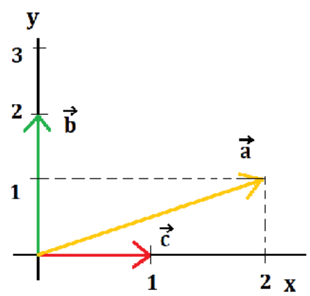
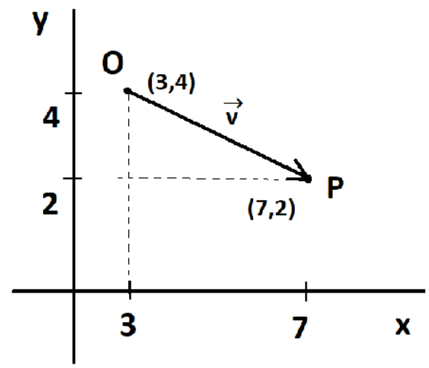
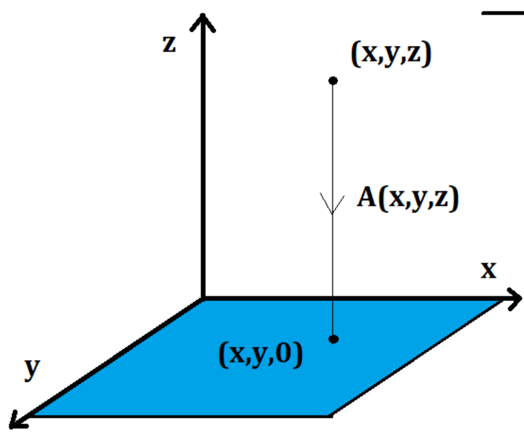
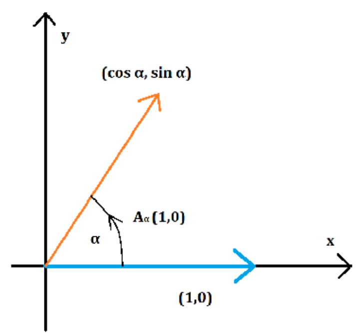
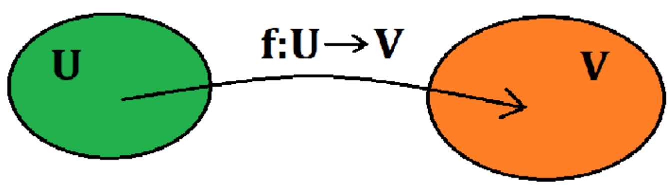
Álgebra lineal











por

Miguel Aparicio Resco

Universidad Europea

Índice general

Página

1. Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes **5**

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices 5

1.2. Matriz aumentada y operaciones elementales de fila 9

1.3. Eliminación de Gauss 11

1.4. Tipos de sistemas de ecuaciones lineales 12

1.5. Dependencia lineal y rango de una matriz 14

1.6. Teorema de Rouché-Frobenius 17

1.7. Determinantes de matrices 18

1.8. Matriz inversa y sus aplicaciones 26

2. Espacios vectoriales **33**

2.1. Definición de espacio vectorial 35

2.2. Combinación lineal de vectores y sistema generador 36

2.3. Base de un espacio vectorial y cambios de base 40

2.4. Subespacios vectoriales 47

3. Aplicaciones lineales **59**

3.1. Definición de Aplicación lineal 59

3.2. Matriz de una aplicación lineal y cambio de base 61

3.3. Propiedades y tipos de aplicaciones 66

4. Diagonalización de matrices **75**

4.1. Subespacios invariantes 76

4.2. Valores y vectores propios 79
4.3. Diagonalización 84
4.4. Aplicaciones de la diagonalización de matrices 86

5. Introducción a las ecuaciones diferenciales **89**
5.1. Ecuaciones diferenciales 89
5.2. Condiciones iniciales de las E.D. 91
5.3. E.D.O. lineales con coeficientes constantes 94
5.4. Sistemas de E.D.O. lineales de primer orden con coeficientes constantes . . 101

6. Ejercicios **107**
6.1. Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes 107
6.2. Espacios vectoriales 111
6.3. Aplicaciones lineales 113
6.4. Diagonalización de matrices 115
6.5. Introducción a las ecuaciones diferenciales 116

Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes

En éste primer tema analizaremos uno de los principales problemas del álgebra lineal: la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que nos relacionan una serie de incógnitas, el apellido "lineal.es debido a que dichas incógnitas aparecen de la forma ax, donde a es un número cualquiera. Es decir, en las ecuaciones no aparecen funciones no lineales como son las funciones cuadradas, cúbicas, senos, cosenos, exponenciales, etc.

Analizaremos una serie de herramientas que nos permitirán resolver de forma sistemática este tipo de problemas. Para ello, haremos uso de las matrices y definiremos lo que es un determinante.

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Un sistema de ecuaciones lineal es un número n de ecuaciones lineales para m incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n \end{array}\right. . \tag{1.1.1}$$

Éste es el principal problema que queremos resolver por medio del álgebra lineal.

- Ejemplo 1:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ 3x-y=2 \end{array}\right. \xrightarrow{F_2 \to F_2+F_1} \left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ 4x=4 \end{array}\right. \xrightarrow{F_2 \to F_2/4}$$
$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ x=1 \end{array}\right. \xrightarrow{F_1 \to F_1-F_2} \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right. . \tag{1.1.2}$$

  Ésta es la solución del sistema y podemos comprobar que lo es.

En el ejemplo anterior, hemos usado una serie de operaciones para simplificar el sistema: hemos sumado y restado ecuaciones (filas) entre sí. Aunque modificamos el sistema de ecuaciones con éstas operaciones, la solución sigue siendo la misma. El objetivo va a ser buscar cuáles son estas operaciones que no modifican la solución del sistema. Para ello es útil, en vez de trabajar con las ecuaciones, quedarnos con los coeficientes del sistema: a_{nm} y b_n en la ecuación (1.1.1). Éstos coeficientes tienen toda la información del sistema. La mejor manera de agruparlos es por medio de matrices.

- Ejemplo 2: siguiendo el ejemplo anterior, el sistema lo podemos escribir con dos matrices:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ 3x-y=2 \end{array}\right. \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

1.1.1. Álgebra de matrices

Una matriz es una colección de números etiquetados. De modo que una matriz A tiene elementos a_{ij} donde i etiqueta las filas de la matriz y j etiqueta las columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

En éste caso A es una matriz de n filas y m columnas.

◦ **Tipos de matrices:**

- Matriz nula: todos sus elementos son nulos $a_{ij} = 0 \;\; \forall i, j$ ($\forall$ = para todo).

- Matriz cuadrada: Una matriz con mismo número de filas $\times$ columnas.
  Ejemplo 3: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada 2×2 nula.

- Matriz rectangular: una matriz $n \times m$ con $n \neq m$, distinto número de filas y columnas.

- Matriz diagonal: una matriz con todos sus elementos 0 salvo los que están en su diagonal principal, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Toda matriz diagonal es, por tanto, una matriz cuadrada.

- Matriz triangular: son matrices con ceros encima o debajo de su diagonal, $a_{ij} = 0$ si $i > j$ es triangular superior, si $i < j$ es triangular inferior.
  Ejemplo 4: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior.

- Matriz identidad: es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales a 1. Se denotan como I_n donde n es la dimensión de la matriz.
  Ejemplo 5: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Vectores: son matrices con una sola fila o columna. Se llaman vectores columna a las matrices con una única columna, y vectores fila a las matrices con una única fila.

○ **Operaciones con matrices:**

- Suma y resta: dos matrices se pueden sumar o restar si y solo si tienen la misma dimensión $n \times m$, de modo que se suman o restan elemento a elemento.
  Ejemplo 6: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $A + B$ no está definido, mientras que $B + C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.
  Propiedades:
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - Elemento neutro la matriz nula.
  - Elemento opuesto de A es $-A$.

- Producto por un escalar: dada una matriz A y un número k, se define $P \equiv k\,A$ tal que cada elemento de P consiste en multiplicar k por cada elemento de A: $p_{ij} = k\,a_{ij}$.

Ejemplo 7: $P = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Propiedades:

- $k(A+B) = kA + kB$
- $(k+h)A = kA + hA$
- $k(hA) = (kh)A$.
- Elemento neutro es $k = 1$.

▪ Matriz traspuesta: dada una matriz A, se define la matriz traspuesta de A como A^t o A' donde sus elementos valen $a^t_{ij} = a_{ji}$. Es decir, se intercambian las filas por las columnas.
Propiedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(kA)^t = kA^t$.
- $(A\,B) = B^t\,A^t$.
- Matriz simétrica cumple $A^t = A$.

▪ Producto de matrices: dadas dos matrices A y B de dimensiones $n \times m$ y $p \times q$ respectivamente, entonces se define el producto de matrices $C \equiv A \cdot B$ si y solo si $m = p$ de modo que C es una matriz $n \times q$ con elementos $c_{ij} = \sum_{n=1}^{m} a_{in}\, b_{nj}$.

Ejemplo 8: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 7 & 6 & 6 \\ 35 & 8 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 6 & 6 \\ 35 & 8 & 25 \end{pmatrix}$

Propiedades:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$ en general no se cumple, es posible que se cumpla si las matrices son cuadradas de la misma dimensión.
- $A(BC) = (AB)C$.

- $A(B+C) = AB + AC$.
- El elemento neutro de una matriz A de dimensión $n \times m$ es la matriz identidad del tamaño adecuado en función del lado por el cual multipliquemos: $A \cdot I_m = I_n \cdot A = A$.

1.2. Matriz aumentada y operaciones elementales de fila

Ahora que hemos visto las principales operaciones y propiedades con matrices, vamos a aplicar éstas herramientas a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

∘ **Matriz de coeficientes:** dado un sistema de ecuaciones lineales dado por (1.1.1), se define la matriz de coeficientes del sistema A como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}. \tag{1.2.1}$$

Siendo, por tanto, una matriz $n \times m$ donde n es el número de ecuaciones y m el número de incógnitas.

∘ **Matriz aumentada del sistema:** dado un sistema de ecuaciones lineales dado por (1.1.1), se define la matriz ampliada del sistema $\bar{A}$ como:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right). \tag{1.2.2}$$

Siendo, por tanto, una matriz $n \times (m+1)$ donde n es el número de ecuaciones y m el número de incógnitas. Ésta matriz consiste en unir a la matriz de coeficientes A el vector columna de los términos independientes b_i.

- Ejemplo 9:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ 8x + y - z = 3 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right). \tag{1.2.3}$$

- Ejemplo 10:

$$\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ x+z=2 \\ y+z=1 \end{array}\right. \rightarrow \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right). \tag{1.2.4}$$

1.2.1. Operaciones elementales de fila:

Como vimos en el ejemplo 1, es posible realizar operaciones con el sistema que no modifican la solución del mismo. Estas operaciones transforman el sistema en un **sistema equivalente** cuyas soluciones son las mismas que las del sistema original.
Las operaciones elementales de fila son:

1. Multiplicar una ecuación (fila de una matriz aumentada) por un número real **no nulo**.

2. Intercambiar dos ecuaciones (filas de una matriz aumentada).

3. Sumar o restar un múltiplo de una ecuación (fila de una matriz aumentada) a otra.

Éstas operaciones se realizan en las filas de $\bar{A}$ ya que dichas filas corresponden a los coeficientes de las ecuaciones del sistema, éste es el motivo por el que se opera con filas y no con columnas. Cualquier otra operación: multiplicar filas entre sí, etc... **NO son operaciones elementales** ya que modifican la solución del sistema (estás cambiando el sistema original por otro no equivalente).

- Ejemplo 11:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y=1 \\ 2x+y=3 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2+3F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \end{array}\right) \tag{1.2.5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y=1 \\ 5x+10y=6 \end{array}\right. \tag{1.2.6}$$

El nuevo sistema es un sistema equivalente del inicial ya que tiene las mismas soluciones, las cuáles son $x=8/5$ e $y=-1/5$.

$$\left\{\begin{array}{l} 8/5\ -3\,(1/5)=1 \\ 5\,(8/5)-10\,(1/5)=6 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 8-3=5 \\ 40-10=30 \end{array}\right. \tag{1.2.7}$$

Gracias a estas transformaciones, podemos ir transformando el sistema inicial en otro equivalente que sea más sencillo de resolver. Al resolver ese sistema equivalente sencillo, sabemos que sus soluciones son las mismas que las del sistema inicial. De éste modo habremos resuelto el sistema de ecuaciones original.

1.3. Eliminación de Gauss

Una vez visto cómo podemos escribir un sistema de ecuaciones por medio de matrices y cómo operar con él para transformarlo en sistemas equivalentes, vamos a aplicar todos éstos resultados a la resolución del sistema por medio de la eliminación Gaussiana.

○ **Eliminación de Gauss:** consiste en, usando las operaciones elementales de fila en la matriz aumentada, obtener la **matriz escalonada** de un sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right). \xrightarrow{\text{Operaciones elementales}} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1m} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & a'_{2m} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array}\right)}_{\text{Matriz escalonada}}. \tag{1.3.1}$$

La matriz escalonada es una matriz triangular superior (con todo ceros debajo de la diagonal) con todos los elementos de la diagonal iguales a 1. Se puede demostrar que, dado un sistema de ecuaciones, la matriz escalonada del sistema es única. A efectos prácticos de resolver el sistema, no es necesario que los elementos de la diagonal sean iguale a 1. Para resolver el sistema, obtenemos la última incógnita de la última ecuación y, sustituyendo su valor en el resto de ecuaciones, vamos obteniendo sucesivamente el resto de incógnitas.

- Ejemplo 12:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y+z=-3 \\ 3x+9y+4z=-7 \\ 2x-y+z=6 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to -\frac{F_2}{7}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1/7 & -12/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

De ésta forma, de la última fila de la matriz escalonada obtenemos $z = 2$, sustituimos ese valor en la segunda ecuación y obtenemos $y = -2$ y usando estos dos resultados en la primera ecuación obtenemos $x = 1$.

El algoritmo sistemático con el cuál podemos resolver cualquier sistema por eliminación Gaussiana sería el siguiente:

1. Intercambiamos filas para elegir como primera fila la más sencilla de todas, preferiblemente la que tenga un 1 en el primer elemento.

2. Fijamos la primera fila, las filas fijadas no las vamos a modificar más en todo el proceso. Usando dicha fila y por medio de las operaciones elementales, hacemos ceros debajo del primer elemento de la primera fila.

3. Fijamos la segunda fila. Usando ésta fila, hacemos ceros debajo del segundo elemento de la segunda fila.

4. Repetimos con las siguientes filas de forma iterativa hasta fijar la última.

1.4. Tipos de sistemas de ecuaciones lineales

Ahora que tenemos un método de resolución de sistemas, queremos saber con qué tipos de sistemas podemos encontrarnos ¿tienen todos solución?¿es única esa solución? La respuesta es que un sistema puede tener una, ninguna o infinitas soluciones. Además de por el tipo de solución, hay un tipo de sistema que es particularmente sencillo: **los sistemas homogéneos**. Vamos a resumir los tipos de sistemas en los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{c}\text{Sistema}\\ \text{homogeneo}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\text{Terminos}\\ \text{independientes}\\ \text{nulos}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\text{Siempre}\\ \text{compatible}\end{array} \rightarrow \begin{cases}\text{Determinado} \rightarrow \text{la solucion es cero}\\ \text{Indeterminado} \rightarrow \infty\,\text{soluciones}\end{cases}$$

$$\begin{array}{c}\text{Sistema}\\ \text{no homogeneo}\end{array} \rightarrow \begin{cases}\text{Compatible} \rightarrow \begin{cases}\text{Determinado} \rightarrow \text{solucion unica}\\ \text{Indeterminado} \rightarrow \infty\,\text{soluciones}\end{cases}\\ \text{Incompatible}\end{cases}$$

Decimos que un sistema es **compatible** si existe al menos una solución, si es **determinado** es que esa solución es única y si es **indeterminado** es que tiene infinitas soluciones. Si el sistema es **incompatible** es que no hay ninguna solución posible.

Un **sistema homogéneo** es aquel cuyos términos independientes (b_i en el sistema (1.1.1)) son todos nulos. Ésto hace que siempre haya una solución, la solución trivial en la que todas las incógnitas valen 0. Vamos a familiarizarnos un poco más sobre el tipo de sistemas analizando desde un punto de vista geométrico las soluciones de distintos ejemplos.

- Ejemplo 13:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 4 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

La última fila (ecuación) nos dice que $0 = -4$ lo cual es falso, el sistema no tiene solución ¿qué está ocurriendo? Lo que ocurre es que, si dibujamos las dos rectas $y(x)$ de las dos ecuaciones, podemos observar que se trata de dos rectas paralelas. Resolver un sistema implica encontrar los puntos que están a la vez en las dos rectas, su intersección. Como dos rectas paralelas no se cortan, no hay solución al sistema.

- Ejemplo 14:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La última fila (ecuación) nos dice que $0 = 0$ lo cual es siempre cierto, el sistema tiene realmente 1 ecuación para 2 incógnitas luego hay infinitas soluciones ¿qué está ocurriendo? Lo que ocurre es que, si dibujamos las dos rectas $y(x)$ de las dos ecuaciones, podemos observar que se trata de la misma recta. El corte entre dos rectas iguales es la propia recta, luego las infinitas soluciones son todos los puntos de la recta.

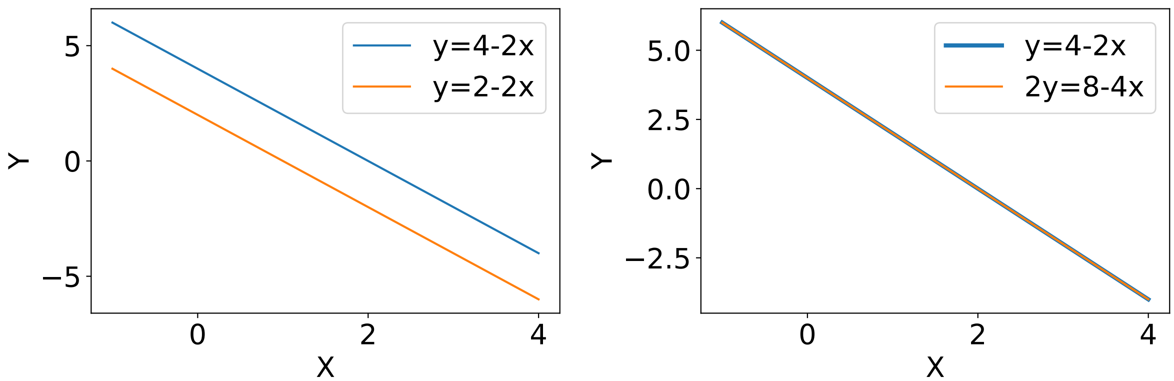


Figura 1.1: A la izquierda, la representación de las dos rectas del ejemplo 13; a la derecha, las del ejemplo 14.

1.5. Dependencia lineal y rango de una matriz

Buscamos un criterio con el cuál podamos distinguir entre los distintos tipos de sistemas: compatible determinado/indeterminado o incompatible. Para ello necesitamos definir dos conceptos fundamentales: la dependencia lineal y el rango de una matriz.

○ **Dependencia lineal:** éste es un concepto fundamental en álgebra lineal y nos va a acompañar desde la clasificación de sistemas hasta la diagonalización de matrices.
Consideremos un vector $\vec{a}$ como un vector fila (o columna) $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ con n componentes. Entonces, si tenemos un conjunto de k vectores $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ se dice que son **linealmente dependientes** si y solo si existen $\{d_1, \dots, d_k\}$ números reales **distintos de cero** tales que:

$$d_1\,\vec{a}_1 + \ldots + d_k\,\vec{a}_k = 0. \tag{1.5.1}$$

Por el contrario, si para esos vectores la única solución de la ecuación (1.5.1) es que $d_1 = d_2 = \ldots = d_k = 0$, entonces se dice que el conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ son **linealmente independientes**.

De ésta forma, dos vectores son linealmente dependientes cuando uno es un múltiplo del otro. Nótese que, en el ejemplo 14, teníamos un sistema con dos ecuaciones donde una de ellas era 2 veces la otra. Ésto hacía que realmente fuesen la misma ecuación y, por tanto, el sistema fuera compatible indeterminado. El concepto de dependencia lineal está detrás de ese resultado.

- Ejemplo 15: ¿son linealmente independientes los vectores $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

  Para demostrar si son linealmente dependientes hay que encontrar dos números d_1 y d_2 distintos de cero tales que $d_1\vec{a}_1 + d_2\vec{a}_2 = 0$:

$$d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5.2}$$

  Ésto no es más que un sistema de ecuaciones (homogéneo) para d_1 y d_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + 2d_2 = 0 \\ 2d_1 + d_2 = 0 \\ 3d_1 + d_2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array} \right). \tag{1.5.3}$$

  Luego de las dos últimas filas obtenemos que $d_2 = 0$ y sustituyendo en la primera $d_1 = 0$. De modo que hemos demostrado que $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ son linealmente independientes. Éste resultado ya lo podíamos haber adelantado ya que está claro que $\vec{a}_1 \neq k\,\vec{a}_2$ con $k \neq 0$, es decir, que el primer vector no se puede poner como k veces el segundo vector.

- Ejemplo 16: ¿son linealmente independientes los vectores $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$?
  Procedemos de la misma forma que en el ejemplo anterior, hay que encontrar dos números d_1 y d_2 distintos de cero tales que $d_1\vec{a}_1 + d_2\vec{a}_2 = 0$:

$$d_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5.4}$$

  Ésto no es más que un sistema de ecuaciones (homogéneo) para d_1 y d_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2d_1 + 4d_2 = 0 \\ 3d_1 + 6d_2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2/3 - F_1/2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \tag{1.5.5}$$

  Por lo que obtenemos que es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones, una de ellas por ejemplo $d_1 = -2$ y $d_2 = 1$. De modo que hemos demostrado que $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ son linealmente dependientes. Éste resultado ya lo podíamos haber adelantado ya que está claro que $\vec{a}_2 = 2\,\vec{a}_1$, es decir, que el segundo vector es dos veces el primero.

Una vez que tenemos claro el concepto de dependencia lineal, pasamos a definir el rango de un conjunto de vectores y el rango de una matriz.

○ **Rango de un conjunto de vectores:** se define el rango de un conjunto de vectores $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ como el mayor número de ellos que son linealmente independientes.

- Ejemplo 17: ¿Cuál es el rango del conjunto de vectores $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

  Como hemos calculado en el ejemplo 15, $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ eran linealmente independientes, luego como son dos vectores, el rango de ellos dos vale 2 y se escribe como $r(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 2$.

- Ejemplo 18: ¿Cuál es el rango del conjunto de vectores $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$?
  Como también calculamos en el ejemplo 16, $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ eran linealmente dependientes, luego de los dos vectores sólo uno es linealmente independiente, el rango de ellos dos vale 1 y se escribe como $r(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 1$.

A partir de ésta definición intermedia definiremos el rango de una matriz.

○ **Rango de una matriz:** se define el rango de una matriz A y se escribe como $r(A)$ o $rg(A)$ como el rango de sus vectores columna.

- Ejemplo 19: ¿Cuál es el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$?
  El rango de la matriz A es igual al rango de sus vectores columna es decir que $r(A) = r(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, como hemos calculado en el ejemplo 17, $r(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 2$. Por lo tanto el rango de la matriz A vale 2: $r(A) = 2$.

El concepto del rango de una matriz es un concepto fundamental que usaremos desde los sistemas de ecuaciones hasta la diagonalización. Más adelante veremos métodos sencillos para calcular rangos de matrices que, dada su relación con la dependencia e independencia lineal, nos serán muy útiles para determinar cuándo un conjunto de vectores son o no linealmente independientes.

1.6. Teorema de Rouché-Frobenius

Gracias al concepto del rango de una matriz, tenemos todo lo necesario para clasificar sistemas. Para ello haremos uso del siguiente teorema.

