UNIVERSITAT DE GIRONA

PRÀCTICA FINAL

Fonaments de la computació

Francesc Xavier Bullich Parra
Gil Gassó Rovira
Marc Sànchez Pifarré

Tutor de la pràctica
Jaume Rigau

December 22, 2018

Contents

Chapter 1: Introducció

1.1 Definicions

Es defineixen una série de noms que seran utilitzats al llarc de la pràctica per ajudar a la simplificació i l'enteniment de la mateixa.

- Definim $FXBP_{DFA}$ com l'autòmata finit determinista capaç de reconéixer el llenguatge L($FXBP_{DFA}$).
- Definim L ($FXBP_{DFA}$) com el conjunt infinit de mots ω que accepta $FXBP_{DFA}$
- Definim ω com un mot tal que $\omega \in$ L($FXBP_{DFA}$)
- Definim Σ^*FXBP_{DFA} com el conjunt de símbols amb el que es construeix el llenguatge L($FXBP_{DFA}$)
- Definim context Φ com l'escenari ideal en el que l'autòmata a dissenyar es comportarà de manera correcta, $\Phi = < \Upsilon, \Psi >$
- Definim Υ com la precondició que s'ha de complir al utilitzar els nostres autòmates.
- Definim Ψ com la postcondició de l'autómata.

Chapter 2: Autòmata Finit

2.1 Definició del context

Sigui Φ_{DFA} l'espai de funcionament lògic del nostre autòmata com l'espai estipulat a la Secció 3.Patrons[1]. Per tant acabem d'aquirir totes les definicions assumides a l'enunciat del problema, veure [1].

Fem les següents afirmacions sobre Υ :

- $\omega \in P_0 \wedge P_0 \in P$
- γ com a llesca continguda dins d'un P on $\gamma \in \omega \vee \gamma = \epsilon$

Fem les següents afirmacions sobre Ψ :

- retorna True quan $FXBP_{DFA}$ Accepta $\omega \leftrightarrow \exists\ \gamma \in P$ que compleix PIP.
- retorna False quan $\nexists\ \gamma \in P$ que compleix PIP.

on : PIP és la propietat dels patrons implícits parcials definida a [1] apartat 3.3.1.

2.2 Dissenyant el nostre autòmata finit

Primerament cal observar possibles propietats del problema que ens puguin servir per a la construcció de l'autòmata.

- Definim 4+ com la seqüència de símbols '++++' d'un mot ω comprés dins del llenguatge L($FXBP_{DFA}$).

Realitzem les següents observacions :

1. Abans i després de la seqüència 4+ hi pot haver qualsevol símbol 0 o més vegades comprés dins de Σ^*FXBP_{DFA}.
2. Aïllada és la seqüència de simbols '-+-' dins de ω
3. Entre dues seqüències 4+ hi trobem 3 aïllades.
4. 2 aïllades poden compartir el symbol inicial o el symbol final o ambdós.
5. S'accepta '-+-+-' com a dues cèl·lules aïllades on -+ comparteix - amb +-.
6. S'accepta '-+-+-+-' coma tres cèl·lules aïllades on -+ comparteix- amb +-+- i -+-+ comparteix - amb +-.
7. Entre 2 aïllades hi pot aparèixer qualsevol combinació de symbols pertanyent a Σ^*FXBP_{DFA}.

8. El symbol $\boxed{\hookleftarrow}$ ens fa tornar a començar a cercar el PIP (RESET).

Dissenyarem doncs l'autòmata per construcció tenint en compte les anteriors propietats. En la construcció del nostre autòmata reduim el problema al tractament d'un subconjunt dels símbols de l'alfabet, concretament es construeix a partir del subconjunt +,-, ja que detectem que el símbol $\boxed{\hookleftarrow}$ actúa com a RESET. La funció del RESET en $FXBP_{DFA}$ és exemplificada al capítol 1 del llibre [1], concretament als exemples 1.15 i 1.17.

Incorporarem el RESET al nostre disseny a l'últim pas de la construcció.

