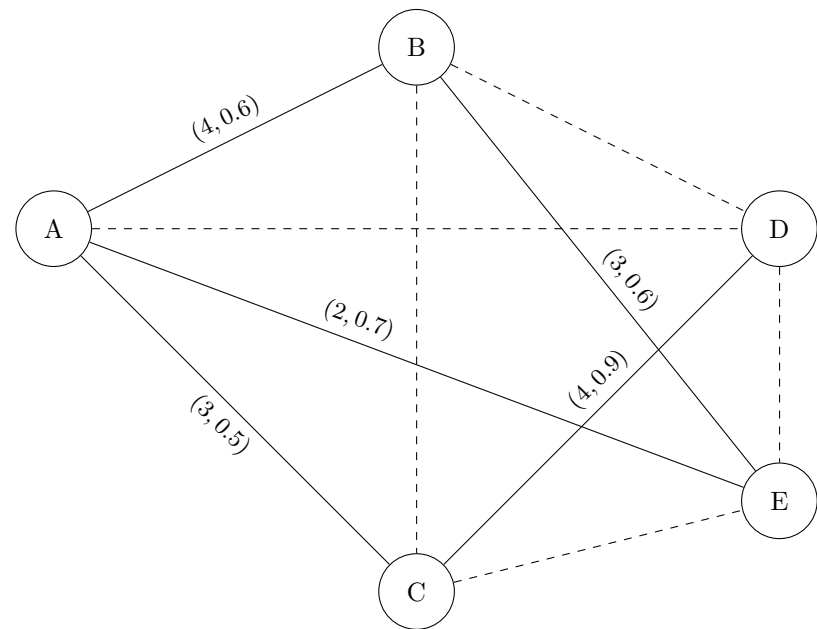


Figura 6: Paso 1.5: Añadimos la arista A-B

| Nodo | F_n |
|--------------------|-------------------|
| A | $1.2 + 0.6 = 1.8$ |
| E | 1.3 |
| B | $0.6 + 0.6 = 1.2$ |
| C | 1.4 |
| D | 0.9 |
| Costo Total | $12 + 4 = 16$ |

Tabla 6: Fiabilidades acumuladas después de añadir A-B

Paso 1.6: Añadimos la arista B-D
 Añadimos la arista B-D al grafo.

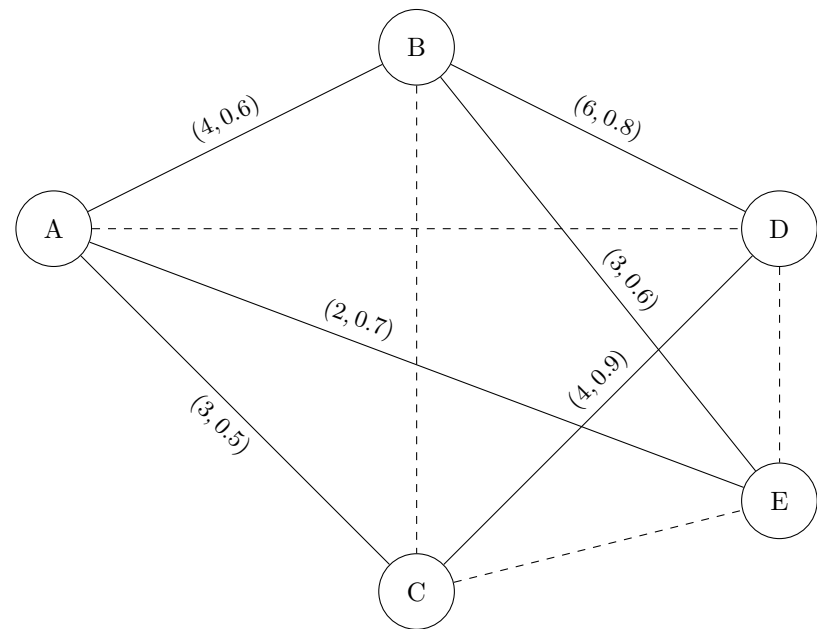


Figura 7: Paso 1.6: Añadimos la arista B-D

| Nodo | F_n |
|--------------------|-------------------|
| A | 1.8 |
| E | 1.3 |
| B | $1.2 + 0.8 = 2.0$ |
| C | 1.4 |
| D | $0.9 + 0.8 = 1.7$ |
| Costo Total | $16 + 6 = 22$ |

Tabla 7: Fiabilidades acumuladas después de añadir B-D

Paso 2: Optimización de Costos

Paso 2.1: Eliminamos la arista A-B

Eliminamos la arista A-B.