∘ **Teorema de Rouché-Frobenius:** Dado un sistema (1.1.1) con n y m incógnitas, que tiene como matriz de coeficientes la matriz A (1.2.1) y como matriz aumentada $\bar{A}$ (1.2.2):

1. Si $r(A) = r(\bar{A}) = n \iff$ Sistema compatible determinado (S.C.D)
2. Si $r(A) = r(\bar{A}) < n \iff$ Sistema compatible indeterminado (S.C.I)
3. $r(A) < r(\bar{A}) \iff$ Sistema incompatible (S.I)

- Ejemplo 20: Clasifique el siguiente sistema por medio del teorema de Rouché-Frobenius:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y = 3 \\ 4x + 8y = 3 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{array} \right). \tag{1.6.1}$$

La matriz de coeficientes tiene como vectores columna $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, está claro que $\vec{a}_2 = 2\,\vec{a}_1$ por lo que son linealmente dependientes, eso significa que $r(A) = 1$ (un único vector linealmente independiente). La matriz aumentada $\bar{A}$ tiene otro vector columna $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Como ya sabemos que los otros dos vectores son linealmente dependientes habrá que comprobar si $\vec{a}_1$ (o $\vec{a}_2$) es linealmente independiente de $\vec{a}_3$. Por inspección podemos ver que no podemos escribir $\vec{a}_3$ como k veces $\vec{a}_1$ (con $k \neq 0$) luego son linealmente independientes. Como $\bar{A}$ tiene 2 vectores columna independientes $r(\bar{A}) = 2$. Tenemos entonces que $r(A) = 1 < r(\bar{A}) = 2$ luego estamos ante un sistema incompatible (S.I).

Como vemos, la clasificación de sistemas va de la mano del cálculo de rangos de matrices. Hasta ahora, los rangos únicamente los podemos calcular por medio de la definición de dependencia lineal. Sería útil un método más sencillo y sistemático para calcular éstos rangos.

◦ <u>**Cálculo de rangos de matrices por el método de Gauss:**</u> es posible calcular el rango de una matriz a partir del siguiente resultado: **El rango de una matriz es igual al número de filas no nulas de su matriz escalonada obtenida por el método de Gauss**.

- Ejemplo 21: Calcule el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ por medio del método de Gauss .

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{array} \right). \tag{1.6.2}$$

La matriz escalonada tiene 2 filas no nulas luego $r(A) = 2$.

Como vemos, éste es un método mucho más rápido y sencillo de cálculo de rangos. Basta con reducir por el método de Gauss la matriz a su forma escalonada y ver cuántas **filas** tienen al menos un número distinto de cero, ese número será el rango de la matriz.

1.7. Determinantes de matrices

Ya sabemos resolver sistemas y clasificarlos, parecería que el problema ya está resuelto y no hay nada más que hacer, sin embargo, aún se puede profundizar un poco más y encontrar herramientas muy útiles. Éste es el caso del determinante, vamos a justificar qué es el determinante de una matriz y para qué sirve calcularlo.

Imaginemos que queremos resolver un sistema 2×2 general:

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = n \\ cx + dy = m \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} a & b & n \\ c & d & m \end{array} \right). \tag{1.7.1}$$

Donde x e y son las incógnitas y a, b, c, d, n y m; son coeficientes cualesquiera. Vamos a resolverlo por medio del método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & n \\ c & d & m \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow a\,F_2 - c\,F_1} \left(\begin{array}{cc|c} a & b & n \\ 0 & ad - cb & c\,n - a\,m \end{array} \right). \tag{1.7.2}$$

Según el teorema de Rouché-Frobenius, para que el sistema tenga solución y sea única el rango de la matriz de coeficientes tendría que ser 2 (igual al número de incógnitas).

Eso implica que la última fila de la matriz escalonada tiene que ser distinta de cero, es decir, $ad - cd \neq 0$. Por éste motivo, vamos a definir el **determinante** de una matriz A cuadrada 2×2 como:

$$|A| \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv ad - bc. \tag{1.7.3}$$

De modo que sabemos que, el sistema que tenga la matriz A como matriz de coeficientes, será un sistema compatible determinado cuando $|A| \neq 0$.

◦ **Determinante:** se define el determinante de una matriz cuadrada como un número real que determina que el sistema asociado a esa matriz de coeficientes es un sistema compatible determinado o no. De modo que, si el determinante es distinto de cero, el sistema será compatible determinado.

◦ **Cálculo de determinantes:** vamos a ver cómo calcular determinantes para distintos tipos de matrices (siempre matrices cuadradas).

- Matrices 2×2: Como vimos, $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

- Matrices 3×3: En éste caso:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \tag{1.7.4}$$

Para recordar de forma más visual cómo calcular determinantes de matrices 3×3 se suele recurrir a la llamada regla de Sarrus.

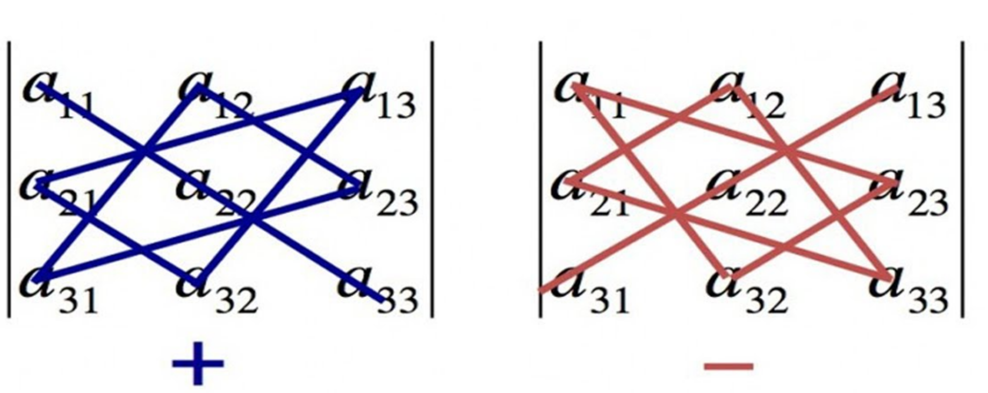


Figura 1.2: Regla de Sarrus para el cálculo de determinantes 3×3.

- Matrices $n \times n$: para matrices de tamaño mayor que 3 el cálculo se complica y ya no hay una regla visual sencilla. Para calcular determinantes de matrices de cualquier tamaño es necesario que definamos un par de conceptos.

  - Matriz adjunta: dada una matriz A con elementos a_{ij}, se define la matriz adjunta A_{ij} como la submatriz que queda de eliminar la fila i y la columna j de la matriz inicial A.
  - Menor: dada una matriz A con elementos a_{ij}, se define el menor de la posición $i\ j$ como el determinante de la matriz adjunta $i\ j$: $|A_{ij}|$.

Ejemplo 22: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, calcule la matriz adjunta A_{22} y su menor correspondiente, es decir, $|A_{22}|$:

La matriz adjunta A_{22} consiste en eliminar la segunda fila y columna de la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.7.5}$$

El menor correspondiente a la posición $(2, 2)$ sería $|A_{22}| = 3 \cdot 1 - 9 \cdot 0 = 3$.

Con éstas dos definiciones ya estamos en disposición de presentar el cálculo general del determinante de una matriz $n \times n$ desarrollándolo por la primera columna. Dada la matriz A de tamaño $n \times n$ su determinante vale:

$$|A| = a_{11}\,|A_{11}| - a_{21}\,|A_{21}| + ... + (-1)^{n+1}\,a_{n1}\,|A_{n1}|. \tag{1.7.6}$$

La idea consiste en tomar el primer elemento de la primera columna y multiplicarlo por el determinante de su matriz adjunta (su menor), después hacer lo mismo con el segundo elemento, tercero, etc, teniendo en cuenta que hay un signo $-$ en los elementos con índice de fila par.

Ejemplo 23: Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ por medio de la regla general:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 17 - 18 + 18 = 17 \tag{1.7.7}$$

Con todo esto tenemos las herramientas más básicas para calcular determinantes. Como anotación importante, hay que tener muy presente la gran diferencia entre matriz y determinante. Una matriz es una colección de números colocados en filas y columnas entre los delimitadores (), mientras que el determinante de esa misma matriz se escribe con los delimitadores || y, al calcularlo, es un único número.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}. \tag{1.7.8}$$

1.7.1. Propiedades de los determinantes

A partir de la definición general del determinante de una matriz cuadrada (1.7.6) podemos calcular cualquier determinante, sin embargo, ésta no es la opción más inteligente ya que en ocasiones supone realizar cálculos largos e inecesarios. A continuación vamos a enumerar las propiedades más importantes de los determinantes (que se demuestran a partir de la definición (1.7.6)) que nos van a ser de gran ayuda a la hora de calcularlos.

1. <u>Intercambiar una fila o columna:</u> al intercambiar una fila (o columna) por otra hay que añadir un signo $-$ para dejar igual el determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}. \tag{1.7.9}$$

2. <u>Determinante de la traspuesta:</u> el determinante de la traspuesta es el determinante de la propia matriz $|A^t| = |A|$.

3. <u>Descomposición de suma:</u> si tenemos varios sumandos en una fila o columna podemos descomponer el determinante de la siguientr forma:

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}. \tag{1.7.10}$$

4. Sacar múltiplos: si tenemos un número que multiplica a toda una misma fila o columna lo podemos sacar factor común del determinante:

$$\begin{vmatrix} k\cdot a & k\cdot b \\ c & d \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \tag{1.7.11}$$

Ejemplo 24: Simplifique el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}. \tag{1.7.12}$$

5. Operaciones elementales de Gauss: el determinante no varía si efectuamos la operación elemental de Gauss número 3, que consiste en sumar un múltiplo de una fila (o columna) a otra.

   Ejemplo 25: Compruebe que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ no varía si su fila 2 se sustituye por $F_2 - 2\,F_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2\,F_1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13. \tag{1.7.13}$$

6. Determinante del producto de matrices: el determinante de un producto de matrices es el producto de sus determinantes $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

7. Determinante de una matriz triangular: el determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos de su diagonal.

   Ejemplo 26: Calcule el siguiente determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$:

   Dado que es una matriz triangular superior, su determinante es sencillo de calcular. Simplemente tenemos que multiplicar los elementos de su diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 24. \tag{1.7.14}$$

Además de éstas 7 propiedades que hemos enumerado, hay unas propiedades especialmente importantes que derivan de la definición del determinante y su significado en los sistemas de ecuaciones.

∘ **Determinantes y dependencia lineal:** el determinante determina si un sistema es compatible determinado o no. En particular, hemos visto que:

$$\boxed{|A| \neq 0 \iff \text{Sistema compatible determinado}} \tag{1.7.15}$$

Si usamos el teorema de Rouché-Frobenius, sabemos que un S.C.D cumple que el rango de la matriz de coeficientes es igual al de la aumentada igual al número de incógnitas, y el número de incógnitas será igual a la dimensión n de la matriz de coeficientes. Luego tenemos que:

$$\text{Sistema compatible determinado} \iff r(A) = n \tag{1.7.16}$$

Por la definicón del rango de una matriz, el rango de una matriz es el número de vectores columna que son linealmente independientes, luego:

$$r(A) = n \iff \text{Todos los vectores columna de la matriz son linealmente independientes} \tag{1.7.17}$$

Podemos unir todas éstas implicaciones lógicas para llegar a la siguiente conclusión:

$$\boxed{|A| \neq 0 \iff \text{Todos los vectores columna de } A \text{ son linealmente independientes}} \tag{1.7.18}$$

Éste es un resultado vital en el álgebra lineal y nos va a servir para determinar la independencia lineal de vectores así como para calcular rangos de matrices. En el contexto de las propiedades de los determinantes, el resultado (1.7.18) implica que:

- Si dos filas (o columnas) son linealmente dependientes, ya sea porque son la misma o una es un múltiplo de otra, entonces $|A| = 0$.
- Si una fila es cero entonces $|A| = 0$.
- Si una fila es la suma de múltiplos de otras (combinación lineal) entonces $|A| = 0$.

Vamos a aplicar éstos resultados al cálculo de determinantes y de rangos de matrices.

$\circ$ **Simplificación y cálculo de determinantes:** la idea consiste en usar de forma inteligente las propiedades de los determinantes para simplificarlos antes de aplicar la definición y calcularlos. En particular, queremos conseguir una fila (o columna) con un 1 y el resto ceros de modo que, por medio del intercambio de filas y columnas, llevemos esa fila (o columna) a la primera posición para aplicar la definición (1.7.6).

- Ejemplo 27: Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 + 3\,F_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 10 & -1 \end{vmatrix} \tag{1.7.19}$$

Ya tenemos la primera fila con el primer elemento 1 y el resto ceros, por lo que desarrollamos por la definición. La utilidad de tener ceros es que los términos que van con ellos valen también cero por lo que:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 8 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -147. \tag{1.7.20}$$

- Ejemplo 28: Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 - 3\,C_3} \begin{vmatrix} 1 & -13 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -9 & 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_3]{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -13 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Como hemos intercambiado dos filas y luego dos columnas entre sí, cada uno de los intercambios nos añade un signo $-$, por lo que el determinante queda igual. Ahora usamos que el determinante de la matriz traspuesta es el determinante de la matriz, con ello podemos cambiar filas por columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -13 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \tag{1.7.21}$$

Ahora desarrollamos por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -13 & -2 & -3 & -9 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \tag{1.7.22}$$

Como vemos, un determinante 5×5 lo hemos simplificado a un determinante 4×4. La idea es que esto se puede hacer siempre, comenzando con un determinante de orden tan grande como sea hasta quedarnos con un determinante de orden 3 o 2.

$$\begin{vmatrix} -13 & -2 & -3 & -9 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_4 - C_1]{C_2 - 3\,C_1} \begin{vmatrix} -13 & 37 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -11 & 2 & -5 \\ 7 & -20 & 3 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Trasponer}]{F_1 \leftrightarrow F_2} - \begin{vmatrix} 1 & -13 & 4 & 7 \\ 0 & 37 & -11 & -20 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 & -9 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -13 & 4 & 7 \\ 0 & 37 & -11 & -20 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 & -9 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 37 & -11 & -20 \\ -3 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -9 \end{vmatrix} = -(-666-300-132+160+555+297) = 86. \tag{1.7.23}$$

Luego el determinante de la matriz original de orden 5 vale 86.

◦ **Cálculo de rangos de matrices con determinantes:** podemos hacer uso del resultado (1.7.18): si el determinante de una matriz es distinto de cero, sus vectores columna son linealmente independientes; para calcular el rango de una matriz. Para ello usamos el siguiente resultado: **El rango de una matriz A coincide con el orden mayor de la matriz adjunta de A cuyo determinante sea no nulo.** Es decir, para calcular el rango de una matriz por medio de determinantes debemos calcular el determinante de orden más alto que podamos, si ese determinante es distinto de cero ya sabemos que el rango de la matriz es igual al orden de ese determinante. Si el determinante es cero hay que buscar un determinante de un orden inferior, así hasta encontrar un determinante distinto de cero, el orden de ese determinante será el rango de la matriz.

- Ejemplo 29: Calcule el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ por medio de determinantes:

  Comenzamos calculando el determinante de orden mayor, en éste caso al ser una matriz 3×3 el mayor determinante es el de la propia matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 5 = 0 \tag{1.7.24}$$

  Como es cero, ya sabemos que el rango de la matriz tiene que ser menor que 3 (no hay 3 vectores columna linealmente independientes). Hay que buscar un menor de orden 2 (determinante de una matriz adjunta) que sea distinto de cero. En particular:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \to |A_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0. \tag{1.7.25}$$

  Como hemos encontrado un determinante de orden 2 distinto de cero, significa que el rango de la matriz vale 2 luego $r(A) = 2$ (hay un máximo de 2 vectores columna linealmente independientes).

1.8. Matriz inversa y sus aplicaciones

Durante éste tema, hemos estudiado las matrices, qué son, qué tipos hay, cómo se opera con ellas y su aplicación a los sistemas de ecuaciones lineales. Hemos hablado de la multiplicación de matrices, pero no de cómo "dividir"matrices o cómo despejar ecuaciones matriciales. Para ello es necesario el concepto de la matriz inversa. En éste último apartado vamos a estudiar qué es la matriz inversa, cómo calcularla y sus aplicaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

∘ **Matriz inversa:** dada una matriz A cuadrada de orden $n \times n$, se define su matriz inversa como A^{-1} tal que,

$$\boxed{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n} \tag{1.8.1}$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. La matriz inversa cumple las siguientes propiedades:

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
- Si la matriz A es invertible (existe su matriz inversa) siendo A una matriz cuadrada de orden n, entonces $r(A) = n$. Es decir, los vectores columna de A son linealmente independientes y el determinante de A es distinto de cero.
- Ejemplo 30: Despejar X de la sigiente ecuación matricial: $A\,X + B = C$:

$$A^{-1}\,(A\,X + B) = A^{-1}\,(C) \;\rightarrow\; A^{-1}\,A\,X + A^{-1}\,B = A^{-1}\,C \;\rightarrow$$
$$I\,X + A^{-1}\,B = A^{-1}\,C \;\rightarrow\; X = A^{-1}\,C - A^{-1}\,B = A^{-1}\,(C - B). \tag{1.8.2}$$

1.8.1. Cálculo de matrices inversas

∘ **<u>Método de Gauss-Jordan:</u>** dada una matriz A, la cual queremos invertir, formamos una matriz con la matriz A y a la derecha la matriz identidad del mismo tamaño que A de la forma $(A|I_n)$. Por medio del método de Gauss, transformamos la matriz $(A|I_n)$ en la matriz identidad, una vez realizada la transformación tendríamos la matriz $(I_n|B)$. La matriz que ha quedado en la posición donde inicialmente estaba la matriz identidad, es la matriz inversa de A: $B = A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Metodo de Gauss}} \left(\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right) \Longrightarrow B = A^{-1} \tag{1.8.3}$$

- Ejemplo 31: Calcule la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

  Primero nos aseguramos que se puede invertir, para ello el rango de la matriz debe ser 3 ya que es una matriz 3×3. Por lo que calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0. \tag{1.8.4}$$

  Luego efectivamente la matriz A tiene matriz inversa, vamos a calcularla por medio del método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - F_3]{F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Con ello la matriz inversa de A es la siguiente,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.8.5}$$

Podemos comprobar que el resultado es correcto:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3. \tag{1.8.6}$$

○ **Método de Cramer para el cálculo de matrices inversas:** éste método usa la siguiente ecuación para la matriz inversa de una matriz A:

$$A^{-1} \equiv \frac{1}{|A|} C^t. \tag{1.8.7}$$

Donde C se define como la matriz de cofactores cuyos elementos valen,

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A_{ij}|, \tag{1.8.8}$$

siendo $|A_{ij}|$ el determinante de la matriz adjunta A_{ij}.

- Ejemplo 32: Calcule la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ por medio del método de Cramer:

  Primero necesitamos $|A|$, como calculamos en el ejemplo 31, $|A| = -2$. Ahora tenemos que calcular la matriz de cofactores C:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.8.9}$$

Vamos a calcular en detalle uno de los coeficientes, por ejemplo c_{22}:

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \, |A_{22}| = (-1)^4 \, |A_{22}| = |A_{22}|, \tag{1.8.10}$$

necesitamos el determinante de la matriz adjunta A_{22}:

$$A_{22} \;\rightarrow\; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1. \tag{1.8.11}$$

Por lo que $c_{22} = -1$, hacemos el mismo procedimiento (el cálculo mental nos debería ahorrar papel) y obtenemos:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; C^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.8.12}$$

Por último, calculamos la matriz inversa como:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, C^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.8.13}$$

Como se puede comprobar, el resultado coincide con el del ejemplo 31.

1.8.2. Aplicación de la matriz inversa a los sistemas de ecuaciones lineales

Vamos a aplicar el concepto y la herramienta de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

∘ **Aplicando la definición:** como hemos visto anteriormente en éste tema, un sistema general de n ecuaciones y n incógnitas lo podemos escribir de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. . \tag{1.8.14}$$

Dado este sistema, se definía la matriz de coeficientes como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.8.15}$$

Podemos definir también el vector columna de las incógnitas $\vec{x}$ y el vector columna de los términos independientes $\vec{b}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1.8.16}$$

Con todo ello, y haciendo uso del cálculo de matrices, podemos reescribir el sistema (1.8.14) en una ecuación matricial de la forma $A\,\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{1.8.17}$$

Así, resolver el sistema no es más que despejar el vector $\vec{x}$ de la ecuación matricial:

$$\boxed{A\,\vec{x} = \vec{b} \implies \vec{x} = A^{-1}\,\vec{b}} \tag{1.8.18}$$

Por lo tanto, si calculamos la matriz inversa de la matriz de coeficientes y la multiplicamos por el vector de términos independientes, podemos resolver el sistema.

- Ejemplo 33: Resuelve el siguiente sistema por medio de la matriz inversa:

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.8.19}$$

  Se puede comprobar que recuperamos el sistema de ecuaciones mediante la ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{b}$, luego la solución será $\vec{x} = A^{-1}\,\vec{b}$. En el ejemplo 31 y 32 ya hemos calculado la inversa de ésta matriz A luego:

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1.8.20}$$

  Luego $x = 1$, $y = 0$ y $z = 2$. Recuerde que ésta solución la podemos comprobar sustituyendo éstos valores en las ecuaciones de partida.

◦ **Regla de Cramer:** la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones nos dice que la solución x_i, donde $i = 1, ..., n$ con n el número total de incógnitas, vale:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \tag{1.8.21}$$

donde la matriz A_i la construimos a partir de la matriz A sustituyendo la columna i por el vector columna de los términos independientes $\vec{b}$.

- Ejemplo 34: Resuelve el siguiente sistema por medio de la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x+z=3 \\ y+z=2 \\ x+y=1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.8.22}$$

Siguiendo la regla de Cramer con $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$ tenemos que:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.8.23}$$

donde hemos ido sustituyendo el vector columna $\vec{b}$ en cada columna de A en orden. Los determinantes de cada una de las matrices valen $|A| = -2$, $|A_1| = -2$, $|A_2| = 0$ y $|A_3| = -4$, luego la solución es,

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-2}{-2} = 1 \;\; y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{-2} = 0 \;\; z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2. \tag{1.8.24}$$

Podemos comprobar que es la misma solución que en el ejemplo 32.

Capítulo 2

Espacios vectoriales

En la unidad anterior, hemos estudiado el álgebra de matrices y sus aplicaciones a la resolución de sistemas. Las matrices junto con sus operaciones, forman un conjunto cuyas propiedades son especialmente útiles. En ésta unidad veremos que un conjunto con propiedades similares a las de las matrices, se puede denominar espacio vectorial. Veremos qué es un espacio vectorial y cómo aplicar sus propiedades a muchos tipos de conjuntos distintos. Entre ellos, el más popular es el conjunto de vectores en una cierta dimensión $\mathbb{R}^n$. Como, por ejemplo, los vectores en el plano ($\mathbb{R}^2$) o los vectores en el espacio ($\mathbb{R}^3$).

∘ **Vectores en $\mathbb{R}^n$:** como vimos, los vectores son un caso particular de matriz. Ahora vamos a ver su conexión con el espacio en $\mathbb{R}^n$. Para ejemplificarlo, vamos a analizar los vectores en $\mathbb{R}^2$. En el plano, podemos etiquetar cada punto con dos coordenadas, por ejemplo con coordenadas cartesianas (x, y). Ésto significa que, por ejmplo, el punto $O = (3, 4)$ se localiza moviéndonos 3 unidades hacia la derecha en el eje x y 4 unidades hacia arriba en el eje y.

