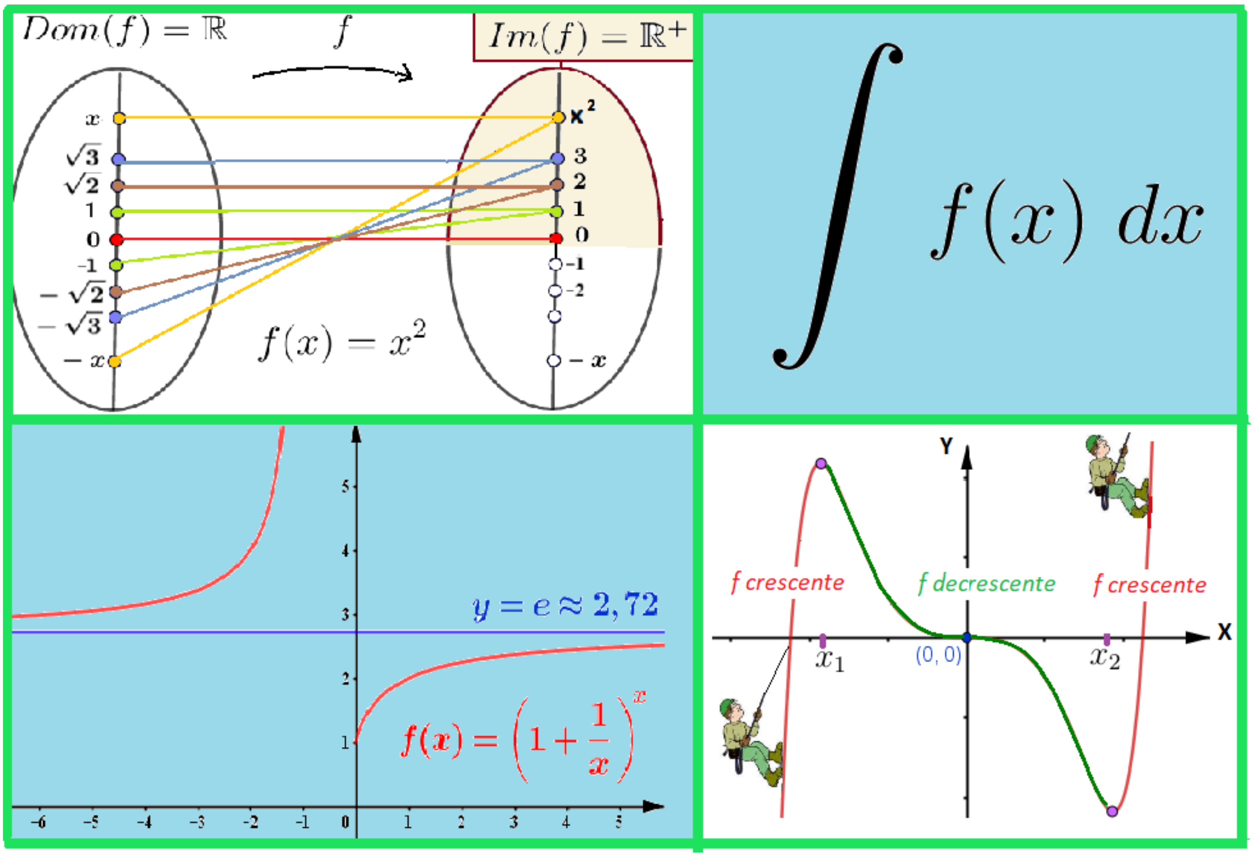
UENF

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

CCT-LCMAT

Laboratório de Ciências Matemáticas

Cálculo Diferencial e Integral I



Liliana A. L. Mescua †

Rigoberto G. S. Castro

Março de 2023

.

Liliana A. L. Mescua

*27/03/1970   +06/02/2019

Embora o tempo não perdoe,
a memória é o nosso livro,
e não há ausência para apagar,
o que nós já escrevemos juntos.
Tu me darás algo de magia,
algo do Céu, algo da alma,
e nada de esquecer,
porque eu sempre
te levarei comigo.
A saudade te trará de volta,
lembraremos do teu sorriso,
do teu dom de ensinar,
da tua empatia para com o próximo...
será inevitável sentir algo na alma,
saberemos que aqui tu estarás.

‘‘Dai-lhe Senhor,
em felicidade
no Céu
o que ela nos deu
em ternura
na Terra’’

Sumário

1 Números Reais **1**

1.1 Conjuntos Numéricos 1

1.2 Operações e Propriedades dos Números Reais 2

1.3 Desigualdades e suas Propriedades 3

1.3.1 Exercícios 5

1.4 Valor Absoluto 5

1.5 Intervalos 6

1.6 Potenciação 9

1.7 Exercícios 10

2 Revisão de Geometria Analítica e Cônicas **11**

2.1 Sistema Cartesiano Ortogonal 11

2.2 Gráficos em $\mathbb{R}^2$ 13

2.2.1 Reta 13

2.3 Exercícios 15

2.4 Circunferência 16

2.5 Elipse 17

2.6 Parábolas 21

2.7 Hipérboles 23

2.8 Exercícios 26

3 Funções Reais **30**

3.1 Funções Especiais 32

3.1.1 Função Constante 32

3.1.2 Função Afim 32

3.1.3 Função Módulo ou Valor Absoluto 33

3.1.4 Função Quadrática 34

3.1.5 Função Polinomial 34

3.1.6 Função Potência 35

3.1.7 Função Racional 36

3.1.8 Funções Algébricas 37

3.2 Funções Pares e Ímpares 38

3.3 Função Crescente e Decrescente 38

3.4 Funções Periódicas 39

3.5 Funções Elementares 40

3.5.1 Funções Trigonométricas 40

3.5.2 Função Exponencial 45

3.5.3 Funções Hiperbólicas 46

3.5.4 Função Máximo Inteiro 48

3.5.5 Funções Definidas por Partes 48

3.6 Operações com Funções 49

3.7 Translações Verticais e Horizontais de uma Função 50

3.8 Expansões e Reflexões Verticais e Horizontais de uma Função 50

3.9 Classificação das Funções pelo seu Contradomínio 51

3.9.1 Função Inversa 53

3.9.2 Função Logaritmo 54

3.10 Exercícios 56

4 Limites **59**

4.0.1 Limites Laterais 62

4.0.2 Limites Infinitos 63

4.0.3 Propriedades de Limites 64

4.1 Exercícios 67

Capítulo 1

Números Reais

1.1 Conjuntos Numéricos

De agora em diante denotaremos por:

- $\mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\}$. Também chamados de inteiros positivos.

  Os números -1, -2, -3, ... são chamados inteiros negativos.

- $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots, -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\}$.

- $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{m/n; \quad m,\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad n \neq 0\}$.

- $\mathbb{I}$, o conjunto dos números irracionais, são os números cuja representação decimal não é exata nem periódica, ou seja,

$$\mathbb{I} = \{x; \quad x \text{ não pode ser expresso como uma razão de números inteiros}\}.$$

- $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais, sendo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

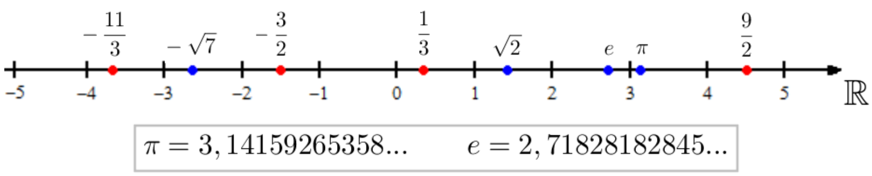


Figura 1.1: Números reais e a reta numerada

Do ponto de vista geométrico os números reais podem ser representados por pontos de uma reta horizontal. A cada ponto da reta está associado um número real e a cada número real está associado um ponto da reta. A linha reta é chamada reta numérica ou eixo de coordenadas.

1.2 Operações e Propriedades dos Números Reais

Em matemática, um conjunto é caracterizado por seus elementos e pelas operações que estes podem realizar. No conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é introduzido duas operações chamadas de soma $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$ de modo que satisfazem os seguintes axiomas:

Fechamento

$+$: Se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, então $x + y \ \in \ \mathbb{R}$

$\cdot$: Se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, então $x \cdot y \ \in \ \mathbb{R}$

Comutativa: Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, então $a + b = b + a$ e $ab = ba$.

Associativa: Se $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, então $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $a(bc) = (ab)c$.

Existência de elemento Neutro: Existem 0 e $1 \in \mathbb{R}$, tais que $a + 0 = a$ e $a.1 = a$ para quaisquer $a \in \mathbb{R}$

Existência de simétricos: Todo $a \in \mathbb{R}$ tem um simétrico denotado por $-a$ tal que $a+(-a) = 0$.

Existência de inversos Todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tem um inverso denotado por $\frac{1}{a} = a^{-1}$ tal que $a\ .\ \frac{1}{a} = a\ .\ a^{-1} = 1$.

Distributiva: Se $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, então $a(b + c) = ab + ac$ e $(b + c)a = ba + ca$.

Usando os axiomas do elemento oposto da soma e do elemento inverso da multiplicação, podemos definir as operações de subtração (-) e divisão $(\div)$ de números em $\mathbb{R}$,

Subtração Se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, então $x - y = x + (-y) \ \in \ \mathbb{R}$

Divisão Se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \{\mathbb{R} - \{0\}\}$, então $x \div y = x \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{y} \ \in \ \mathbb{R}$.

Algumas propriedades que se deduzem dos axiomas anteriores são:

P1 Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ então, $a - b = c \iff a = b + c$.

P2 Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ então, $\quad a + c = b + c \quad \Longleftrightarrow \quad a = b.$

P3 Se $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \cdot b = 0$ então, $a = 0$ ou $b = 0$.

P4 Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ então, $\quad \dfrac{a}{b} = c \quad \Longleftrightarrow \quad a = bc.$

P5 Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $b,\ c \neq 0$ então, $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}.$

P6 Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $c \neq 0$ então, $\quad a \cdot c = b \cdot c \quad \Longleftrightarrow \quad a = b.$

P7 Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $b,\ d \neq 0$ então, $\quad \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}.$

P8 Se $a, b \in \mathbb{R}$ então, $\quad a^2 = b^2$ se, e somente se, $a = \pm b.$

Exercícios: Calcule o valor das seguintes expressões:

1. $\left(2 + \dfrac{1}{3}\right) \div \left(2 - \dfrac{1}{3}\right)$. Resp. $\dfrac{7}{5}$.
2. $\dfrac{6 - 2,25 \times 0,2}{(2,2)^2 + 0,71}$. Resp. 1
3. $\dfrac{(-2)^0 \times (-(-2))^3 \times 5}{(-3)^{-1} \times (-(-5)^{-2})}$. Resp. 3.000
4. $512^{0,555....}$. Resp. 32
5. $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$. Resp. 4

1.3 Desigualdades e suas Propriedades

Para podermos dizer que um número real é maior ou menor que outro, devemos introduzir o conceito de número real positivo e uma relação de ordem.

Diremos que $a \in \mathbb{R}$ é **positivo** se a é maior que zero.

Axioma de Ordem No conjunto dos números reais, as seguintes condições são satisfeitas:

i) Tricotomia: Dado $a \in \mathbb{R}$ exatamente uma das três afirmações ocorre: $a = 0$; a é positivo; $-a$ é positivo;

ii) A soma de dois números positivos é positiva,

ii) O produto de dois números positivos é positivo.

Definição 1.1. *O número real a é **negativo** se, e somente se, $-a$ é positivo.*

Definição 1.2. *Os símbolos $<$ (menor que) e $>$ (maior que) são definidos como segue:*

i) $a < b \iff b - a$ é positivo;

ii) $a > b \iff a - b$ é positivo.

Definição 1.3. *Os símbolos $\leq$ (menor que ou igual a) e $\geq$ (maior que ou igual a) são definidos como segue:*

i) $a \leq b \iff a < b$ ou $a = b$;

ii) $a \geq b \iff a > b$ ou $a = b$.

Algumas propriedades das desigualdades, que decorrem dos axiomas anteriores, são:

P1 Se $a, b \in \mathbb{R}$ então, $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.

P2 Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que, $a < b$ então $a + c < b + c$.

P3 Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que, $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

P4 Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que, $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$.

P5 Se $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ então, $a^2 > 0$.

P6 Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ então $a^{-1} > 0$.

P7 Se $a, b \in \mathbb{R}$ tal que, $a > 0$ e $b > 0$ então $a \cdot b > 0$ e $\dfrac{a}{b} > 0$.

Se $a, b \in \mathbb{R}$ tal que, $a > 0$ e $b < 0$ então $a \cdot b < 0$ e $\dfrac{a}{b} < 0$.

P8 Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que, $a < b$ e $c > 0$ então $a \cdot c < b \cdot c$ e $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$.

P9 Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que, $a < b$ e $c < 0$ então $a \cdot c > b \cdot c$ e $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$.

Em particular, se $c = -1$ então $-a > -b$.

P10 Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que, $0 < a < b$ e $0 < c < d$ então $a \cdot c < b \cdot d$.

P11 Se $a, b \in \mathbb{R}$ tal que, $0 < a < b$ e $n \in \mathbb{N}$ então $a^n < b^n$ e $a^{-n} > b^{-n}$.

P12 Se $a, b \in \mathbb{R}$ tal que, $a \cdot b > 0$ então $(a > 0$ e $b > 0)$ ou $(a < 0$ e $b < 0)$.

P13 Se $a, b \in \mathbb{R}$ tal que, $a \cdot b < 0$ então $(\Longrightarrow)$ $(a > 0$ e $b < 0)$ ou $(a < 0$ e $b > 0)$.

Expressões envolvendo os símbolos $<, >, \leq$ ou $\geq$ são chamadas desigualdades.

Exercícios: Resolva as seguintes desigualdades:

1.3.1 Exercícios

1. $5x \leq 2x + 12$. Resp. $x \leq 4$
2. $x^2 - x - 2 \geq 0$. Resp. $x \geq 2$ ou $x \leq -1$
3. $5 < 5x \leq 2x + 15$. Resp. $1 < x \leq 5$
4. $\dfrac{5x-3}{3x-2} \leq \dfrac{5x+1}{3x+5}$. Resp. $x \in \left(-\infty, \dfrac{-5}{3}\right) \cup \left[\dfrac{13}{23}, \dfrac{2}{3}\right)$
5. $x^3 + 3x^2 > 4x$. Resp. $x \in (-4, 0) \cup (1, \infty)$

1.4 Valor Absoluto

Definição 1.4. *O valor absoluto de um número real a, denotado por $|a|$, representa geometricamente a distância de a até 0 (zero) da reta real. Logo, temos que $|a| = \sqrt{a^2}$.*

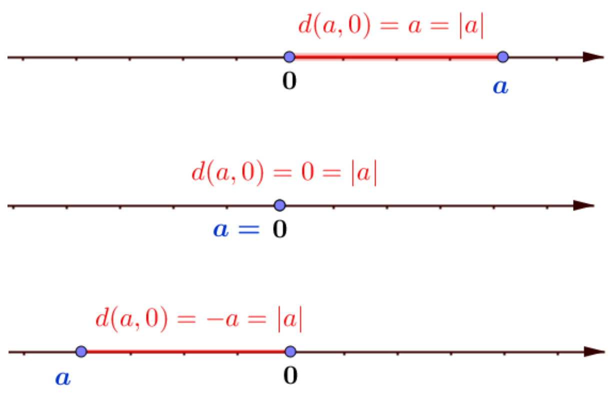


Figura 1.2: Representação geométrica do valor absoluto de um número real.

Como as distâncias são sempre positivas ou zero, então temos:

$$|a| \geq 0 \qquad \text{para todo} \quad a \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a > 0 \\ 0, & \text{se } a = 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases} \iff |a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Definição 1.5. *Definimos $d(a,b) = |a-b|$, sendo a distância dos números reais a e b na reta numérica.*

Propriedades de Valor Absoluto:

P1 Se $x, y \in \mathbb{R}$ então, $|x+y| \leq |x| + |y|$ Desigualdade Triangular.