Fem les següents definicions en l'escenari sense RESET :

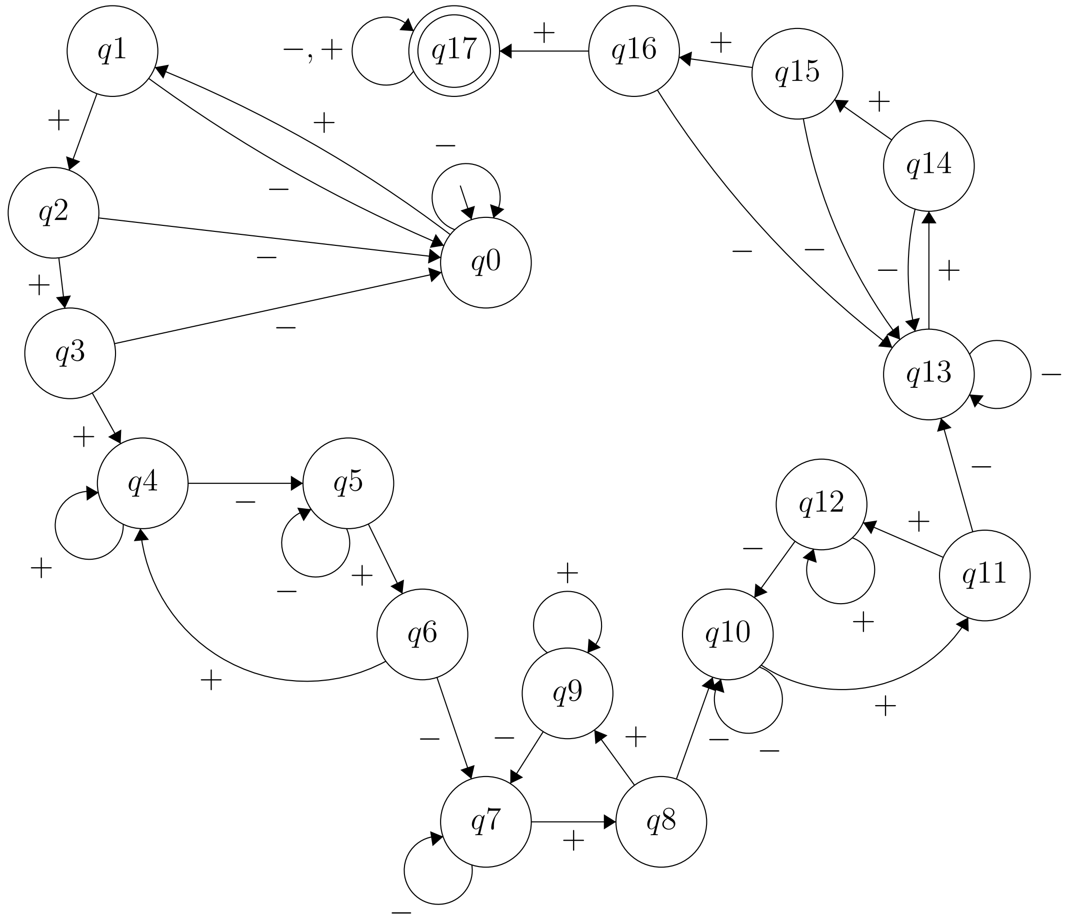
- Definim pa com la seqüència '-+'
- Definim fa com la seqüència '+-'
- Definim l'operació CONCATENACIÓ amb el symbol |
- Definim 3aïllades com :
  - (+-* | pa | (-+-*)* | pa | (-+-*)* | pa | - | +-*) ∨ (+-* | - | fa | (-+-*)* | fa | (-+-*)* | fa | +-*)

Per tant podem concebre que en un entorn on no hi ha RESET es cerca si el mot conté la següent seqüència de simbols :