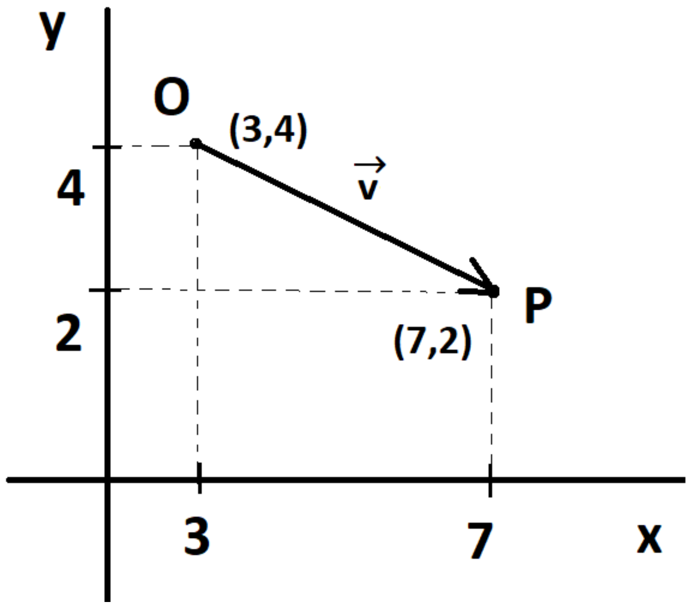


Figura 2.1: Ejemplo de vector $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^2$ que va del punto $O = (3, 4)$ al punto $P = (7, 2)$. De modo que las coordenadas (x, y) del vector son $\vec{v} = (7 - 3, 2 - 4) = (4, -2)$.

Un vector en el plano es como un puntero, .ªpunta"de un punto O a un punto P. De modo que las coordenadas del vector se calculan restando las coordendas del punto inical al final: $\vec{v} = \vec{OP} = (x_p - x_o, y_p - y_o)$. Si el inicio del vector lo colocamos en el origen de coordenadas $O = (0, 0)$, entonces las coordendas del vector son simplemente las coordendas del punto P del espacio.

De éste modo, un vector tiene dirección, sentido y tamaño. El tamaño se denomina módulo del vector $|\vec{v}|$ y se puede calcular con sus coordenadas cartesianas como $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, gracias al teorema de Pitágoras.

Éstos vectores, se pueden escribir como vector fila o columna y siguen todas las propiedades que vimos de las matrices y sus operaciones. Es decir, se pueden sumar y multiplicar por un número cumpliendo todas las propiedades de la suma y la multiplicación. Ésta estructura es especialmente útil y es por ello que se define como un **espacio vectorial**.

2.1. Definición de espacio vectorial

○ **Espacio vectorial:**
Un conjunto V se dice que es un espacio vectorial con elementos: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ... si en él se han definido las operaciones de **suma**: $\vec{u}+\vec{v} \in V$ y de **multiplicación por un escalar**: $k\,\vec{u} \in V$. Donde éstas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

1. $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$.
2. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$.
3. Existe el elemento neutro $\vec{0}$ tal que $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$.
4. Existe el elemento opuesto para cada $\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$.
5. Existe el elemento unidad tal que $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.
6. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$.
7. $(a+b)\vec{u} = a\vec{u}+b\vec{u}$.
8. $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$.

Es decir, un espacio vectorial es un conjunto de elementos que, al sumarlos o multiplicarlos por un número, siguen siendo elementos del mismo conjunto y cumplen las propiedades habituales de la suma y de la multiplicación. Como ejemplos de espacios vectoriales tenemos todos los vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,...$\mathbb{R}^n$; o las matrices de dimensión $n \times m$ con elementos reales: $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Sin embargo, hay otros conjuntos no tan evidentes que son también un espacio vectorial, por ejemplo los polinomios de orden n: $P^n(x)$.

- Ejemplo 1: $P^2(x)$ es el conjunto de los polinomios de orden 2, y es un espacio vectorial con la suma y multiplicación usuales. Por ejemplo, el polinomio $1+x^2$ es un polinomio de orden 2 que puedo llamarlo como el vector $\vec{v} \in P^2(x)$ y, de la misma forma, puedo decir que $3+x+x^2$ es el vector $\vec{u} \in P^2(x)$. Dados estos dos vectores del espacio vectorial $P^2(x)$ ¿Cuánto vale la suma $\vec{v}+\vec{u}$? ¿es la suma $\vec{v}+\vec{u}$ un elemento de $P^2(x)$?

  La suma de $\vec{v}+\vec{u}$ consiste en sumar los dos polinómios, es decir: $\vec{v}+\vec{u} = (1+x^2)+(3+x+x^2) = 4+x+2\,x^2$. Ésta suma es también un polinomio de orden 2 luego la suma partenece al espacio vectorial: $\vec{v}+\vec{u} \in P^2(x)$.

- Ejemplo 2: Los vectores en $\mathbb{R}^3$ son un espacio vectorial con la suma y la multiplicación usuales. Dado el vector $\vec{v} = (1,0,1)$, ¿cuánto vale $\vec{u} = 3 \cdot \vec{v}$? ¿es $\vec{u}$ un elemento de los vectores de $\mathbb{R}^3$?

  El vector $\vec{u} = 3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot (1,0,1) = (3,0,3)$. El vector $\vec{u}$ es un vector de 3 componentes luego es un vector de $\mathbb{R}^3$ y por tanto: $\vec{u} = 3 \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

2.2. Combinación lineal de vectores y sistema generador

En la Unidad 1 vimos la definición de un conjunto de vectores linealmente dependientes. Básicamente, un conjunto de vectores es linealmente dependiente si puedo encontrar unos números distintos de cero que, al multiplicar a cada vector y sumarlos, el resultado da cero. Eso, como vimos, significaba algo muy sencillo: dos vectores son linealmente dependientes entre sí si puedo decir que uno de ellos es k veces el otro. En el plano o el espacio, ésto es muy sencillo de visualizar:

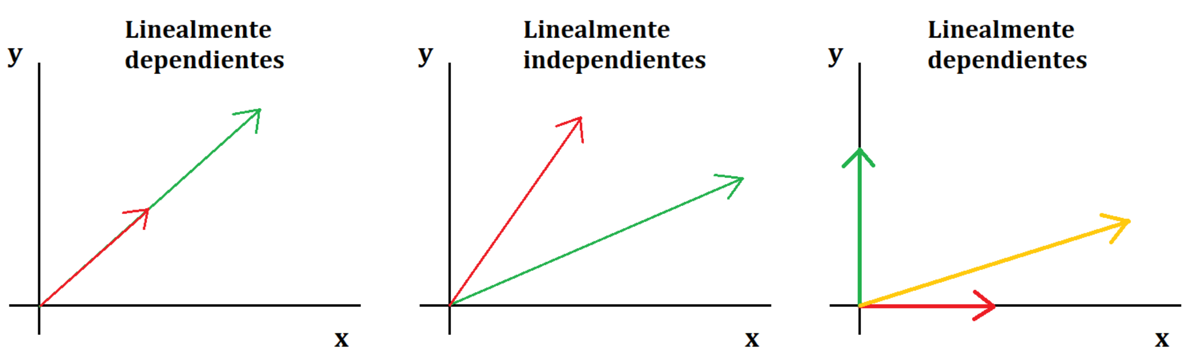


Figura 2.2: Ejemplos de conjuntos de vectores linealmente dependientes e independientes en el plano.

Como vemos en el ejemplo de la figura 2.2, en $\mathbb{R}^2$ dos vectores son dependientes si están en la misma dirección, es decir, uno de ellos es k veces el otro. Si tengo 2 vectores apuntando en direcciones distintas entonces son linealmente independientes en el plano. Sin embargo, si considero 3 vectores apuntando en direcciones distintas, son linealmente dependientes y, por ello se puede escribir: $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 = 0$ con a_1, a_2 y a_3 distintos de cero. Luego puedo despejar cualquiera de esos 3 vectores, por ejemplo $\vec{u}_1$: $\vec{u}_1 = -(a_2/a_1)\vec{u}_2 - (a_3/a_1)\vec{u}_3$.

Ésta ecuación se va a leer de la siguiente forma: $\vec{u}_1$ se puede poner como **combinación lineal** de $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

○ **Combinación lineal:**
Se dice que un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\}$ si podemos escribir:

$$\vec{v} = a_1\,\vec{u}_1 + a_2\,\vec{u}_2 + ... + a_k\,\vec{u}_k = \sum_{i=1}^{k} a_i\,\vec{u}_i$$

donde $\{a_1, a_2, ..., a_k\} \neq 0$.

El concepto de combinación lineal es fundamental y lo usaremos con mucha frecuencia en el resto de herramientas durante el curso. **Si un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de otros vectores cualesquiera, entonces se dice que $\vec{v}$ es linealmente dependiente de esos vectores.**

Vamos a a ver algunos ejemplos de combinaciones lineales para familiarizarnos con el concepto.

- Ejemplo 3: Dados los vectores de $\mathbb{R}^2$: $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (0, 2)$ y $\vec{c} = (1, 0)$. ¿Son linealmente dependientes? ¿podemos poner alguno de ellos como combinación lineal de los otros dos?

  Para ver si son linealmente dependientes podemos calcular el rango de la matriz cuyas columnas son esos 3 vectores:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.1}$$

  Usando las técnicas de la primera unidad, podemos ver cláramente que $r(A) = 2$ y, por tanto, de esos tres vectores sólo dos son linealmente independientes. Ésto significa que puedo poner cualquiera de ellos como combinación lineal de los otros dos. Para ver ésto más cláramente vamos a representar gráficamente los vectores en la siguiente figura 2.3.

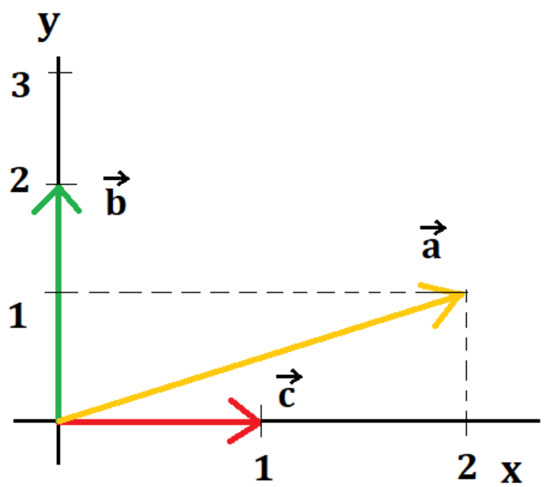


Figura 2.3: En éste ejemplo, se dice que $\vec{a}$ es combinación lineal de $\vec{b}$ y $\vec{c}$ ya que $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + 2\,\vec{c}$ como se ve en la figura. Ésto se puede comprobar analíticamente a partir de las coordenadas (x, y) de los vectores: $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (0, 2)$ y $\vec{c} = (1, 0)$.

- Ejemplo 4: dado el vector de $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} = (1, 3, 6)$, comprobar si $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ y $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$.

  Para ello necesitamos comprobar que se cumple $\vec{v} = a_1\,\vec{u}_1 + a_2\,\vec{u}_2 + a_3\,\vec{u}_3$, encontrando esos valores de a_1, a_2 y a_3:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 + a_2\\a_1 + a_3\\a_2 + a_3\end{pmatrix}, \tag{2.2.2}$$

  igualando componentes obtenemos un sistema de 3 ecuaciones para 3 incógnicas. Haciendo uso de las herramientas de la unidad anterior para resolver sistemas obtenemos que $a_1 = -1$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 4$. Por lo que hemos comprobado que $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}. \tag{2.2.3}$$

○ **Sistema generador:**

Se dice que los vectores $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$ de un espacio vectorial V son un **sistema generador** de V si todo elemento $\vec{u} \in V$ se puede poner como combinación lineal de $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$, es decir:

$$\vec{u} = a_1\,\vec{v}_1 + ... + a_k\,\vec{v}_k = \sum_{i=1}^{k} a_i\,\vec{v}_i \qquad \forall \vec{u} \in V$$

Lo denotaremos como $V = \langle \vec{v}_1, ..., \vec{v}_k \rangle$, de modo que la anterior igualdad se leerá como: los vectores $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$ son sistema generador de V, o bien, V es el espacio vectorial generado por los vectores $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$.

Éste concepto es importante y nos servirá para definir lo que va a ser una *base* de un espacio vectorial. La idea de un sistema generador es que es un conjunto de vectores con los cuales, haciendo combinaciones lineales con ellos, puedo construir cualquier vector del espacio vectorial.

- Ejemplo 5: Dados los vectores de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ y $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$. ¿Son un sistema generador de $V = \mathbb{R}^3$?

  Para demostrar si ese conjunto de vectores es sistema generador, tengo que ser capaz de escribir cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de ellos, es decir:

  $$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 + a_3 \end{pmatrix}, \tag{2.2.4}$$

  donde $\vec{v} = (x, y, z)$ es cualquier vector de $\mathbb{R}^3$. Es posible obtener cualquier valor de x, y y z dando el valor adecuado a a_1, a_2 y a_3. Es decir, fijados unos valores objetivo de x, y y z el sistema para encontrar a_1, a_2 y a_3 es siempre un S.C.D con una solución única. Diremos entonces que $V = \mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Es importante reflexionar sobre la utilidad de éste concepto. En un espacio vectorial, como es por ejemplo $\mathbb{R}^3$, hay infinitos elementos. Cualquier vector $\vec{v} = (x, y, z)$ con cualesquiera componentes cartesianas es un elemento de $\mathbb{R}^3$. Gracias al sistema generador, estamos escribiendo todos estos infinitos elementos a partir de únicamente unos pocos representantes"del espacio vectorial. Sin embargo, cabe preguntarse, ¿cuál es el número mínimo de estos ”representantes”?

Nótese que, en el ejemplo 5, hemos encontrado un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ con 3 elementos. Sin embargo, si añadimos un cuarto elemento, por ejemplo $\vec{u}_4 = (1,0,0)$, podemos comprobar que esos 4 vectores también son un sistema generador de $\mathbb{R}^3$. De hecho, con la definición de sistema generador, nada nos impide que los vectores del sistema generador sean linealmente dependientes.

Esto motiva la búsqueda del mínimo número de vectores con los cuales podemos escribir los infinitos elementos de un espacio vectorial. Ese conjunto de vectores es lo que llamaremos una *base* del espacio vectorial.

2.3. Base de un espacio vectorial y cambios de base

◦ **Base de un espacio vectorial:**
Se dice que un conjunto de vectores $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ son una base del espacio vectorial V si y sólo si:

1. Son un sistema generador de V, es decir $V = \langle \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n \rangle$.
2. Son linealmente independientes.

Como se podía intuir del apartado anterior, una base es un conjunto de vectores linealmente independientes que son un sistema generador del espacio vectorial. La base de un espacio vectorial es fundamental, por ese motivo se denomina como tal. Es el número mínimo de vectores con los cuales es posible escribir cualquier vector del espacio vectorial.
Bases canónicas: hay unos tipos de bases especialmente sencillas que se denominan **bases canónicas** que consisten en vectores $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ tales que $\vec{e}_i = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$ donde el elemento 1 está en la posición i de $\vec{e}_i$:

- $\mathbb{R}^2$: $\quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\mathbb{R}^3$: $\quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\underline{\mathbb{R}^4\text{:}}$ $\quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

○ **Coordenadas de un vector en una base:**
Dada una base de V, cualquier vector $\vec{v} \in V$ se puede poner como combinación lineal única de los vectores de la base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$:

$$\vec{v} = \alpha_1\,\vec{e}_1 + ... + \alpha_n\,\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\vec{e}_i$$

Donde α_i se definen como las **coordenadas** de $\vec{v}$ en la base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$.

De hecho, ya hemos usado una base canónica al principio del tema. Cuando hemos dado las coordenadas de un vector en el plano o el espacio como (x, y) o (x, y, z) reespectivamente; lo que realmente estábamos dando eran las coordenadas de un vector en las bases canónicas:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.3.1}$$

los números x, y y z son las coordenadas de $\vec{v}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

- Ejemplo 6: Dado el vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$ con coordenadas en la base canónica, exprese $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de la base canónica.

  Básicamente tenemos que usar el concepto de coordenadas de un vector en una base, el vector $\vec{v}$ lo podemos descomponer como:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.3.2}$$

  donde lo hemos escrito como combinación lineal de los vectores de la base canónica, sus coordendas en la base canónica son efectivamente 1, 2 y 3.

- Ejemplo 7: Dada la siguiente base de $\mathbb{R}^3$: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y el vector $\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3$. Calcule las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base canónica y en la base B.

El vector $\vec{v}$ nos lo dan como combinación lineal de los vectores de la base B:

$$\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_3 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.3.3}$$

luego, por la definición de coordenadas, ya tenemos las coordendas de $\vec{v}$ en la base B, las cuales se denotan de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \color{red}{1} \cdot \vec{e}_1 + \color{red}{2} \cdot \vec{e}_2 + \color{red}{3} \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \color{red}{1} \\ \color{red}{2} \\ \color{red}{3} \end{pmatrix}_B \tag{2.3.4}$$

Para escribir las coordendas como un vector fila o columna, si la base de esas coordenadas no es la base canónica, especificamos la base con su letra como subíndice. Por otra parte, como tenemos las coordenadas de la base B en la base canónica, sólo tenemos que usarlas para calcular las coordenadas de $\vec{v}$ en la base canónica:

$$\vec{v} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{2.3.5}$$

Por lo que ya tenemos las coordenadas de $\vec{v}$ en la base canónica: $\vec{v} = (1, 3, 3)$. Nótese que el vector sigue siendo el mismo, únicamente tiene distintas coordenadas en distintas bases:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B. \tag{2.3.6}$$

Ésto es análogo a pensar en una distancia, por ejemplo la distancia de la Tierra a la Luna: $L = 384400\,\mathrm{km} = 384400000\,\mathrm{m}$. La distancia es la misma en ambos casos, sólo que la podemos expresar en km o en m. Lo mismo ocurre con las coordenadas de los vectores y las bases.

∘ **Dimensión de un espacio vectorial:**
Se define la dimensión de un espacio vectorial V, y se denota como $\dim(V)$, como el número de vectores de la base de V.

Ésto se puede ver de forma muy sencilla en $\mathbb{R}^n$ con sus bases canónicas. La dimensión de $\mathbb{R}^n$ esta claro que vale $\dim(\mathbb{R}^n) = n$: el plano $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión 2, el espacio $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3, etc. Y efectivamente ese es el número de vectores de sus bases canónicas. Ésto se debe a que: para dar cualquier punto del plano necesitamos 2 direcciones independientes, por ejemplo alto y ancho (x, y); para dar cualquier punto del espacio necesitamos 3 direcciones independientes, por ejemplo el alto, el ancho y la profundidad (x, y, z); etc.

Éste concepto puede parecer demasiado obvio para $\mathbb{R}^n$, pero nos será especialmente útil cuando trabajemos con otros espacios vectoriales o bien cuando calculemos *subespacios vectoriales*.

Una vez hemos visto qué es una base y qué es la dimensión de un espacio vectorial, hay una serie de propiedades que se pueden deducir y que son enormemente útiles a la hora de trabajar con bases.

○ **Propiedades de las bases:**

1. Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces cualesquiera $n+1$ vectores son linealmente dependientes.
2. Todas las bases de un mismo espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.
3. Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces cualesquiera n vectores linealmente independientes son una base de V.

- Ejemplo 8: Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.3.7}$$

Construya dos bases distintas de $\mathbb{R}^3$.

Tenemos un conjunto de 7 vectores para construir dos bases distintas de $\mathbb{R}^3$. El conjunto de 7 vectores de $\mathbb{R}^3$ se que son linealmente dependientes ya que son más de 3 vectores en $\mathbb{R}^3$. Como la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, necesito 3 vectores linealmente independientes para construir una base. Por ejemplo:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \tag{2.3.8}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0 \qquad (2.3.9)$$

Donde hemos usado las herramientas de la primera unidad para determinar vectores linealmente independientes por medio del cálculo de rangos de matrices con determinantes. De éste modo tenemos dos bases distintas de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad (2.3.10)$$

Nótese que las dos bases tienen el mismo número de vectores, 3, esto es debido a que la dimensión del espacio vectorial es 3 y ésta no puede cambiar en función de la base que usemos.

2.3.1. Cambio de base

Como hemos visto, podemos tener varias bases de un mismo espacio vectorial. Por lo tanto, nos será útil saber cómo cambiar de una base a otra. En particular, cómo calcular las coordenadas de un vector en una base nueva, conocidas las coordenadas del mismo vector en una base antigua.

Si nos fijamos, ésto ya lo hemos realizado en uno de los ejemplos, en particular en el ejemplo 4. Vamos a retomar ese ejemplo.

- Ejemplo 9: En el ejemplo 4 nos pedían escribir el vector $\vec{v} = (1, 3, 6)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ y $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$. Nótese que el conjunto de vectores $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ ya que son 3 vectores linealmente independientes:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \qquad (2.3.11)$$

Luego, al calcular $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de la base B, estamos calculando las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 + a_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.3.12)$$

resolver el sistema del ejemplo 4 es realizar un cambio de base:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}. \tag{2.3.13}$$

Las coordendas de $\vec{v}$ en la base canónica y en la base B son:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}_B. \tag{2.3.14}$$

No es del todo complicado o engorroso resolver cambios de base de ésta manera: imponiendo la definición de coordenadas y resolviendo el sistema. Sin embargo, de cara al futuro, es necesario tener un método más sistemático para realizar cambios de base. Éste método pasa por la resolución del sistema de cambio de base por medio de la matriz inversa, como vimos en la unidad 1. Para ello, tenemos que definir la **matriz de cambio de base**.

○ **Matriz de cambio de base:**
Dadas dos bases de un espacio vectorial V denominadas como la **base antigua** B y la **base nueva** B' con vectores: $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ y $B' = \left\{\vec{e}_1^{\,\prime}, ..., \vec{e}_n^{\,\prime}\right\}$. Se define la matriz de cambio de base $M_{B\to B'}$ como:

$$M_{B\to B'} = \left(\begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\,\prime}\end{pmatrix}_B \begin{pmatrix}\vec{e}_2^{\,\prime}\end{pmatrix}_B ... \begin{pmatrix}\vec{e}_n^{\,\prime}\end{pmatrix}_B \right)$$

De modo que las columnas de $M_{B\to B'}$ son los vectores de la base nueva B' en coordenadas respecto a la base antigua B.

Nótese que la matriz de cambio de base es la matriz de coeficientes del sistema que había que resolver en el ejemplo 9 para cambiar las coordenadas. Una vez que tenemos definida ésta matriz, podemos realizar cambios de coordenadas de un vector de forma sencilla.

○ **Cambio de coordenadas de un vector:**
Dado un vector $\vec{x}$ de un espacio vectorial V cuyas coordenadas en dos bases distintas son:

$$\vec{x}_B = \begin{pmatrix} \\ \vec{x} \\ \\ \end{pmatrix}_B \qquad \vec{x}_{B'} = \begin{pmatrix} \\ \vec{x} \\ \\ \end{pmatrix}_{B'}$$

Dichas coordenadas se relacionan entre sí por medio de la matriz de cambio de base de B a B': $M_{B\to B'}$.

$$\vec{x}_B = M_{B\to B'}\ \vec{x}_{B'} \iff \vec{x}_{B'} = M^{-1}_{B\to B'}\ \vec{x}_B$$

Nótese que la matriz de cambio de base de B' a B es simplemente la inversa de la matriz de cambio de base de B a B', es decir $M_{B'\to B} = M^{-1}_{B\to B'}$.

De ésta forma, para calcular las coordenadas de un vector en una base nueva, simplemente hay que construir la matriz de cambio de base de la base antigua a la nueva, invertir la matriz y multiplicarla por las componentes del vector en la base antigua.

- Ejemplo 10: Dada la base canónica de $\mathbb{R}^2$: $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, se construye una base nueva $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ tal que $\vec{u}_1 = -\vec{e}_1$ y $\vec{u}_2 = -\vec{e}_2$. Si tenemos un vector $\vec{x} = 3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$, ¿cuáles son las coordenadas de $\vec{x}$ en la base canónica? ¿y en la base B?