P2 Se $x, y \in \mathbb{R}$ então, $|xy| = |x||y|$

P3 Se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} - \{0\}$ então, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

P4 Se $x \in \mathbb{R}$ então, $|x|^2 = |x^2| = x^2$

P5 Se $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ então, $|x| = |-x|$.

P6 Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $|x| = |y|$ se e somente se $x = \pm\, y$.

P7 Se $x, y \in \mathbb{R}$ então, $|x-y| \leq |x| + |y|$.

P8 Se $x, y \in \mathbb{R}$ então, $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

P9 Se $a > 0$, e $|x| \leq a$ então, $-a \leq x \leq a$.

P10 Se $a > 0$, e $|x| \geq a$ então, $x > a$ ou $x < -a$.

1.5 Intervalos

São conjuntos infinitos de números reais.

Intervalo Aberto. $(a,b) =]a,b[= \{x| \ \ a < x < b\}$

Intervalo Fechado. $[a,b] = \{x| \ \ a \leq x \leq b\}$

Intervalo Fechado à Direita e Aberto à Esquerda. $(a,b] = \{x| \ \ a < x \leq b\}$

Intervalo Aberto à Direita e Fechado à Esquerda. $[a,b) = \{x| \ \ a \leq x < b\}$

Intervalos Infinitos:

(i) $(a,\infty) = \{x|\ \ x > a\}$

(ii) $[a,\infty) = \{x|\ \ x \geq a\}$

(iii) $(-\infty,b) = \{x|\ \ x < b\}$

(iv) $(-\infty,b] = \{x|\ \ x \leq b\}$

Exemplo 1.1. *Discutir geometricamente se é possível achar valores* $x \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$|x| + |x-1| + |x-2| + |x-4| \leq 2.$$

Solução: De fato, dispondo os números: 0, 1, 2, 4 sobre à reta numérica, estudamos separadamente as possibilidades para os valores de x. Denotemos por $D(x) = |x|+|x-1|+|x-2|+|x-4|$.

Se $x < 0$ na Figura 1.3 é possível observar que $D(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + |x-4| > 7$. No caso em que $x = 0$, temos: $D(0) = d(0,0) + d(0,1) + d(0,2) + d(0,4) = 0 + 1 + 2 + 4 = 7$.

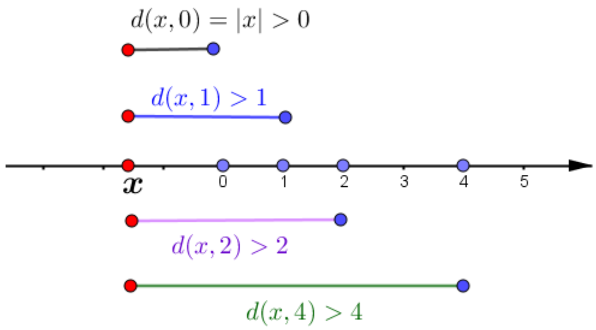


Figura 1.3: Para $x \leq 0$, $D(x) \geq 7$

Se $0 < x < 1$ na Figura 1.4 observa-se que: $7 > D(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + |x-4| > 5$.

No caso em que $x = 1$, temos: $D(1) = d(1,0) + d(1,1) + d(1,2) + d(1,4) = 1 + 0 + 1 + 3 = 5$.

Se $1 < x < 2$ na Figura 1.5 observa-se que: $D(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + |x-4| = 5$.

No caso em que $x = 2$, temos: $D(2) = d(2,0) + d(2,1) + d(2,2) + d(2,4) = 2 + 1 + 0 + 2 = 5$

Se $2 < x < 4$ na Figura 1.6 observa-se que: $9 > D(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + |x-4| > 5$.

No caso em que $x = 4$, temos: $D(4) = d(4,0) + d(4,1) + d(4,2) + d(4,4) = 4 + 3 + 2 + 0 = 9$.

Se $4 < x$ na Figura 1.7 é possível observar que $D(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + |x-4| > 9$. Consequentemente, no existe nenhum valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $D(x) \leq 2$

Exercícios: Resolva os seguintes problemas:

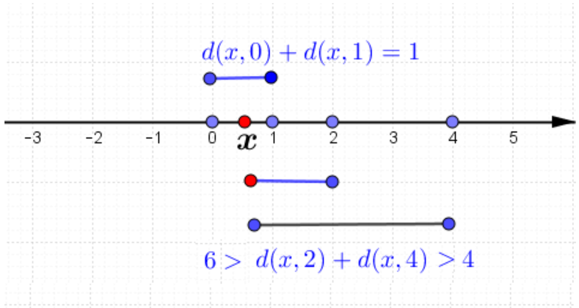


Figura 1.4: Para $0 < x \leq 1,\ \ 7 \geq D(x) \geq 5$

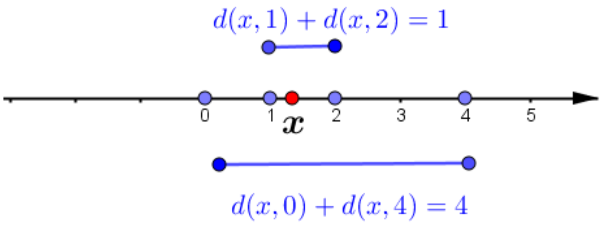


Figura 1.5: Para $1 < x \leq 2$, $D(x) = 5$

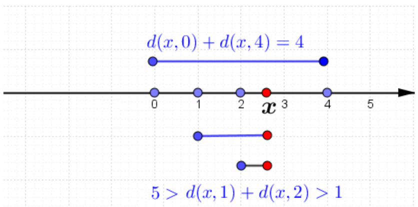


Figura 1.6: Para $2 < x \leq 4,\ \ 9 \geq D(x) > 5$

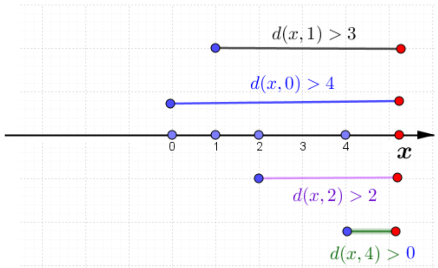


Figura 1.7: Para $4 < x,\ \ D(x) > 9$

1. $|x-3| = 2$. Resp. $x = 5$ ou $x = 1$

2. $|2x-5| < 1$. Resp. $2 < x < 3$

3. $|x-1| + |x-2| > 1$. Resp. $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

4. $|x-1| < |x-2|$. Resp. $x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$

5. Se $|x-4| < 0,1$ e $|y-7| < 0,2$. Use a desigualdade triangular para estimar $b > 0$ tal que $|x+y-11| < b$. Resp. $b = 0,3$

6. A relação entre escalas Celsius (C) e Fahrenheit(F) é dada por

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Qual é o intervalo sobre a escala Celsius correspondente à temperatura no intervalo $50 \leq F \leq 95$. Resp. $10 \leq x \leq 35$

1.6 Potenciação

Calcular a potência n de um número real a equivale a multiplicar a, por ele mesmo n vezes.

$$a^n = \underbrace{a.a.a.............a}_{n\ vezes}$$

Definimos $a^0 = 1$.

Propriedades:

P1 $a^m.a^n = a^{m+n}$.

P2 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, sempre que $a \neq 0$.

P3 $(a^m)^n = a^{m.n}$.

P4 $(a)^{m^n} = a^{\overbrace{m.m.m........m}^{n\ vezes}}$.

P5 $(ab)^n = a^n.b^n$

P6 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, sempre que $b \neq 0$.

P7 $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$, sempre que $b \neq 0$.

P8 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, sempre que $n > 0$.

Exercícios: Simplifique as expressões seguintes

1. $\dfrac{6^8 \cdot 3^2 \cdot 2^{-3}}{8^{-7} \cdot 9^{-3}}$. Resp. $2^{26} \cdot 3^{16}$
2. $\dfrac{8 \cdot 10 \cdot 125 \cdot 1.296}{256 \cdot 25 \cdot 30}$. Resp. $2^{-1} \cdot 3^3 \cdot 5$
3. $\dfrac{3^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{\frac{7}{2}}}{3^{\frac{1}{6}}}$. Resp. 3^5

1.7 Exercícios

1. Nos exercícios seguintes, simplifique as expressões radicais:

   a) $\sqrt{9x^{-6}y^4}$ *c)* $\sqrt{16y^8z^{-2}}$ *e)* $\sqrt{x^3}-\sqrt{4xy^2}$ *g)* $2\sqrt{175}-4\sqrt{28}$ *i)* $\sqrt[5]{9ab^6}.\sqrt[5]{27a^2b^{-1}}$

   b) $\sqrt[4]{\dfrac{3x^8y^2}{8x^2}}$ *d)* $\sqrt[5]{\dfrac{4x^6y}{9x^3}}$ *f)* $\sqrt[3]{\dfrac{4x^2}{y^2}}\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{y}}$ *h)* $\dfrac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^2)^{-1/2}}$ *j)* $\dfrac{\sqrt{18x^2y}+\sqrt{2y^3}}{\sqrt{y}}$

2. Fatore as expressões:

   a) $2x^3-3x^2+2x-3$ *b)* $10x^2+23x+12$ *c)* $9x^2-16$ *d)* $2x(x+3)-5(x+3)$

   e) $x^3-4x^2+5x-20$ *f)* $2x^3-16x^2+14x$ *g)* x^3+64 *h)* $x^2(x^2-1)-x^2+1$

   i) $x^6-3x^4+x^2-3$ *j)* $14x^2-33x-5$ *k)* $1-x^3$ *l)* x^5-6x^3+9x

3. Determine o conjunto dos reais para os quais a igualdade se verifica.

   a) $|x-3|=2$ *e)* $|3x-7|=x+2$ *j)* $x+\dfrac{1}{x}=1$

   b) $|5x|=3-x$ *f)* $|3x+2|=5$ *k)* $\sqrt{x+7}=-x^2+5$

   c) $|2x-3|=x^2$ *g)* $|2x-3|=x^2$ *l)* $x(x-1)=4$

   d) $|x-5|=|3x-1|$ *h)* $\left|\dfrac{1}{3x-1}\right|=1$ *m)* $x^3-1=0$

4. Encontrar, para cada desigualdade abaixo, o conjunto dos reais para os quais ela se verifica.

   a) $10x<18+4x$ *e)* $x^2-6x+5\leq 0$ *i)* $\dfrac{x-1}{2x-5}\leq\dfrac{1+x/2}{x+3}$

   b) $2x\geq 3x^2-16$ *f)* $3<5x\leq 2x+11$ *j)* $(x-\pi)(x+5)(x-1)>0$

   c) $3x^2-13x\geq 10$ *g)* $(2x+3)^6(x-2)\geq 0$ *k)* $\dfrac{1}{3x-7}\leq\dfrac{4}{3-2x}$

   d) $2\geq\dfrac{3x+1}{x}>\dfrac{1}{x}$ *h)* $\dfrac{x+2}{x-1}\leq\dfrac{x}{x+4}$ *l)* $0<\dfrac{x-1}{2x-1}<2$

5. Encontrar, para cada desigualdade abaixo, o conjunto dos reais para os quais ela se verifica.

   a) $|2x-5|<1$ *e)* $|x-3|>7$ *i)* $2x^2+7x>15$ *m)* $|3x+5|\leq|2x+1|$

   b) $|5-1/x|\leq 2$ *f)* $|x-2|\geq 4x+1$ *j)* $x^3-x\geq 0$ *n)* $|x-3|+|x+3|<8$

   c) $|4x-6|\leq 3$ *g)* $|9-2x|\geq|7x|$ *k)* $4x^2-1\leq 0$ *o)* $|x-1|+|x-2|\geq 1$

   d) $|3x+5|\geq 2$ *h)* $0<|x+2|<1$ *l)* $|x^2-1|\geq 0$ *p)* $x^3-x^2-30x\leq 0$

   q) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geq 2$

Capítulo 2

Revisão de Geometria Analítica e Cônicas

2.1 Sistema Cartesiano Ortogonal

Assim como os pontos de uma reta podem ser associados a números reais, ditos suas coordenadas, os pontos de um plano podem ser identificados com *pares ordenados* de números reais. Para isto, definimos um sistema cartesiano ortogonal (Figura 2.1), formado por duas retas fixas numeradas perpendiculares entre si que se interceptam na origem 0 de cada uma delas, denominaremos esta interseção de Origem $O = (0, 0)$. A reta horizontal será chamada eixo X ou eixo das abscissas e a reta vertical será chamada eixo Y ou eixo das ordenadas.

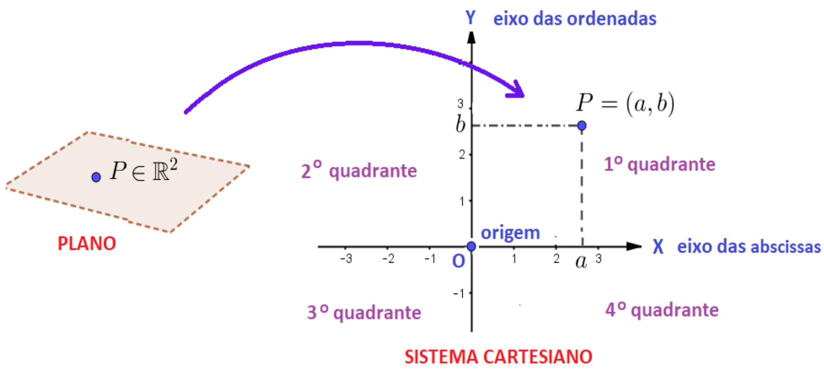


Figura 2.1: Relação entre Plano e Plano Cartesiano

Qualquer ponto do plano será relacionado com um único par de números reais (a, b) da seguinte maneira: a coordenada a ou abscissa de um ponto P é a coordenada no eixo X, do pé da perpendicular a este eixo passando por P e a coordenada b ou ordenada de P é a coordenada no eixo Y, do pé da perpendicular a este eixo passando por P. Se P tem coordenadas a e b escrevemos

$P = (a, b)$.

Note que os eixos dividem o plano em quatro regiões chamados quadrantes, o 1^o quadrante são os pontos $P = (a, b)$ onde $a > 0$ e $b > 0$, o 2^o quadrante são os pontos $P = (a, b)$ onde $a < 0$ e $b > 0$, o 3^o quadrante são os pontos $P = (a, b)$ onde $a < 0$ e $b < 0$, por último o 4^o quadrante são os pontos $P = (a, b)$ onde $a > 0$ e $b < 0$.

O conjunto de pontos contidos num plano cartesiano será denotado por

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \;/\; a \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{R}\}$$

Definição 2.1. *Dizemos que dois pontos são simétricos em relação a uma reta fixa, quando um é a imagem espelhada do outro em relação à reta fixa. Esta reta é chamada eixo de simetria.*

Consideremos um ponto $P = (a, b)$ no 1^o quadrante, o simétrico do ponto P em relação:

a) ao eixo X, é $P_1' = (a, -b)$.

b) ao eixo Y, é $P_2' = (-a, b)$.

c) à origem $O = (0, 0)$, é $P_3' = (-a, -b)$.

d) à reta bissetriz do 1^o e 3^o quadrantes, é $P_4' = (b, a)$.