+-* | 4+ | 3aïllades | 4+ | +-*

2.2.1 Construïm l'autòmata sense RESET

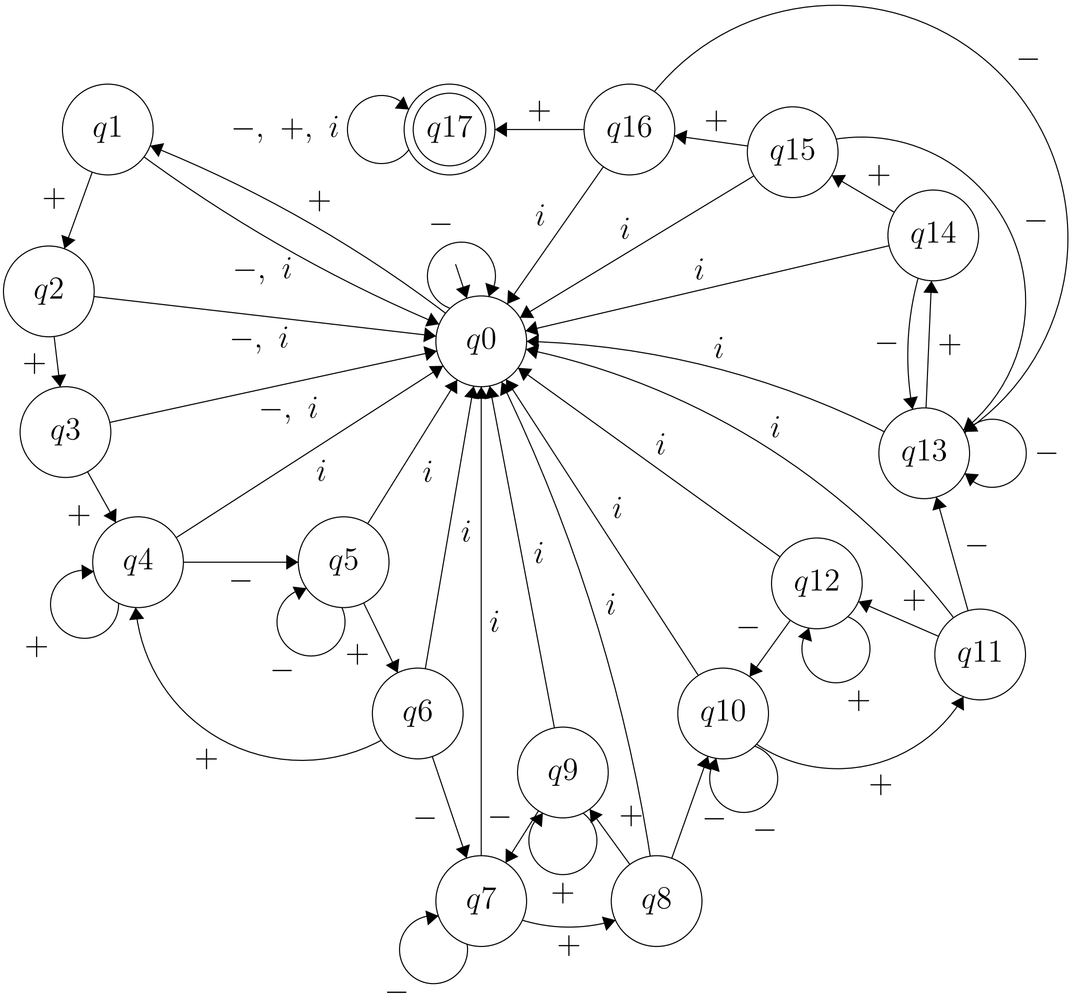
Veiem que els estats de l'autòmata van avançant a mesura que es van trobant el patró. Hi distingim cicles que ens interessen per controlar els casos que on per exemple hi pot haver qualsevol cosa entre cel·les actives o entre cel·les actives i principi o final del patró.



2.2.2 Construïm l'Autòmata Complet

Afegim RESET a l'autòmata, en aquest cas tots els estats menys l'estat final tindran una transició a l'estat inicial amb el símbol $\boxed{\hookleftarrow}$. L'estat final com que el mot ja està acceptat tindrà una transició a ell mateix amb el símbol $\boxed{\hookleftarrow}$.

En aquest disseny, per simplificar la codificació del caràcter $\boxed{\hookleftarrow}$ el codifiquem com una i.



2.3 Definició formal de $FXBP_{DFA}$

Definim formalment el nostre autòmata.

$$FXBP_{DFA} = \{Q, \Sigma^*, \delta, q0, q17\}$$

- **Q** = {q0,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,q10,q11,q12,q13,q14,q15,q16,q17}
- $\Sigma^* = \{ + , - , \hookleftarrow , \epsilon \}$
- $\delta = Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$
- q0 $\in$ Q
- q17 $\subseteq$ Q