  Las coordenadas de $\vec{x}$ en la base canónica ya las sabemos ya que $\vec{x} = 3\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$, luego $\vec{x} = (3, 2)$ en la base canónica. Vamos a calcular las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B por medio de la matriz de cambio de base. La matriz de cambio de base de C a B será $M_{C\to B}$ cuyas columnas son los vectores de la base B en coordenadas en la base C, la base canónica:

$$\vec{u}_1 = -\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = -\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ \to\ M_{C\to B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3.15}$$

  Por lo tanto, las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B serán,

$$\vec{x}_B = M^{-1}_{C\to B}\ \vec{x}_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{2.3.16}$$

Así, las coordenadas de $\vec{x}$ en las dos bases son:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}_B . \tag{2.3.17}$$

2.4. Subespacios vectoriales

Una vez que hemos estudiado qué es un espacio vectorial y cómo trabajar con él, vamos a estudiar subconjuntos dentro de los espacios vectoriales. Un subconjunto es un conjunto dentro de otro conjunto. Por ejemplo, si tenemos el conjunto de todos los coches de Madrid, todos los coches de Madrid que son rojos sería un subconjunto dentro del conjunto mayor.

En el caso de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, un subconjunto podría ser una cierta superficie del plano, los puntos de una recta o los puntos de cualquier curva en el plano. Veremos que hay subconjuntos especiales que llamaremos **subespacios vectoriales** que tienen la propiedad de ser espacios vectoriales pequeños dentro del espacio vectorial mayor de partida.

○ **Subespacio vectorial:**
Un subespacio vectorial U es un subconjunto de vectores del espacio vectorial V tal que cumple todas las propiedades de un espacio vectorial, en particular, debe cumplir:

1. El elemento neutro está en el subespacio $\left\{\vec{0}\right\} \in U$.
2. Si $\vec{u} \in U$ y $\vec{v} \in U$ entonces la suma está también en el subespacio $\vec{u} + \vec{v} \in U$.
3. Si $a \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in U$ entonces el producto $a\vec{u} \in U$.

Básicamente si realizamos una combinación lineal de elementos del subespacio vectorial, el resultado sigue siendo parte del subespacio vectorial. Ésta condición más el hecho de incluir el cero dentro del subespacio, es todo lo que tenemos que comprobar para demostrar que un subconjunto es un subespacio vectorial.

○ Subespacios impropios o triviales: dado V siempre tenemos dos subespacios vectoriales que se denominan impropios o triviales, éstos son el propio espacio vectorial V y el elemento nulo $\left\{\vec{0}\right\}$. Es fácil comprobar que esos subconjuntos cumplen todas las propiedades de un subespacio vectorial.

○ **Dimensión de un subespacio vectorial:**
La dimensión de un subespacio vectorial U siempre es menor o igual que la dimensión del espacio vectorial total V: $\dim(U) \leq \dim(V)$. Para calcular la dimensión de un subespacio vectorial simplemente tenemos que encontrar una base del subespacio, de modo que el número de vectores de la base será la dimensión del subespacio vectorial.

Ahora que sabemos qué es un subespacio vectorial, vamos a ver las distintas formas en las cuales vamos a expresarlos. En éste curso, veremos subespacios vectoriales en tres formas diferentes:

○ **Ecuaciones implícitas:** podemos expresar un subespacio vectorial en función de la relación o relaciones que existen entre sus coordenadas en una base. Lo más usual, es dar las relaciones entre sus coordenadas en la base canónica: $(x, y, z, ...)$.

- Ejemplo 11: Sea U un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado por las siguientes ecuaciones implícitas: $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \, x - y + z = 0, t + z = 0\}$. La anterior igualdad matemática se lee como: U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ de componentes (x, y, z, t) en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, tales que $x - y + z = 0$ y $t + z = 0$. Calcule una base y la dimensión de U.

  Como tenemos las ecuaciones implícitas del subespacio, podemos usarlas para despejar una componente por cada ecuación, por ejemplo: $x = y - z$ y $t = -z$. Así, un vector general de U lo ponemos escribir como:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \\ -z \end{pmatrix}. \tag{2.4.1}$$

  Para obtener una base del subespacio, necesitamos expresar el vector general del subespacio como combinación lineal de vectores linealmente independientes. A partir de (2.4.1) podemos descomponer el vector como:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \\ -z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.2}$$

  Donde hemos renombrado y y z como $y = \alpha$ y $z = \beta$ ya que son parámetros arbitrários. Ésta expresión nos dice que un vector general de U lo podemos poner como combinación lineal de esos dos vectores, dado que podemos comprobar facilmente que son linealmente independientes, son una base B_U del subespacio U:

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.4.3}$$

Ya que la base de U tiene dos elementos, tenemos que $\dim(U) = 2$.

∘ **Ecuaciones paramétricas:** podemos expresar un subespacio vectorial a partir de una serie de parámetros con los cuales obtener sus coordenadas en una base, usualmente la canónica. De éste modo, se dan ecuaciones del tipo $x = f(\alpha, \beta, ...)$, $y = g(\alpha, \beta, ...)$, etc.

- Ejemplo 12: Sea U un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado por las siguientes ecuaciones paramétricas: $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = \alpha - \beta,\ y = \alpha,\ z = \beta,\ t = -\beta\}$. La anterior igualdad matemática se lee como: U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ de componentes (x, y, z, t) en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, tales que $x = \alpha - \beta$, $y = \alpha$, $z = \beta$ y $t = -\beta$. Calcule una base y la dimensión de U.

  Cuando tenemos las ecuaciones paramétricas podemos escribir directamente un vector general del subespacio, en éste caso para el subespacio U tenemos:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}. \tag{2.4.4}$$

  De éste modo, podemos descomponer el vector como:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.5}$$

  Como se puede ver, se trata del mismo subespacio vectorial del ejemplo anterior, luego la base es B_U dada por (2.4.3) y la dimensión del subespacio es 2. Nótese que el primer paso que realizamos en el ejemplo anterior fue pasar de las ecuaciones implícitas a las ecuaciones paramétricas del subespacio.

∘ **Sistema generador:** la última forma en la que podemos expresar un subespacio vectorial es dando un sistema generador del mismo. Hay que recordar que un sistema generador puede ser o no una base, es decir, los vectores del sistema generador podrían ser linealmente independientes o no.

- Ejemplo 13: Sea U un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado a partir de un sistema generador de la forma: $U = \langle(1,1,0,0), (-1,0,1,-1), (0,1,1,-1)\rangle$. Calcule una base y la dimensión de U.

  Dado que nos dan ya el sistema generador del subespacio U, podemos escribir un vector general de U como una combinación lineal de los vectores del sistema generador:

$$\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.6}$$

  Ésto no implica que, esos tres vectores, sean una base de U. Para ser una base hay que comprobar si son o no linealmente independientes. Para ello, vamos a calcular el rango de la matriz formada por esos tres vectores con el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 + F_2]{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4.7}$$

  Como hay únicamente dos filas distintas de cero, el rango de la matriz vale 2, luego de los 3 vectores columna solo 2 son linealmente independientes. Por lo tanto, para la base de U podemos coger 2 de ellos, por ejemplo los dos primeros:

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.4.8}$$

  Como podemos ver, el subespacio U de éste ejemplo es el mismo que el de los dos ejemplos anteriores. Hemos analizado el mismo subespacio en todas las distintas formas de expresar subespacios vectoriales.

Una vez que hemos visto cómo operar con subespacios vectoriales, podemos ganar intuición geométrica de qué son los subespacio vectoriales en $\mathbb{R}^n$. Ya que tienen que cumplir la condición de espacio vectorial, es decir, que una combinación lineal de elementos debe seguir formando parte del subespacio vectorial, podemos intuir el siguiente resultado:

- **Los únicos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son subespacios vectoriales son las rectas, planos e hiperplanos que pasan por el** $\vec{0}$.

Vamos a ejemplificar este resultado con un caso particular y sencillo.

- Ejemplo 14: Dado el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$. Compruebe si U es o no un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

  Primeramente, para ser subespacio vectorial U debe contener al $\vec{0}$. Ésto es cierto ya que $(x, y) = (x, x^2)$, luego en particular si $x = 0$ tenemos que $(x, y) = (0, 0)$ está en U. Sin embargo, también tiene que cumplir que una combinación lineal de vectores forme parte de U, es decir:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}. \tag{2.4.9}$$

  Lo cual es en general falso, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix}. \tag{2.4.10}$$

  Ésto ocurre así porque, si nos fijamos en la ecuación $y = x^2$, éste subconjunto es una parábola en el plano que pasa por el origen. Por lo tanto U no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$ son las rectas que pasan por el origen.

2.4.1. Intersección y suma de subespacios

Una vez que hemos visto qué son los subespacios vectoriales, los cuales hemos visto que son basicamente rectas y planos que pasan por el origen. Vamos a calcular el corte o intersección y suma de dichos subespacios vectoriales.

○ **Intersección de subespacios:**
Dados dos subespacios vectoriales U_1 y U_2, se define la intersección $U_1 \cap U_2$ como:

$$U_1 \cap U_2 = \{\vec{u} \,/\, \vec{u} \in U_1 \text{ y } \vec{u} \in U_2\}$$

Es decir, los vectores $\vec{u}$ de la intersección de U_1 y U_2 son los vectores que están a la vez tanto en U_1 como en U_2. La intersección de subespacios es también un subespacio vectorial.

La intersección consiste en calcular el corte entre subespacios vectoriales, es decir, el corte entre planos y rectas. Como sabemos, el corte entre dos rectas es un punto, el corte entre plano y recta es un punto, y el corte entre dos planos es una recta. La forma más sencilla de calcular intersecciones es por medio de las **ecuaciones implícitas** de los subespacios.

- Ejemplo 15: Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = \alpha,\ y = \alpha + \beta,\ z = \beta\}$$

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

Calcule la intersección $U_1 \cap U_2$.

Para calcular intersecciones es útil usar las ecuaciones implícitas. Tenemos la ecuación implícita de U_2 y calculamos la de U_1: $x = \alpha$, $y = \alpha+\beta$, $z = \beta$. Para calcular la ecuación implícita de U_1 hay que eliminar los parámetros de las ecuaciones paramétricas: sustituimos $x = \alpha$ y $z = \beta$ en $y = \alpha + \beta$:

$$y = x + z \ \rightarrow \ x - y + z = 0. \tag{2.4.11}$$

Los vectores de la intersección son aquellos que cumplen todas las ecuaciones implícitas de los dos subespacios, luego hay que resolver el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right. \tag{2.4.12}$$

Éste es un sistema de dos ecuaciones para tres incógnitas luego será un sistema compatible indeterminado. Necesitaremos definir 3 ecuaciones -2 incógnitas $= 1$ parámetro. Por ejmplo, $z = \lambda$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = -\lambda \\ x - y = -\lambda \end{array} \right. \tag{2.4.13}$$

Resolviendo el sistema encontramos que $x = -\lambda$, $y = 0$ y $z = \lambda$. Es decir, acabamos de encontrar las ecuaciones paramétricas de la intersección $U_1 \cap U_2$. Un vector general $\vec{v}$ de $U_1 \cap U_2$ lo podemos escribir como:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.14}$$

Luego la base de $U_1 \cap U_2$ es $B = \{(-1, 0, 1)\}$. Como la base tiene un único elemento, la dimensión de la intersección es 1. Efectivamente, hemos calculado el corte de dos planos en el espacio y hemos obtenido una recta.

○ **Suma de subespacios:**
Dados dos subespacios vectoriales U_1 y U_2, se define la suma $U_1 + U_2$ como:

$$U_1 + U_2 = \{\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \,/\, \vec{u} \in U_1 \ \text{ y } \ \vec{v} \in U_2\}$$

La suma de subespacios es un subconjunto compuesto por todos los vectores $\vec{w}$ que se pueden poner como suma de un vector de U_1 y otro de U_2. La suma de subespacios vectoriales también es un subespacio vectorial.

- Ejemplo 16: Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = \alpha,\ y = \alpha + \beta,\ z = \beta\right\}$$

$$U_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\right\}$$

Calcule la suma $U_1 + U_2$.

Para calcular la suma de subespacios tenemos que sumar un vector general de U_1 con otro de U_2. Para ello, necesitamos las bases de ambos subespacios, un vector general de U_1 se puede escribir como:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.15}$$

Luego $B_{U_1} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. En el caso de U_2 despejamos x de su ecuación implícita de modo que podemos escribir un vector general de U_2 como:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.16}$$

Luego $B_{U_2} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. Para calcular un vector general $\vec{w}$ de la suma $U_1 + U_2$ tenemos que sumar los dos vectores generales de U_1 y U_2:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.17}$$

Esta ecuación nos dice que $U_1 + U_2 = \langle (1,1,0),(0,1,1),(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$. Sin embargo, ¿son estos 4 vectores una base de $U_1 + U_2$? No, dado que son 4 vectores en $\mathbb{R}^3$ y por tanto no pueden ser linealmente independientes. Hay que ver cuántos de estos vectores son linealmente independientes, si tomamos los 3 primeros:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0. \tag{2.4.18}$$

Por lo que $B_{U_1+U_2} = \{(1,1,0),(0,1,1),(-1,1,0)\}$, luego la dimensión de la suma es 3 que es la dimensión del espacio total $\mathbb{R}^3$ luego la suma de U_1 y U_2 es todo el espacio $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 + U_2 = \langle (1,1,0),(0,1,1),(-1,1,0)\rangle = \mathbb{R}^3. \tag{2.4.19}$$

Hemos comprobado que la suma dos planos independientes en $\mathbb{R}^3$ es todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

Con el anterior ejemplo podemos darnos cuenta de que la dimensión de la suma no es la suma de dimensiones: hemos sumado dos planos de dimensión 2 y hemos obtenido todo el espacio de dimensión 3, pero no nos hemos ido a un espacio de dimensión 4. Ésto es evidente ya que es imposible que sumemos vectores de 3 componentes y obtengamos uno de 4.

◦ **Dimensión de la suma de subespacios:** se puede demostrar que la dimensión de la suma no es la suma de dimensiones sino que cumple la siguiente relación:

$$\boxed{\mathrm{Dim}(U_1 + U_2) = \mathrm{Dim}(U_1) + \mathrm{Dim}(U_2) - \mathrm{Dim}(U_1 \cap U_2)}$$

- Ejemplo 17: Dados los subespacios U_1 y U_2 de $\mathbb{R}^3$ de los dos anteriores ejemplos. Comprobar que $\mathrm{Dim}(U_1 + U_2) = \mathrm{Dim}(U_1) + \mathrm{Dim}(U_2) - \mathrm{Dim}(U_1 \cap U_2)$.

  Como hemos calculado en los dos anteriores ejemplos, la intersección de dos planos ($\mathrm{Dim}(U_1) = \mathrm{Dim}(U_1) = 2$) es una recta luego $\mathrm{Dim}(U_1 \cap U_2) = 1$; y la suma de los dos mismos planos es todo el espacio $\mathbb{R}^3$ luego $\mathrm{Dim}(U_1 + U_2) = 3$, luego:

$$\mathrm{Dim}(U_1) + \mathrm{Dim}(U_2) - \mathrm{Dim}(U_1 \cap U_2) = 2 + 2 - 1 = 3 = \mathrm{Dim}(U_1 + U_2). \tag{2.4.20}$$

Hay ocasiones en las cuáles sí se cumple que la dimensión de la suma es la suma de dimensiones. Éste es un caso especialmente interesante ya que, en éste caso, una base de la suma de subespacios es simplemente unir las bases de cada uno de los subespacios. Por ello, a éste caso se le da un nombre: **suma directa**.

○ **Suma directa de subespacios:**
Un subespacio vectorial U se dice que es suma directa de U_1 y U_2 y se denota de la forma $U = U_1 \oplus U_2$ sí y solo si:

$$U = U_1 + U_2 \text{ y } U_1 \cap U_2 = \left\{\vec{0}\right\} \rightarrow \mathrm{Dim}(U) = \mathrm{Dim}(U_1) + \mathrm{Dim}(U_2).$$

Si ésto ocurre, entonces todo $\vec{u} \in U$ se puede **descomponer de forma única** como $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ con $\vec{u}_1 \in U_1$ y $\vec{u}_2 \in U_2$.

- Ejemplo 18: Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \langle (1,1,0) \rangle \text{ y } U_2 = \langle (1,0,1), (-1,1,0) \rangle .$$

Calcule la suma $U_1 + U_2$ y la intersección $U_1 \cap U_2$. ¿Es $U_1 + U_2$ suma directa de subespacios?

Tenemos los dos subespacios dados con un sistema generador, los cuáles es sencillo probar que son bases de cada uno de ellos. Un vector general $\vec{u}$ de la suma $U_1 + U_2$ lo podemos escribir como:

$$\vec{u} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{2.4.21}$$

Luego $U_1 + U_2 = \langle (1,1,0), (1,0,1), (-1,1,0) \rangle$, esos tres vectores son linealmente independientes ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0, \tag{2.4.22}$$

por lo que son una base de la suma. Como estamos en $\mathbb{R}^3$ y $\mathrm{Dim}(U_1 + U_2) = 3$ tenemos que $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$. Usando la relación de dimensiones podemos calcular la dimensión de la intersección:

$$\mathrm{Dim}(U_1 \cap U_2) = \mathrm{Dim}(U_1 + U_2) - \mathrm{Dim}(U_1) - \mathrm{Dim}(U_2) = 3 - 1 - 2 = 0. \tag{2.4.23}$$

Si la dimensión de un subespacio vectorial es cero significa que ese subespacio es un punto, el vector $\vec{0}$:

$$\mathrm{Dim}(U_1 \cap U_2) = 0 \iff U_1 \cap U_2 = \left\{\vec{0}\right\}. \tag{2.4.24}$$

Por lo tanto hemos demostrado que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de U_1 y U_2: $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$. También podemos calcular la intersección directamente, para ello necesitaríamos imponer a la vez las ecuaciones implícitas de U_1 y U_2 de forma análoga al ejemplo 15. En ese caso comprobaríamos que $U_1 \cap U_2 = \left\{\vec{0}\right\}$.

Geométricamente, lo que tenemos es que U_1 es una recta y U_2 un plano de modo que el corte entre ellos es sólo un punto, el cero. Hemos demostrado que podemos construir todo el espacio de $\mathbb{R}^3$ con un plano y una recta sin que "sobre"ninguna dirección.

- Ejemplo 19: Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$ del ejemplo anterior, y como hemos demostrado que son suma directa de todo el espacio, descomponer el vector $\vec{u} = (2, 3, 1)$ como suma directa de $\vec{u}_1 \in U_1$ y $\vec{u}_2 \in U_2$.

Tenemos que escribir el vector $\vec{u} = (2, 3, 1)$ con coordenadas en la base canónica, como suma directa de $\vec{u}_1 \in U_1$ y $\vec{u}_2 \in U_2$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4.25}$$

Como vemos, los parámetros α, β y γ no son más que las coordenadas del vector $\vec{u}$ en la base $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$:

$$M_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow M_{C\to B}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.26}$$

Donde $M_{C\to B}$ es la matriz de cambio de base de la base canónica a la base B y hemos calculado su matriz inversa por los métodos de la unidad 1. De éste modo las coordendas de $\vec{u}$ en la base B son:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.27}$$

Una vez que tenemos las coordenadas α, β y γ calculamos los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ de la descomposición:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.28}$$

Por lo tanto $\vec{u}_1 = (2, 2, 0)$ es el vector de la recta U_1 y $\vec{u}_2 = (0, 1, 1)$ el vector del plano U_2 tales que su suma da el vector $\vec{u} = (2, 3, 1)$.

Capítulo 3

Aplicaciones lineales

Una vez definidos los espacios vectoriales y cómo trabajar con sus elementos, los vectores, vamos a ver un tipo de función que opera entre elementos de espacios vectoriales: las aplicaciones lineales. Una de las formas más intuitivas de entender las aplicaciones lineales es pensar en ellas como una generalización de las funciones de una variable. En el cálculo, se analizan en detalle las funciones $f(x)$ que toman un número, en general real, x y nos devuelven otro número $y = f(x)$ también real. De éste modo se puede decir de la función $f(x)$ que es una función que toma un número real y nos da un número real, es decir, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Como hemos visto en la unidad anterior, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial por lo que $\mathbb{R}$ en particular también lo es. Las aplicaciones lineales van a ser una generalización de las funciones de una variable de modo que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con una serie de propiedades que veremos a continuación.

3.1. Definición de Aplicación lineal

∘ **Aplicación lineal:**
Se dice que una aplicación $f : U \to V$ donde $\dim(U) = n$ y $\dim(V) = m$, es decir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es una **aplicación lineal** si cumple:

$$f(\alpha\,\vec{u}_1 + \beta\,\vec{u}_2) = \alpha\,f(\vec{u}_1) + \beta\,f(\vec{u}_1),$$

donde $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Es decir, que una aplicación sea lineal implica que evaluar la aplicación f en una combinación lineal de vectores del espacio inicial, es lo mismo que realizar esa misma combinación lineal con la aplicación de f sobre cada uno de los vectores.

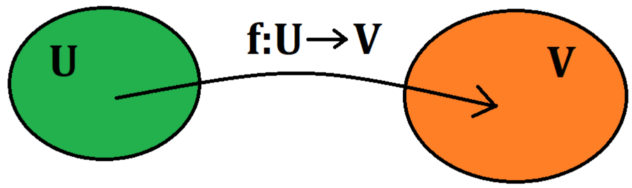


Figura 3.1: Una aplicación $f : U \to V$ toma vectores del espacio inicial U y los transforma en vectores del espacio final V.

La propiedad de linealidad ya nos debería resultar familiar ya que la hemos visto anteriormente en el producto por un escalar y el producto de matrices.

- Ejemplo 1: Considere la siguiente aplicación lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$, ¿se trata de una aplicación lineal?

  Para comprobar si es una aplicación lineal tenemos que evaluarla en una combinación lineal:

  $$f(\alpha\, x_1 + \beta\, x_2) = 2 \cdot (\alpha\, x_1 + \beta\, x_2) = \alpha\,(2\, x_1) + \beta\,(2\, x_2) = \alpha\, f(x_1) + \beta\, f(x_2), \quad (3.1.1)$$

  gracias a las propiedades asociativa y distributiva de la multiplicación, hemos probado que $f(x) = 2x$ es una aplicación lineal.

- Ejemplo 2: Considere la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(\vec{x}) = A\,\vec{x}$ donde A es una matriz 2×2 y $\vec{x}$ es un vector columna de dos componentes, ¿se trata de una aplicación lineal?

  De la misma forma que en el ejemplo anterior, evaluamos la aplicación en una combinación lineal:

  $$f(\alpha\,\vec{x}_1 + \beta\,\vec{x}_2) = A \cdot (\alpha\,\vec{x}_1 + \beta\,\vec{x}_2) = \alpha\,(A\, x_1) + \beta\,(A\, x_2) = \alpha\, f(\vec{x}_1) + \beta\, f(\vec{x}_2), \quad (3.1.2)$$

  gracias a las propiedades del producto de matrices, hemos comprobado que $f(\vec{x}) = A\,\vec{x}$ es una aplicación lineal.

Motivados por los anteriores ejemplos, vamos a enunciar un resultado que nos va a ayudar a identificar aplicaciones lineales de forma sencilla: **una aplicación entre espacios vectoriales es lineal si y solo si se puede poner como el producto de una matriz A por un vector columna del espacio inicial $f(\vec{x}) = A\,\vec{x}$.**

También es posible definir las aplicaciones lineales como el producto $\vec{x}'\,A'$ en vez de $A\,\vec{x}$, en cuyo caso $\vec{x}'$ debe ser un vector fila y $A' = A^t$. En éste curso se seguirá la notación $f(\vec{x}) = A\,\vec{x}$.