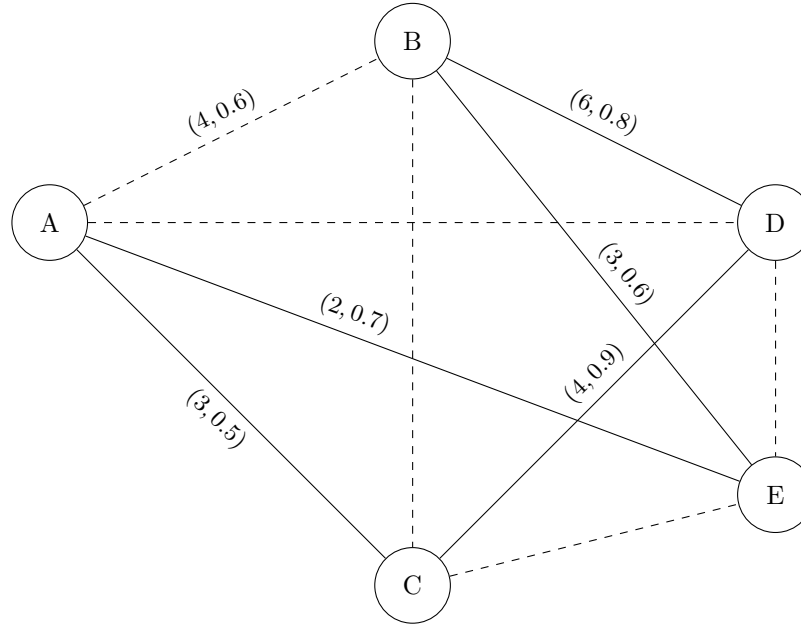


Figura 8: Paso 2.1: Eliminamos la arista A-B

| Nodo | F_n |
|--------------------|-------------------|
| A | $1.8 - 0.6 = 1.2$ |
| E | 1.3 |
| B | $2.0 - 0.6 = 1.4$ |
| C | 1.4 |
| D | 1.7 |
| Costo Total | $22 - 4 = 18$ |

Tabla 8: Fiabilidades acumuladas después de eliminar A-B

Resultado de la Heurística

La red obtenida tiene un costo total de 18 y satisface todas las restricciones.

Recocido Simulado

Aplicamos el recocido simulado para mejorar la solución heurística y reducir el costo total de la red. Iniciamos con la solución antes del post-procesamiento (costo total de 22).

Parámetros Iniciales

| | |
|------------------------|----------------------|
| Temperatura inicial | $T = 10$ |
| Factor de enfriamiento | $\alpha = 0.9$ |
| Temperatura mínima | $T_{\min} = 0.1$ |
| Solución inicial | Costo total $C = 22$ |

Tabla 9: Parámetros iniciales del recocido simulado

Iteración 1

Movimiento: Eliminamos la arista A-B (4, 0.6).

Nuevo costo total:

$$C_{\text{nuevo}} = 22 - 4 = 18$$

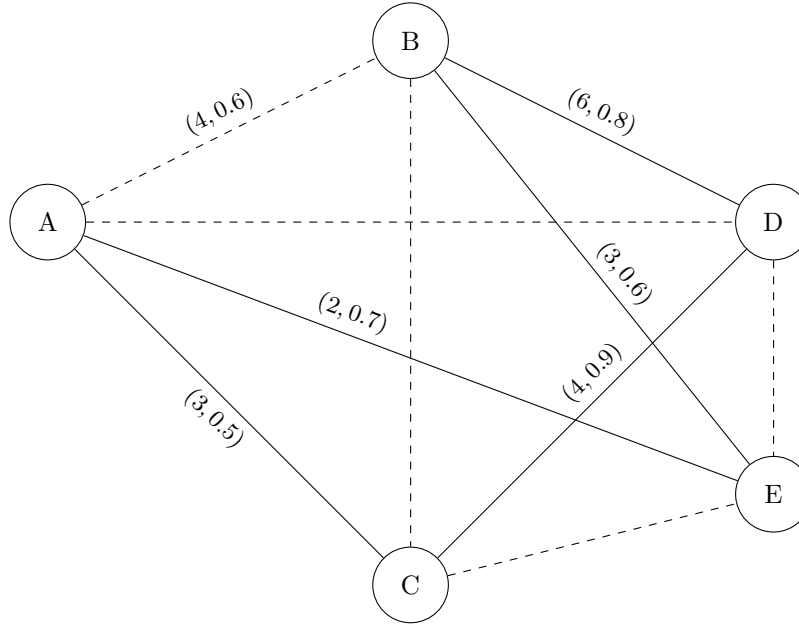


Figura 9: Iteración 1: Eliminamos la arista A-B

| Nodo | F_n anterior | F_n nuevo |
|--------------------|----------------|-------------------|
| A | 1.8 | $1.8 - 0.6 = 1.2$ |
| B | 2.0 | $2.0 - 0.6 = 1.4$ |
| C | 1.4 | 1.4 |
| D | 1.7 | 1.7 |
| E | 1.3 | 1.3 |
| Costo Total | 22 | 18 |

