# Optimisation d'une Production Simple

DJAMPA MBIANGANG PLATINY CABREL
NDEKEBAI MEYIE MICHAEL
AZEUFACK NGNINWO THIERRY
MOUGOU OWOUNDI BRICE WILLIAM

2 octobre 2025

**Résumé**

Ce rapport présente l'étude d'un problème d'optimisation appliqué à la gestion d'une petite usine produisant deux types de produits. L'objectif est de minimiser le coût total de production sous contraintes de demande totale et de non-négativité des quantités produites. La modélisation mathématique et la résolution du problème sont détaillées, suivies d'une discussion sur les résultats et leurs implications.

## 1 Introduction

La gestion efficace d'une production industrielle est essentielle pour réduire les coûts tout en satisfaisant la demande. Ce rapport illustre un problème d'optimisation simple où une usine fabrique deux produits avec un budget limité et des coûts marginaux croissants.

## 2 Contexte et Problématique

Une petite usine fabrique deux produits, notés $A$ et $B$, avec des quantités respectives $x$ et $y$. La demande totale à satisfaire est fixe et exprimée par la contrainte :

$$x + y = D$$

où $D > 0$. Le coût total de production est modélisé par la fonction :

$$C(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + dy$$

avec $a, b > 0$ représentant les coûts marginaux croissants, et $c, d$ les coûts linéaires (main d'œuvre, énergie, etc.).

L'objectif est de :
— minimiser $C(x, y)$,
— sous la contrainte $x + y = D$,
— et avec $x, y \geq 0$.

La problématique posée est : *Comment déterminer les quantités optimales $x$ et $y$ afin de minimiser le coût total tout en respectant les contraintes fixées ?*

# 3 Modélisation Mathématique

On souhaite résoudre le problème suivant :

$$\min_{x,y} \quad C(x,y) = ax^2 + by^2 + cx + dy$$

sous les contraintes

$$x + y = D, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

# 4 Méthode de Résolution

Le problème peut être résolu en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange en posant la fonction :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = ax^2 + by^2 + cx + dy + \lambda(D - x - y).$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

Après résolution, on obtient les valeurs optimales $x^*$ et $y^*$.

# 5 Executions

**1. Importation de la bibliothèque**

python ▶ Exécuter

```python
import sympy as sp
```

Cette ligne importe la bibliothèque SymPy, qui permet de réaliser des calculs symboliques.

**2. Définition des variables symboliques**

python ▶ Exécuter

```python
x, y, lam = sp.symbols('x y lam', real=True)
a_s, b_s, c_s, d_s, D = sp.symbols('a b c d D', real=True)
```

Ici, nous définissons des variables symboliques (`x`, `y`, `lam`, `a_s`, `b_s`, `c_s`, `d_s`, `D`) à l'aide de la fonction `symbols` de SymPy. Cela permet de travailler avec des expressions algébriques au lieu de valeurs numériques.

**3. Définition de la fonction coût**

python ▶ Exécuter

```python
C = a_s*x**2 + b_s*y**2 + c_s*x + d_s*y
```

La fonction coût `C` est définie symboliquement en utilisant les variables symboliques. Cela permet de manipuler cette expression dans les étapes suivantes.

**4. Construction du Lagrangien**

python ▶ Exécuter

```python
L = C + lam*(x + y - D)
```

Le Lagrangien `L` est construit en ajoutant la fonction coût à la contrainte multipliée par le multiplicateur de Lagrange `lam`. Cette opération est également effectuée symboliquement.

**5. Calcul des dérivées partielles**

```python
dL_dx = sp.diff(L, x)
dL_dy = sp.diff(L, y)
dL_dlam = sp.diff(L, lam)
```

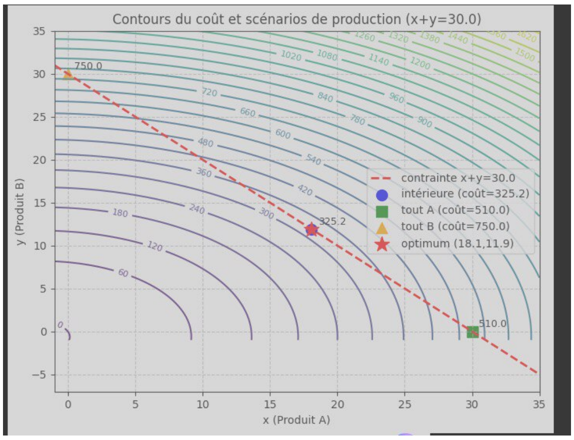
Les dérivées partielles du Lagrangien par rapport à `x`, `y`, et `lam` sont calculées à l'aide de la fonction `diff`. Cela permet d'obtenir les conditions du premier ordre pour la minimisation.