Nótese que, dado que tanto $\vec{x}$ como $f(\vec{x})$ estarán en unas bases determinadas de los espacios inical y final, la matriz A de la aplicación también dependerá de dichas bases.

3.2. Matriz de una aplicación lineal y cambio de base

Vamos a ver cómo construir la matriz de una aplicación lineal. Primero veremos cómo calcularla en las bases canónicas de los espacios inicial y final, para después calcularla en cualquiera otras bases a partir del cambio de base de aplicaciones.

○ **Matriz en las bases canónicas:**
Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sea $\{\vec{e}_i\}$ con $i = 1, ...n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\left\{\vec{e}_j^{\,\prime}\right\}$ con $j = 1, ...m$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Entonces, $f(\vec{x}) = A\,\vec{x}$ donde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ con coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ con coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}^m$; y la matriz A de la aplicación se construye colocando como **columnas** los vectores $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), ...f(\vec{e}_n)\}$:

$$A = \left(\begin{pmatrix} \\ f(\vec{e}_1) \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ f(\vec{e}_2) \\ \\ \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \\ f(\vec{e}_n) \\ \\ \end{pmatrix} \right)$$

de modo que A es una matriz $m \times n$.

- Ejemplo 3: Dada la siguiente aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (x + y, x, y)$, calcule la matriz de f en las bases canónicas.

  Para ello únicamente tenemos que evaluar f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1 = (1, 0)$,

$\vec{e}_2 = (0,1)$: $f(\vec{e}_1) = (1,1,0)$ y $f(\vec{e}_2) = (1,0,1)$ luego la matriz de la aplicación es,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.1}$$

Es conveniente comprobar éste resultado,

$$f(\vec{x}) = A\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \\ y \end{pmatrix}, \tag{3.2.2}$$

con lo que efectivamente $f(x,y) = (x+y, x, y)$ con esa matriz A de la aplicación.

La forma más común en la cual vamos a definir una aplicación lineal va a ser a partir de su aplicación a las coordenadas $(x, y, z, ...)$ de la base canónica en el espacio inicial, como es el caso del ejemplo 3. Ésto es equivalente a decir cómo actúa la aplicación en la base canónica del espacio inicial. Es natural pensar que, si sabemos cómo actua la aplicación en un vector general del espacio inicial, entonces conocemos todo sobre la aplicación. Como vimos en la anterior unidad, un vector general de un espacio vectorial lo podemos escribir como combinación lineal de una base de vectores. Ésto motiva el siguiente resultado: **para definir por completo una aplicación lineal es necesario conocer su efecto sobre una base del espacio incial**.

- Ejemplo 4: Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se conoce que $f(1,1) = (2,1,1)$ y que $f(1,-1) = (0,1,-1)$, calcule la matriz de la aplicación en las bases canónicas.

  Los vectores $(1,1)$ y $(1,-1)$ son una base de $\mathbb{R}^2$ ya que son 2 vectores linealmente independientes. Por lo tanto, la aplicación f está complétamente definida. Para calcular su matriz A en las bases canónicas, necesitamos $f(\vec{e}_1) = f(1,0)$ y $f(\vec{e}_2) = f(0,1)$, vamos a usar que,

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \tag{3.2.3}$$

  como sabemos que $f(1,1) = (2,1,1)$, $f(1,-1) = (0,1,-1)$ y que f es lineal:

  $$\begin{aligned} f(1,1) &= f\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) = f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2), \qquad (3.2.4) \\ f(1,-1) &= f\left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2\right) = f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2), \end{aligned}$$

usamos este sistema para despejar $f(\vec{e}_1)$ y $f(\vec{e}_2)$ sumando y restando las ecuaciones y dividiendo entre 2,

$$f(\vec{e}_1) = \frac{1}{2}\left[f(1,1) + f(1,-1)\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \tag{3.2.5}$$

$$f(\vec{e}_2) = \frac{1}{2}\left[f(1,1) - f(1,-1)\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Luego hemos obtenido que $f(\vec{e}_1) = (1,1,0)$ y $f(\vec{e}_2) = (1,0,1)$ por lo que la matriz de la aplicación es,

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.2.6}$$

Una vez tenemos la matriz de la aplicación, dejamos para el lector el comprobar que, con ésta matriz, $f(1,1) = (2,1,1)$ y $f(1,-1) = (0,1,-1)$. Éstas comprobaciones son útiles para familiarizarse con los conceptos y ganar intuición.

Ahora que sabemos cómo construir la matriz de una aplicación en las bases canónicas, vamos a ver cómo realizar un cambio de base. Como hemos visto en el ejemplo 4, es posible que queramos trabajar en bases distintas ya sea del espacio inicial, del final o de ambos. Por ello necesitamos una herramienta para cambiar las aplicaciones de base de forma sencilla. Ésto será de especial relevancia en la siguiente unidad, cuando queramos *diagonalizar* aplicaciones.

○ **Cambio de base de la matriz de una aplicación:**
Dada A la matriz de la aplicación $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en las **bases antiguas** $B_1 = \{\vec{u}_i\}$ con $i = 1,...n$ base de $\mathbb{R}^n$, y $B_2 = \{\vec{v}_j\}$ con $j = 1,...m$ base de $\mathbb{R}^m$. Si queremos cambiar de base a las **bases nuevas** $B_1' = \left\{\vec{u}_i{}'\right\}$ con $i = 1,...n$ y $B_2' = \left\{\vec{v}_j{}'\right\}$ con $j = 1,...m$. Entonces la matriz de la aplicación A' en las nuevas bases es,

$$A' = D^{-1}\,A\,C,$$

donde C es la matriz de cambio de base de B_1 a B_1': $C = M_{B_1 \to B_1'}$; y D es la matriz de cambio de base de B_2 a B_2': $C = M_{B_2 \to B_2'}$.

El cambio de base de aplicaciones es el motivo fundamental por el cuál definimos las **matrices de cambio de base**, ya que gracias a esa definición ahora tenemos un método sencillo y sistemático para el cambio de base de aplicaciones. Los pasos importantes para ello son:

1. Identificar la **base nueva y antigua** del **espacio inicial**.

2. Construir la **matriz de cambio de base** C que realiza el cambio de base en el **espacio inicial**.

3. Identificar la **base nueva y antigua** del **espacio final**.

4. Construir la **matriz de cambio de base** D que realiza el cambio de base en el **espacio final**.

5. Usar $A' = D^{-1}\,A\,C$ para calcular la matriz de la aplicación en las nuevas bases.

Aunque no vamos a realizar la demostración de éste resultado, si que podemos comprobarlo de forma sencilla. La matriz de la aplicación A' en las nuevas bases toma vectores del espacio inicial en la base $B_1^{'}$: $\vec{u}_{B_1^{'}}$, y los lleva a vectores del espacio final en la base $B_2^{'}$: $\vec{v}_{B_2^{'}}$:

$$A' \;\longrightarrow\; \vec{v}_{B_2^{'}} = A'\,\vec{u}_{B_1^{'}}, \tag{3.2.7}$$

usamos ahora el resultado que queremos probar $A' = D^{-1}\,A\,C$,

$$\vec{v}_{B_2^{'}} = \left(D^{-1}\,A\,C\right)\,\vec{u}_{B_1^{'}}, \tag{3.2.8}$$

como $\vec{u}_{B_1^{'}}$ son las coordenadas de $\vec{u}$ en la base nueva, usamos la definición del cambio de coordenadas de un vector que vimos en la unidad anterior:

$$\vec{u}_{B_1^{'}} = M^{-1}_{B_1\to B_1^{'}}\,\vec{u}_{B_1} = C^{-1}\,\vec{u}_{B_1}, \tag{3.2.9}$$

donde hemos usado que C es la matriz de cambio de base de B_1 a $B_1^{'}$. Utilizamos (3.2.9) en la ecuación (3.2.8),

$$\vec{v}_{B_2^{'}} = D^{-1}\,A\,C\,C^{-1}\,\vec{u}_{B_1} = D^{-1}\,A\,\vec{u}_{B_1}, \tag{3.2.10}$$

la matriz A es, por definición, la matriz que nos lleva vectores del espacio inicial en la base B_1 a vectores del espacio final en la base B_2 luego:

$$A\,\vec{u}_{B_1} = \vec{v}_{B_2}, \tag{3.2.11}$$

usamos éste resultado en (3.2.10),

$$\vec{v}_{B_2'} = D^{-1}\,\vec{v}_{B_2}, \tag{3.2.12}$$

como D es por definición la matriz de cambio de base de B_2 a B_2' en el espacio final tenemos que,

$$\vec{v}_{B_2'} = D^{-1}\,\vec{v}_{B_2} = M^{-1}_{B_2\to B_2'}\,\vec{v}_{B_2} = \vec{v}_{B_2'}. \tag{3.2.13}$$

Por lo tanto hemos comprobado la ecuación para el cambio de base de una aplicación.

- Ejemplo 5: Dada la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ con matriz en las bases canónicas,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2.14}$$

calcule la matriz de la aplicación A' en las nuevas bases de $\mathbb{R}^2$: $B_1' = \{(1,1),(1,-1)\}$ y de $\mathbb{R}^3$: $B_2' = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$.

Lo primero de todo es identificar las bases antiguas y nuevas y construir las matrices de cambio de base C y D. En el espacio inicial, la base antigua es la canónica y la nueva la base $B_1' = \{(1,1),(1,-1)\}$ luego la matriz de cambio de base es,

$$M_{B_1\to B_1'} = C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.15}$$

En el espacio final, la base antigua es la canónica y la nueva la base $B_2' = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ luego la matriz de cambio de base es,

$$M_{B_2\to B_2'} = D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.16}$$

Para realizar el cambio de base $A' = D^{-1}\,A\,C$ necesitamos D^{-1}, dejamos al lector el cálculo de ésta inversa haciendo uso de las herramientas de la unidad 1,

$$D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.17}$$

Por lo tanto la matriz en las nuevas bases será:

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.18}$$

- Ejemplo 6: Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se conoce que $f(1,1) = (2,1,1)$ y que $f(1,-1) = (0,1,-1)$, calcule la matriz de la aplicación en las bases canónicas haciendo uso del cambio de base de aplicaciones.

  Como nos dan lo que vale la aplicación sobre una base, podemos construir la matriz de la aplicación en dicha base. En éste caso, la matriz de f en la base $B_1^{'} = \{(1,1),(1,-1)\}$ del espacio inicial y $B_2^{'}$ la base canónica del espacio final, es,

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.19}$$

  Con ello, si las bases antiguas las consideramos como las bases canónicas de ambos espacios tenemos que $A' = D^{-1}\,A\,C$ donde C es la matriz de cambio de base de la canónica a $B_1^{'}$ y D la matriz de cambio de base de la canónica a la canónica, es decir, no hay cambio de base luego $D = D^{-1} = I_3$, despejando de la ecuación del cambio de base,

$$A = A'\,C^{-1}, \tag{3.2.20}$$

  donde C y su inversa valen,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.2.21}$$

  por lo tanto,

$$A = A'\,C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.22}$$

  Como vemos, se obtiene el mismo resultado para la matriz A que en el ejemplo 4.

3.3. Propiedades y tipos de aplicaciones

En ésta sección veremos dos propiedades importantes de las aplicaciones lineales: la imagen y el núcleo o kernel de una aplicación lineal. Gracias a éstas propiedades, vamos a poder clasificar las aplicaciones lineales en distintos tipos: inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

3.3.1. Propiedades de las aplicaciones lineales

○ **Imagen de una aplicación:**
Dado $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y siendo $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector general de $\mathbb{R}^n$, se define la imagen de A como $A(\vec{u}) \in \mathbb{R}^m$. Es decir, la imagen de una aplicación lineal son todos los elementos del espacio final que se pueden obtener con la aplicación.

Si volvemos a pensar en las funciones de una variable $f(x)$, la imagen de una aplicación lineal es lo mismo que la imagen de una función de una variable. Ésta imagen puede ser todo el espacio final o bien un subconjunto del espacio final. **La imagen de una aplicación lineal es un subespacio vectorial del espacio final de la aplicación**.

- Ejemplo 7: Dada la siguiente aplicación $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A(x, y) = (x + y, x, y)$, calcule la imagen de A y su dimensión.

  La imagen es el subespacio vectorial del espacio final de la aplicación que se obtiene de aplicar A a un vector general del espacio inicial. Ésto ya lo tenemos con la definición del enunciado,

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3.1}$$

  como x e y son parámetros arbitrarios ya que es un vector general de $\mathbb{R}^2$, la expresión anterior nos está dando el sistema generador de la imagen $\mathrm{Img}(A) = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$. Es fácil probar que esos dos vectores son linealmente independientes, por lo tanto son una base. Al tener la base de la imagen 2 elementos tenemos que $\dim(\mathrm{Img}(A)) = 2$. Es interesante recordar cuál era la matriz A de ésta aplicación, como calculamos en el ejemplo 4,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3.2}$$

  si nos paramos un momento a pensar, los vectores columna de la matriz de la aplicación son los vectores del sistema generador de la imagen (en éste caso al ser linealmente independientes, también son la base).

Motivados por el ejemplo anterior, enunciamos el siguiente resultado. Se puede probar que: **el rango de la matriz de la aplicación lineal A es igual a la dimensión de su imagen**,

$$\boxed{r(A) = \dim\left[\operatorname{Img}(A)\right]} \tag{3.3.3}$$

Como vemos en el ejemplo 7, el rango de la matriz A de la ecuación (3.3.2) es 2 ya que tiene dos vectores columna linealmente independientes y la dimensión de la imagen hemos calculado que es también 2.

○ **Núcleo de una aplicación:**
Dada la aplicación lineal $A : U \to V$ se define el núcleo o kernel de A y se denota como $\ker(A)$ a todos los vectores del espacio inicial cuya imagen a través de la aplicación vale cero, es decir,

$$\ker(A) = \left\{\vec{x} \in U \,/\, A(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$$

El núcleo de una aplicación lineal es un subespacio vectorial del espacio inicial de la aplicación.

Recuperando de nuevo la analogía con las funciones de una variable $f(x)$, el núcleo de una aplicación lineal es como los ceros de una función $f(x) = 0$, por ejemplo las raices de un polinomio.

- Ejemplo 8: Dada la siguiente aplicación $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A(x, y) = (x + y, x, y)$, calcule el núcleo de A y su dimensión.

  Para calcular el núcleo simplemente hay que igualar a cero la imagen de la aplicación y calcular todos los posibles vectores del espacio inicial que cumplen el sistema, en éste caso,

  $$A(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.4}$$

  de las dos últimas ecuaciones tenemos que $x = y = 0$ por lo tanto $\ker(A) = \vec{0}$. Recordemos que el $\left\{\vec{0}\right\}$ es un subespacio vectorial de un solo elemento (un punto) luego $\dim\left[\ker(A)\right] = 0$.

Una vez que hemos definido la imagen y el núcleo de una aplicación lineal podemos comprobar que se cumple el siguiente resultado:

$$\boxed{\dim\left[\mathrm{Img}(A)\right] + \dim\left[\ker(A)\right] = \dim(U)} \tag{3.3.5}$$

donde U es el espacio inicial de la aplicación lineal A.

- Ejemplo 9: Dada la siguiente aplicación $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A(x, y) = (x + y, x, y)$, comprobar que $\dim\left[\mathrm{Img}(A)\right] + \dim\left[\ker(A)\right]$ es igual a la dimensión del espacio inicial, en éste caso $\mathbb{R}^2$.

  Como hemos calculado en los ejemplos 7 y 8, $\dim\left[\mathrm{Img}(A)\right] = 2$ y $\dim\left[\ker(A)\right] = 0$, luego,

$$\dim\left[\mathrm{Img}(A)\right] + \dim\left[\ker(A)\right] = 2 + 0 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2). \tag{3.3.6}$$

3.3.2. Tipos de aplicaciones lineales

Vamos a clasificar las aplicaciones lineales en función de si son o no: inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. De la misma forma que en anteriores apartados, hay una analogía clara con las funciones de una variable $f(x)$.

○ **Aplicación inyectiva:**
Se dice que una aplicación $A : U \to V$ es inyectiva si:

$$A(\vec{x}) = A(\vec{y}) \iff \vec{x} = \vec{y}$$

es decir, que a cada elemento $\vec{u} \in U$ le corresponde un único elemento $A(\vec{u}) \in V$.

Una aplicación es inyectiva de la misma forma que una función $f(x)$ se dice que es inyectiva, cuando un resultado $f(x)$ solo se obtiene de un único valor de x. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva dado que $f(2) = f(-2) = 4$, hay dos valores de x que dan el mismo $f(x)$.

Imaginemos que, dada $A : U \to V$, existe $A(\vec{x}) = A(\vec{y})$ con $\vec{x}$ e $\vec{y}$ distintos. Entonces siempre podemos escribir $\vec{y} = \vec{x} + \vec{k}$ de modo que, al ser A lineal tenemos,

$$A(\vec{x}) = A(\vec{y}) = A(\vec{x} + \vec{k}) = A(\vec{x}) + A(\vec{k}), \tag{3.3.7}$$

por lo tanto,

$$A(\vec{x}) = A(\vec{x}) + A(\vec{k}) \;\longrightarrow\; A(\vec{k}) = \vec{0}. \tag{3.3.8}$$

Es decir, los vectores $\vec{k}$ son los vectores que pertenecen al núcleo de la aplicación. Si queremos que la aplicación sea inyectiva entonces $\vec{y} = \vec{x}$ y $\vec{k} = \vec{0}$. Hemos demostrado que una aplicación inyectiva cumple $\ker(A) = \vec{0}$. Si usamos éste resultado en la ecuación (3.3.5) obtenemos que $\dim\left[\mathrm{Img}(A)\right] = r(A) = \dim(U)$.

Con todo esto tenemos que, dada $A : U \to V$ se tiene que:

$$\boxed{r(A) = \dim(U) \iff \ker(A) = \vec{0} \iff \text{A es inyectiva}} \tag{3.3.9}$$

- Ejemplo 10: Dada la siguiente aplicación $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A(x, y) = (x + y, x, y)$ ¿es A una aplicación inyectiva?

  Como hemos calculado en ejemplos anteriores, $r(A) = 2$ que es igual que la dimensión del espacio inicial y $\ker(A) = \vec{0}$, por lo tanto A sí es una aplicación inyectiva.

○ **Aplicación sobreyectiva:**
Se dice que una aplicación $A : U \to V$ es sobreyectiva si y solo si:

$$\mathrm{Img}(A) = V.$$

Es decir, que la imagen de A es todo el espacio vectorial final V.

De la misma forma que en las funciones $f(x)$, una aplicación se dice que es sobreyectiva si cubre todo el espacio final. En el caso de las funciones de una variable, se dice que $f(x)$ es sobreyectiva si $f(x)$ va de menos infinito a infinito, por ejemplo $f(x) = 2x$ es sobreyectiva, mientras que $g(x) = x^2$ no es sobreyectiva ya que $g(x) \geq 0$.

Como vimos en el ejemplo 7, los vectores columna de la matriz de la aplicación lineal forman un sistema generador de la imagen de la aplicación. Por lo tanto, si tenemos un número de ellos linealmente independiente e igual a la dimensión del espacio final, sabemos que la imagen es todo el espacio final. Ésto implica el siguiente resultado: dada $A : U \to V$ se tiene que:

$$\boxed{r(A) = \dim(V) \iff \text{A es sobreyectiva}} \tag{3.3.10}$$

- Ejemplo 11: Dada la siguiente aplicación $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A(x, y) = (x + y, x, y)$ ¿es A una aplicación sobreyectiva?

  Como hemos calculado en ejemplos anteriores, $r(A) = 2$ que es la dimensión de la imagen de A. Sin embargo, el espacio final es $\mathbb{R}^3$ por lo que $r(A) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Por lo tanto no es una aplicación sobreyectiva.

○ **Aplicación biyectiva:**
Se dice que una aplicación $A : U \to V$ es biyectiva si es sobreyectiva e inyectiva. Si combinamos los resultados de las aplicaciones inyectivas y sobreyectivas tenemos que:

$$r(A) = \dim(U) = \dim(V) \text{ y } \ker(A) = \vec{0} \iff \text{A es biyectiva}$$

Es decir, el espacio inicial y final tienen la misma dimensión, la matriz de la aplicación tiene que ser cuadrada.

- Ejemplo 12: Dada la siguiente aplicación $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A(x, y, z) = (x, y, 0)$, clasifique la aplicación en función de si es o no inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

  Lo primero que tenemos que hacer es obtener la matriz de la aplicación. Para ello la evaluamos en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y colocamos el resultado como vectores columna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.11}$$

  Para clasificar la aplicación calculamos el rango de su matriz. $|A| = 0$ ya que tiene la última fila y columna con ceros. Como hay un menor de orden 2 distinto de cero,

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \tag{3.3.12}$$

  El rango de A vale 2. Luego $r(A) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ por lo que la aplicación no es inyectiva ni sobreyectiva (tampoco biyectiva). Vamos a entender en detalle qué significa ésto. La aplicación proyecta los puntos del espacio (x, y, z) en el plano $z = 0$, luego está claro que la aplicación no es sobreyectiva ya que la imagen de la aplicación es únicamente el plano $z = 0$ no todo el espacio.

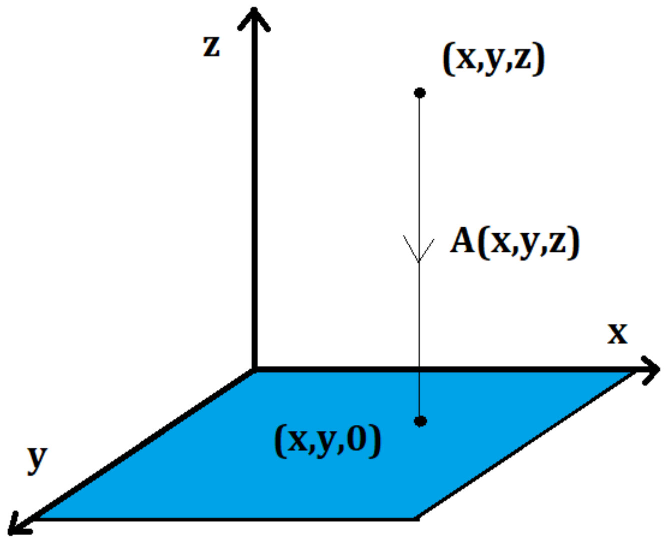


Figura 3.2: Representación gráfica del efecto de la aplicación lineal $A(x, y, z) = (x, y, 0)$.

Por otra parte, podemos tener dos vectores (x, y, z_1) y (x, y, z_2) que al aplicar A dan el mismo resultado: $A(x, y, z_1) = A(x, y, z_2) = (x, y, 0)$. Luego no es una aplicación inyectiva. Si calculamos el núcleo de la aplicación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.13}$$

resolviendo el sistema tenemos que $x = y = 0$ y z queda por determinar luego $z = \lambda$. Un vector general del $\ker(A)$ es de la forma,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3.14}$$

luego $\ker(A) = \langle(0, 0, 1)\rangle$ y por tanto $\dim[\ker(A)] = 1$. El núcleo es distinto de cero, nos da la dirección en la cual dos vectores dan el mismo resultado a través de la aplicación. Podemos comprobar que se cumple la relación,

$$\dim[\mathrm{Img}(A)] + \dim[\ker(A)] = \dim(U), \tag{3.3.15}$$

la imagen de A es el plano $z = 0$ luego su dimensión es 2, el núcleo es la recta z por lo que su dimensión es 1,

$$2 + 1 = \dim(\mathbb{R}^3) = 3. \tag{3.3.16}$$

- Ejemplo 13: Dada la siguiente aplicación $A_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siendo α un número real, tal que $A_\alpha(x, y) = (\cos(\alpha)\, x - \sin(\alpha)\, y, \sin(\alpha)\, x + \cos(\alpha)\, y)$, clasifique la aplicación en función de si es o no inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

De la misma forma que en el ejemplo anterior, primero calculamos la matriz de la aplicación en las bases canónicas,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad (3.3.17)$$

Calculamos su rango para clasificarla, para ello tomamos $|A_\alpha|$,

$$|A_\alpha| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0, \qquad (3.3.18)$$

luego $r(A_\alpha) = 2$ que es igual a la dimensión del espacio final e inicial que es $\mathbb{R}^2$, la aplicación es inyectiva y sobreyectiva y, por tanto, es una aplicación biyectiva.