Tabla 10: Fiabilidades acumuladas después de la Iteración 1

Verificación de restricciones: Todas las fiabilidades acumuladas $F_n \geq 1$.

Decisión: Como el costo disminuye ($\Delta C = -4$), aceptamos la solución.

Actualización de la temperatura:

$$T = \alpha T = 0.9 \times 10 = 9$$

Actualización de la mejor solución: $S_{\text{mejor}} = S'$ con costo $C = 18$.

Iteración 2

Movimiento: Añadimos la arista D-E (5, 0.5).

Nuevo costo total:

$$C_{\text{nuevo}} = 18 + 5 = 23$$

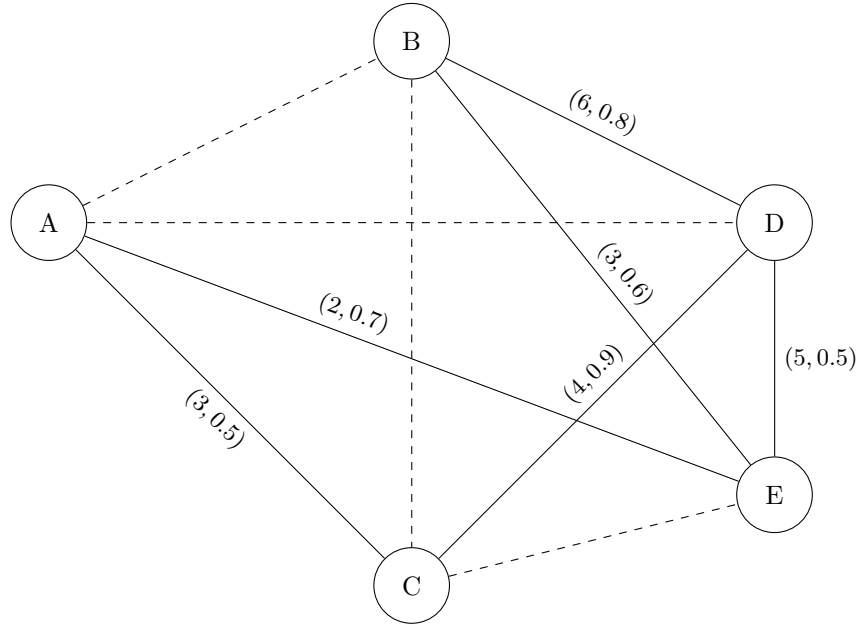


Figura 10: Iteración 2: Añadimos la arista D-E

| Nodo | F_n anterior | F_n nuevo |
|--------------------|----------------|-------------------|
| D | 1.7 | $1.7 + 0.5 = 2.2$ |
| E | 1.3 | $1.3 + 0.5 = 1.8$ |
| A | 1.2 | 1.2 |
| B | 1.4 | 1.4 |
| C | 1.4 | 1.4 |
| Costo Total | 18 | 23 |

Tabla 11: Fiabilidades acumuladas después de la Iteración 2

Verificación de restricciones: Todas las fiabilidades acumuladas $F_n \geq 1$.

Decisión: Como el costo aumenta ($\Delta C = 5$), calculamos la probabilidad de aceptación:

$$P = e^{-\Delta C/T} = e^{-5/9} \approx 0.57$$

Generamos un número aleatorio $R \in [0, 1]$. Si $R < 0.57$, aceptamos la solución. Supongamos que $R = 0.5$, por lo que aceptamos.

Actualización de la temperatura:

$$T = \alpha T = 0.9 \times 9 = 8.1$$

Actualización de la mejor solución: El costo es mayor, no actualizamos S_{mejor} .

Iteración 3

Movimiento: Añadimos la arista A-B (4, 0.6).