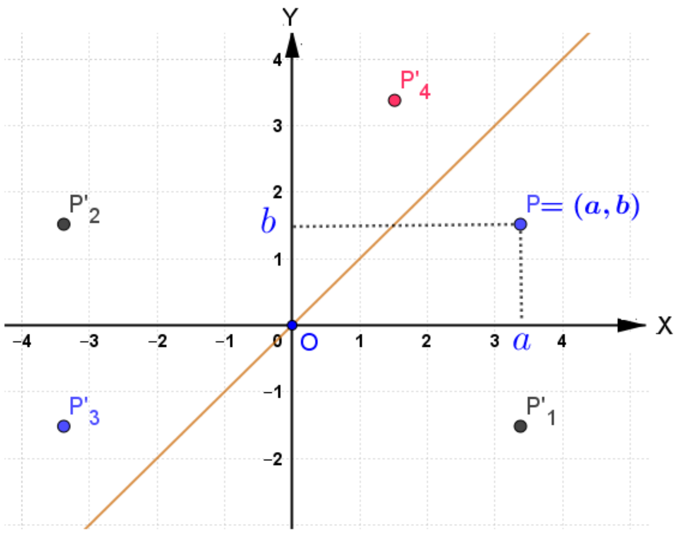


Figura 2.2: Simetria de Pontos

Em $\mathbb{R}^2$ definimos a distância entre dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

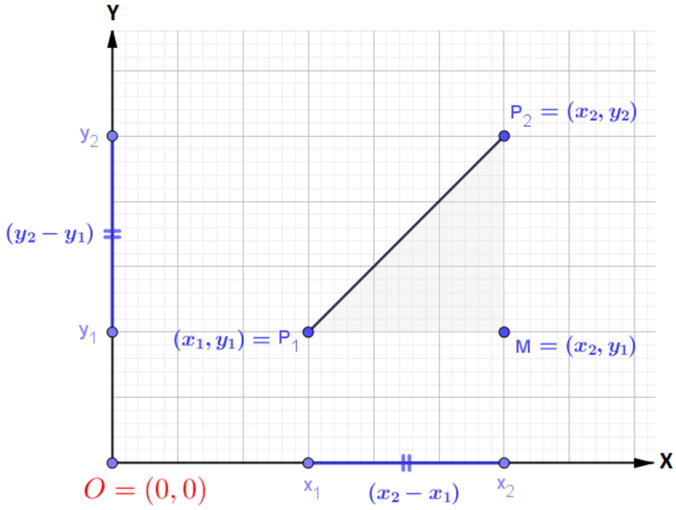


Figura 2.3: Distância entre Pontos

2.2 Gráficos em $\mathbb{R}^2$

O conjunto de pontos $P = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas satisfazem uma equação em x e y é chamado de gráfico da equação.

A seguir, os gráficos de algumas destas equações.

2.2.1 Reta

A representação geométrica de uma reta $\mathcal{L}$ não vertical no plano cartesiano, que passa pelos pontos fixos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, é determinada pelos pontos $P = (x, y)$ que satisfazem uma equação de 1^o grau da forma:

$$y = mx + b$$

onde $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ é o coeficiente angular (ou tangente de seu ângulo de inclinação) da reta e $b = \dfrac{y_0\ x_1 - y_1\ x_0}{x_1 - x_0}$ é o coeficiente linear da reta.

Observação 2.1. *Na Figura 2.4 note que: $(0, b)$ é o ponto de interseção da reta $\mathcal{L}$ com o eixo Y e que se $x_0 = x_1$ à reta $\mathcal{L}$ é vertical e consequentemente não existe seu coeficiente angular.*

Exercícios: Ache a equação da reta, tal que:

1. Passe por $P_0 = (0, 1)$ e com inclinação $m = -1$. Resp.: $y = -x + 1$.

2. Passe pelos pontos $P_0 = (3, 2)$ e $P_1 = (4, 1)$. Resp: $y = -x + 5$.

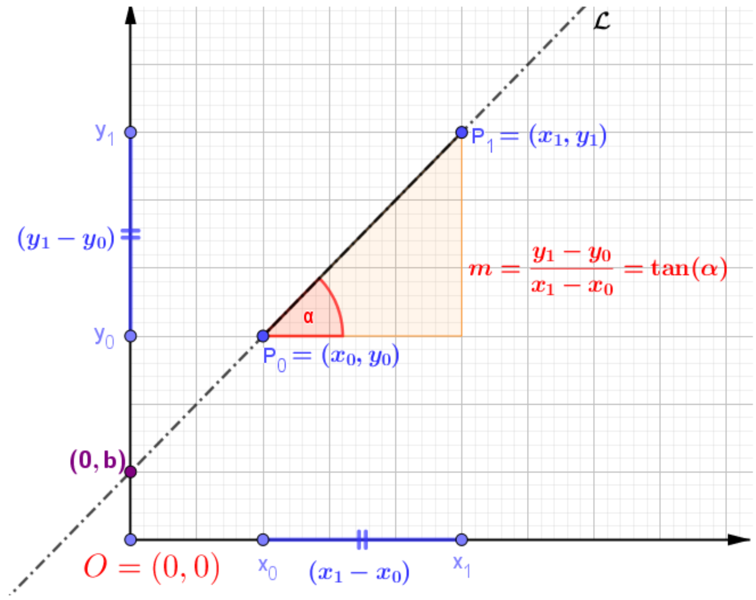


Figura 2.4: Reta $\mathcal{L}$ que passa pelos pontos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$.

3. Passe pelos pontos $P_0 = (1, 2)$ e $P_1 = (5, 2)$. Resp: $y = 2$.

4. Passe pelos pontos $P_0 = (1, 2)$ e $P_1 = (1, 7)$. Resp: $x = 1$.

5. Seu coeficiente angular é $m = 2$ e seu coeficiente linear é $b = -3$. Resp.: $y = 2x - 3$.

Lembrar que: duas retas r e s são **perpendiculares** se o produto de seus coeficientes angulares m_r e m_s é igual a -1.

$$m_r \cdot m_s = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) = -1$$

Exemplo 2.1. *Calcule a reta perpendicular à* $y = x - 2$ *no ponto* $(2, 0)$. *Resp.:* $y = -x + 2$.

Duas retas r e s são **paralelas** se e somente se ambas tem a mesma inclinação

Exemplo 2.2. *Calcule a reta paralela à* $y = x - 2$ *que passa pelo ponto* $(1, 0)$. *Resp.:* $y = x - 1$.

Note que se $A \neq 0$ a equação de 1^o grau,

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{é equivalente a} \quad y = \left(\frac{-A}{B}\right)x - \frac{C}{B} = mx + b$$

Exemplo 2.3. *Esboce a reta* $-2x + 5y - 10 = 0$.

Exemplo 2.4. *Representente graficamente a inequação* $4x + 3y \geq 12$

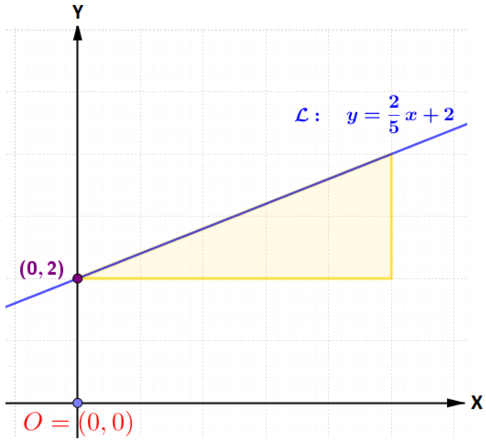


Figura 2.5: Esboço da reta $-2x + 5y - 10 = 0$.

Solução: Se $P_0 = (x_0, y_0)$ pertence ao gráfico da reta $4x + 3y = 12$, então $4x_0 + 3y_0 = 12$. Consequentemente, os pontos $P = (x, y)$ com $x \geq x_0$ e $y \geq y_0$ satisfazem que:

$$4x + 3y \geq 4x_0 + 3y_0 = 12$$

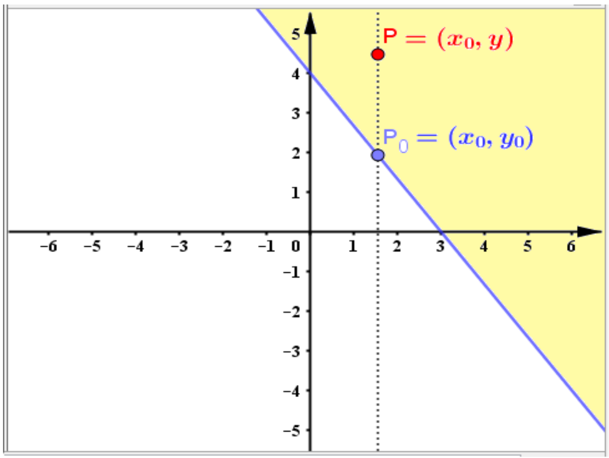


Figura 2.6: Esboço da região dos pontos (x, y) tal que $4x + 3y \geq 12$.

2.3 Exercícios

1. Ache a distância entre os pontos:

   a) $(-3, -4)$ e $(-5, -7)$ *b*) $(0, 0)$ e $(-8, -6)$ *c*) $(7, -1)$ e $(7, 3)$

2. Determine o coeficiente angular e a equação geral das retas que passam pelos pares de pontos dados. Faça os respectivos gráficos.

a) $(1,-2)$ e $(2,1)$ *b*) $(2,3)$ e $(-1,3)$ *c*) $(-2,-1)$ e $(1,-2)$ *d*) $(1,2)$ e $(1,-3)$.

3. Escreva a equação e desenhe no plano cartesiano as retas verticais e horizontais que passam pelos pontos: *a*) $P(2,3)$ *b*) $P(-1,4/3)$ *c*) $P(0,-\sqrt{2})$ *d*) $P(-\pi,0)$.

4. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto P com coeficiente angular m.

   a) $P(1,1),\ m=1$ *b*) $P(-1,1),\ m=-\frac{1}{2}$ *c*) $P(0,3),\ m=2$ *d*) $P(-4,0),\ m=-2$.

5. Esboce a reta paralela e perpendicular à reta abaixo que passa pelo ponto P

   a) $3x+4y=12,\ P=(4,-2)$ *b*) $x+y=2,\ P=(0,3)$ *c*) $y=2x+4,\ P=(1,1)$.

2.4 Circunferência

Uma circunferência $\mathcal{C}$ é o conjunto de pontos que equidistam de um ponto fixo, chamado centro. Se denotamos o centro por $C=(h,k)$ e $(x,y)\in\mathcal{C}$, então:

$$d((x,y),(h,k))=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r \quad \text{(raio do círculo)}$$

Consequentemente, a equação da circunferência de centro $C=(h,k)$ e raio r é dada por:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Se o centro da circunferência $C=(h,k)$ coincide com a origem $O=(0,0)$, ou seja se $(h,k)=(0,0)$, então

$$x^2+y^2=r^2.$$

Definição 2.2. *O conjunto de pontos $(x,y)\in R^2$ que satisfazem a equação de 2^o grau $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$, onde $A\neq 0$ e $D^2+E^2-4AF>0$, é chamada de circunferência.*

Exemplo 2.5. *Esboce a circunferência determinada pela equação $x^2+y^2+4x-4y-17=0$, para tal determine o centro e o raio da mesma.*

Sol.: Completando quadrados temos:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+4x-4y-17 &= (x^2+4x+\quad)+(y^2-4y+\quad)-17 \\ &= (x+2)^2+(y-2)^2-4-4-17=0 \end{aligned}$$

Portanto

$$(x+2)^2+(y-2)^2=5^2 \quad \text{onde} \quad C=(-2,2) \quad \text{e} \quad r=5$$

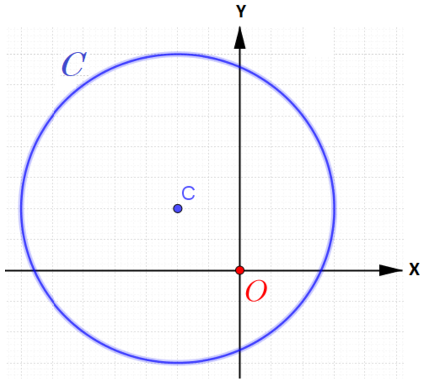


Figura 2.7: Esboço da circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$.

Exemplo 2.6. *Represente graficamente a inequação* $x^2 + (y-1)^2 > 4$

Solução: Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ pertencente ao gráfico da circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

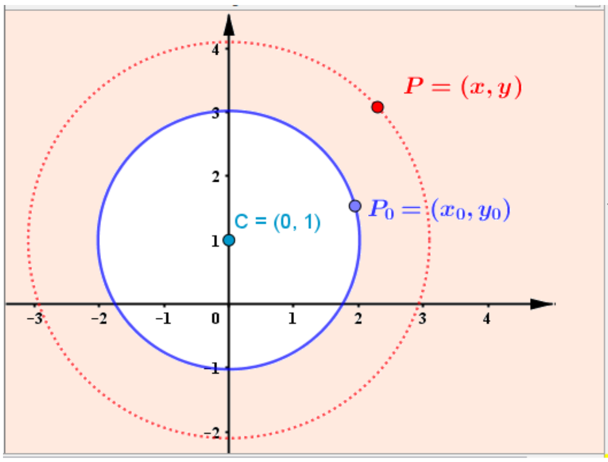


Figura 2.8: Esboço da região dos pontos (x, y) tal que $x^2 + (y-1)^2 > 4$.

Os pontos $P = (x, y)$ que pertencem a uma circunferência de centro $C = (0, 1)$ e raio $r > 2$ satisfazem a equação $x^2 + (y-1)^2 = r^2$, logo

$$x^2 + (y-1)^2 = r^2 > 4 = x_0^2 + (y_0 - 1)^2$$

2.5 Elipse

Dados dois pontos fixos distintos F_1 e F_2 pertencentes a um plano, cuja distância entre eles é $2c$. Chamaremos elipse $\mathcal{E}$ ao conjunto de pontos cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$, $(2a > 2c)$.

$$d((x, y), F_1) + d((x, y), F_2) = 2a$$

Caso 1: Suponhamos que os focos estão sobre o eixo X, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, então:

$$d((-c,0),(x,y)) + d((c,0),(x,y)) = 2a$$

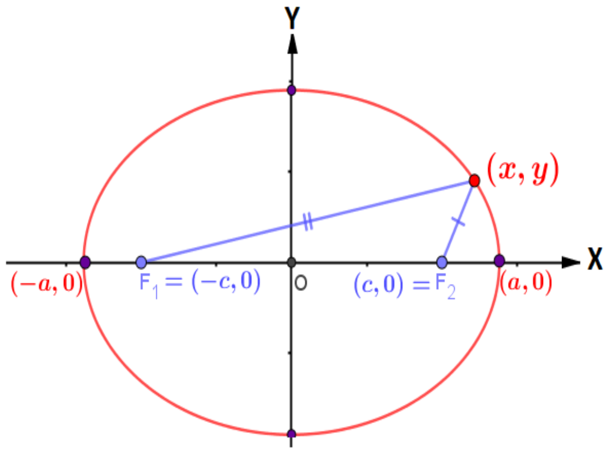


Figura 2.9: Elipse com centro em $(0,0)$ e focos sobre o eixo X (eixo principal).

Na equação anterior é possível verificar que $V_1 = (-a, 0)$ e $V_2 = (a, 0)$ são pontos da elipse (chamados *vértices*). Por outro lado, simplificando a expressão anterior temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
x^2+c^2+2xc+y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x^2+c^2-2xc+y^2) \\
4xc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
xc - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
x^2c^2 + a^4 - 2xca^2 &= a^2(x^2+c^2-2xc+y^2) \\
x^2c^2 + a^4 &= a^2(x^2+c^2+y^2) \\
x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2)
\end{aligned}$$

Chamando $b^2 = a^2 - c^2 > 0$ temos que:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad ou \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

è possível observar desta equação que $V_3 = (0, -b)$ e $V_4 = (0, b)$ são pontos da elipse, os quais serão chamados também de vértices da elipse.