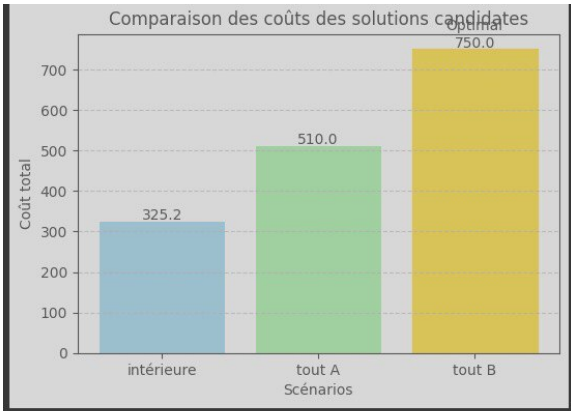
**6. Résolution symbolique**

```python
sol_general = sp.solve([dL_dx, dL_dy, dL_dlam], (x, y, lam), dict=True)
```

Finalement, la fonction `solve` de SymPy est utilisée pour résoudre le système d'équations formé par les conditions du premier ordre. Elle retourne les valeurs symboliques de `x`, `y`, et `lam` qui minimisent la fonction coût sous la contrainte spécifiée. L'argument `dict=True` permet d'obtenir les résultats sous forme de dictionnaire, facilitant ainsi l'accès aux solutions.

# 6 Résultats




```
📌 **Solution optimale :**
- Produit A : x* = 18.08 unités
- Produit B : y* = 11.92 unités
- Scénario : tout B
- Coût total minimal : 325.19

💡 **Interprétation détaillée :**
- La solution optimale correspond à une production mixte des deux produits,
  car cela permet de **minimiser le coût total**.
- Les coefficients quadratiques a={a} et b={b} signifient que produire plus d'un produit
  augmente le coût marginal, donc il est économique de **répartir la production** entre A et B.
- Les coefficients linéaires c={c} et d={d} représentent des coûts fixes ou proportionnels
  par unité ; ils influencent également la répartition optimale.
- La demande totale D={D_value:.2f} est respectée : x* + y* = D.
- Le scénario 'intérieure' indique que **les deux produits sont fabriqués**.
  Si l'usine produisait uniquement A ou uniquement B, le coût total serait beaucoup plus élevé,
  comme montré par les solutions de bord.
- En pratique, cela guide l'usine sur **la meilleure stratégie de production**
  pour minimiser les coûts tout en satisfaisant la demande.

📌 **Solution optimale :**
- Produit A : x* = 18.08 unités
- Produit B : y* = 11.92 unités
- Scénario : tout B
- Coût total minimal : 325.19
```

```
💡 **Interprétation détaillée :**
- La solution optimale correspond à une production mixte des deux produits,
  car cela permet de **minimiser le coût total**.
- Les coefficients quadratiques a={a} et b={b} signifient que produire plus d’un produit
  augmente le coût marginal, donc il est économique de **répartir la production** entre A et B.
- Les coefficients linéaires c={c} et d={d} représentent des coûts fixes ou proportionnels
  par unité ; ils influencent également la répartition optimale.
- La demande totale D={D_value:.2f} est respectée : x* + y* = D.
- Le scénario 'intérieure' indique que **les deux produits sont fabriqués**.
  Si l’usine produisait uniquement A ou uniquement B, le coût total serait beaucoup plus élevé,
  comme montré par les solutions de bord.
- En pratique, cela guide l’usine sur **la meilleure stratégie de production**
  pour minimiser les coûts tout en satisfaisant la demande.
```

Les résultats de la résolution algébrique et numérique (par exemple avec Python/SymPy) peuvent être présentés ici, accompagnés de tableaux ou graphiques représentant la fonction coût et la contrainte.

# 7 Conclusion

Cette étude a permis de démontrer comment un problème simple d’optimisation peut être formulé et résolu pour minimiser les coûts de production tout en respectant des contraintes strictes. Les méthodes symboliques et numériques sont des outils précieux pour la prise de décision en gestion de production.

# Références


— Documentation SymPy : `https://www.sympy.org`
— Cours d’optimisation mathématique