



UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

Exercícios Cálculo Lambda

Ciência da Computação

1) Reescreva os seguintes termos utilizando parênteses explicitamente em volta de cada subtermo.

- a) $a\ b\ c\ d$
- b) $\lambda q.\lambda i.q$
- c) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ (y\ z)$

2) Para os seguintes termos, digam que variáveis estão livres, e que variáveis estão ligadas (e a que λ).

- a) $\lambda s.s\ z\ \lambda q.s\ q$
- b) $(\lambda s.s\ z)\ \lambda q.w\ \lambda w.w\ q\ z\ s$
- c) $(\lambda s.s)\ (\lambda q.q\ s)$
- d) $\lambda z.((\lambda s.s\ q)\ (\lambda q.q\ z))\ \lambda z.z\ z$

3) Aplique reduções β às expressões abaixo (até não houverem mais).

- a) $(\lambda z.z)\ (\lambda q.q\ q)\ (\lambda s.s\ a)$
- b) $(\lambda s.\lambda q.s\ q\ q)\ (\lambda a.a)\ b$
- c) $(\lambda s.\lambda q.s\ q\ q)\ (\lambda x.x)\ c$
- d) $((\lambda s.s\ s)\ (\lambda q.q))\ (\lambda r.r)$

4) Considerando que:

$ONE = \lambda a.\lambda b.a\ b$

$TWO = \lambda c.\lambda d.c\ (c\ d)$

$PLUS = \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\ f\ (n\ f\ x)$

...aplique as reduções β à expressão $PLUS\ TWO\ ONE$ enquanto for possível (dica: são necessárias 6 reduções).

Soluções

- 1)
 - a) $((a\ b)\ c)\ d$
 - b) $\lambda q.(\lambda i.q)$
 - c) $\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((x\ z)\ (y\ z))))$

- 2) Variáveis em preto estão livre; variáveis ligadas marcadas com cores.
 - a) $\lambda s.s\ z\ \lambda q.s\ q$
 - b) $(\lambda s.s\ z)\ \lambda q.w\ \lambda w.w\ q\ z\ s$
 - c) $(\lambda s.s)\ (\lambda q.q\ s)$
 - d) $\lambda z.((\lambda s.s\ q)\ (\lambda q.q\ z))\ \lambda z.z\ z$

- 3) Os redexes existentes estão marcados a cada passo.
 - a)

$$\begin{aligned} &(\lambda z.z)\ (\lambda q.q\ q)\ (\lambda s.s\ a) && \rightarrow \\ &(\lambda q.q\ q)\ (\lambda s.s\ a) && \rightarrow \\ &(\lambda s.s\ a)\ (\lambda s.s\ a) && \rightarrow \\ &(\lambda s.s\ a)\ a && \rightarrow \\ &a\ a \end{aligned}$$
 - b)

$$\begin{aligned} &(\lambda s.\lambda q.s\ q\ q)\ (\lambda a.a)\ b && \rightarrow \\ &(\lambda q.(\lambda a.a)\ q\ q)\ b && \rightarrow \quad (\text{temos dois redexes; podemos escolher a ordem}) \\ &\text{OU:} \\ &(\lambda q.q\ q)\ b && \rightarrow \\ &b\ b \end{aligned}$$

OU:

$$\begin{aligned} &(\lambda a.a)\ b\ b && \rightarrow \\ &b\ b \end{aligned}$$
 - c)

$$\begin{aligned} &(\lambda s.\lambda q.s\ q\ q)\ (\lambda x.x)\ c && \rightarrow \\ &(\lambda q.(\lambda x.x)\ q\ q)\ c && \rightarrow \quad (\text{temos dois redexes; podemos escolher a ordem}) \\ &\text{OU:} \\ &(\lambda q.q\ q)\ c && \rightarrow \\ &c\ c \end{aligned}$$

OU:

$$\begin{aligned} &(\lambda x.x)\ c\ c && \rightarrow \\ &c\ c \end{aligned}$$
 - d)

$$\begin{aligned} &(\lambda s.s\ s)\ (\lambda q.q)\ (\lambda r.r) && \rightarrow \\ &(\lambda q.q)\ (\lambda q.q)\ (\lambda r.r) && \rightarrow \\ &(\lambda q.q)\ (\lambda r.r) && \rightarrow \\ &\lambda r.r \end{aligned}$$

- 4) A ordem de reduções foi escolhida arbitrariamente.

$$\begin{aligned} &(\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\ f\ (n\ f\ x))\ (\lambda c.\lambda d.c\ (c\ d))\ (\lambda a.\lambda b.a\ b) && \rightarrow \\ &(\lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda c.\lambda d.c\ (c\ d))\ f\ (n\ f\ x))\ (\lambda a.\lambda b.a\ b) && \rightarrow \\ &(\lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda d.f\ (f\ d))\ (n\ f\ x))\ (\lambda a.\lambda b.a\ b) && \rightarrow \\ &(\lambda n.\lambda f.\lambda x.f\ (f\ (n\ f\ x)))\ (\lambda a.\lambda b.a\ b) && \rightarrow \\ &\lambda f.\lambda x.f\ (f\ ((\lambda a.\lambda b.a\ b)\ f\ x)) && \rightarrow \\ &\lambda f.\lambda x.f\ (f\ ((\lambda b.f\ b)\ x)) && \rightarrow \\ &\lambda f.\lambda x.f\ (f\ (f\ x)) && (\text{THREE}) \end{aligned}$$