Caso 2: Suponhamos que os focos estão sobre o eixo Y, $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, então:

$$d((0,-c),(x,y)) + d((0,c),(x,y)) = 2a$$

Na equação anterior é possível verificar que $V_1 = (0, -a)$ e $V_2 = (0, a)$ são pontos da elipse

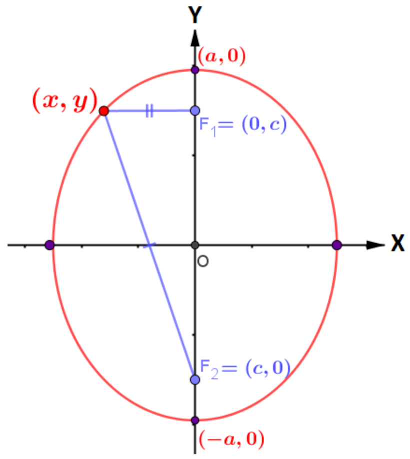


Figura 2.10: Elipse com centro em $(0, 0)$ e focos sobre o eixo Y (eixo principal).

(chamados *vértices*). Por outro lado, simplificando a expressão anterior temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + (y+c)^2} &= 2a - \sqrt{x^2 + (y-c)^2} \\
x^2 + y^2 + c^2 + 2yc &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + (x^2 + y^2 + c^2 - 2yc) \\
4yc &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} \\
yc - a^2 &= a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} \\
y^2c^2 + a^4 - 2yca^2 &= a^2(x^2 + y^2 + c^2 - 2yc) \\
y^2c^2 + a^4 &= a^2(x^2 + y^2 + c^2) \\
y^2(a^2 - c^2) + a^2x^2 &= a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}$$

Chamando $b^2 = a^2 - c^2 > 0$ temos que:

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2 \qquad ou \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

è possível observar desta equação que $V_3 = (-b, 0)$ e $V_4 = (b, 0)$ são pontos da elipse, e os mesmos são chamados também de vértices da elipse.

Definição 2.3. *Algebricamente, uma elipse cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados, é a curva no plano cartesiano definida por uma equação de 2^o grau da forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$, onde $A \neq C$.*

Quando o *eixo principal* da elipse (eixo que contém os focos) é paralelo ao eixo X ou Y, a equação anterior toma a forma mais simples:

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{x-h}{b}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{a}\right)^2 = 1$$

sendo (h, k) o centro da elipse, e a dimensão de seu eixo principal $2a$ e a dimensão de seu eixo auxiliar $2b$.

Exemplo 2.7. *Determine a o vértice, focos da elipse* $4x^2 + y^2 - 8x + 2y - 11 = 0$. *Esboce.*

Sol.: Completando quadrados, temos:

$$(4x^2 - 8x + \quad) + (y^2 + 2y + \quad) = 11 \quad \rightarrow \quad 4(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4 - 1 = 11$$

Portanto,

$$4(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16 \qquad \text{ou} \qquad \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{4^2} = 1$$

Desta última equação temos que:

- Seu centro é $(h, k) = (1, -1)$
- Seu eixo principal é paralelo ao eixo Y.
- Desde que $a = 4$ e $b = 2$, o tamanho de seu eixo principal é $2a = 8$ e o outro eixo tem tamanho $2b = 4$.
- O valor de $c = \sqrt{a^2 - b^2} > 0$, logo substituindo temos $c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$. Logo, os focos são $F_1 = (h, k + c) = (1, -1 + \sqrt{12})$ e $F_2 = (h, k - c) = (1, -1 - \sqrt{12})$.
- Seus vértices são:

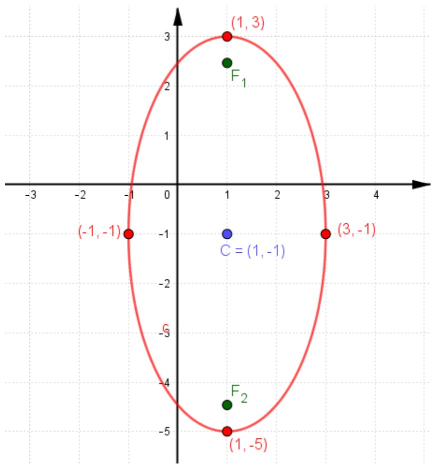


Figura 2.11: Esboço da Elipse do Exemplo 2.7.

$$V_1 = (h, k + a) = (1, -1 + 4) = (1, 3) \quad , \quad V_2 = (h, k - a) = (1, -1 - 4) = (1, -5)$$
$$V_3 = (h + b, k) = (1 + 2, -1) = (3, -1) \quad , \quad V_4 = (h - b, k) = (1 - 2, -1) = (-1, -1)$$

2.6 Parábolas

É o conjunto de todos pontos (x, y) no plano, que são equidistantes a uma reta fixa $\vec{l}$ (*diretriz*) e a um ponto fixo $F \notin \vec{l}$ (*foco*), ou seja,

$$d(F, (x, y)) = d((x, y), \vec{l})$$

Caso 1: Suponhamos $F = (0, p)$ e $\vec{l}: \ y = -p$ com $p > 0$, então

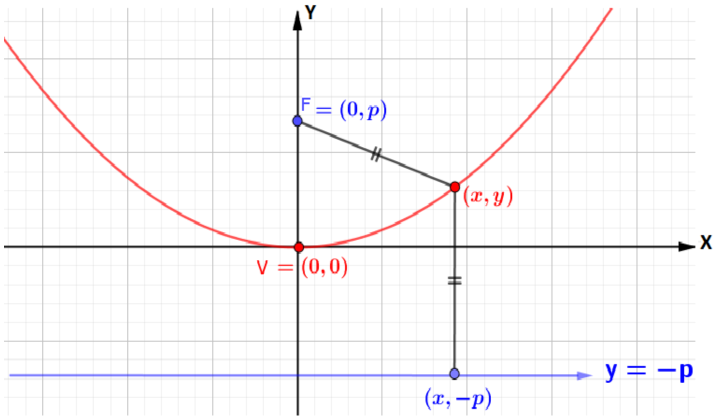


Figura 2.12: Parábola com vértice $V = (0, 0)$, simétrica ao eixo Y positivo.

$$\begin{aligned}
d((0, p), (x, y)) &= d((x, y), (x, -p)) \\
\sqrt{x^2 + (y - p)^2} &= \sqrt{(x - x)^2 + (-p - y)^2} \\
x^2 + y^2 - 2yp + p^2 &= p^2 + 2yp + y^2 \\
x^2 &= 4py
\end{aligned}$$

Ou equivalentemente

$$y = \frac{1}{4p}\, x^2$$

Caso 2: Suponhamos $F = (p, 0)$ e $\vec{l}: \ x = -p$ com $p > 0$, então

$$\begin{aligned}
d((p, 0), (x, y)) &= d((x, y), (-p, y)) \\
\sqrt{(x - p)^2 + y^2} &= \sqrt{(x + p)^2 + (y - y)^2} \\
x^2 - 2xp + p^2 + y^2 &= x^2 + 2xp + p^2 \\
y^2 &= 4px
\end{aligned}$$

Ou equivalentemente

$$x = \frac{1}{4p}\, y^2$$

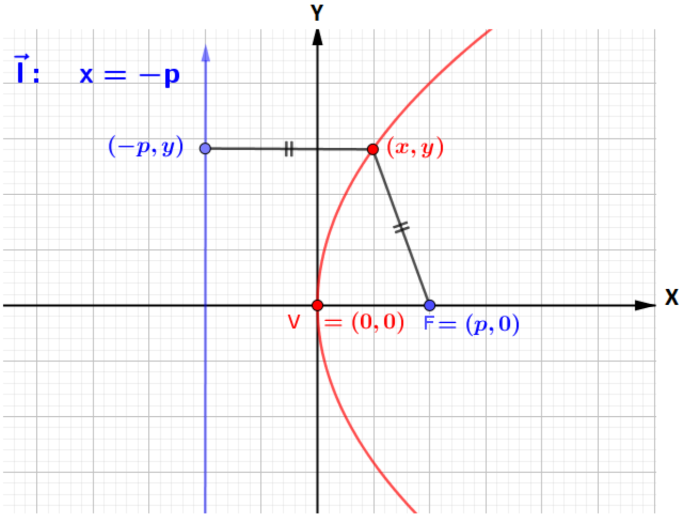


Figura 2.13: Parábola com vértice $V = (0, 0)$, simétrica ao eixo X positivo.

Observação 2.2. *Se $p < 0$ no Caso 1, teremos que a parábola é simétrica ao eixo Y negativo, e sua equação fica*

$$y = -\frac{1}{4p}\,x^2$$

Se $p < 0$ no Caso 2, teremos que a parábola é simétrica ao eixo X negativo, e sua equação fica

$$x = -\frac{1}{4p}\,y^2$$

Translação de Parábolas: Quando deslocamos horizontal e/ou verticalmente o vértice $(0, 0)$ de uma parábola até um ponto $V = (h, k)$ as equações se tornam

$$(y-k) = \pm\,\frac{1}{4p}\,(x-h)^2 \quad \text{ou} \quad (x-h) = \pm\,\frac{1}{4p}\,(y-k)^2$$

Lembrando que a equação da parábola terá o mesmo sinal que p.

Observação 2.3. *Uma parábola com eixo transversal paralelo ao eixo Y, tem como equação geral:*

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-Ax^2 - Dx - F}{E} \quad \rightarrow \quad y = ax^2 + bx + c$$

De onde completando quadrados se prova que seu vértice é dado por $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Analogamente, uma parábola com eixo transversal paralelo ao eixo X, tem como equação geral:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-Cy^2 - Ey - F}{D} \quad \rightarrow \quad x = ay^2 + by + c$$

De onde completando quadrados se prova que seu vértice é $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Exemplo 2.8. *Determine a o vértice, foco e diretriz da parábola $y^2 - 2x - 2y + 9 = 0$. Esboce seu gráfico.*

Sol.: Isolando a variável x e completando quadrados a seguir, temos:

$$x = \frac{1}{2}(y^2 - 2y + 9) \quad \to \quad x = \frac{1}{2}\Big((y-1)^2 - 1 + 9\Big) = \frac{1}{2}(y-1)^2 + 4$$

Portanto,

$$(x - 4) = \frac{1}{2}(y-1)^2$$

Desta última equação temos que:

- Seu vértice é $V = (h, k) = (4, 1)$
- Seu eixo de simetria é paralelo ao eixo X.
- Desde que, $\quad 4p = 2 \;$ então $\; p = \dfrac{1}{2}$, logo pelo item anterior, o foco $F = (h + p, k) = \left(\dfrac{9}{2}, 1\right)$.
- A equação da reta diretriz é $x = h - p = \dfrac{7}{2}$.

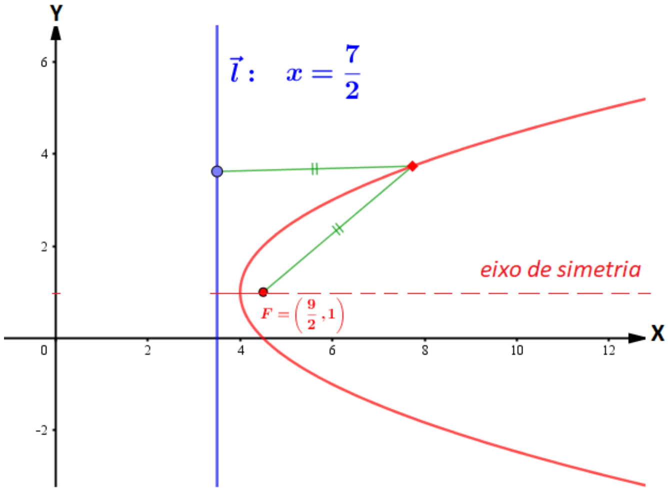


Figura 2.14: Parábola do Exemplo 2.8

2.7 Hipérboles

Dados dois pontos fixos distintos F_1 e F_2 pertencentes a um plano, cuja distância entre eles é $2c$. Chamaremos **hipérbole** ao conjunto de todos pontos (x, y) do plano, cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 (*focos*) é a constante $2a$ $(0 < 2a < 2c)$.

$$|d(F_1, (x, y)) - d(F_2, (x, y))| = 2a$$

Caso 1: Suponhamos que os focos estão sobre o eixo X, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, então:

$$d((-c,0),(x,y)) - d((c,0),(x,y)) = \pm 2a \qquad (*)$$

Na equação anterior é possível verificar que $V_1 = (-a, 0)$ e $V_2 = (a, 0)$ são pontos da hipérbole (*vértices*).

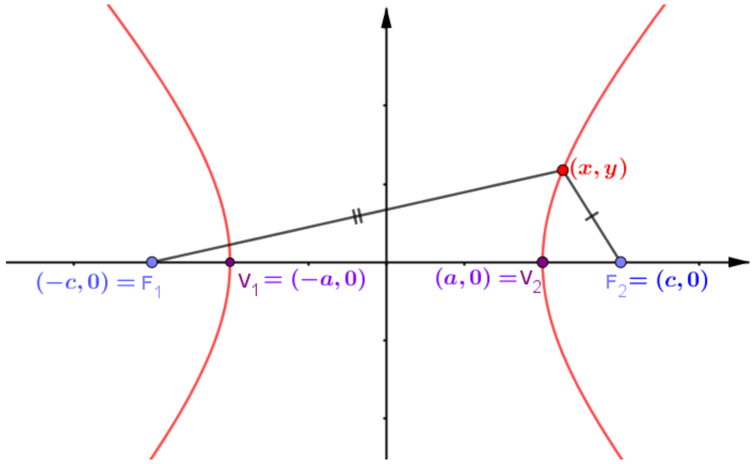


Figura 2.15: Hipérbole simétrica ao eixo Y.

A seguir, usando operações algébricas procedemos a simplificar a equação $(*)$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
x^2+2xc+c^2+y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2\\
4xc &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
xc - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)\\
x^2c^2 + a^4 &= a^2(x^2 + c^2 + y^2)\\
(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2)
\end{aligned}$$

Chamando $b^2 = c^2 - a^2 > 0$ temos que equação da hipérbole com eixo vertical e centralizada na origem $(0, 0)$ é

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad ou \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Caso 2: Suponhamos que os focos estão sobre o eixo Y, $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, então:

$$d((0,-c),(x,y)) - d((0,c),(x,y)) = \pm 2a \qquad (**)$$

Na equação anterior é possível verificar que $V_1 = (0, -a)$ e $V_2 = (0, a)$ são pontos da hipérbole (*vértices*).

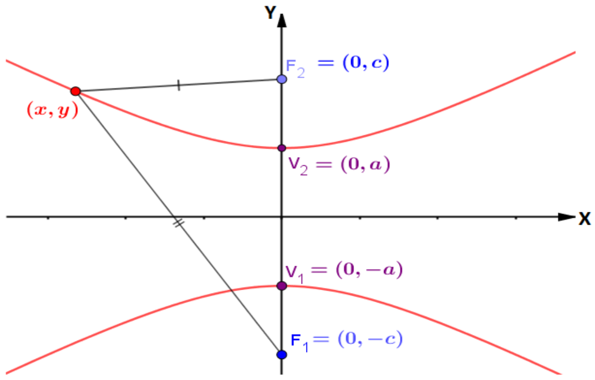


Figura 2.16: Hipérbole simétrica ao eixo X.

Analogamente, ao Caso 1, reduzimos a expressão $(**)$, obtendo desta vez a equação

$$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2 \qquad ou \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad b^2 = c^2 - a^2 > 0$$

Assíntotas de uma hipérbole: São retas que passam pelo centro da hipérbole e chegam bem próxima da mesma, mas nunca a alcança.

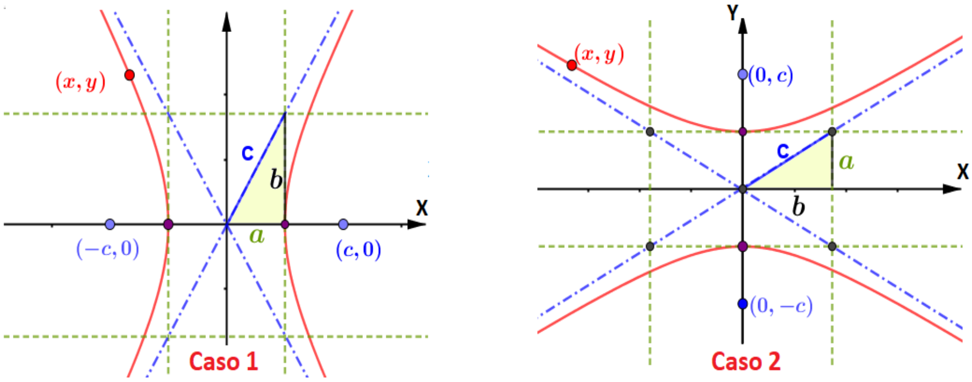


Figura 2.17: Assintotas da hipérbole

A hipérbole do Caso 1 , possui duas *retas assíntotas* $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

A hipérbole do Caso 2 , possui duas *retas assíntotas* $y = \pm\dfrac{a}{b}x$.

