Optimisation d'une Production Simple

DJAMPA MBIANGANG PLATINY CABREL
NDEKEBAI MEYIE MICHAEL
AZEUFACK NGNINWO THIERRY
MOUGOU OWOUNDI BRICE WILLIAM

2 octobre 2025

Résumé

Ce rapport présente l'étude d'un problème d'optimisation appliqué à la gestion d'une petite usine produisant deux types de produits. L'objectif est de minimiser le coût total de production sous contraintes de demande totale et de non-négativité des quantités produites. La modélisation mathématique et la résolution du problème sont détaillées, suivies d'une discussion sur les résultats et leurs implications.

1 Introduction

La gestion efficace d'une production industrielle est essentielle pour réduire les coûts tout en satisfaisant la demande. Ce rapport illustre un problème d'optimisation simple où une usine fabrique deux produits avec un budget limité et des coûts marginaux croissants.

2 Contexte et Problématique

Une petite usine fabrique deux produits, notés A et B, avec des quantités respectives x et y. La demande totale à satisfaire est fixe et exprimée par la contrainte :

$$x + y = D$$

où $D > 0$. Le coût total de production est modélisé par la fonction :

$$C(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + dy$$

avec $a, b > 0$ représentant les coûts marginaux croissants, et c, d les coûts linéaires (main d'œuvre, énergie, etc.).

L'objectif est de :

— minimiser $C(x, y)$,

— sous la contrainte $x + y = D$,

— et avec $x, y \geq 0$.

La problématique posée est : *Comment déterminer les quantités optimales x et y afin de minimiser le coût total tout en respectant les contraintes fixées ?*

3 Modélisation Mathématique

On souhaite résoudre le problème suivant :

$$\min_{x,y} \quad C(x,y) = ax^2 + by^2 + cx + dy$$

sous les contraintes

$$x + y = D, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

4 Méthode de Résolution

Le problème peut être résolu en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange en posant la fonction :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = ax^2 + by^2 + cx + dy + \lambda(D - x - y).$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

Après résolution, on obtient les valeurs optimales x^* et y^*.

5 Résultats

Les résultats de la résolution algébrique et numérique (par exemple avec Python/SymPy) peuvent être présentés ici, accompagnés de tableaux ou graphiques représentant la fonction coût et la contrainte.

6 Conclusion

Cette étude a permis de démontrer comment un problème simple d'optimisation peut être formulé et résolu pour minimiser les coûts de production tout en respectant des contraintes strictes. Les méthodes symboliques et numériques sont des outils précieux pour la prise de décision en gestion de production.

Références

— Documentation SymPy : `https://www.sympy.org`
— Cours d'optimisation mathématique