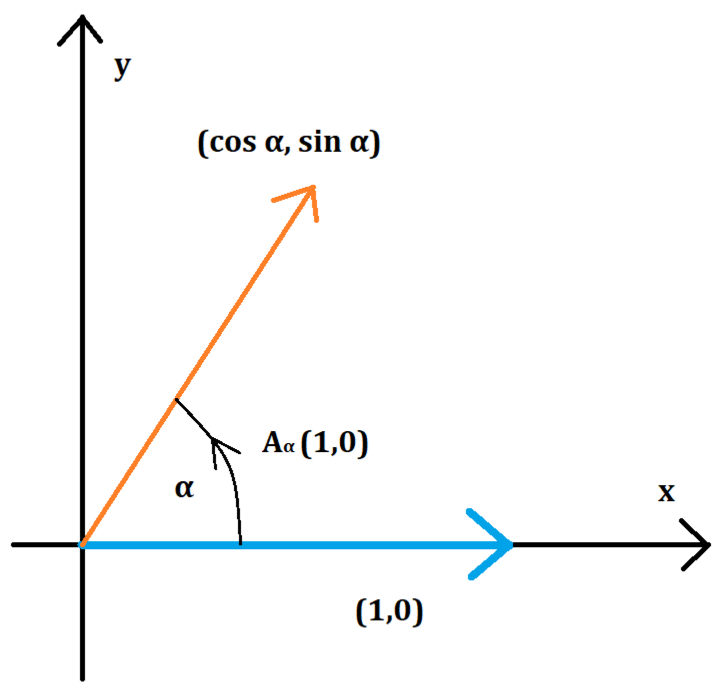


Figura 3.3: Representación gráfica del efecto de la aplicación lineal $A_\alpha(x, y)$.

Como podemos ver en la figura 3.3, la aplicación rota los vectores un ángulo α. Partiendo del vector inicial que queramos, podemos construir todos los vectores de

$\mathbb{R}^2$ con la aplicación por lo que es sobreyectiva. Por otro lado, no es posible encontrar 2 vectores tales que al rotarlos un ángulo α den el mismo resultado, luego la aplicación es inyectiva. Si calculamos el núcleo, veremos que $\ker(A_\alpha) = \vec{0}$ y por tanto se cumple que,

$$\dim\left[\mathrm{Img}(A)\right] + \dim\left[\ker(A)\right] = 2 + 0 = \dim(U) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2. \tag{3.3.19}$$

Capítulo 4

Diagonalización de matrices

En la unidad anterior, vimos qué eran las aplicaciones entre espacios vectoriales $A : U \to V$. En particular hemos estudiado las aplicaciones lineales y, dentro de ellas, aplicaciones que van de un espacio al mismo $A : U \to U$. Éste tipo de aplicaciones hemos visto que se pueden representar por medio de matrices cuadradas, de modo que $A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. Al ser matrices cuadradas, en ciertas ocasiones es posible encontrar una base en la cual la matriz de la aplicacion es diagonal. En ésta unidad vamos a estudiar cúando podemos diagonalizar una matriz, cómo y algunas de las aplicaciones de la diagonalización.

Empecemos considerando el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.0.1}$$

ésta sera la matriz de una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada en la base canónica. Vamos a cambiarla de base a la base dada $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(1, 2), (2, 3)\}$. Como la base antigua es la canónica, la matriz de cambio de base $C = M_{C\to B}$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \;\longrightarrow\; C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.0.2}$$

como el espacio inicial y el final son el mismo $D = C$ en la ecuación del cambio de base de aplicaciones, luego:

$$A' = C^{-1}\,A\,C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{4.0.3}$$

La matriz de la aplicación es una matriz diagonal en la base B, esto no es una simple curiosidad ya que nos puede simplificar mucho los cálculos. Por ejemplo, imaginemos que queremos calcular A^{10}, el lector puede probar a calcular $A \cdot A \cdot A...$ para percatarse de que el cálculo, aunque no es complicado, se vuelve muy engorroso. Sin embargo, podemos usar el resultado anterior:

$$A' = C^{-1}\,A\,C \;\rightarrow\; A = C\,A'\,C^{-1} \;\rightarrow\; A^{10} = \left(C\,A'\,C^{-1}\right)^{10} \;\rightarrow$$

$$A^{10} = C\,A'\,C^{-1}\,C\,A'\,C^{-1}\,C\,A'\,C^{-1}... \;\rightarrow\; A^{10} = C\,A'\,I_2\,A'\,I_2\,A'\,C^{-1}... \;\rightarrow$$

$$A^{10} = C\,A'^{10}\,C^{-1}. \tag{4.0.4}$$

Gracias a que A' es diagonal, es muy sencillo calcular A'^{10}:

$$A'^{10} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{pmatrix}, \tag{4.0.5}$$

y con ello usando (4.0.4) tenemos que,

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 233124 & -116050 \\ 348150 & -173051 \end{pmatrix}. \tag{4.0.6}$$

Como vemos, el resultado es bastante extenso como para calcularlo sin hacer uso de la matriz diagonal. El lector pordría pensar que, con el acceso al cálculo con ordenador y programas como python o matlab, no es necesario .ªcortar"los cálculos largos a mano. Sin embargo, estos mismos códigos necesitan de métodos como éstos para simplificar el tiempo de cálculo, reducir latencia, etc.

En el anterior ejemplo, nos daban de antemano la base en la cuál la matriz era diagonal. La idea es tener un método para encontrar dicha base en los casos en los que sea posible. Para ello tendremos que definir una serie de conceptos que nos llevarán a los criterios y las herramientas para diagonalizar matrices.

4.1. Subespacios invariantes

El primer concepto que está íntimamente relacionado con la diagonalización es el de subespacio invariante.

○ **Subespacio invariante:**
Dada una aplicación lineal $A : U \to U$ se define el subespacio invariante V de la aplicación A como:

$$V = \{\vec{x} \in U \,/\, A(\vec{x}) \in V\} \,.$$

Es decir, el subespacio invariante V son los vectores $\vec{x}$ tales que al aplicarles A siguen estando en V. Se puede probar que los subespacios invariantes son subespacios vectoriales y que la suma e intersección de ellos también son subespacios vectoriales.

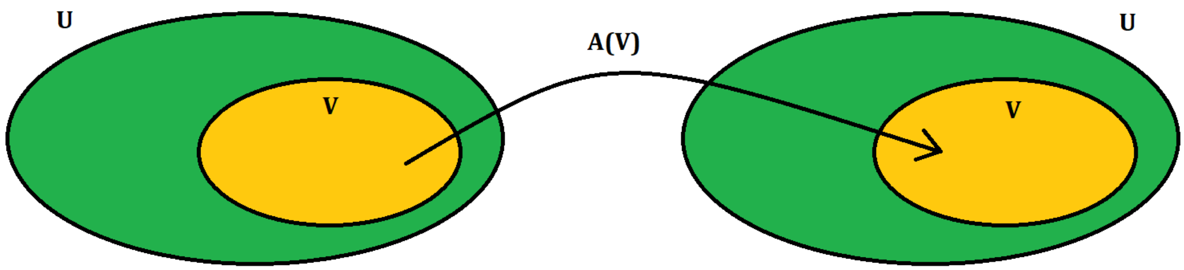


Figura 4.1: Dada la aplicación $A : U \to U$, V es un subespacio invariante de A si $A(V)$ está contenido en V.

- Ejemplo 1: Dada la siguiente aplicación lineal $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A(x,y,z) = (x,y,0)$, compruebe que los siguientes subespacios vectoriales son subespacios invariantes de A:

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = z = 0\right\}, \tag{4.1.1}$$

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = z = 0\right\}. \tag{4.1.2}$$

¿Es $U + V$ un subespacio invariante de A?

La matriz de la aplicación lineal en la base canónica es,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1.3}$$

para comprobar si U y V son invariantes lo que tenemos que hacer es calcular $A(\vec{u})$ y $A(\vec{v})$ donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores generales de U y V respectivamente.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x = 0 \\ y \\ z = 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1.4}$$

luego $U = \langle (0,1,0) \rangle$ y $V = \langle (1,0,0) \rangle$. Calculamos $A(\vec{u})$ y $A(\vec{v})$:

$$A(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \tag{4.1.5}$$

$$A(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V, \tag{4.1.6}$$

por lo tanto está claro que $A(\vec{u}) \in U$ y $A(\vec{v}) \in V$ por lo que son subespacios invariantes. La suma $U + V = \langle (0,1,0), (1,0,0) \rangle$ y un vector general $\vec{w}$ de $U + V$ será,

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.7}$$

Calculamos entonces $A(\vec{w})$ para comprobar que $U + V$ es también un subespacio invariante,

$$A(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in U + V. \tag{4.1.8}$$

Si recordamos esta aplicación lineal de la unidad anterior, gráficamente lo que hace la aplicación es proyectar un punto del espacio en el plano $z = 0$. Es por ello que el subespacio invariante es el propio plano $z = 0$ ya que cualquier punto de éste plano, al proyectarse, queda en el mismo plano $z = 0$.

- Ejemplo 2: Dada la siguiente aplicación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $A(x, y) = (2x, 2y)$, compruebe que el subespacio vectorial $U = \langle (1,0) \rangle$ es invariante respecto a A.

  La matriz de la aplicación es,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.1.9}$$

calculamos $A(\vec{u})$ con $\vec{u}$ un vector general de U,

$$A(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \tag{4.1.10}$$

el vector resultante sigue perteneciendo a U ya que es de la forma $\alpha(1, 0)$. Nótese que la matriz A es diagonal en la base canónica y el subespacio generado por el vector de la base canónica $(1, 0)$, es un subespacio invariante.

Como hemos motivado en los ejemplos, los subespacios invariantes tienen relación con las matrices diagonales. Si encontramos los subespacios invariantes de una aplicación, estaremos más cerca de encontrar la base en la cuál su matriz es diagonal.

4.2. Valores y vectores propios

También son denominados **autovalores** y **autovectores** y, como veremos, están estrechamente relacionados con los subespacios invariantes y la diagonalización de matrices.

Dada la siguiente ecuación matricial:

$$\boxed{A\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}} \tag{4.2.1}$$

Donde A es una matriz cuadrada, se define:

- **Autovalores de A:** como los valores de λ que cumplen la ecuación (4.2.1).
- **Autovectores de A asociados a λ:** como los vectores $\vec{x}$ que cumplen la ecuación (4.2.1) para cada valor de λ.

- Ejemplo 3: Dada la aplicación lineal con matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.2}$$

compruebe que $(1, 0)$ es un autovector de A asociado al autovalor $\lambda = 2$.

Efectivamente si multiplicamos A por el vector $(1, 0)$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2.3}$$

por lo que se cumple la ecuación de autovalores $A\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}$ con $\vec{x} = (1, 0)$ y $\lambda = 2$. Como vimos en el ejemplo 2, el subespacio generado por el $(1, 0)$ era un subespacio invariante. Esto es así ya que los autovectores son vectores generadores de subespacios invariantes.

Como veremos más en detalle a continuación, si encontramos los autovalores y autovectores de A, podemos hacer un cambio de base a la base de autovectores para obtener la matriz diagonal. Los elementos de la diagonal en la matriz diagonal serán los autovalores de A.

4.2.1. Cálculo de autovalores y autovectores

Una vez hemos definido qué son los autovalores y autovectores, vamos a ver cómo podemos calcularlos. Para ello lo que tenemos que hacer es resolver la ecuación (4.2.1). Para resolver ésta ecuación es conveniente reescribirla como:

$$A\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x} \;\longrightarrow\; (A - \lambda\, I)\;\vec{x} = \vec{0}, \tag{4.2.4}$$

la ventaja de escribir la ecuación de ésta forma es que es un **sistema homogéneo** para el vector $\vec{x}$ y, como vimos, los sistemas homogéneos tienen propiedades muy útiles. Sabemos que, si el determinante de la matriz de coeficientes (en este caso $(A - \lambda\, I)$) es distinto de cero, entonces es un S.C.D y la solución única es $\vec{x} = \vec{0}$. Dicha solución no la queremos ya que es la solución trivial de (4.2.1). Por lo tanto necesitamos que $|A - \lambda\, I| = 0$, de aquí obtendremos los **autovalores**. Una vez tenemos los autovalores, hay que resolver la ecuación $(A - \lambda\, I)\;\vec{x} = \vec{0}$ que, como vimos en la unidad de aplicaciones lineales, es lo mismo que calcular el núcleo de la matriz $(A - \lambda\, I)$. Con ello obtenemos los **autovectores** para cada autovalor. Resumimos a continuación el cálculo.

○ **Cálculo de autovalores:**
Se define el **polinomio característico** de A como $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = |A - \lambda\, I|\,.$$

Los autovalores λ se obtienen de la ecuación: $P(\lambda) = 0$.

- Ejemplo 4: Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2.5}$$

calcule los autovalores de A.

Para calcular los autovalores tenemos que calcular el polinomio característico de A:

$$P(\lambda) = |A - \lambda\, I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1. \tag{4.2.6}$$

Para obtener los autovalores tenemos que igualar a cero el polinomio característico $P(\lambda) = 0$ lo que implica $\lambda^2 - 1 = 0$ por lo que tenemos 2 autovalores reales $\lambda_1 = +1$ y $\lambda_2 = -1$.

Como sabemos de Cálculo, un polinomio de orden n puede tener hasta n raices (ceros del polinomio). Las raices pueden no existir en los números reales, hasta esta unidad no vamos a tener en cuenta el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. También puede ocurrir que existan raices múltiples, en éste caso vamos a definir lo que es la multiplicidad de un autovalor.

◦ **Multiplicidad de autovalores:**
Se dice que un autovalor tiene multiplicidad m si es una raiz múltiple con multiplicidad m del polinomio característico $P(\lambda)$.

- Ejemplo 5: Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.7}$$

calcule los autovalores de A.

Procedemos de la misma forma que en el ejemplo anterior:

$$P(\lambda) = |A - \lambda\, I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2. \tag{4.2.8}$$

Al igualar el polinomio característico a cero $P(\lambda) = 0$, tenemos dos autovalores: del término $(\lambda - 2)$ el autovalor $\lambda_1 = 2$ simple; y del término $(\lambda - 1)^2$ el autovalor $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad 2, o autovalor doble.

○ **<u>Cálculo de autovectores:</u>**
Una vez calculados los autovalores λ_i, calculamos los autovectores resolviendo la ecuación $(A - \lambda_i\, I)\ \vec{x} = \vec{0}$ para cada autovalor. De ésta forma, cada autovalor λ_i tiene asociado un **subespacio invariante o subespacio propio**. Los vectores de la base de ese subespacio nos dirán la dimensión del subespacio propio que denominaremos como la **multiplicidad del subespacio propio**.
○ **<u>Subespacio propio asociado a λ_i:</u>**
Se le denota como $E(\lambda_i)$ y se calcula como:

$$E(\lambda_i) = \ker\left(A - \lambda_i\, I\right).$$

Los vectores $\vec{x} \in E(\lambda_i)$ son los autovectores asociados al autovalor λ_i. Se cumple que la **intersección de dos subespacios propios distintos es cero**, es decir,

$$E(\lambda_i) \cap E(\lambda_j) = \vec{0} \ \text{ para } \ i \neq j.$$

Ésta propiedad es interesante ya que, usando lo que vimos en la unidad 2, sabemos que son suma directa y la dimensión de la suma va a ser la suma de dimensiones.

- Ejemplo 6: Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.9}$$

y conociendo que sus autovalores son $\lambda_1 = 2$ simple y $\lambda_2 = 1$ doble, calcule los subespacios propios de A.

Para calcular los subespacios propios, y por tanto los autovectores asociados a cada autovalor, tenemos que resolver $E(\lambda_i) = \ker\left(A - \lambda_i\, I\right)$ para cada autovalor:

$$E(\lambda_1) = \ker\left(A - 2\, I\right) \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.10}$$

Recordemos que este sistema siempre va a ser un S.C.I por construcción ya que hemos calculado λ_i para que $|A - \lambda_i\, I| = 0$, ésto nos puede ser de mucha utilidad para agilizar el cálculo; y será especialmente útil cuando trabajemos con números complejos. Gracias a ésto podemos considerar únicamente las ecuaciones 1 y 3:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \ \rightarrow \ \begin{cases} z = y \\ x = -y \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Luego un vector general de $E(\lambda_1)$ se puede poner como:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.2.12}$$

por lo tanto $E(\lambda_1) = \langle(-1,1,1)\rangle$. Como veremos, al ser λ_1 un autovalor simple, teníamos asegurado que la base de $E(\lambda_1)$ tendría un único vector. Así, $\vec{v}_1 = (-1,1,1)$ es uno de los autovectores asociados a λ_1. Nótese que no es el único autovector ya que $\vec{v}_1^{\,\prime} = (1,-1,-1)$, así como cualquier múltiplo de $\vec{v}_1$, también son autovectores de λ_1.

Pasamos ahora a calcular $E(\lambda_2 = 1)$:

$$E(\lambda_2) = \ker(A - I) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.13}$$

En éste caso vemos de forma sencilla que las dos últimas ecuaciones del sistema son iguales a la primera multiplicadas por un signo menos, luego la única ecuación independiente es $x + y - z = 0$. Luego podemos escribir un vector general de $E(\lambda_2)$ como:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.2.14}$$

por lo tanto $E(\lambda_2) = \langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$ cuya multiplicidad es 2 ya que hay dos autovalores linealmente independientes asociados al autovalor $\lambda_2 = 1$, que era un autovalor doble. Más adelante veremos la repercusión que tiene éste resultado.

Con todo ello los subespacios propios de A asociados a $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ son $E(\lambda_1) = \langle(-1,1,1)\rangle$ y $E(\lambda_2) = \langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$.

4.3. Diagonalización

Ahora que hemos visto los subespacios invariantes o subespacios propios, los autovalores y los autovectores; tenemos todas las herramientas necesarias para determinar cuándo es posible diagonalizar una matriz y cómo hacerlo.

Diremos que una matriz es diagonalizable si se puede encontrar una **base en la cuál dicha matriz sea diagonal**. Si tenemos una matriz A en la base B (tanto en el espacio inicial como en el final ya que son el mismo), será diagonalizable con matriz diagonal A' si,

$$A' = C^{-1} A C, \tag{4.3.1}$$

donde C es la matriz de cambio de base de la base B a la base B' en la cual se diagonaliza la matriz A.

○ **Diagonalización:**
Dada una aplicación $A : V \to V$, la matriz de la aplicación A es diagonalizable si y solo si existe una **base** de V formada únicamente por **autovectores** de A.

- Si A es una matriz de dimensión n y tiene n autovalores λ_i todos distintos entre sí, entonces A es diagonalizable.
- Si A tiene autovalores con multiplicidad mayor que 1, entonces es diagonalizable si la multiplicidad total de los autovalores es igual a la multiplicidad total de los autovectores.

Como vimos en los ejemplos anteriores, un autovalor simple siempre tiene asociado un único autovector, ni más ni menos. Por lo tanto si, por ejemplo, tenemos una matriz de orden 3 con 3 autovalores simples, cada autovalor tiene asociado un autovector por lo tanto tendremos un total de 3 autovectores linealmente independientes para formar una base. Sabemos que serán independientes ya que vimos que la intersección entre subespacios propios es cero.

En caso de tener autovalores múltiples, tenemos que asegurarnos que cada autovalor múltiple tiene tantos autovectores independientes como multiplicidad del autovalor. Por ejemplo, si tenemos un autovalor doble, para que la matriz pueda ser diagonalizable necesitamos que ese autovalor tenga asociados dos autovectores linealmente independientes.

○ **Matriz diagonal y matriz de paso:**
Dada una matriz A que es diagonalizable, se define su matriz diagonal D como una matriz diagonal cuyos **elementos de la diagonal son los autovalores** teniendo en cuenta sus respectivas multiplicidades.

Se define la matriz de paso P como la **matriz de cambio de base a la base de autovectores**, y tiene como columnas los respectivos autovectores (en coordenadas respecto a la base inicial) asociados a cada autovalor en la misma posición de la matriz diagonal. De éste modo:

$$D = P^{-1} A P$$

- Ejemplo 7: Dada la aplicación $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz en la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.3.2}$$

Determine si es o no diagonalizable y, en caso de serlo, encontrar una base en la cuál es diagonal y su matriz diagonal.

Tal y como hemos calculado en los ejemplos anteriores, los autovalores de A son $\lambda_1 = 2$ simple y $\lambda_2 = 1$ doble, cuyos subespacios propios son $E(\lambda_1) = \langle(-1, 1, 1)\rangle$ y $E(\lambda_2) = \langle(1, 0, 1), (0, 1, 1)\rangle$. Como sabemos que $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \vec{0}$ tenemos que,

$$\dim(E(\lambda_1) + E(\lambda_2)) = \dim(E(\lambda_1)) + \dim(E(\lambda_2)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3), \tag{4.3.3}$$

luego existe una base de autovectores del espacio de la aplicación A (que es $\mathbb{R}^3$) por lo que A es diagonalizable. Una posible base en la cual A es diagonal es la formada por los siguientes autovectores $B = \{(-1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. La matriz diagonal y una matriz de paso son:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.3.4}$$

donde hemos colocado los autovalores y autovectores en D y P en el orden adecuado.

Podemos comprobar que se cumple la ecuación del cambio de base $P^{-1}\,A\,P = D$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D. \tag{4.3.5}$$

4.4. Aplicaciones de la diagonalización de matrices

Por último, vamos a ver dos aplicaciones directas de la diagonalización de matrices: elevar una matriz a un número arbitrario y el Teorema de Cayley-Hamilton. En la siguiente unidad veremos otra aplicación de la diagonalización que no es tan directa como las dos anteriores.

○ **Elevar una matriz a un número arbitrario:** ésta aplicación ya la vimos en un ejemplo al principio de la unidad, vamos a formalizarla aquí. El objetivo es calcular A^n con n un número arbitrario, para ello hacemos uso de la diagonalización:

$$D = P^{-1}\,A\,P \;\rightarrow\; A = P\,D\,P^{-1} \;\rightarrow\; A^n = \left(P\,D\,P^{-1}\right)^n \rightarrow$$

$$A^n = P\,D\,P^{-1}\,P\,D\,P^{-1}\,P\,D\,P^{-1} ... = P\,D\,I\,D\,I\,D\,...\,P^{-1} = P\,D^n\,P^{-1}$$

$$\boxed{A^n = P\,D^n\,P^{-1}} \tag{4.4.1}$$

Dado que elevar una matriz diagonal a un número es simplemente elevar los elementos de su diagonal a ese número, el cálculo se simplifica enormemente.

○ **Teorema de Cayley-Hamilton:** dada una matriz cuadrada A con polinomio característico $P(\lambda) = |A - \lambda I|$, la matriz A cumple la ecuación $P(A) = 0$ donde se sustituye en el polinomio característico λ por A y el elemento unidad por I.

- Ejemplo 8: Dada $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y sabiendo que su matriz diagonal vale,

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}, \tag{4.4.2}$$

en la base $B' = \{(1,2), (-2,1)\}$.

1. Calcule la matriz A en la base canónica.
2. Calcule $M = A^3 - 2A^2 + A + 3I$.
3. Calcule A^2 haciendo uso del teorema de Cayley-Hamilton.