Exemplo 2.9. *Esboce a curva* $9x^2 - 4y^2 - 16y = 52$

Sol.: Completando quadrados temos:

$$9x^2 - 4(y^2 + 4y + \quad) = 52 \quad \rightarrow \quad 9x^2 - 4(y+2)^2 + 16 = 52$$

Portanto,

$$9x^2 - 4(y+2)^2 = 36 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{2^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$$

Desta última equação temos que:

- Seu centro é $(h, k) = (0, -2)$
- Seus focos estão sobre o eixo X. Então $a = 2$ e $b = 3$.
- Seu eixo de simetria é Y.
- Ja que $b^2 = c^2 - a^2$, então $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
- Os focos são $F_1 = (h + c, k)$, $F_2 = (h - c, k)$, ou seja $F_1 = (0 + \sqrt{13}, -2) = (\sqrt{13}, -2)$ e $F_2 = (0 - \sqrt{13}, -2) = (-\sqrt{13}, -2)$.
- Seus vértices são: $V_1 = (h+a, k) = (0+2, -2) = (2, -2)$, $V_2 = (h-a, k) = (0-2, -2) = (-2, -2)$

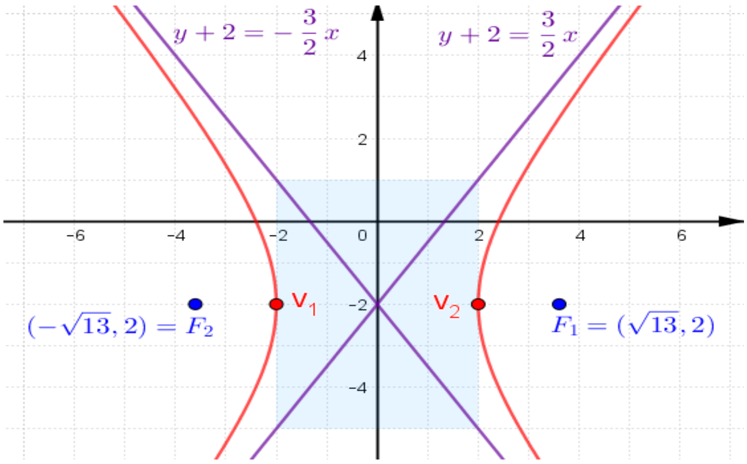


Figura 2.18: hipérbole do Exemplo 2.9

2.8 Exercícios

1. Calcular o ponto de interseção onde as retas seguintes se encontram. Ilustre graficamente

$a) \begin{cases} 3x - 2y &= 1, \\ 2x + \ y &= 0. \end{cases} \quad b) \begin{cases} y = \frac{1}{6}x - 2/3, \\ y = -\frac{1}{6}x + 2/3. \end{cases} \quad c) \begin{cases} y = x, \\ y = \frac{57}{61}x. \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$

2. Prove que a distância do ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ à reta $ax + by + c = 0$ (medida perpendicularmente) é:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3. Determine a distância entre o ponto $A = (-4, 1)$ e a reta: $a)$ $y = -x + 1$ $b)$ $y = x$.

4. Determine m de forma que as retas $(m+1)x + my + 1 = 0$ e $mx + (m+1)y + 1 = 0$ sejam paralelas. Faça seus gráficos.

5. Determine m de forma que as retas $(m+1)x - 2y + 1 = 0$ e $2x + (5-m)y - 1 = 0$ sejam perpendiculares. Faça seus gráficos.

6. A pressão p experimentada por um mergulhador debaixo d'água esta relacionada com sua profundidade d por meio da fórmula $p = kd + 1$ (k é uma constante). Quando $d = 0$ metros, a pressão é 1 atmosferas. A 100 metros a pressão é $10,94$ atmosferas. Determine a pressão a 50 metros.

7. Um raio de luz sai do segundo quadrante, passando ao longo da reta $x + y = 1$, sendo refletido no eixo x. O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão quando medidos em relação à perpendicular ao eixo x. Escreva uma equação para a reta ao longo da qual a luz refletida se propaga.

8. Nos seguintes exercícios, determine a equação da circunferência (r = raio e C = centro)

   $a)$ $r = 3,\ C = (3, 1)$ $c)$ $r = 1,\ C = (\sqrt{3}, 1)$ $e)$ $r = 2$, contendo os pontos $(3, 2)$ e $(1, 4)$
   $b)$ $r = 4,\ C = (-1, 1)$ $d)$ $r = \sqrt{9},\ C = (0, 1)$ $f)$ $C = (-1, -1)$ contendo o ponto $(-\frac{1}{2}, 1)$
   $g)$ Os pontos $(3, 7)$ e $(-3, -1)$ são pontos extremos de seu diâmetro.

9. Determine o raio r e as coordenadas (h, k) do centro da circunferência para cada equação dada. Esboce o gráfico.

   $a)$ $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$ $d)$ $3x^2 + 3y^2 - 6x + 9y = 27$ $g)$ $x^2 + y^2 = 2x - 2y$
   $b)$ $4x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$ $e)$ $x^2 + y^2 - 2y = 0$ $h)$ $x^2 + y^2 - 6x = 1$
   $c)$ $4x^2 + 4y^2 + +8x - 4y + 1 = 0$ $f)$ $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$ $i)$ $x^2 + y^2 - \dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{9}$

10. Determine a equação da(s) circunferência(s), tal que:

    $a)$ É tangente ao eixo x e seu centro é no ponto $(1, -7)$.

    $b)$ Seu centro está na reta $x + 4 = 0$, seu raio é 5 e é tangente ao eixo x

11. Determine as interseções da reta $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 16$. Faça o gráfico.

12. Determine as retas de coeficiente angular $m = 2$ que são tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 5$. Faça o gráfico.

13. Determine a equação da reta tangente e a reta normal para cada circunferência nos pontos indicados.

a) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 5$ em $(2,-3)$ *c*) $x^2 + y^2 = 4$ em $(\sqrt{3}, 1)$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ em $(3,2)$

14. Determine as coordenadas do centro, dos vértices e dos focos de cada elipse abaixo. A seguir esboce o gráfico.

a) $x^2 + 2y^2 + 6x + 7 = 0$ *d*) $7(x-3)^2 + 11(y-5)^2 = 77$

b) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y = 23$ *e*) $4x^2 + y^2 - 32x + 16y + 124 = 0$

c) $25(x+1)^2 + 16(y-2)^2 = 400$ *f*) $2x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 75 = 0$

15. O segmento de reta limitado pela elipse, que contém um dos focos e é perpendicular ao eixo maior é chamado de **latus rectum da elipse**.

a) Mostre que $2b^2/a$ é o comprimento do *latus rectum* da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

b) Determine o comprimento do *latus rectum* da elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$.

16. Determine o vértice da parábola $y = Ax^2 + Bx + C$, onde A, B e C são constantes e $A \neq 0$.

17. Determine as coordenadas do vértice e foco da parábola, assim como a equação da diretriz e o comprimento do seu *latus rectum* (comprimento do segmento perpendicular a seu eixo de simetria, que contém o foco).

a) $x^2 - 6x - 8y + 1 = 0$ *c*) $2x^2 + 8x - 3y = -4$ *e*) $(y+1)^2 = -4x + 4$ *g*) $y^2 = 4x$

b) $y^2 - 8y - 6x - 2 = 0$ *d*) $y^2 - 4y - 8x = -20$ *f*) $6(y-3) = (x+1)^2$ *h*) $x^2 = 8y$

18. Exceto por pequenas perturbações, um satélite se move ao redor da Terra em uma órbita elíptica, com um dos focos no centro da Terra. Suponha que no perigeu, r_p (o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra) o satélite está a 400 km da superfície da Terra e que no apogeu, r_a (o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra) o satélite está a 600 km da superfície da Terra. Sabendo que a Terra é um esfera de 6371 km de raio. Calcule a medida do eixo maior e o eixo menor da órbita elíptica deste satélite.

19. Determine as coordenadas dos vértices e dos focos de cada hipérbole. Encontre também a equação de cada assíntota e esboce o gráfico.

a) $4x^2 - 16y^2 = 64$ *c*) $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y = 4$ *e*) $9x^2 - 25y^2 + 72x - 100y + 269 = 0$

b) $49x^2 - 16y^2 = 196$ *d*) $2(x-1)^2 - (y+3)^2 = 4$ *f*) $25y^2 - 9x^2 - 50y - 54x - 281 = 0$

20. Um ponto $P = (x, y)$ move-se de modo que ele está sempre duas vezes mais afastado do ponto $(6,0)$ do que do ponto $(0,3)$. Determine a equação e esboce o gráfico da curva descrita por P.

21. O ponto $P = (x, y)$ se move de modo que a soma de suas distâncias para os dois pontos $(3, 0)$ e $(-3, 0)$ é 8. Defina e escreva uma equação para a curva percorrida pelo ponto.

Capítulo 3

Funções Reais

Dados D e E subconjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios.

Definição 3.1. *Uma função real de variável real f, é uma lei ou correspondência entre os elementos de D em E ($f : D \to E$), que associa a cada elemento $x \in D$ (variável independente), um único elemento $y \in E$ tal que $y = f(x)$ (y variável dependente de x). Simbolicamente,*

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

O conjunto D é chamado domínio de f e no que segue o denotaremos por $D = Dom(f)$ e o conjunto E será chamado contradomínio de f.

Note que, uma função necessariamente deverá relacionar todos os elementos do conjunto domínio de f, mas nem todos os elementos do conjunto E, serão "usados".

Definição 3.2. *A imagem de f, é o subconjunto $Im(f) \subseteq E$, formado por todos os elementos do contradomínio que se relacionam a algum elemento do domínio tal que: se $y \in Im(f)$, então existe pelo menos um $x \in Dom(f)$ tal que $f(x) = y$.*

Exemplo 3.1. *A função $f : D \to E$, tal que: $D = E = \mathbb{R}$ e $y = f(x) = x^2$, tem:*

i) *Domínio $D = Dom(f) = \mathbb{R}$.*

ii) *Contradomínio $E = \mathbb{R}$.*

iii) $Im(f) = \mathbb{R}^+$.

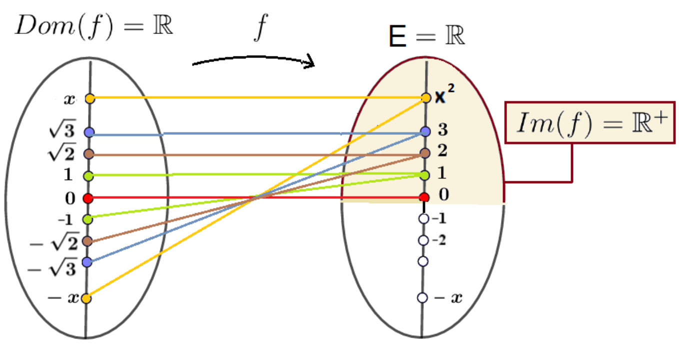


Figura 3.1: Função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$

Definição 3.3. *Definimos o gráfico da função f, por:*

$$Graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \in Dom(f) \quad e \quad y = f(x)\}$$

Note-se que dois pontos do gráfico de uma função não podem ter a mesma abscissa. Em outras palavras, uma reta vertical não pode intersectar em mais de um ponto o gráfico de f. No exemplo anterior, é possível testar que qualquer reta vertical $x = b, \ b \in \mathbb{R}$ intersecta o gráfico de f, apenas no ponto (b, b^2).

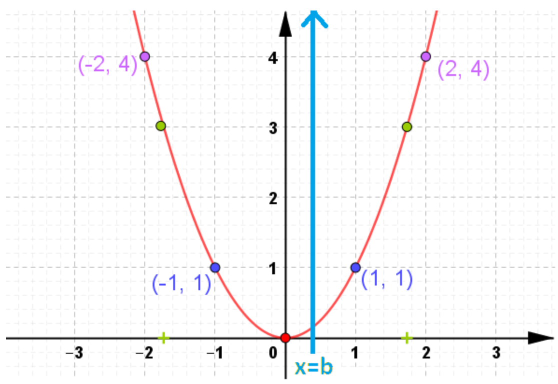


Figura 3.2: O Gráfico de $f(x) = x^2$ é $\quad Graf(f) = \{(x, x^2) \ / \ x \in\in \mathbb{R}\}$

Entre as curvas estudadas no Capítulo anterior, encontramos que: circunferências, elipses e hipérboles não correspondem ao gráfico de nenhuma função, pois ao intersectar estas curvas com retas verticais é possível achar mais de um ponto de interseção.

Exemplo 3.2. *Indique o $Dom(f)$ para que as relações abaixo determinem uma função real de variável real. A seguir, encontre $Im(f)$ e $Graf(f)$*

a) $f(x) = \sqrt{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Sol.:

a Para que $f(x) = \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}$ é necessário que: $x + 3 \geq 0$, ou seja, $x \geq -3$. Logo,

$Dom(f) = [-3, \infty)$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y = \sqrt{x+3} \quad \text{para} \quad x \in [-3, \infty)\} = [0, \infty)$.

$Graf(f) = \{(x, \sqrt{x+3}) \in \mathbb{R}^2 \ / \quad \text{para} \quad x \in [-3, \infty)\} = [-3, \infty) \times [0, \infty)$.

b Para que $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \in \mathbb{R}$ é necessário que: $x - 1 \neq 0$, ou seja, $x \neq 1$. Logo,

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 1\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 \quad \text{para} \quad x \neq 1\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

$Graf(f) = \{(x, x+1) \in \mathbb{R}^2 \ / \quad \text{para} \quad x \neq 1\}$.

3.1 Funções Especiais

3.1.1 Função Constante

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a qualquer elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento b, isto é:

$$f(x) = b.$$

A função constante é caracterizada por não ser crescente, nem decrescente. O gráfico dela é uma reta paralela ao eixo x.

3.1.2 Função Afim

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes reais $m \neq 0$ e b tais que:

$$f(x) = mx + b, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

O gráfico da função afim f é uma reta que passa pelo ponto $(0, b)$ com inclinação m.

Observação 3.1. *Casos particulares da função afim são:*

- $f(x) = mx$, *chamada de Função Linear, e*
- $f(x) = x$, *chamada de Função Identidade.*

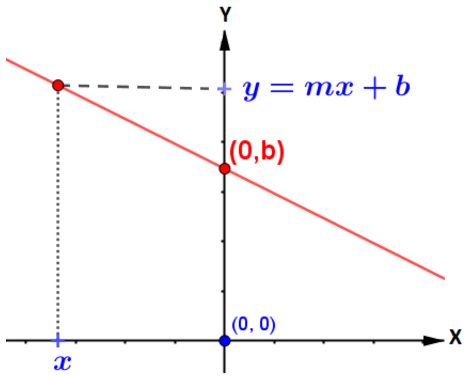


Figura 3.3: Função Afim

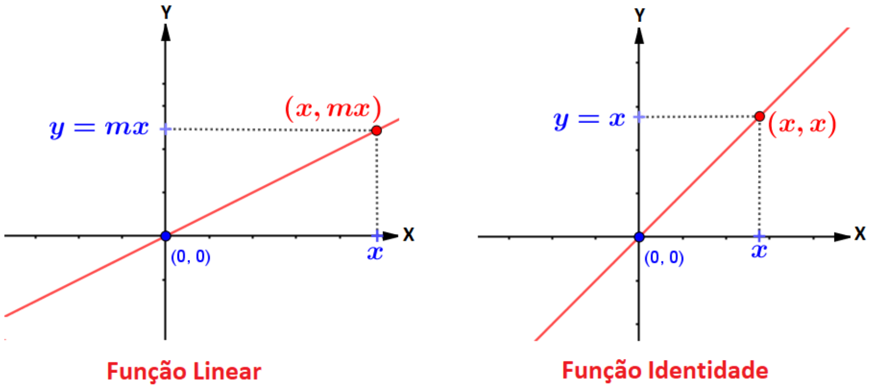


Figura 3.4: Casos Particulares de Função Afim

3.1.3 Função Módulo ou Valor Absoluto

A função definida por $y = f(x) = |x|$, chama-se função módulo. O seu domínio é o conjunto $Dom(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $Im(f) = [0, \infty)$.