2.3.1 Representació taula δ

Table 2.1: δ table

State	+	-	$\boxed{\hookleftarrow}$
→ q0	q1	q0	q0
q1	q2	q0	q0
q2	q3	q0	q0
q3	q4	q0	q0
q4	q4	q5	q0
q5	q6	q5	q0
q6	q4	q7	q0
q7	q9	q7	q0
q8	q8	q7	q0
q9	q8	q10	q0
q10	q12	q10	q0
q11	q11	q10	q0
q12	q11	q13	q0
q13	q14	q13	q0
q14	q15	q13	q0
q15	q16	q13	q0
q16	q17	q13	q0
q17	q17	q17	q17

2.4 Operacions regulars amb autòmates

La definició 1.23 del llibre parla sobre les operacions que es poden realitzar sobre autòmates finits deterministes. En el nostre cas s'ha emprat una tècnica de construcció per el disseny de l'autòmata peró es podria emprar una construcció de subautòmates i mitjançant la concatenació dels mateixos (representada amb el caràcter $\bullet$) construïr el nostre $FXBP_{DFA}$. Hi ha hagut intents de la creació de l'autòmata mitjançant concatenació dels autòmates $FXBP_{DFA1}$ i $FXBP_{DFA2}$ intentant dividir el problema en :

$$FXBP_{DFA1} = 4+$$

$$FXBP_{DFA2} = 3\text{aïllades}$$

on:

$$4+ \bullet 3\text{aïllades} \bullet 4+$$

No s'ha seguit per la complexitat de tractar la funcionalitat del RESET, en el cas hipotètic que haguéssim presentat aquest tipus de construcció haguéssim derivat a el conjunt $FXBP_{DFA1}$, $FXBP_{DFA2}$ que concatenat mitjançant l'ús d'un autòmata finit indeterminista s'hauria pogut agrupar en $FXBP_{NFA}$.

2.5 Minimització de $FXBP_{DFA}$

L'objectiu d'aquesta secció és cercar el $FXBP_{DFA}$ mínim partint del $FXBP_{DFA}$.

Considerem que dos estats fan el mateix si i només si el resultat de les transicions és el mateix considerant tots els símbols de l'alfabet.

L'idea de la minimització parteix de la fusió d'estats. Podem trobar explicats els processos de minimització al document [3]. Podem utilitzar la manera manual aplicant l'algoritme de Hopcroft, o bé, podem obtar per utilitzar UTM.

En aquest cas utilitzem l'algoritme de HopCroft per a la seva minimització implementant una matriu que ens permeti detectar les repeticions de les transicions donadat un estat.

El nostre autòmata és mínim.

Table 2.2: Passos de $PI0$ - $PI2$

T		+	-	E	PI0	+	-	E	PI1	+	-	E	PI2
INICI	A	B	A	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
+	B	C	A	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
++	C	D	A	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
+++	D	E	A	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
++++	E	E	F	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1CA-	F	G	F	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1CA+	G	E	H	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1/2CA-	H	J	H	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BR	I	I	H	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2CA+	J	I	K	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/3CA-	K	M	K	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BR2	L	L	K	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3CA+	M	L	N	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3CA-	N	O	N	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
d+	O	P	N	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
d++	P	Q	N	A	1	1	1	1	1	3	1	1	4
d+++	Q	R	N	A	1	2	1	1	3	2	1	1	3
d++++	R	R	R	R	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Table 2.3: Passos de $PI3$ - $PI5$

T	+	-	E	PI3	+	-	E	PI4	+	-	E	PI5
INICI	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
++	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
+++	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
++++	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1CA-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1CA+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1/2CA-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BR	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2CA+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/3CA-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
BR2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3CA+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6	1	7
3CA-	1	1	1	1	5	1	1	6	5	6	1	6
d+	4	1	1	5	4	1	1	5	4	6	1	5
d++	3	1	1	4	3	1	1	4	3	6	1	4
d+++	2	1	1	3	2	1	1	3	2	6	1	3
d++++	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Table 2.4: Passos de $PI9$ - $PI11$

T	+	-	E	PI6	+	-	E	PI7	+	-	E	PI8
INICI	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
++	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
+++	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
++++	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1CA-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1CA+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1/2CA-	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	1	11
BR	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2CA+	1	1	1	1	1	8	1	9	1	8	1	9
2/3CA-	7	1	1	8	7	8	1	8	7	8	1	8
BR2	1	1	1	1	1	8	1	9	9	8	1	10
3CA+	1	6	1	7	1	6	1	7	9	6	1	7
3CA-	5	6	1	6	5	6	1	6	5	6	1	6
d+	4	6	1	5	4	6	1	5	4	6	1	5
d++	3	6	1	4	3	6	1	4	3	6	1	4
d+++	2	6	1	3	2	6	1	3	2	6	1	3
d++++	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Table 2.5: Passos de $PI12$ - $PI14$