Sabemos que la matriz diagonal $D = P^{-1}\,A\,P$ luego podemos despejar la matriz $A = P\,D\,P^{-1}$. La matriz de paso P es la matriz de cambio de base de la base canónica a la base B' luego,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.4.3}$$

Por lo tanto podemos calcular la matriz A como,

$$A = P\,D\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}. \tag{4.4.4}$$

Para calcular $M = A^3 - 2A^2 + A + 3I$ hacemos uso del cálculo de $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$ para simplificar las operaciones de modo que,

$$M = P\,D^3\,P^{-1} - 2P\,D^2\,P^{-1} + P\,D\,P^{-1} + 3P\,I\,P^{-1}, \tag{4.4.5}$$

donde hemos usado que $I = P\,I\,P^{-1}$ ya que $P\,I = P$ y $P\,P^{-1} = I$. Ésto es de utilidad ya que podemos sacar por la izquierda factor común P y por la derecha P^{-1} obteniendo,

$$M = P\,\left(D^3 - 2D^2 + D + 3I\right)\,P^{-1}, \tag{4.4.6}$$

el paréntesis es sencillo de calcular ya que son matrices diagonales,

$$D^3 - 2D^2 + D + 3I = \begin{pmatrix} 3^2 - 2\cdot 3^2 + 3 + 3\cdot 1 & 0 \\ 0 & 18^3 - 2\cdot 18^2 + 18 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5205 \end{pmatrix}. \tag{4.4.7}$$

Con todo ello la matriz M vale,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 5205 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4167 & -2076 \\ -2076 & 1053 \end{pmatrix}. \tag{4.4.8}$$

Por último, calculamos A^2 con el teorema de Cayley-Hamilton. El teorema nos dice que la matriz cumple su polinomio característico:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 15-\lambda & -6 \\ -6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 21\lambda + 54, \tag{4.4.9}$$

por lo tanto la matriz A cumple $P(A) = 0$, es decir,

$$A^2 - 21\,A + 54\,I = 0, \tag{4.4.10}$$

de aquí podemos despejar lo que vale A^2:

$$A^2 = 21\,A - 54\,I = 21\begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 261 & -126 \\ -126 & 72 \end{pmatrix}. \tag{4.4.11}$$

Capítulo 5

Introducción a las ecuaciones diferenciales

En ésta última unidad vamos a realizar una introducción a las ecuaciones diferenciales (E.D.). A priori parece que ésta unidad no tiene nada que ver con el resto del curso, sin embargo, veremos que los conceptos de espacio vectorial y diagonalización de matrices son vitales en la resolución de los tipos de E.D. que a estudiaremos aquí.

5.1. Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales (E.D.) son ecuaciones que no solo involucran a la **incógnita** a obtener, sino que también incluyen a sus **derivadas** con respecto a una variable dependiente x. Son por tanto ecuaciones cuya incónita no es un número y sino una **función** $y(x)$.

◦ **Ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.):**
Son ecuaciones que tienen como objetivo encontrar una única función $y(x)$ que cumpla una ecuación de la forma:

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, ..., y', y, x\right) = 0,$$

donde F es una función arbitraria. También se pueden escribir en lo que se denomina su **forma normal**:

$$y^{(n)} = G\left(y^{(n-1)}, ..., y', y, x\right),$$

donde G es una función arbitraria. En ésta forma se ha despejado la derivada de orden mayor $y^{(n)}$. Se dice que el orden de la derivada mayor n es el **orden de la E.D.O**.

- Ejemplo 1: Escriba dos E.D.O. y diga de qué orden son.

  Las E.D.O. son ecuaciones para una única función $y(x)$ de modo que pueden depender de cualquier forma de sus derivadas, la propia función $y(x)$ y la variable dependiente x. Luego un par de ejemplos serían:

  $$y'^2 + y + x^2 = 0, \qquad y'' + y' + e^{-x} = 0, \tag{5.1.1}$$

  donde la primera ecuación sería de orden 1 ya que la derivada de orden mayor es y'; y la segunda ecuación sería de orden 2 ya que la derivada mayor es y''.

○ **Ecuaciones en derivadas parciales (E.D.P.):**
Son ecuaciones diferenciales para funciones de varias variables $f(x, y, z, ...)$ que cumplen ecuaciones de la forma:

$$F\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}, ..., f, x, y, z, ...\right) = 0,$$

donde F es una función arbitraria.

En éste curso nos centraremos únicamente en las ecuaciones diferenciales para funciones de una única variable, las E.D.O.. Ahora que hemos definido qué es una E.D. queremos saber cómo se resuelven. A diferencia de los otros tipos de problemas que hemos visto en el curso, las E.D.**no tienen un método general** con el cuál puedan resolverse en cualquier situación de forma analítica. Los métodos varían según el tipo de E.D. e incluso hay tipos que no pueden resolverse de forma analítica, siendo necesario el uso de algoritmos numéricos.

Cabe preguntarse por qué es necesario para un ingeniero la resolución de E.D. ya que parece un problema demasiado abstracto y complicado, más propio de matemáticos. Nada más lejos de la realidad, las E.D. están muy presentes en el mundo que nos rodea, todas los fenómenos de la física involucran E.D.: la mecánica tiene la **ecuación de Newton**, la termodinámica la **ecuación del calor** y el electromagnetismo **las ecuaciones de Maxwell**. Todas ellas son ecuaciones diferenciales. Nadie esperaría que un ingeniero diseñase un puente sin la ecuación de Newton, un aire acondicionado sin la ecuación del calor, o un circuito eléctrico sin las ecuaciones de Maxwell.

5.2. Condiciones iniciales de las E.D.

Antes de estudiar los tipos particulares de E.D. que vamos a resolver en éste curso, vamos a hablar de una propiedad común de todas las E.D.: **las condiciones iniciales.**

Como hemos visto, las E.D. involucran derivadas. Las derivadas cumplen que si derivamos una constante obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d(K)}{dx} = 0 \quad \text{siendo} \quad K = \text{cte}, \tag{5.2.1}$$

es decir, la derivada de una constante es cero. Por éste motivo, las soluciones a las E.D. no son una única función sino una **familia de funciones.**

- Ejemplo 2: Encuentre la familia de funciones que cumple la siguiente E.D.O.: $y' = 2x$.

  De momento no conocemos ningún método sistemático para resolver E.D. por lo que vamos a encontrar la solución de $y' = 2x$ por inspección, es decir, pensando un poco. Ésta ecuación nos dice que $y(x)$ es una función que cumple que, al derivarla con respecto a x, el resultado es $2x$. Si pensamos un poco, nos podemos dar cuenta de que la función que buscamos es $y(x) = x^2$ ya que al derivar x^2 obtenemos $2x$,¿es esta la única solución? como la derivada de una constante es cero, la función $y(x) = x^2 + 1$ también es solución ya que su derivada es igualmente $2x$. Por ello, la **solución general** de $y' = 2x$ es:

  $$y(x) = x^2 + K, \tag{5.2.2}$$

  con K una constante. Como vemos, la solución de la E.D.O. es una **familia de funciones.** En éste curso asumimos que no es conocido el concepto de integral. La E.D.O anterior se podría haber resuelto también de forma sencilla por medio de la integral, obteniendo igualmente la solución (5.2.2).

Éstas constantes, también llamadas constantes de integración, se pueden relacionar con **las condiciones iniciales** del problema:

$$y(x = 0),\ y'(x = 0),\ y''(x = 0), ... \tag{5.2.3}$$

Ésto tiene una motivación histórica ya que las E.D. surgen en el contexto de los experimentos científicos en los cuáles la variable dependiente es el tiempo $x \to t$. En los experimentos se busca conocer la evolución de una variable dadas una condiciones iniciales en $t = 0$, éstas soluciones las dan las E.D..

- Ejemplo 3: Calcule la solución general de $y' = y$ y relacione las constantes de integración con las condiciones iniciales de la función.

  Como en el ejemplo anterior, tenemos que resolver la ecuación por medio de la inspección. La ecuación nos pide una función $y(x)$ que, al derivarla, de ella misma. Del cálculo conocemos una función que cumple esto, la función exponencial. Probamos como posible solución una función del tipo:

$$y(x) = c\, e^{a\, x}, \tag{5.2.4}$$

  donde a y c son constantes cuales quiera:

$$y' = a\, c\, e^{a\, x} = c\, e^{a\, x} = y, \tag{5.2.5}$$

  simplificando obtenemos que $a = 1$ y c puede valer lo que sea, es decir, es nuestra constante de integración. Como la solución general es $y(x) = c\, e^{x}$, sustituimos $y(x = 0)$ para obtener la condición inicial:

$$y(x = 0) = c\, e^{0} = c, \tag{5.2.6}$$

  por lo tanto la solución general en función de las condiciones iniciales es,

$$y(x) = y_0\, e^{x}, \tag{5.2.7}$$

  donde $y_0 = y(x = 0)$. Conociendo $y(x = 0)$, tendremos una solución particular de la solución general.

∘ Una E.D.O. de orden n tiene n condiciones iniciales o constantes de integración.

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, ecuaciones de orden 1 tienen una única constante de integración, cada orden de la derivada mayor añade una constante.

- Ejemplo 4: Calcule la solución general de $y'' = y$ y relacione las constantes de integración con las condiciones iniciales de la función.

  La ecuación nos pide una $y(x)$ que al derivarla dos veces de la misma función, del ejemplo anterior vemos que la exponencial cumple igualmente ésta ecuación pero, ¿es $y(x) = e^x$ la única solución? vamos a probar una solución del tipo $y(x) = c\,e^{a\,x}$:

$$y'(x) = a\,c\,e^{a\,x} \;\;\rightarrow\;\; y''(x) = a^2\,c\,e^{a\,x}, \tag{5.2.8}$$

  como la ecuación nos dice $y'' = y$, sustituimos:

$$a^2\,c\,e^{a\,x} = c\,e^{a\,x}, \;\rightarrow\;\; a^2 = 1, \tag{5.2.9}$$

  luego $a = 1$ es solución pero $a = -1$ también, hemos encontrado dos soluciones posibles a la E.D.O., se puede comprobar que la solución general consiste en sumar los dos tipos de soluciones:

$$y(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{-x}, \tag{5.2.10}$$

  como vemos, hacen falta dos constantes de integración (c_1, c_2) ya que es una E.D.O. de orden 2. Para relacionar c_1 y c_2 con las condiciones iniciales simplemente tenemos que calcular $y(x = 0)$ e $y'(x = 0)$:

$$y(0) = c_1 + c_2, \tag{5.2.11}$$

$$y'(x) = c_1\,e^x - c_2\,e^{-x} \;\;\rightarrow\;\; y'(0) = c_1 - c_2, \tag{5.2.12}$$

  resolviendo el sistema anterior obtenemos que $c_1 = \frac{1}{2}(y_0 + y_0')$ y $c_2 = \frac{1}{2}(y_0 - y_0')$. Sustituyendo c_1 y c_2 en (5.2.10) y reorganizando obtenemos la solución general como:

$$y(x) = y_0\,\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + y_0'\,\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right), \tag{5.2.13}$$

  para los curiosos e interesados, ésta solución motiva la definición del seno y coseno hiperbólicos:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{5.2.14}$$

◦ **Problema de Cauchy o de condiciones iniciales:**
Éste problema consiste en considerar una E.D.O. junto con unas condiciones iniciales dadas:

$$\begin{cases} y^n(x) = F\left(y^{n-1},\, y^{n-2},\, ...\, y,\, x\right) \\ y^{n-1}(0) = y_0^{n-1},\ y^{n-2}(0) = y_0^{n-2},\ ...\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Es decir, se considera una E.D.O. de orden n y las condiciones iniciales en la función y y en sus $n-1$ derivadas. Se demuestra que este problema tiene **solución única**: hay una única función $y(x)$ que cumple tanto la E.D.O., como todas las condiciones iniciales.

- Ejemplo 5: Resuelva el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{5.2.15}$$

La E.D.O. es $y'' = y$ para la cual hemos obtenido su solución general en el ejemplo anterior:

$$y(x) = y_0 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + y_0' \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right). \tag{5.2.16}$$

Para obtener la solución particular del problema de condiciones iniciales simplemente tenemos que imponer las condiciones iniciales $y(0) = y_0 = 1$ e $y'(0) = y_0' = 0$. Dado que ya teníamos la solución general en función de las condiciones iniciales, el resultado es:

$$y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{5.2.17}$$

Dejamos para el lector el ejercicio de comprobación de que ésta función cumple tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales.

5.3. E.D.O. lineales con coeficientes constantes

Éste va a ser el primer tipo de E.D. que vamos a considerar. Una E.D.O. lineal es de la forma,

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + ... + a_0\, y = f(x) \tag{5.3.1}$$

Es una E.D.O. lineal en la función y y en todas sus derivadas. Además, se dice de coeficientes constantes si los coeficientes $\{a_0, a_1, ...a_n\}$ son constantes.

La función $f(x)$ es lo que se denomina el **término inhomogéneo** de la ecuación. Nosotros nos centraremos en lo que se denomina la **ecuación homogénea** que consiste en particularizar $f(x)=0$. De modo que las E.D. que analizaremos tendrán la forma:

$$\boxed{a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + ... + a_0\, y = 0}. \tag{5.3.2}$$

Ésto es lo que se denomina una E.D.O. homogénea, lineal y con coeficientes constantes y son las E.D. que vamos a resolver a continuación.

5.3.1. Solución general

Motivados por los ejemplos anteriores, vamos a probar una solución de la ecuación (5.3.2) de la forma $y(x) = e^{\lambda\, x}$:

$$y(x) = e^{\lambda\, x} \;\rightarrow\; y'(x) = \lambda\, e^{\lambda\, x} \;\rightarrow\; y''(x) = \lambda^2\, e^{\lambda\, x} \;\rightarrow\; y^{(n)}(x) = \lambda^n\, e^{\lambda\, x}. \tag{5.3.3}$$

Sustituimos las derivadas en (5.3.2):

$$a_n\, \lambda^n\, e^{\lambda\, x} + a_{n-1}\, \lambda^{(n-1)}\, e^{\lambda\, x} + ... + a_0\, e^{\lambda\, x} = 0, \tag{5.3.4}$$

como vemos, podemos sacar factor común y simplificar el término $e^{\lambda\, x}$ de modo que:

$$\boxed{a_n\, \lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{(n-1)} + ... + a_0 = 0} \tag{5.3.5}$$

Ésta ecuación se define como la **ecuación característica**, si encontramos todos los valores de λ que cumplen la ecuación característica, es decir sus raices, tendremos todas las soluciones de la E.D.O.

Un polinomio de orden n tiene n raices, teniendo en cuenta los números complejos que en éste tema sí consideraremos. Cada una de esas soluciones tendrá una de las n constantes de integración: **La solución general será una combinación lineal de todas las soluciones.**

- Ejemplo 6: Calcule la solución general de $y'' = y$ por medio de la ecuación característica.

  Según el procedimiento anterior, al probar una solución del tipo $y(x) = e^{\lambda x}$:

  $$y'' = y \;\rightarrow\; y'' - y = 0 \;\rightarrow\; \lambda^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \pm 1. \tag{5.3.6}$$

  Por lo tanto tenemos dos soluciones independientes $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$. La solución general es una **combinación lineal** de las dos soluciones:

  $$y(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}. \tag{5.3.7}$$

Como vemos, ya empiezan a aparecer conceptos vistos durante el resto del curso como es la combinación lineal. Ésta propiedad se resume en el siguiente resultado.

∘ **Principio de superposición:**
Dada una E.D.O. homogénea y lineal, si y_1 e y_2 son solución de la ecuación, entonces cualquier **combinación lineal**:

$$y_3 = a\, y_1 + b\, y_2,$$

con a y b constantes arbitrarias, es **también solución** de la E.D.O.

Éste resultado ya lo hemos aplicado sin darnos cuenta en anteriores ejemplos. En el ejemplo 4 vimos que la solución general de $y'' = y$ se podía poner de dos formas distintas:

$$y(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} \quad \text{o} \quad y(x) = y_0 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) + y_0' \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right), \tag{5.3.8}$$

es un ejemplo de que si e^x y e^{-x} son solución, una combinación lineal como $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ también lo es. Un léctor hábil se dará cuenta con el anterior ejemplo de que la misma solución general $y(x)$, se está poniendo como combinación lineal de dos conjuntos distintos de funciones ¿tendrá ésto algo que ver con los conceptos de coordenadas y base de un espacio vectorial? la respuesta es sí.

Resumamos todo lo que conocemos de las soluciones de una E.D.O. homogénea, lineal y con coeficientes constantes:

1. Tiene n soluciones independientes donde n es el orden de la E.D.O.

2. La solución general es una combinación lineal de las n soluciones independientes con n constantes de integración.

3. La combinación lineal de soluciones es también una solución.

4. La solución $y(x) = 0$ es siempre solución ya que la ecuación es homogénea.

Si volvemos a la unidad 2 veremos que éstas propiedades encajan con las que vimos para un **espacio vectorial**.

El conjunto de soluciones de una E.D.O. homogénea, lineal y con coeficientes constantes de orden n es un **espacio vectorial** de dimensión n.

Éste resultado es muy útil ya que nos ayuda a entender mejor las soluciones de una E.D.O. de éste tipo. Las constantes de integración pueden entenderse como las coordenadas de un vector en ese espacio vectorial y las n funciones independientes de la E.D.O. de orden n forman una base de ese espacio de dimensión n.

Según hemos calculado, las n soluciones de la E.D.O. se obtienen de resolver (5.3.2). Sin embargo hay dos posibilidades a la hora de resolver el polinomio que hay que tener en cuenta: raices complejas y raices múltiples.

○ **Raices complejas:**
Puede ocurrir que las raices del polinomio sean complejas. En éste caso, siempre aparecen soluciones por pares: una **solución y su compleja conjugada**:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\, i, \qquad \lambda_2 = \alpha - \beta\, i.$$

Las soluciones de la E.D.O. asociadas a esas dos raices son:

$$y_1(x) = e^{(\alpha+\beta\, i)\, x}, \qquad y_2(x) = e^{(\alpha-\beta\, i)\, x},$$

dado que en nuestros problemas queremos **soluciones reales**, se buscan unas combinaciones lineales de éstas dos soluciones que nos den soluciones reales (cambio de base). Si realizamos la siguiente transformación:

$$y_1^* = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad y_2^* = \frac{i(y_2 - y_1)}{2},$$

podemos comprobar que las 2 **soluciones reales** asociadas a $\lambda = \alpha \pm \beta\, i$ son:

$$y_1^* = e^{\alpha\, x}\, \cos\beta x, \qquad y_2^* = e^{\alpha\, x}\, \sin\beta x.$$

Si las raices son complejas procedemos de la misma forma que con las reales sólo que buscamos unos cambios de variables (cambio de base) para obtener soluciones complétamente reales. Para ello hacemos uso de las propiedades de los números complejos y de la ecuación de Euler: $e^{\alpha+\beta\, i} = \cos\alpha + i\, \sin\beta$.

○ **Raices múltiples:**
Puede ocurrir que existan raices repetidas, en éste caso se puede probar que, si λ es una raiz de la ecuación característica con multiplicidad m entonces hay m soluciones asociadas a λ de la forma:

$$y_1 = e^{\lambda\, x},\;\; y_2 = x\, e^{\lambda\, x},\; ...,\;\; y_m = x^{(m-1)}\, e^{\lambda\, x}.$$

- Ejemplo 7: Calcule la solución general de $y'' + 4\, y' + 4\, y = 0$.

  Planteamos la ecuación caracteristica probando soluciones del tipo $e^{\lambda\, x}$:

  $$y'' + 4\, y' + 4\, y = 0 \;\;\rightarrow\;\; \lambda^2 + 4\,\lambda + 4 = 0 \;\;\rightarrow\;\; (\lambda+2)^2 = 0, \tag{5.3.9}$$

  luego las raices son $\lambda = -2$ doble. Como la multiplicidad es 2, las 2 soluciones asociadas serán $y_1 = e^{-2\, x}$ e $y_2 = x\, e^{-2\, x}$, la solución general a la E.D.O. será:

  $$y(x) = c_1\, e^{-2\, x} + c_2\, x\, e^{-2\, x} = (c_1 + c_2\, x)\; e^{-2\, x}. \tag{5.3.10}$$

5.3.2. Procedimiento general para resolver E.D.O. homogéneas, lineales y con coeficientes constantes de orden n.

Dada una E.D.O. homogénea, lineal y con coeficientes constantes de orden n, se realizan los siguientes pasos para encontrar su solución general:

1. Encontrar las n raices de la **ecuación característica**:

$$a_n\,\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{(n-1)} + ... + a_0 = 0.$$

2. Para cada **raiz real** λ de **multiplicidad 1** hay una solución de la forma: $e^{\lambda\,x}$.

3. Para cada **raiz real** λ de **multiplicidad m** > 1 hay m soluciones de la forma:

$$y_1 = e^{\lambda\,x},\;\; y_2 = x\,e^{\lambda\,x},\; ...,\;\; y_m = x^{(m-1)}\,e^{\lambda\,x}.$$

4. Para cada **raiz compleja** con su complejo conjugado $\lambda = \alpha \pm \beta\,i$ (con $\beta \neq 0$) y de **multiplicidad 1** hay 2 soluciones de la forma:

$$y_1 = e^{\alpha\,x}\,\cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha\,x}\,\sin\beta x.$$

5. Para cada **raiz compleja** con su complejo conjugado $\lambda = \alpha \pm \beta\,i$ (con $\beta \neq 0$) y de **multiplicidad m** > 1 hay $2\,m$ soluciones de la forma:

$$y_1 = e^{\alpha\,x}\,\cos\beta x,\; ...,\;\; y_m = x^{(m-1)}\,e^{\alpha\,x}\,\cos\beta x,$$

$$y_{m+1} = e^{\alpha\,x}\,\sin\beta x,\; ...,\;\; y_{2\,m} = x^{(m-1)}\,e^{\alpha\,x}\,\sin\beta x.$$

Con los pasos anteriores se encuentran siempre n soluciones distintas (linealmente independientes) de modo que la **solución general** es una **combinación lineal** de ellas:

$$y(x) = c_1\,y_1 + c_2\,y_2 + ... + c_n\,y_n.$$

- Ejemplo 8: Calcule la solución general de $y^{(\mathrm{IV})} - 2\,y''' + 5\,y'' = 0$.

  Calculamos su ecuación característica:

$$y^{(\mathrm{IV})} - 2\,y''' + 5\,y'' = 0 \;\rightarrow\; \lambda^4 - 2\,\lambda^3 + 5\,\lambda^2 = 0 \;\rightarrow\; \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0, \quad (5.3.11)$$

  calculamos las raices del polinomio de orden 2 por medio de la ecuación y obtenemos las raices $\lambda = 1 \pm 2\,i$. Por lo tanto:

$$\lambda^2(\lambda - (1 + 2\,i))(\lambda - (1 - 2\,i)) = 0, \qquad (5.3.12)$$

las raices son $\lambda_1 = 0$ doble y $\lambda_{2/3} = 1 \pm 2\,i$. La primera tiene asociadas dos soluciones ya que es doble:

$$y_1 = e^{0\,\lambda} = 1, \quad \text{e} \quad y_2 = x\,e^{0\,\lambda} = x. \tag{5.3.13}$$

Las raices $\lambda_{2/3} = 1 \pm 2\,i$ tienen asociadas dos soluciones:

$$y_3 = e^{1\,x}\,\sin(2\,x), \quad \text{e} \quad y_4 = e^{1\,x}\,\cos(2\,x). \tag{5.3.14}$$

La solución general es una combinación lineal de éstas 4 soluciones:

$$y(x) = c_1 + c_2\,x + c_3\,e^x\,\sin(2\,x) + c_4\,e^x\,\cos(2\,x). \tag{5.3.15}$$

- Ejemplo 9: Calcule la solución general de $y^{(\mathrm{VII})} + 2\,y^{(\mathrm{V})} + y''' = 0$.