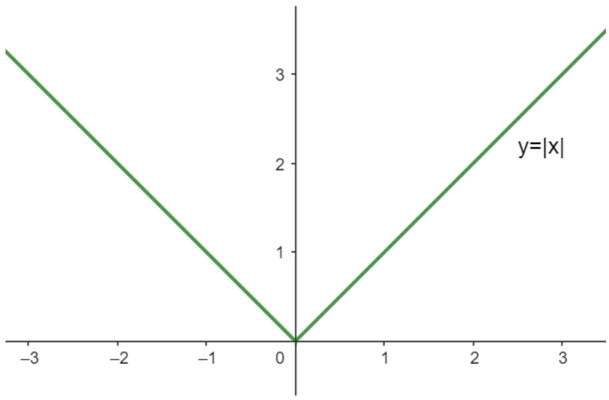


Figura 3.5: Função Modulo

3.1.4 Função Quadrática

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se função quadrática quando existem constantes reais $a,\ b,\ c$ com $a \neq 0$, tais que:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

O gráfico da função quadrática f é uma parábola cujo eixo é paralelo ao eixo Y. Se o valor $a > 0$, seu gráfico é uma parábola com **concavidade voltada para cima** e se o valor $a < 0$, seu gráfico é uma parábola com **concavidade voltada para baixo**.

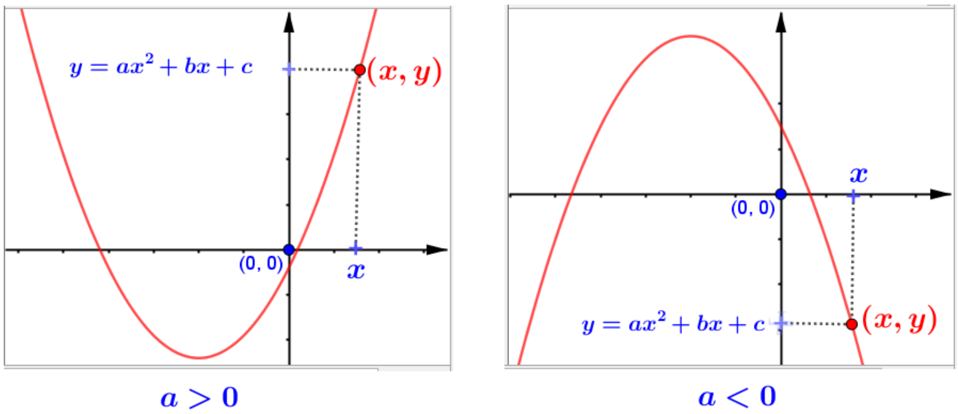


Figura 3.6: Funções Quadráticas

3.1.5 Função Polinomial

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e as constantes reais $a_0,\ a_1, \dots a_n\ (a_n \neq 0)$. Uma função $p:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se função polinomial de grau n, quando

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$a_i\ (1 \leq i \leq n)$ são chamados coeficientes da função polinomial.

O gráfico de uma função polinomial de grau $n \geq 1$ intersecta o eixo X no máximo n vezes. Chamaremos de **raízes** de $p = p(x)$ os valores $x \in \mathbb{R}$ tais que $p(x) = 0$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma raiz de p, isto é, $p(\alpha) = 0$ então

$$p(x) = (x - \alpha)q(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

onde $q = q(x)$ é uma função polinomial de grau $n - 1$.

Definiremos uma função polinomial identicamente nula quando $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $a_i = 0\ (1 \leq i \leq n)$. Denotaremos por:

$$O(x) = 0x^n + \cdots + 0x^1 + 0.$$

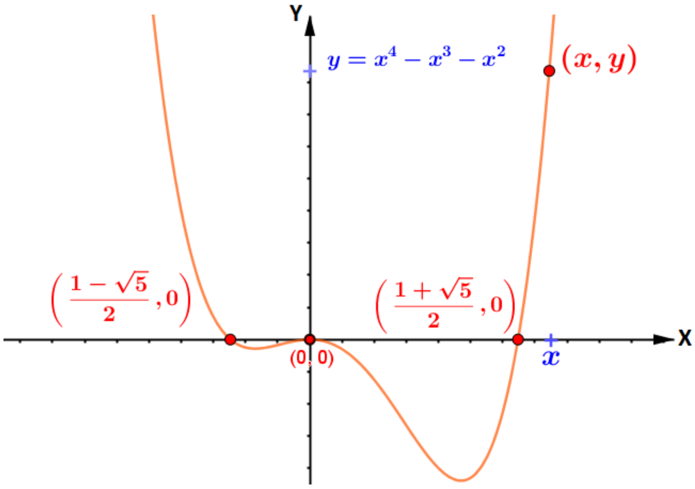


Figura 3.7: Função Polinomial $f(x) = x^2(x^2 - x - 1) = x^2(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})$

Como nenhum de seus coeficientes é diferente de 0, diremos que ela não tem grau.

Observação 3.2. *Casos particulares da função polinomial são:*

- *A Função Constante $f(x) = b$ $(b \neq 0)$, a qual pelo fato de não intersectar o eixo X iremos atribuir grau* 0.
- *A Função Afim $f(x) = mx + b$ de grau* 1, *e*
- *A Função Quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ de grau* 2.

3.1.6 Função Potência

É da forma $f(x) = x^a$, sendo que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 0$. As funções desse tipo possuem algumas propriedades resultantes das potências, além de características que podem ajudar na realização dos cálculos. Estas propriedades são:

i) $f(0) = 0$.

ii) $f(1) = 1^a = 1$.

iii) $f(xy) = (xy)^a = x^a \cdot y^a = f(x) \cdot f(y)$.

A função $f(x) = x^n$, quando n é ímpar é uma função ímpar e quando n é par, é uma função par como podemos ver na Figura 3.8.

A função $f(x) = x^{1/n}$, quando n é ímpar é uma função ímpar e quando n é par, é uma função par como podemos ver na Figura 3.9.

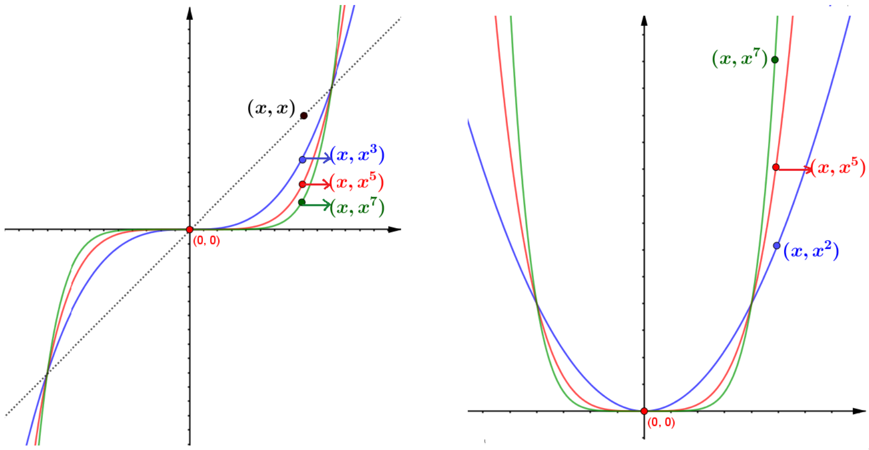


Figura 3.8: Função $f(x) = x^n$

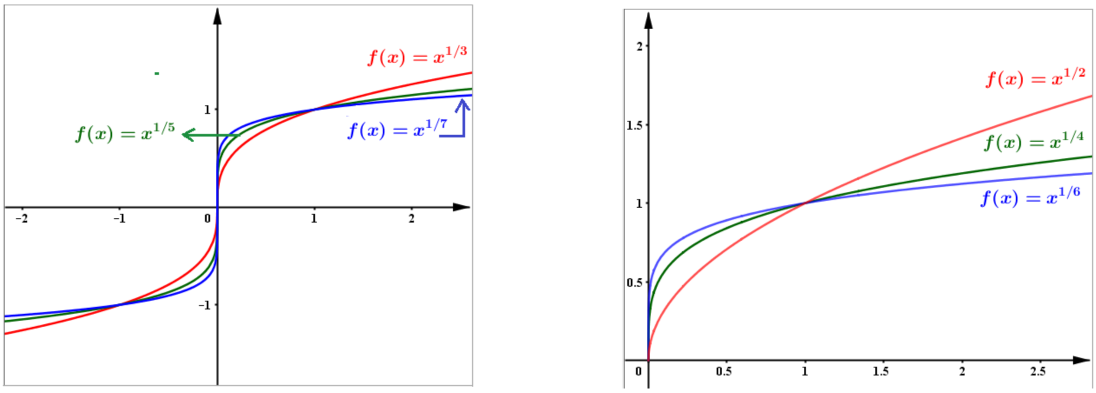


Figura 3.9: Função $f(x) = x^{1/n}$

3.1.7 Função Racional

Uma função racional é uma função dada pelo quociente de dois polinômios $P = P(x)$ e $Q = Q(x)$. Isto é, funções racionais são da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{tal que} \quad Dom(f) = \{x \in \mathbb{R},\ Q(x) \neq 0\}$$

Se a é tal que $Q(a) = 0$, então diremos que as retas $x = a$ são *assintotas verticais* do gráfico de f.

Exemplo 3.3. *Indique o* $Dom(f)$, $Im(f)$ *e* $Graf(f)$ *da função racional:*

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Solução:

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 - 1}{2x^3 + x} = \frac{(2x^2+1)(x^2-1)}{(2x^2+1)x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} \quad \text{pois} \quad (2x^2+1) \neq 0$$

Assim $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$. Por outro lado, é simples verificar que $f(1) = f(-1) = 0$.

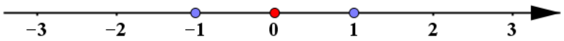


Figura 3.10: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Para fazer o gráfico de uma função racional, identificamos no plano cartesiano os zeros da função e suas assintotas verticais assim como os intervalos que estes formam no eixo X.

Na tabela abaixo, um estudo para determinar onde f é positiva e negativa,

Tabela 3.1: Estudo de sinais de f

	$x+1$	x	$x-1$	f(x)
$-\infty < x < -1$	-	-	-	-
$-1 \leq x < 0$	$+$	-	-	$+$
$0 < x \leq 1$	$+$	$+$	-	-
$1 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$

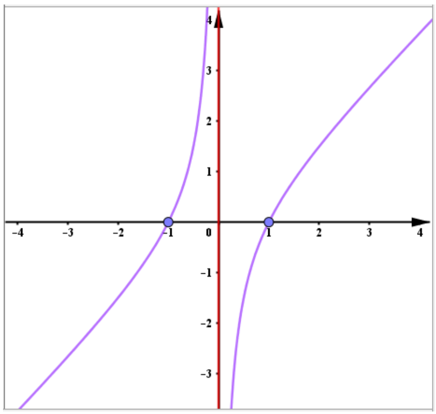


Figura 3.11: Função Racional do Exemplo 3.3

3.1.8 Funções Algébricas

São funções $y = f(x)$ obtidas por um número finito de operações algébricas, que satisfazem uma equação da forma:

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$$

em que $P_0,\ P_1, \ldots, P_n$ são polinômios em x.

- Note que se $n = 1$, então $y = f(x)$ é uma função racional.

- Se $n = 2$, por exemplo $(x^2 + 1)y^2 - x^4 = 0$, temos que:

$$y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \qquad \to \qquad y = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$$

- Seja v a velocidade de uma partícula. definimos a massa m da mesma, pela função algébrica:

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{sempre que} \quad 0 < v < |c|$$

sendo m_0 a massa inicial da partícula e $c = 3 \times 10^5\ km/s$ a velocidade da luz no vácuo.

Alguns dos gráficos de funções apresentam características especiais e conhecer algumas delas, muitas vezes, pode auxiliar no estudo e compreensão do gráfico de uma função mais complicada.

3.2 Funções Pares e Ímpares

- Uma função é par, se $f(x) = f(-x)\ \forall x \in Dom(f)$. Neste caso, o gráfico da função é simétrica em relação ao eixo Y, visto que $(x, f(x)),\ (-x, f(-x)) \in\ Graf(f)$.

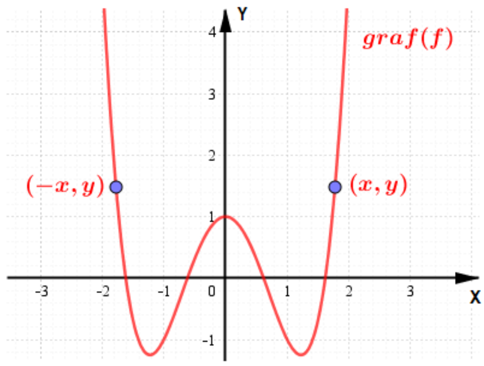


Figura 3.12: Função Par

- Uma função é ímpar, se $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in Dom(f)$. Neste caso, o gráfico da função é simétrica em relação a origem $(0,0)$, visto que $(x, f(x)),\ (-x, -f(-x)) \in\ Graf(f)$.

3.3 Função Crescente e Decrescente

Se fosse possível caminhar sobre o gráfico de uma função da esquerda para a direita, notaríamos que os valores da variável independente x estão sempre aumentando mas os valores de y, podem aumentar em determinados trechos e diminuir em outros.

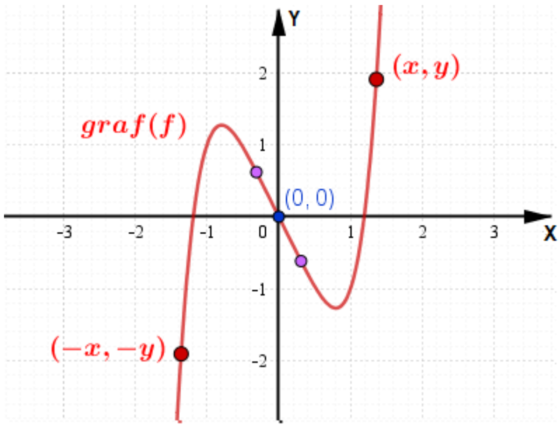


Figura 3.13: Função Ímpar

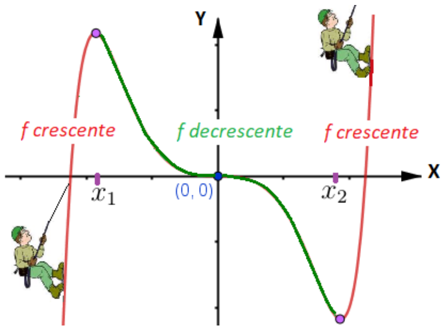


Figura 3.14: Função crescente e decrescente

Definição 3.4. *Uma função é chamada crescente em um intervalo* $I \subseteq \mathbb{R}$*, se para todo* $x_1, x_2 \in I$ *tal que* $x_1 < x_2$*, tem-se que:* $f(x_1) \leq f(x_2)$*. No caso de* $f(x_1) < f(x_2)$*, diremos que* f *é estritamente crescente.*

Definição 3.5. *Uma função é chamada decrescente em um intervalo* $I \subseteq \mathbb{R}$*, se para todo* $x_1, x_2 \in I$ *tal que* $x_1 < x_2$*, tem-se que:* $f(x_1) \geq f(x_2)$*. No caso de* $f(x_1) > f(x_2)$*, diremos que* f *é estritamente decrescente.*

Na Figura 3.14 a função é estritamente crescente em $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ e estritamente decrescente em (x_1, x_2).

