Présentation projet final CPU/ GPU

Matthieu PETIT
Djemsay MORVAN
Ulysse CAROMEL

January 11, 2024

Table des matières

Méthodes d'intégration

Méthode de Simpson

- Division de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de largeur égale $h = \frac{b-a}{n}$, n étant pair.
- Approximation sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+2}]$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right]$$

- Estimation finale de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) \\ + 4f(x_{n-1}) + f(b)\Big]$$

Quadrature Gaussienne 2D

- Estimation numérique de l'intégrale d'une fonction $f(x, y)$ sur une région bidimensionnelle définie par $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.
- Utilise un ensemble de points et de poids associés pour approximer l'intégrale.
- Formule générale :

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij} \cdot f(x_i, y_j)$$

- Formule spécifique pour un quadrilatère :

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij} \cdot f\Bigg(\frac{1}{2}(1+\xi_i)x + \frac{1}{2}(1-\xi_i)y, \frac{1}{2}(1+\eta_j)x + \frac{1}{2}(1-\eta_j)y\Bigg)$$

- Offre une précision supérieure à la quadrature de Gauss unidimensionnelle.

Méthode de Runge-Kutta (RK4) pour les EDO

- Technique numérique pour résoudre des équations différentielles ordinaires (EDO).
- Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) : équilibre entre précision et complexité.
- Forme générale d'une EDO du premier ordre :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- Étapes de la méthode RK4 :

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(t_n, y_n) \\
k_2 &= h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= h \cdot f(t_n + h, y_n + k_3)
\end{aligned}$$

- Mise à jour de la solution à chaque pas :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Offre une meilleure précision que des méthodes de pas fixe plus simples, largement utilisée pour sa robustesse et polyvalence.

Méthode de Monte Carlo pour l'intégration

- Utilisée pour estimer numériquement des intégrales complexes, notamment dans des espaces multidimensionnels.
- Fondée sur des principes probabilistes, associant le hasard à des calculs numériques.
- Estimation d'une valeur en utilisant des échantillons aléatoires dans un domaine donné.
- Génération de points aléatoires dans le domaine D.
- Évaluation de la fonction $f(x, y)$ pour chaque point généré.
- Calcul de la moyenne pondérée des valeurs de $f(x, y)$ pour les points générés, multipliée par la mesure de D.

Formule d'estimation de Monte Carlo pour l'intégrale :

$$I \approx A \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)$$

Avantages : Flexibilité, capacité à traiter des problèmes complexes en dimensions élevées. Précision dépend du nombre de points aléatoires générés.

Comparaison des méthodes numériques

Runge-Kutta (RK4)

+ Précision élevée.
+ Adaptée aux EDO.
- Plus de calculs.

Gaussienne 2D

+ Haute précision.
+ Adaptée aux intégrales bidimensionnelles.
- Plus complexe.

Simpson

+ Simple à mettre en œuvre.
+ Bonne précision.
- Limité aux formes simples.

Monte Carlo

+ Grande flexibilité.
+ Adaptée aux problèmes complexes.
- Précision dépend du nombre d'échantillons.

Outils de paralélisation

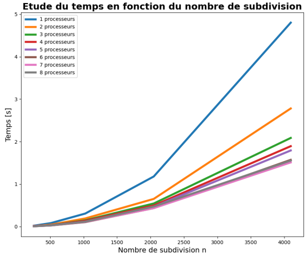
Open MP

MPI

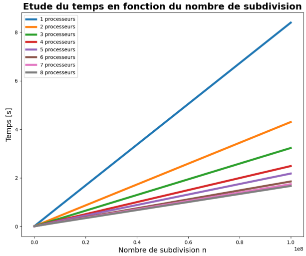
CUDA

Résultats

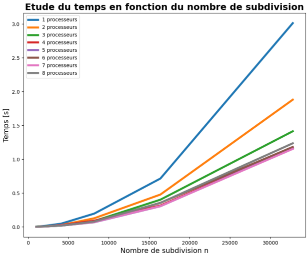
Résultats pour Open MP



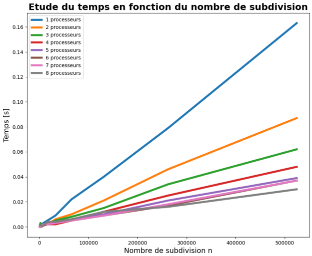
Gauss 2D



Simpson

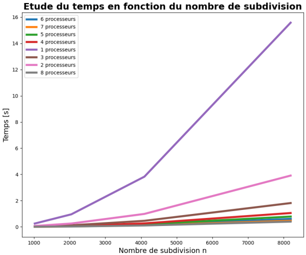


Runge Kutta

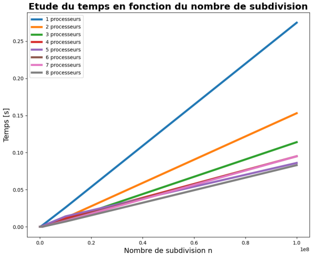


Monte Carlo

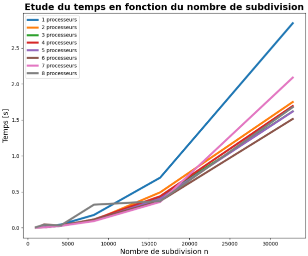
MPI



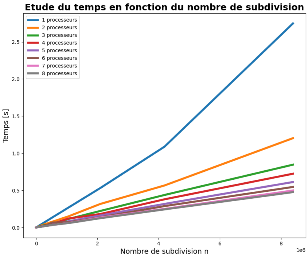
Gauss 2D



Simpson

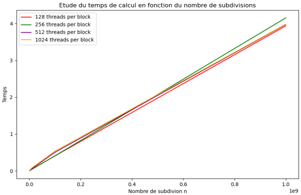


Runge Kutta

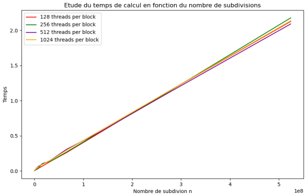


Monte Carlo

CUDA



Gauss 2D
Runge Kutta



Simpson
Monte Carlo