Calculamos su ecuación característica:

$$y^{(\mathrm{VII})} + 2\,y^{(\mathrm{V})} + y''' = 0 \;\rightarrow\; \lambda^7 + 2\,\lambda^5 + \lambda^3 = 0 \;\rightarrow\; \lambda^3(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = 0, \tag{5.3.16}$$

cuando se obtienen polinomios con potencias pares, en éste caso λ^4 y λ^2, es útil hacer el cambio de variable $\alpha = \lambda^2$ así podemos escribir el polinomio como:

$$\lambda^3(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = 0, \tag{5.3.17}$$

el término en α lo podemos factorizar con la ecuación de segundo orden o bien observando que se trata de un producto notable:

$$\lambda^3(\alpha + 1)^2 = 0, \tag{5.3.18}$$

deshacemos el cambio de variable con lo que hemos factorizado el polinomio,

$$\lambda^3(\lambda^2 + 1)^2 = 0, \tag{5.3.19}$$

las raices son $\lambda_1 = 0$ triple y $\lambda_{2/3} = \pm\,i$ doble. La primera tiene asociadas tres soluciones ya que es triple:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad \text{e} \quad y_3 = x^2. \tag{5.3.20}$$

Las raices $\lambda_{2/3} = \pm\,i$ dobles tienen asociadas cuatro soluciones:

$$y_4 = \sin x, \quad y_5 = x\,\sin x, \quad y_6 = \cos x, \quad \text{e} \quad y_7 = x\,\cos x. \tag{5.3.21}$$

La solución general es una combinación lineal de éstas 7 soluciones:

$$y(x) = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 + c_4\,\sin x + c_5\,x\,\sin x + c_6\,\cos x + c_7\,x\,\cos x. \tag{5.3.22}$$

5.4. Sistemas de E.D.O. lineales de primer orden con coeficientes constantes

Vamos a ver por último los sistemas de E.D.O. más sencillos que son los lineales, de primer orden (derivadas primeras) y con coeficientes constantes.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + ... + a_{1n}\, y_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 + ... + a_{nn}\, y_n \end{cases} \tag{5.4.1}$$

Consideraremos n ecuaciones diferenciales independientes para n funciones $y_i(x)$. El objetivo será encontrar las n funciones $y_i(x)$ que cumplen las ecuaciones diferenciales. Como son E.D. de primer orden, necesitaremos una constante de integración, que será la condición inicial $y_i(x =)$, por cada una de las n funciones, es decir n constantes.

Podemos escribir el sistema en forma matricial como hacíamos con los sistemas de ecuaciones algebraicos:

$$Y' = A\, Y \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{5.4.2}$$

Para las E.D.O. vimos que la solución general de la ecuación $y' = a\, y$ es $y(x) = c\, e^{a\, x}$. Por analogía con este caso, se puede demostrar que la solución para el sistema de E.D.O. es:

$$\boxed{Y(x) = e^{A \cdot x} \cdot C \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = e^{A \cdot x} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}} \tag{5.4.3}$$

Donde $\{c_1, ..., c_n\}$ son constantes arbitrarias correspondientes a las **constantes de integración**; y $e^{A \cdot x}$ es una matriz que consiste en calcular la **exponencial de la matriz** $A \cdot x$.

5.4.1. Exponencial de una matriz

Lo único que necesitamos para resolver los sistemas de E.D.O. es saber cómo se calcula la exponencial de una matriz. La idea es definir la exponencial de una matriz a partir del

producto de matrices y el cálculo de **series**. Presentaremos brevemente el concepto de *serie* ya que es probable que el lector no esté familiarizado con él.

Un sumatorio, con símbolo $\sum$, es una forma resumida de escribir una suma razonablemente larga. Por ejemplo, la suma $1 + 2 + 3 + 4$ podemos escribirla de forma resumida como:

$$1+2+3+4 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{4} i, \tag{5.4.4}$$

es decir, se dan valores a i y se suma término a término los elementos dentro del sumatorio. En éste caso $(i = 1) + (i = 2) + (i = 3) + (i = 4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Bajo ciertas condiciones, es posible realizar un sumatorio de un número infinito de sumandos, en ese caso hablamos de **serie.** Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... \tag{5.4.5}$$

En general las series pueden **converger** en un número finito o **diverger** a $\pm\infty$. En el ejemplo anterior se puede demostrar que converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{5.4.6}$$

También es posible expresar funciones como suma infinita (*serie*) de funciones, un ejemplo de ello son las *series de Taylor*. En el caso de la **función exponencial** se puede probar que:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} \tag{5.4.7}$$

donde $n!$ se denomina el factorial de n y vale: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... 1$. Por ejemplo $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Usando éste resultado, se define la **exponencial de una matriz** A como:

$$\boxed{e^A \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}} \tag{5.4.8}$$

elevar una matriz a un número arbitrario A^n es algo que sabemos hacer, de hecho era una de las **aplicaciones de la diagonalización**. Usamos que $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$ con D la matriz diagonal y P la matriz de paso:

$$e^A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P\, D^n\, P^{-1}}{n!} = P \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{n!} \right) P^{-1}, \tag{5.4.9}$$

como vimos en la unidad anterior, D^n consiste simplemente en elevar a la n cada elemento de la diagonal, es por ello que:

$$e^D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{d_{nn}} \end{pmatrix} \tag{5.4.10}$$

es decir, e^D es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son la exponencial de los elementos de la diagonal D. Así, la exponencial de una matriz se calcula como:

$$\boxed{e^A = P\, e^D\, P^{-1}} \tag{5.4.11}$$

siempre que A sea diagonalizable. Con todo ello, la solución al sistema (5.4.3) se obtiene como:

$$Y(x) = e^{A\,x}\, C = P\, e^{D\,x}\, P^{-1}\, C, \tag{5.4.12}$$

donde D y P son las matrices diagonal y de paso de A. Ésta es una de las aplicaciones más importantes de la diagonalización de matrices.

- Ejemplo 10: Resuelva el siguiente problema de condiciones iniciales para un sistema de E.D.O.,

$$\begin{cases} y_1' = 4\,y_1 - y_2 \\ y_2' = 6\,y_1 - y_2 \\ y_1(0) = y_2(0) = 1 \end{cases} \tag{5.4.13}$$

Como vemos, es un problema de condiciones iniciales ya que, además del sistema de E.D., tenemos las condiciones iniciales $y_1(0) = y_2(0) = 1$. Lo primero que tenemos que hacer es escribir el sistema en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{5.4.14}$$

la solución será de la forma,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{A\,x} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{A\,x} = P\, e^{D\,x}\, P^{-1}. \tag{5.4.15}$$

Tenemos que diagonalizar la matriz A, primero obtenemos los autovalores,

$$|A-\lambda\, I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = 0, \tag{5.4.16}$$

luego los autovalores son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ por lo tanto la matriz diagonal es,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.4.17}$$

Calculamos la matriz de paso: $E(\lambda_1) = \ker\,(A - 2\,I)$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.4.18}$$

la segunda ecuación es tres veces la primera así que considerando solo ésta ultima tenemos $y = 2\,x$ por lo que un vector general $\vec{u_1}$ de $E(\lambda_1)$ es,

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} x \\ 2\,x \end{pmatrix} = x\,\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{5.4.19}$$

por lo tanto $E(\lambda_1) = \langle (1,2) \rangle$. Calculamos ahora $E(\lambda_2) = \ker\,(A - I)$,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.4.20}$$

la segunda ecuación es dos veces la primera así que considerando solo ésta ultima tenemos $y = 3\,x$ por lo que un vector general $\vec{u_2}$ de $E(\lambda_2)$ es,

$$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} x \\ 3\,x \end{pmatrix} = x\,\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{5.4.21}$$

por lo tanto $E(\lambda_2) = \langle (1,3) \rangle$. Una vez que tenemos los subespacios propios elegimos una base de autovectores, por ejemplo $B = \{(1,2),(1,3)\}$ por lo que una matriz de paso es,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \;\longrightarrow\; P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.4.22}$$

Con todo ello ya podemos calcular la exponencial de la matriz:

$$\begin{aligned} e^{A\,x} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\,x} & 0 \\ 0 & e^{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\,x} & e^{x} \\ 2\,e^{2\,x} & 3\,e^{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\,e^{2\,x} - 2\,e^{x} & e^{x} - e^{2\,x} \\ 6\,e^{2\,x} - 6\,e^{x} & 3\,e^{x} - 2\,e^{2\,x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

Usamos éste resultado en la ecuación (5.4.15) para obtener la **solución general** del sistema de E.D.O.:

$$y_1 = c_1\left(3\,e^{2\,x} - 2\,e^{x}\right) + c_2\left(e^{x} - e^{2\,x}\right), \tag{5.4.24}$$

$$y_2 = c_1\left(6\,e^{2\,x} - 6\,e^{x}\right) + c_2\left(3\,e^{x} - 2\,e^{2\,x}\right). \tag{5.4.25}$$

El objetivo es encontrar la **solución particular** que cumple las condiciones iniciales $y_1(0) = y_2(0) = 1$, para ello sustituimos $x = 0$ en las soluciones generales y tenemos $c_1 = c_2 = 1$. Finalmente usando éste resultado para las condiciones iniciales se obtiene que la solución al problema completo es:

$$y_1 = 2\,e^{2\,x} - e^{x}, \tag{5.4.26}$$

$$y_2 = 4\,e^{2\,x} - 3\,e^{x}. \tag{5.4.27}$$

Dejamos para el lector el ejercicio de comprobación de que éstas dos funciones cumplen tanto el sistema de E.D.O. como las condiciones iniciales del problema.

Capítulo 6

Ejercicios

En éste último capítulo recopilamos todos los ejercicios del curso para prácticar los conceptos de cada uno de los temas.

6.1. Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes

1. Resuelva los siguientes sistemas por medio del método de Gauss:

(a) $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ y + 3z = -1 \\ 4x - 2z = 12 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -12 \\ x + 4y - 3z = 15 \\ 11y - 10z = 42 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 5 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ x + 7y - 6z = 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 1 \\ 4x - y + 9z - 5t = 23 \\ 3x + y + 5z - 2t = 12 \end{cases}$

2. Calcule el rango de las siguientes matrices por medio de la redución de Gauss:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

3. Calcule el rango de las siguientes matrices por medio de los determinantes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 6 & 12 & -12 \end{pmatrix}$

4. Se llama **traza** de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de su diagonal principal. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces $A\,B$ y $B\,A$ tienen la misma traza.

5. Dado el siguiente sistema de ecuaciones para (x, y, z):

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ ax + 3y - z = -3 \\ 3x - 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

donde a es un número real arbitrario, resuelva las siguientes cuestiones:

a) Calcule el rango de la matriz de coeficientes (A) y la matriz aumentada $(\bar{A})$ del sistema para todos los posibles valores de a.

b) Clasifique el sistema para todos los posibles valores de a.

c) Resuelva el sistema, si es posible, para $a = -8$.

6. Resuelva las siguientes cuestiones aplicando las propiedades de los determinantes:

a) Calcule el determinante de la matriz identidad (I_n) de dimensión n.

b) Demuestre que, si A es una matriz cuadrada con inversa A^{-1}, se cumple la relación:

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}.$$

c) Dada la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calcule $|A^{-1}|$.

7. Calcule $|A|$ teniendo en cuenta que $|B| = 4$, $|C| = 2$ y $|D| = 3$ para los siguientes casos:

   a) $B\,A = C\,B\,D^{-1}$.

   b) $A = B^2\,C\,C^t$.

   c) $A = C\,D\,C^{-1}$.

8. Dada la siguiente ecuación matricial $AX = B$, con:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

   donde a y b son números reales arbitrarios, resuelva las siguientes cuestiones:

   a) Calcule la solución de X en función de a y b por medio de la regla de Cramer. ¿Cuándo no es posible obtener una solución única?

   b) Calcule la solución de X en función de a y b haciendo uso de la matriz inversa A^{-1}. (Sugerencia: calcular la matriz inversa por la regla de Cramer)

9. Dado el siguiente sistema de ecuaciones para (x, y, z):

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + ay + z = 3 \end{cases}$$

   donde a es un número real arbitrario, resuelva las siguientes cuestiones:

   a) Calcule el rango de la matriz de coeficientes (A) y la matriz aumentada $(\bar{A})$ del sistema para todos los posibles valores de a.

   b) Clasifique el sistema para todos los posibles valores de a.

   c) Resuelva el sistema, si es posible, para $a = 2$.

10. Calcule el rango de las siguientes matrices en función del parámetro a:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & 6 & a-1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ a^2 & 4 & a-2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} a^2 & 1-a \\ -4 & a-1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 5 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

11. Dada la matriz A:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

a) Calcule $B = A\,A^t$.

b) Calcule $|A|$ (Sugerencia: usar el resultado anterior).

12. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & -a & a & a \\ b & b & -b & 4b & 3b \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 \\ c & -c & -c & 5c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

donde a, b y c son números reales arbitrarios.

a) Calcule el determinante de A haciendo uso de las propiedades de los determinantes.

b) Calcule el determinante de la matriz A', siendo A' la matriz A modificada con la siguiente operación: $F_2 \to 2\,F_2 + F_1$, donde F_1 y F_2 son las filas 1 y 2 de A respectivamente. (Sugerencia: usar el resultado del anterior apartado y las propiedades de los determinantes)

c) Dado el siguiente sistema de ecuaciones $A\,X = k$, donde k es un vector nulo y X el vector de las incógnitas $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Calcule para qué valores de a, b y c el sistema es compatible determinado y resuélvalo para dichos casos.

6.2. Espacios vectoriales

1. Determinar el valor de x para el cual el vector $\vec{v} = (1, x, 5)$ pertenece al subespacio $U = \langle (1, 2, 3), (1, 1, 1) \rangle$.

2. Calcular una base de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

   a) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \, x - y = 0\}$.

   b) $T = \langle (1, 1, 2, 1), (2, 3, -1, 1) \rangle$.

   c) $S + T$.

   d) $S \cap T$.

3. Encontrar una base y la dimensión del siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$: $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 1, 0, -2), (0, 1, 2, 1), (3, 4, 1, 2) \rangle$.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 con base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$. Se definen los siguientes vectores de V:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3, \\ \vec{v}_2 &= 2\vec{u}_1 + \vec{u}_3 + 2\vec{u}_4, \\ \vec{v}_3 &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3, \\ \vec{v}_4 &= -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_3 + 3\vec{u}_4. \end{aligned}$$

   Probar que $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ es una base de V y calcular las coordenadas en la base B' de un vector $\vec{v}$ que tiene coordenadas $(1, 2, 0, 1)$ en la base B.

5. Dados los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \, x = t, y = t, z = 0\right\}, \\ V &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \, x = z, y = z, t = 0\right\}, \\ W &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \, y = x + z, 3x = y + t\right\}. \end{aligned}$$

   a) Demostrar que $\mathbb{R}^4 = U \oplus V \oplus W$.

   b) Descomponer el vector $\vec{x} = (1, 2, 3, 4)$ de modo que $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ con $\vec{u} \in U$, $\vec{v} \in V$ y $\vec{w} \in W$.

6. Dado el sistema generador de vectores en $\mathbb{R}^3$: $B = \{(1,1,0),(-2,0,1),(a,1,1)\}$. Donde a es un número real arbitrario. Resuelva las siguientes cuestiones:

   a) Calcule todos los posibles valores de a para los cuales B es una base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Calcule la matriz de cambio de base de la base canónica a la base B para todos los posibles valores de a.

   c) Dado el vector $\vec{v} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$, con $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ los vectores de la base canónica, calcule las coordenadas de $\vec{v}$ en la base canónica y en la base B cuando $a = 1$.

7. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$: $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x = \lambda, \; y = 2\lambda, z = 0\}$ y $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x + y + 2z = 0\}$:

   a) Demostrar que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de U y V, es decir: $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

   b) Descomponer el vector $\vec{w} = (1,2,3)$ como suma de $\vec{u} \in U$ y $\vec{v} \in V$, es decir, encontrar $\vec{u} \in U$ y $\vec{v} \in V$ tales que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

8. Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, probar si son o no subespacios vectoriales:

   a) $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x^2\}$

   b) $V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x\}$

   c) $V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x + 1\}$

9. Sea $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ y $\vec{v} = \vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3} + \vec{u_4}$. Resuelva las siguientes cuestiones:

   a) Calcule las coordenadas de $\vec{v}$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$ y $\cdot\vec{u_4}$ en la base B.

   b) Demostrar que $B' = \{\vec{v}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

   c) Calcule la matriz de cambio de base de B a B'.

   d) Calcule las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B'.

10. Dados los subespacios vectoriales: $U = \langle (1,2,-1,3),(2,1,0,-2),(0,1,2,1),(3,4,1,2) \rangle$ y $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \, x = \lambda, \, y = \lambda, z = \lambda, t = 0\}$:

    a) Calcule una base de U y una de V. ¿Cuáles son las dimensiones de U y V?

    b) Calcule los subespacios $(U+V)$ y $(U \cap V)$ así como sus dimensiones $(\dim(U+V)$ y $\dim(U \cap V))$. ¿Es $(U+V)$ suma directa de subespacios vectoriales?

6.3. Aplicaciones lineales

1. Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $A(x,y,z) = (x+y, z, x+z)$. Encontrar la matriz de A con respecto a la base canónica. Hallar la imagen mediante A de los siguientes sugespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Indicar en cada caso la dimensión del subespacio y la dimensión de su imagen mediante A.

    a) $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x+y+z = 0\}$.

    b) $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, z = 0\}$.

    c) $V_3 = \langle (1,-1,1) \rangle$.

2. Dadas las siguientes aplicaciones lineales: $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $A(x,y,z) = (y,z,0)$ y $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $B(x,y,z) = (x+z, y)$. Calcular:

    a) A^n, es decir, la aplicación lineal que resulta de aplicar n veces seguidas A.

    b) $B \circ A$, es decir, la aplicación lineal que resulta de aplicar A y, a continuación, aplicar B al resultado.

3. Dada una aplicación $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, conocemos que dicha aplicación lleva los vectores: $\vec{u_1} = (1,0,0)$, $\vec{u_2} = (1,1,0)$, y $\vec{u_3} = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ a los vectores: $\vec{w_1} = (2,1,2)$, $\vec{w_2} = (3,1,2)$, y $\vec{w_3} = (6,2,3)$ respectivamente. Encontrar la matriz de A en las siguientes bases:

    a) La base canónica de $\mathbb{R}^3$.

    b) La base $B' = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$.

4. Dadas las siguientes aplicaciones lineales, encontrar una base de su núcleo y su imagen; y comprobar en cada caso que:

$$\dim(\ker) + \dim(\mathrm{img}) = \dim(\text{espacio inicial}).$$

   a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (x + z, y, x + y + z)$.

   b) $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $B(x, y) = (x, x + y, 2x, x + 2y)$.

5. Dado $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y sabiendo que $A(1, -1) = (-1, -2, -3)$ y $A(-3, 2) = (0, 5, 3)$. Calcular la matriz de la aplicación A en las siguientes bases:

   a) Las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

   b) La base $B'_1 = \{(1, -1), (-3, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B'_2 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

6. Hallar, si es posible, una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\ker(A) = \langle(1, -1)\rangle$ y $\mathrm{img}(A) = \langle(1, 2)\rangle$. ¿Es una aplicación inyectiva? ¿y sobreyectiva?

7. Sean V y W dos espacios vectoriales, ambos con dimensión finita igual a n. Dada $A : V \to W$, demostrar que si A es inyectiva entonces A es también biyectiva.

8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n siendo n un número impar. Dada $A : V \to V$, demostrar que $\ker(A) \neq \mathrm{img}(A)$.

9. Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $A(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$.

   a) Calcular $\ker(A)$ ¿cuál es su dimensión?

   b) Calcular $\mathrm{img}(A)$ ¿cuál es su dimensión?

   c) ¿Es una aplicación inyectiva? ¿y sobreyectiva?

10. Demostrar si las siguientes aplicaciones son o no lineales. En caso de serlo ¿cuál es la dimensión de su imagen?

   a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $A(x, y, z) = (y + z, 2x + y, 3x - y + z)$.

   b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $B(x, y, z) = (x, y + 1, z + 2)$.

   c) $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $C(x, y, z) = (x - y + z, z)$.

6.4. Diagonalización de matrices

1. Determine cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso de serlo, calcular la matriz de paso P:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcule todos los valores de a para los cuales A es diagonalizable. Para esos valores de a:

a) Calcule la forma diagonal de A.

b) Calcule una matriz de paso P.

c) Calcule A^n, siendo n un número natural cualquiera.

3. Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (3x - 2y - 2z, -x + 4y + 2z, x - 2y)$. Demostrar que A es diagonalizable y encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ en la cual la matriz de la aplicación sea diagonal.

4. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde a y b son dos valores reales. Determinar todos los valores de a y b para que la matriz A sea diagonalizable en los números reales.

5. Dada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$. Calcular los autovalores y autovectores de A.

6. Dada la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, demostrar que A es diagonalizable para cualquiera valores reales de a, b y c.

7. Sea A una matriz triangular superior de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son todos diferentes, demostrar que A es diagonalizable.

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, calcule A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. Dada la siguiente matriz:
$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$
donde $a \in \mathbb{R}$. Calcule la matriz $B = A^3 + (4-a)\,A^2 + (5-4a)\,A$ haciendo uso del Teorema de Cayley-Hamilton.

10. Dada la siguiente matriz cuadrada de orden n:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & \dots & a \\ 0 & 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Demostrar que $(A-I)^n = 0$.

6.5. Introducción a las ecuaciones diferenciales

1. Resuelva las siguientes E.D.O. ¿Cuál es el orden de cada una de ellas?

   (a) $y'' + 8\,y' + 16\,y = 0$ (b) $y^{(\mathrm{V})} + 5\,y^{(\mathrm{IV})} - 2\,y''' - 10\,y'' + y' + 5\,y = 0$

   (c) $3\,y'' + 2\,y' + y = 0$ (d) $16\,y^{(\mathrm{IV})} + 24\,y'' + 9\,y = 0$

   (e) $y''' + 3\,y'' + 3\,y' + y = 0$ (f) $y^{(\mathrm{IV})} + y''' + y'' = 0$

2. Resuelva los siguientes sistemas de E.D.O. lineales:

   (a) $\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{l} y_1' = -4\,y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + 5\,y_2 - y_3 \\ y_3' = y_2 - 3\,y_3 \end{array} \right.$

3. Una partícula de masa m está unida a un muelle de constante de recuperación K. La partícula se desplaza en una superficie con rozamiento dado por el parámetro ρ. De éste modo, la ecuación diferencial que sigue la partícula es:

$$m\, x'' = -K\, x - \rho\, x',$$

donde $x(t)$ es la posición de la partícula respecto al punto de equilibrio del muelle en cada instante de tiempo t. Resolver la posición de la partícula $x(t)$ sabiendo que $K/m = \rho/m = 1$ y que en el instante inicial la posición de la partícula es $x(0) = 1$ y su velocidad inicial es $x'(0) = 0$. ¿Se detiene en algún momento la partícula?

4. Resuelva los siguientes problemas de condiciones iniciales:

(a) $\begin{cases} y'' - 4\,y' - 5\,y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + y' + 2\,y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y''' + 12\,y'' + 36\,y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -7 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y''' + y'' - y' - y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$

5. Resuelva los siguientes sistemas de E.D.O. lineales con condiciones iniciales:

(a) $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y_1' = 2\,y_1 \\ y_2' = y_1 + 3\,y_2 \\ y_1(0) = y_2(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y_1' = -2\,y_3 + y_4 \\ y_2' = -2\,y_4 + y_3 \\ y_3' = y_1 \\ y_4' = y_2 \\ y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 1, \quad y_4(0) = -1, \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' = -y_1 + y_2 - 2\,y_3 \\ y_3' = y_1 - 2\,y_2 + y_3 \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1 \end{cases}$