T	+	-	E	PI9	+	-	E	PI10	+	-	E	PI11
INICI	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
++	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
+++	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
++++	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14	1	15
1CA-	1	1	1	1	12	1	1	14	12	14	1	14
1CA+	1	11	1	12	1	11	1	12	1	11	1	12
1/2CA-	9	11	1	11	9	11	1	11	9	11	1	11
BR	1	11	1	12	12	11	1	13	13	11	1	13
2CA+	1	8	1	9	12	8	1	9	13	8	1	9
2/3CA-	7	8	1	8	7	8	1	8	7	8	1	8
BR2	10	8	1	10	10	8	1	10	10	8	1	10
3CA+	10	6	1	7	10	6	1	7	10	6	1	7
3CA-	5	6	1	6	5	6	1	6	5	6	1	6
d+	4	6	1	5	4	6	1	5	4	6	1	5
d++	3	6	1	4	3	6	1	4	3	6	1	4
d+++	2	6	1	3	2	6	1	3	2	6	1	3
d++++	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Table 2.6: Passos de $PI15$ - $PI16$

T	+	-	E	PI12	+	-	E	PI13	+	-	E	PI14
INICI	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
+	1	1	1	1	1	1	1	1	17	1	1	18
++	1	1	1	1	16	1	1	17	16	1	1	17
+++	15	1	1	16	15	1	1	16	15	1	1	16
++++	15	14	1	15	15	14	1	15	15	14	1	15
1CA-	12	14	1	14	12	14	1	14	12	14	1	14
1CA+	15	11	1	12	15	11	1	12	15	11	1	12
1/2CA-	9	11	1	11	9	11	1	11	9	11	1	11
BR	13	11	1	13	13	11	1	13	13	11	1	13
2CA+	13	8	1	9	13	8	1	9	13	8	1	9
2/3CA-	7	8	1	8	7	8	1	8	7	8	1	8
BR2	10	8	1	10	10	8	1	10	10	8	1	10
3CA+	10	6	1	7	10	6	1	7	10	6	1	7
3CA-	5	6	1	6	5	6	1	6	5	6	1	6
d+	4	6	1	5	4	6	1	5	4	6	1	5
d++	3	6	1	4	3	6	1	4	3	6	1	4
d+++	2	6	1	3	2	6	1	3	2	6	1	3
d++++	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Table 2.7: Passos de $PI0$ - $PI2$

T	+	-	E	PI15	+	-	E	PI16
INICI	18	1	1	1	18	1	1	1
+	17	1	1	18	17	1	1	18
++	16	1	1	17	16	1	1	17
+++	15	1	1	16	15	1	1	16
++++	15	14	1	15	15	14	1	15
1CA-	12	14	1	14	12	14	1	14
1CA+	15	11	1	12	15	11	1	12
1/2CA-	9	11	1	11	9	11	1	11
BR	13	11	1	13	13	11	1	13
2CA+	13	8	1	9	13	8	1	9
2/3CA-	7	8	1	8	7	8	1	8
BR2	10	8	1	10	10	8	1	10
3CA+	10	6	1	7	10	6	1	7
3CA-	5	6	1	6	5	6	1	6
d+	4	6	1	5	4	6	1	5
d++	3	6	1	4	3	6	1	4
d+++	2	6	1	3	2	6	1	3
d++++	2	2	2	2	2	2	2	2