Nuevo costo total:

$$C_{\text{nuevo}} = 23 + 4 = 27$$

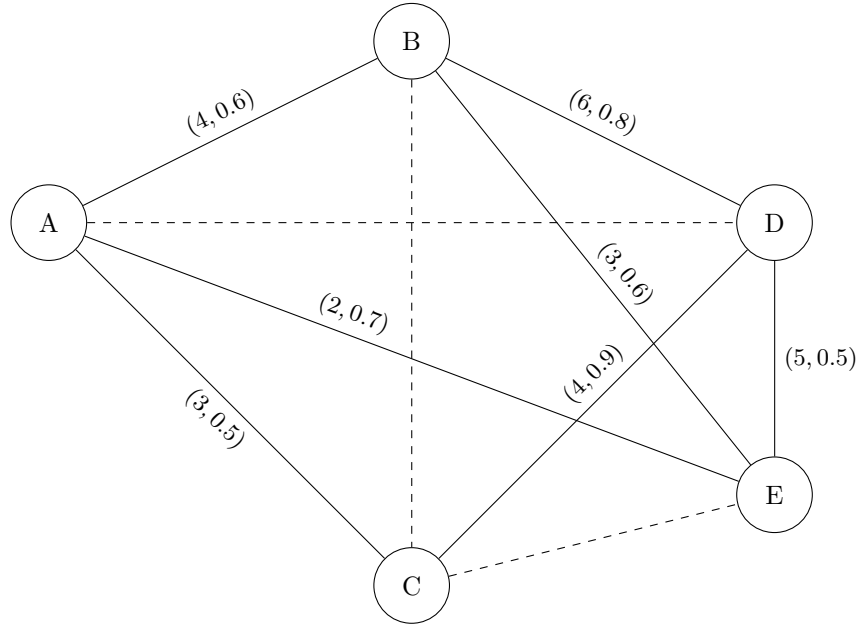


Figura 11: Iteración 3: Añadimos la arista A-B

| Nodo | F_n anterior | F_n nuevo |
|--------------------|----------------|-------------------|
| A | 1.2 | $1.2 + 0.6 = 1.8$ |
| B | 1.4 | $1.4 + 0.6 = 2.0$ |
| C | 1.4 | 1.4 |
| D | 2.2 | 2.2 |
| E | 1.8 | 1.8 |
| Costo Total | 23 | 27 |

Tabla 12: Fiabilidades acumuladas después de la Iteración 3

Verificación de restricciones: Todas las fiabilidades acumuladas $F_n \geq 1$.

Decisión: Como el costo aumenta ($\Delta C = 4$), calculamos la probabilidad de aceptación:

$$P = e^{-\Delta C/T} = e^{-4/8.1} \approx 0.61$$

Generamos un número aleatorio $R \in [0, 1]$. Supongamos que $R = 0.7$, como $R > P$, no aceptamos la solución.

Actualización de la temperatura:

$$T = \alpha T = 0.9 \times 8.1 = 7.29$$

Actualización de la mejor solución: No se actualiza S_{mejor} .

Resultado Final

Después de varias iteraciones, la mejor solución encontrada tiene un costo total de $C = 18$.

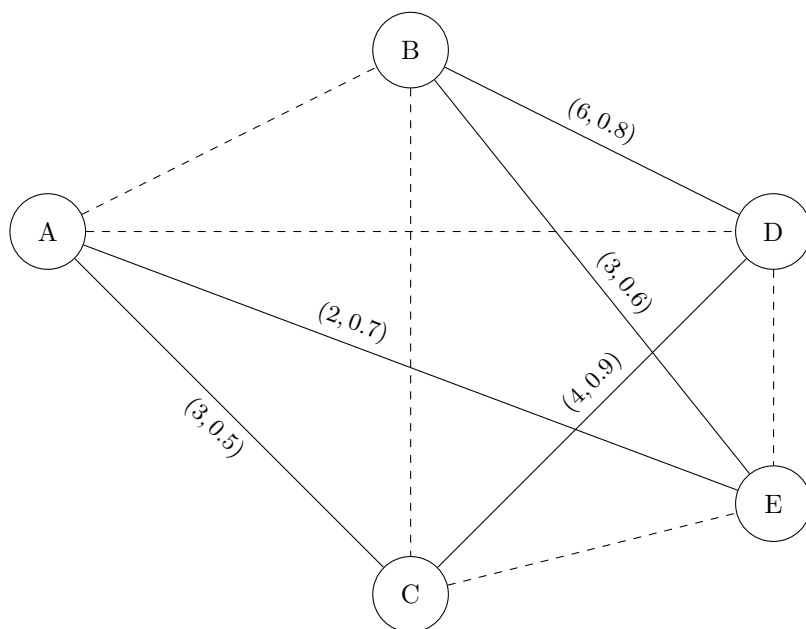


Figura 12: Red final obtenida mediante recocido simulado