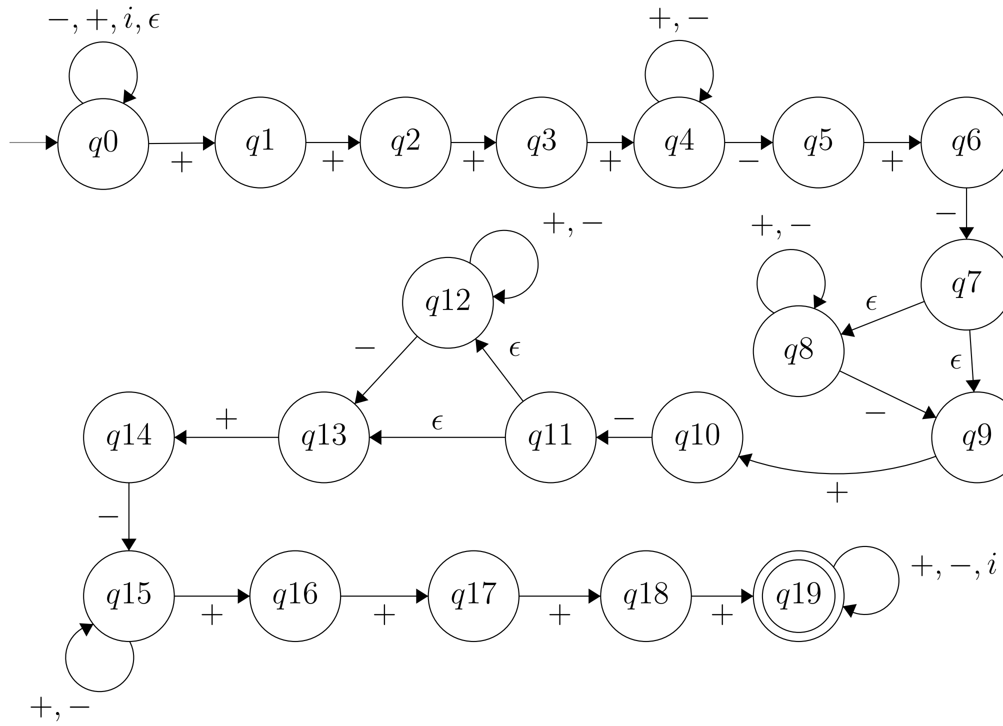
2.6 NFA (Nondeterministic finit automata)

L'equivalència de NFA i DFA està demostrada al capítol 1.2 del llibre [1], donat un autòmata NFA existeix un DFA equivalent. Per equivalència entenem que ambdós reconeixen el mateix llenguatge, en aquest cas el llenguatge L($FXBP_{DFA}$).

Definim doncs $FXBP_{NFA}$ com l'autòmata finit indeterminista equivalent a $FXBP_{DFA}$.

2.6.1 Disseny de $FXBP_{NFA}$

Dissenyem ANFA, en aquest cas ens convé només cercar el camí que ens porta directes a QAccept. Directament tracem un camí acceptador i el modifiquem per que es comporti de manera correcte afegint les branques indeterministes oportunes.



2.7 Definició formal de $FXBP_{NFA}$

Definim formalment el nostre autòmata.

$$FXBP_{DFA} = \{Q, \Sigma^*, \delta, q0, q19\}$$

- **Q** = {q0,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,q10,q11,q12,q13,q14,q15,q16,q17,q18,q19}
- Σ^* = { + , - , ↩ , ϵ }
- δ = Q X Σ^* $\rightarrow$ P(Q) on P(Q) son possibles subconjunts de Q
- q0 $\in$ Q
- q19 $\subseteq$ Q

2.7.1 Representació taula δ

Table 2.8: δ table

State	+	-	$\boxed{\hookleftarrow}$	ϵ
q0	{q0,q1}	{q0}	{q0}	{q0}
q1	{q2}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q2	{q3}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q3	{q4}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q4	{q4}	{q4,q5}	$\emptyset$	$\emptyset$
q5	{q6}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q6	$\emptyset$	{q7}	$\emptyset$	$\emptyset$
q7	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	{q8,q9}
q8	{q8}	{q8,q9}	$\emptyset$	$\emptyset$
q9	{q10}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q10	$\emptyset$	{q11}	$\emptyset$	$\emptyset$
q11	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	{q12,q13}
q12	{q12}	{q12,q13}	$\emptyset$	$\emptyset$
q13	{q14}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q14	$\emptyset$	{q15}	$\emptyset$	$\emptyset$
q15	{q15,q16}	{q15}	$\emptyset$	$\emptyset$
q16	{q17}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q17	{q18}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q18	{q19}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q19	{q19}	{q19}	{q19}	$\emptyset$

Chapter 3: Push-Down Automata

Chapter 4: Turing Machine

Bibliography

[1] Fundamental of Computation - Michael Sipser

[2] Problema Patterns (i.e., Cerca de Patrons) - Jaume Rigau

[3] Lexical analisys - part 4

[4] Universal Turing Machine - Manual

[5] Matrix Transposition Wikipedia