3.4 Funções Periódicas

Uma função f é dita periódica se existe um número real positivo T, chamado período de f, tal que:

$$f(x) = f(x+T), \qquad \forall x \in Dom(f)$$

O gráfico de uma função periódica é obtido pela repetição de qualquer intervalo de comprimento T.

Todas as funções trigonométricas são periódicas. As funções $senx$ e $\cos x$ tem período $T = 2\pi$, e as funções $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ e $\csc x$ tem período $T = \pi$.

3.5 Funções Elementares

3.5.1 Funções Trigonométricas

São funções angulares, que podem ser definidas como razões entre as coordenadas de pontos da circunferência unitária centrada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. São importantes na modelagem de fenômenos periódicos (que se repetem).

Uma unidade de medida de um ângulo muito usada nos primeiros níveis educacionais é o grau, que é obtido pela divisão da circunferência em 360 partes iguais, obtendo-se assim um ângulo de 1 grau, sendo que a notação desta medida utiliza um pequeno "$\circ$" como expoente do número, como 1°.

Definição 3.6. *Um **radiano** é a medida do ângulo central de uma circunferência e que determina um arco com o mesmo comprimento que o raio desta circunferência.*

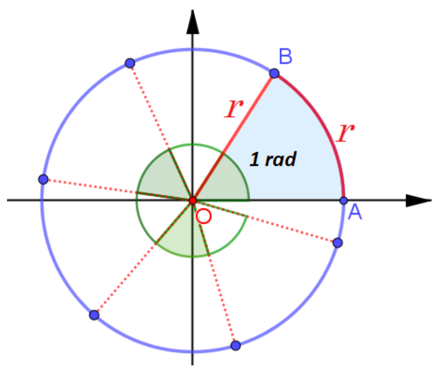


Figura 3.15: Representação de 1 radiano ($1\ rad \approx 57,3^0$).

Se x é a medida em radianos de um ângulo, então ela representa o número de raios r contidos no arco $s = \widehat{AB}$ subtendido ao ângulo central $A\widehat{O}B$.

$$x = \frac{s}{r} \qquad \xrightarrow[Se\ r=1]{} \qquad x = s$$

A relação entre graus e radianos pode ser dado em um circulo de raio 1:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \rightarrow & 360^o \\ x \ \ rad & \rightarrow & \theta^o \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{\pi\theta^o}{180^o}$$

Exemplo 3.4. *Na fórmula anterior temos que:*

- *Se* $\theta = 180^o$, *então* $x = \pi$.
- *Se* $\theta = 270^o$, *então* $x = \dfrac{3\pi}{2}$

A área A de um setor circular de um circulo de raio r com um ângulo central x radianos é $A = \dfrac{1}{2}r^2x$

Vamos a definir as Funções Trigonométrica que são funções angulares, que podem ser definidas como razões entre as coordenadas de pontos da circunferência unitária centrada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas.

Um ponto $P = (x_0, y_0)$ pertencente a uma circunferência unitária de raio $r = 1$, cujo centro é a origem $(0, 0)$, pode-se expressar em função do ângulo x (em radianos), como mostra a Figura 3.16.

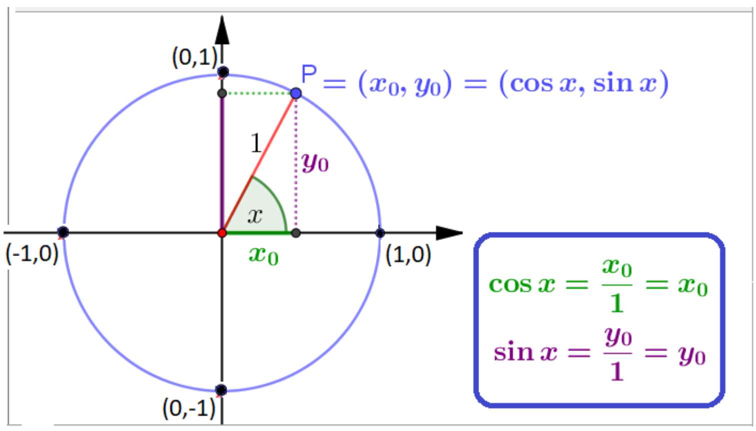


Figura 3.16: Pontos de um círculo Unitário

Definimos a **função seno** como

$\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\quad \text{sen}\, x = y_0$.

Definimos a **função cosseno** como

$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\quad \cos x = x_0$

Função Tangente e Cotangente: Dado um ponto $P = (x_0, y_0)$ pertencente a uma circunferência unitária de raio $r = 1$, cujo centro é a origem $O = (0, 0)$. Denotemos por F a interseção

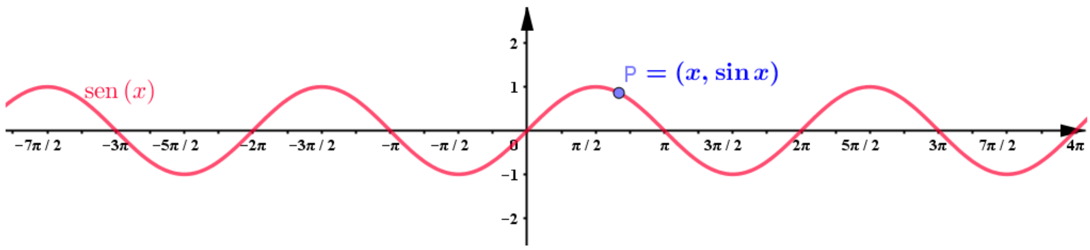


Figura 3.17: Gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$

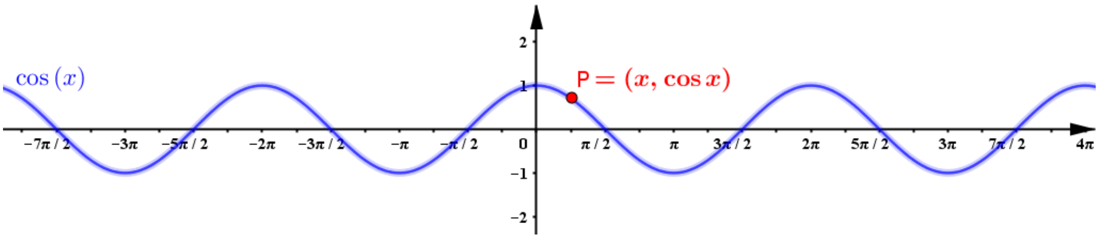


Figura 3.18: Gráfico da função $f(x) = \cos x$

da reta $\overrightarrow{OP}$ com a reta $x = 1$ e por G a interseção da reta $\overrightarrow{OP}$ com a reta $y = 1$, como mostra a Figura 3.19.

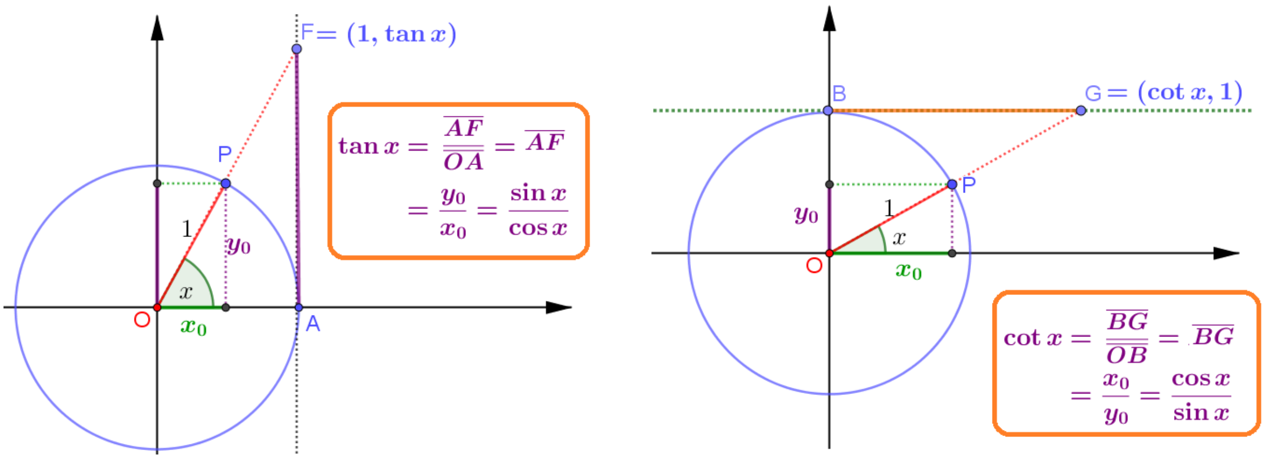


Figura 3.19: Gráfico da função $\tan x$ e $\cot x$

Definimos a **função tangente** como $f : \{x \in \mathbb{R} \;/\; \cos x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \tan x = \overrightarrow{AF}$$

Definimos a **função cotangente** como $f : \{x \in \mathbb{R} \;/\; \operatorname{sen} x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \cot x = \overrightarrow{BG}$$

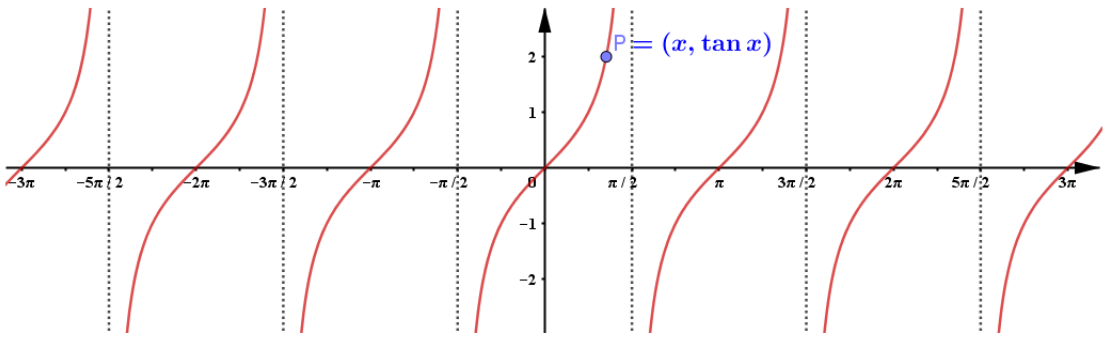


Figura 3.20: Gráfico da função $f(x) = \tan x$

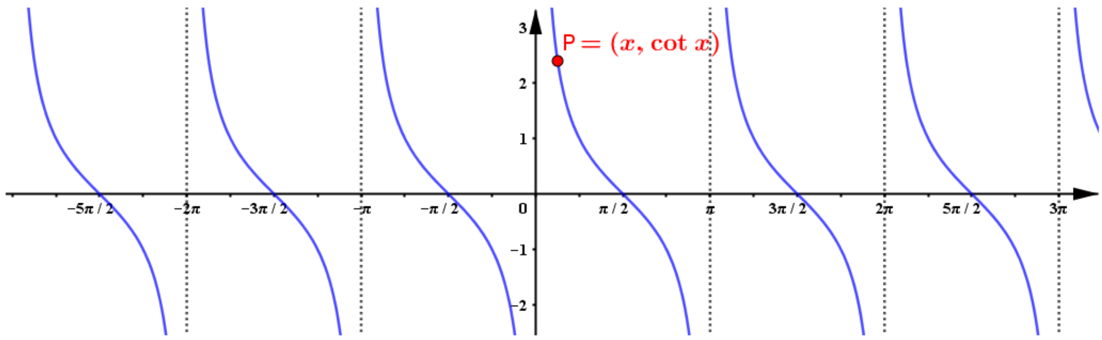


Figura 3.21: Gráfico da função $f(x) = \cot x$

Função Secante e Cossecante:

Dado um ponto $P = (x_0, y_0)$ pertencente a uma circunferência unitária de raio $R = 1$, cujo centro é a origem $O = (0, 0)$. Denotemos por S a interseção da reta perpendicular a $\overrightarrow{OP}$ com o eixo X e por C a interseção da reta $\overrightarrow{OP}$ com o eixo Y, como mostra a figura abaixo,

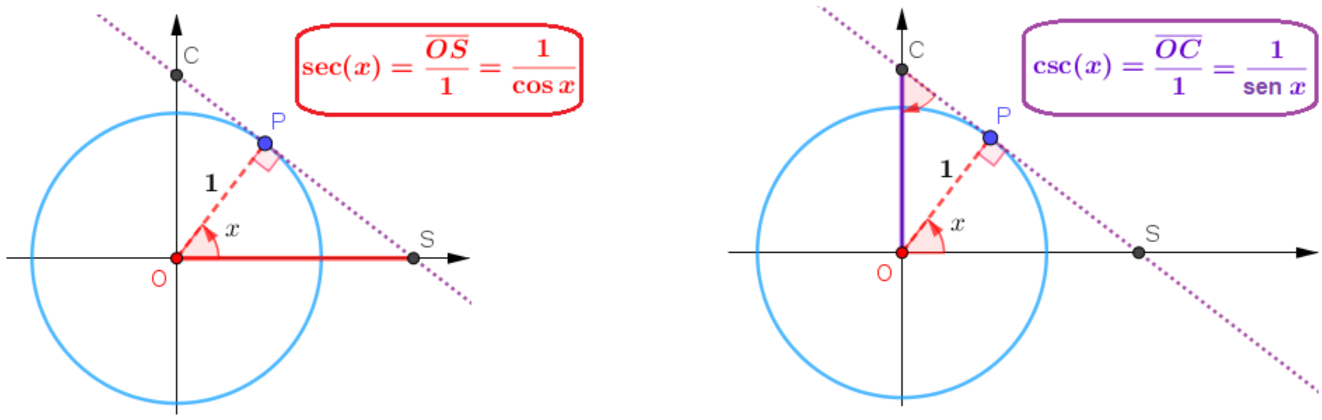


Figura 3.22: Gráfico da função $\sec x$ e $\csc x$

Definimos a **função secante** como a recíproca do cosseno. $f : \{x \in \mathbb{R} \; / \; \cos x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} = \overline{OS}$$

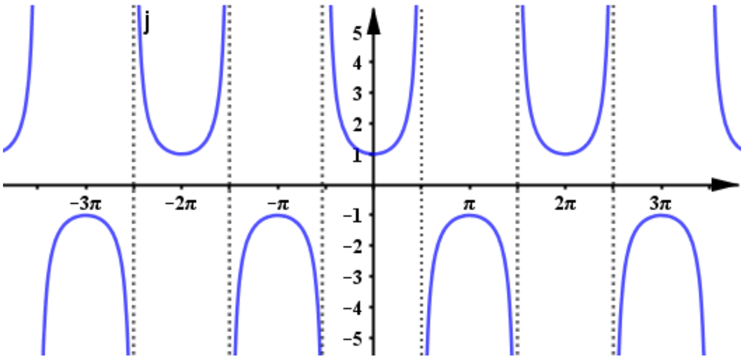


Figura 3.23: Gráfico da função $f(x) = \sec x$

Definimos a **função cossecante** como $f : \{x \in \mathbb{R} \ / \ \operatorname{sen} x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \overline{OC}$$

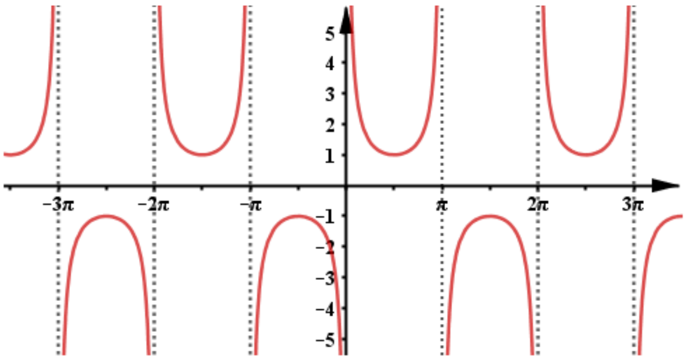
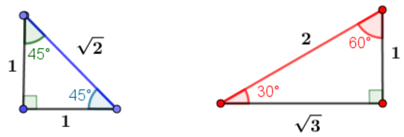


Figura 3.24: Gráfico da função $f(x) = \csc x$

Observação 3.3. *Ao trabalhar com funções trigonométricas, é importante lembrar:*

1. *Os triângulos notáveis*



2. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

3. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

4. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

5. $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

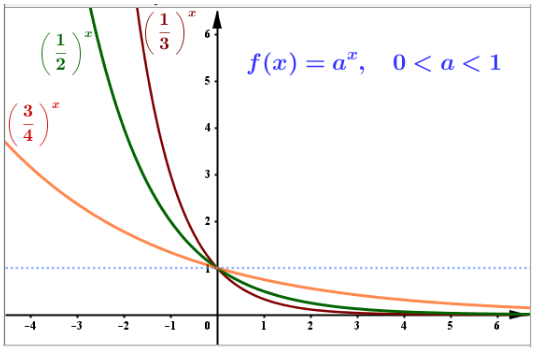
6. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

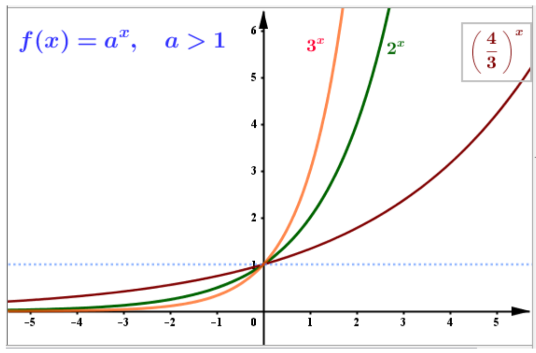
3.5.2 Função Exponencial

Expressa um crescimento ou um decrescimento característico de alguns fenômenos da natureza que possuem acentuadas variações em períodos curtos. Por exemplo, a decomposição ou desintegração de determinadas substâncias químicas, crescimentos populacionais de bactérias, no cálculo de juros compostos, etc.

Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é da forma

$$f(x) = a^x$$

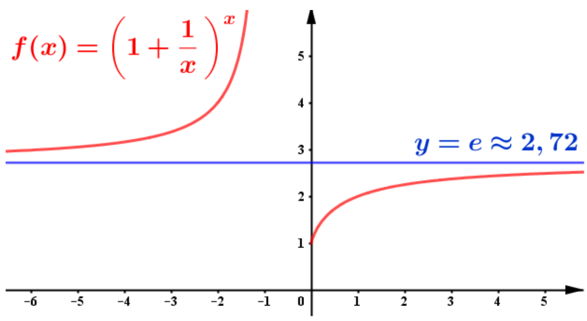




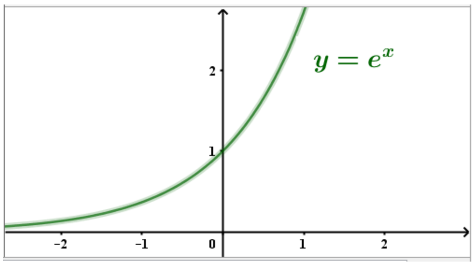
Observação 3.4. *Uma importantíssima constante matemática é o número de Euler "**e**" o qual é um irracional, definido por:*

$$\mathbf{e} \approx 2,7182818285904523536\ldots$$

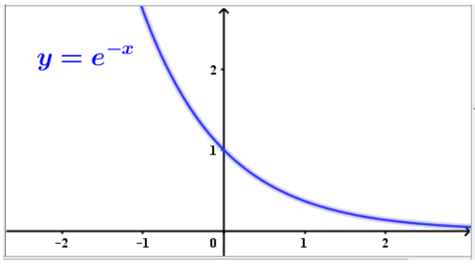
Matematicamente $y = \mathbf{e^x}$ *representa a assintota horizontal da função* $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.



Chamaremos de função exponencial natural, a função exponencial cuja base seja $a = \mathbf{e}$.



$2^x < e^x < 3^x$, $se\ x > 0$
$3^x < e^x < 2^x$, $se\ x < 0$



$3^{-x} < e^{-x} < 2^{-x}$, $se\ x > 0$
$2^{-x} < e^{-x} < 3^{-x}$, $se\ x < 0$

3.5.3 Funções Hiperbólicas

Na matemática, funções hiperbólicas são funções análogas às funções trigonométricas (funções circulares) e são importantes na descrição de problemas vibratórios dentro de sólidos elásticos, no decaimento da radioatividade, etc. Seu estudo se remonta ao sec. XVII, quando Galileu Galilei propôs o problema de descrever matematicamente a curva formada por um fio suspenso entre dois pontos e sob a ação exclusiva da gravidade, mais ainda, ele conjecturou de que tal curva fosse uma parábola. Em 1646, aos 17 anos de idade, Huygens mostrou de que a conjectura era falsa. Em 1691, o problema foi resolvido e publicado independentemente por Leibniz, Huygens e o Johann Bernoulli, a nova função foi chamada de catenária.

As expressões das funções hiperbólicas são as seguintes:

Seno hiperbólico:

$$\text{senh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

Cosseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

Tangente hiperbólica:

$$\tanh x = \frac{\text{senh } x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Cotangente hiperbólica: Para $x \neq 0$,

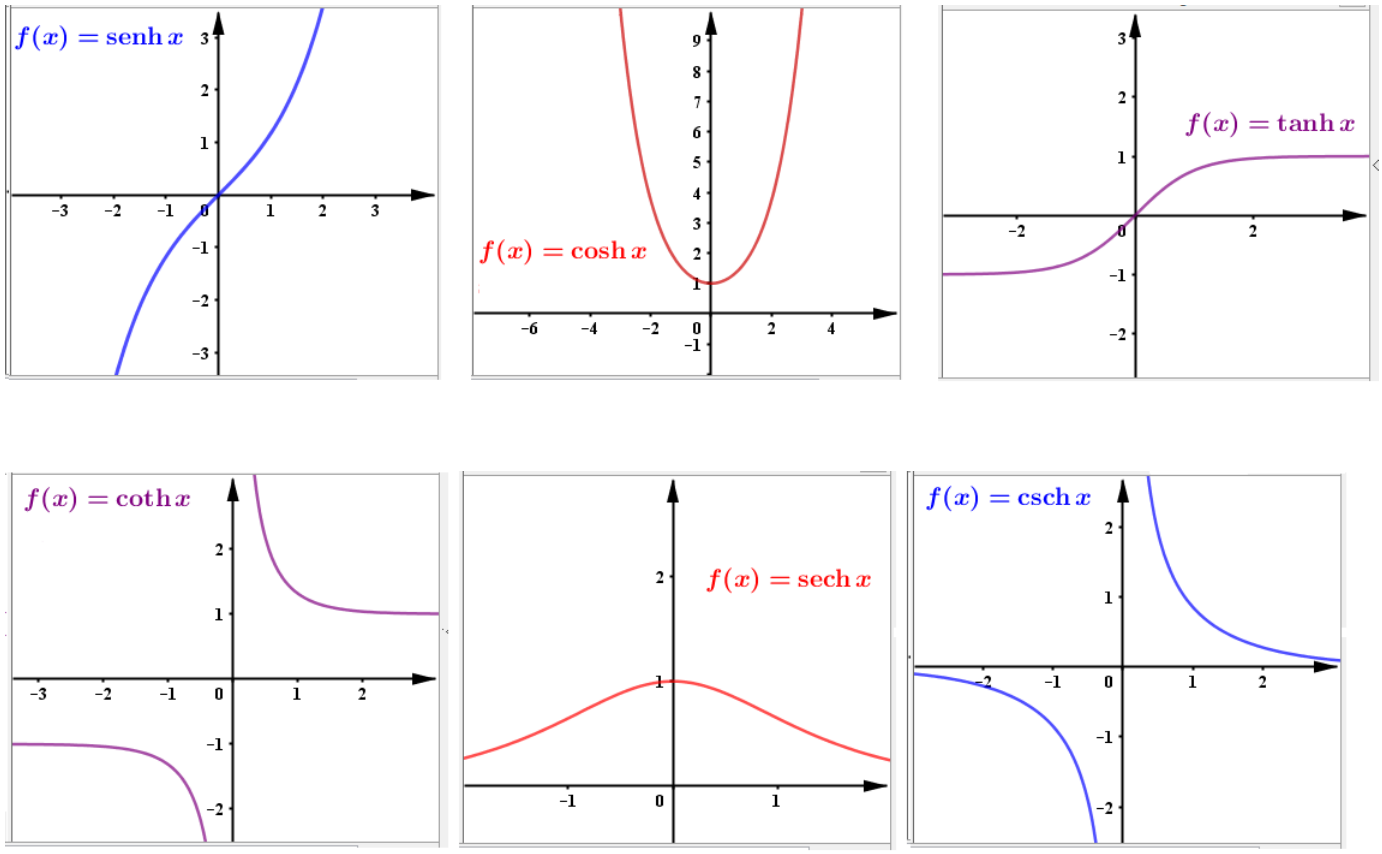
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\text{senh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

Secante hiperbólica:

$$\text{sech } x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} == \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-2x}}$$

Cossecante hiperbólica: Para $x \neq 0$,

$$\text{csch } x = \frac{1}{\text{senh } x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$$



Observação 3.5. *A catenária é definida pela função cosseno hiperbólica e tem aplicações na construção de pontes, túneis e na fabricação de materiais como o fundo das latas de refrigerante (Ver Figura 3.25).*

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right).$$

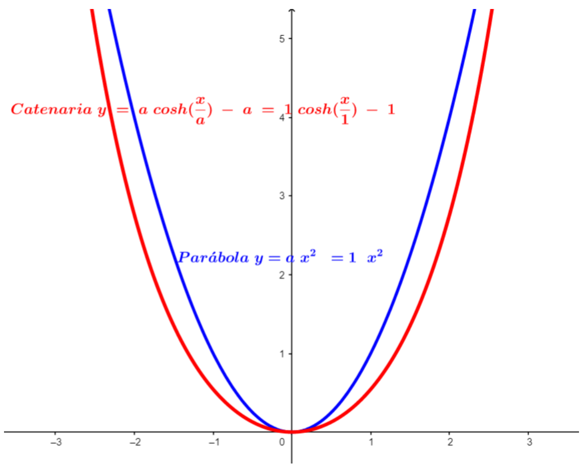


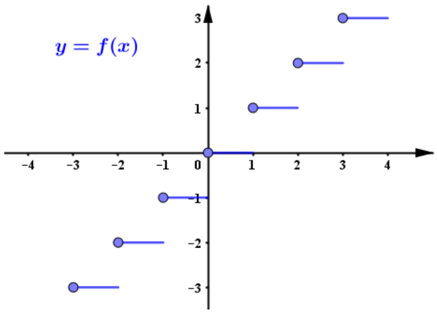
Figura 3.25: A catenaria $y = a \cdot \cosh\left(\dfrac{x}{a}\right)$ e a parábola $y = ax^2$ com $a = 1$.

3.5.4 Função Máximo Inteiro

Seja $x \in \mathbb{R}$, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro próximo que não é maior que x, logo

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \max \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\},$$

O $Dom(f) = \mathbb{R}$.



Entre as propriedades desta função temos:

- Para qualquer real x, $\quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- Para qualquer inteiro k e real x, $\quad \lfloor k + x \rfloor = k + \lfloor x \rfloor$.

Por exemplo,

$$f(3,1417) = \lfloor 3,1417 \rfloor = 3$$
$$f(-2,817) = \lfloor -2,817 \rfloor = -3$$
$$f(17,510) = \lfloor 17,510 \rfloor = 17$$

3.5.5 Funções Definidas por Partes

São funções descritas por mais de uma expressão. Por exemplo a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } \ x \leq -1 \\ 1 & \text{se } \ -1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{se } \ 2 < x \end{cases}$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 3.26:

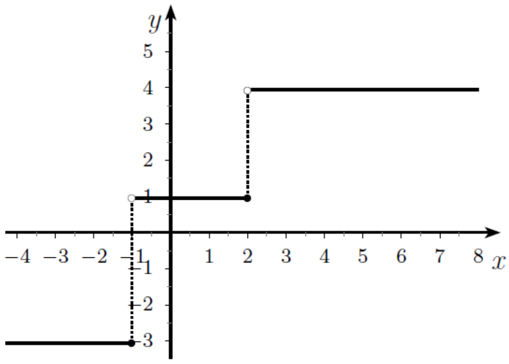


Figura 3.26: Gráfico definido por partes.

3.6 Operações com Funções

Sejam as funções f e g e o conjunto $D = Dom(f) \cap Dom(g) \neq \phi$. Então, definimos

i) A Função Soma como: $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \;\; \forall x \in D$.

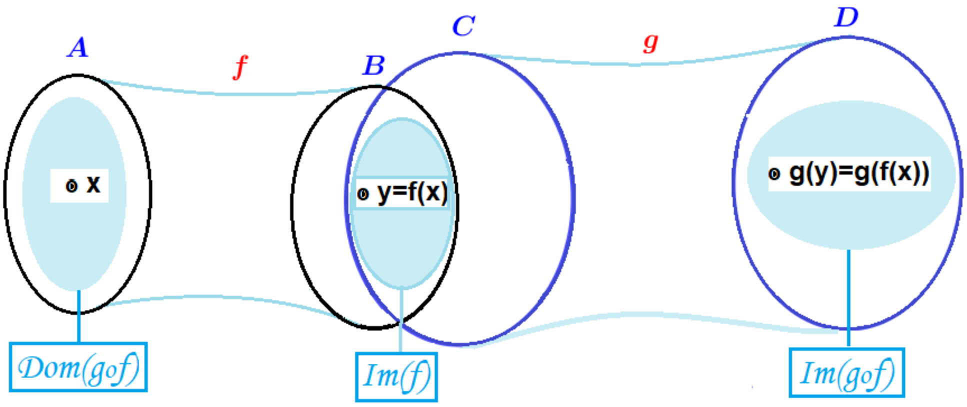
ii) A Função Diferença como: $(f+g)(x) = f(x) - g(x), \;\; \forall x \in D$.

iii) A Função Produto como: $(f\,g)(x) = f(x) \cdot g(x), \;\; \forall x \in D$.

iv) A Função Quociente como: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \;\; \forall x \in D / \; g(x) \neq 0$.

v) Função Composta: Sejam as funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$. Se $Im(f) \subset Dom(g)$, podemos definir a função composta $(g \circ f) : \; A \to D$ como:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{sendo} \quad Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) / \; f(x) \in Dom(g)\}$$



Observação 3.6. *Se $Im(g) \subset Dom(f)$ definimos a função composta $(f \circ g) : \; C \to B$ como:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \textit{sendo} \quad Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) / \; g(x) \in Dom(f)\}$$

Exemplo 3.5. *Sejam* $f(x) = 3x + 1$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$. *Calcular* $(g \circ f)(x)$ *e* $(f \circ g)(x)$ *sempre que for possível*

Solução: Desde que $Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R}$, $Dom(g) = \mathbb{R} - \{4\}$ e $Im(g) = \mathbb{R} - \{0\}$ então:

$$(g \circ f)(x) = g(3x+1) = \frac{1}{(3x+1) - 4} = \frac{1}{3(x-1)}$$

sendo $Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) = \mathbb{R} / \ f(x) = 3x + 1 \in Dom(g) = \mathbb{R} - \{4\}\} = \mathbb{R} - \{1\}$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x-4}\right) = 3\left(\frac{1}{x-4}\right) + 1 = \frac{x-1}{x-4}$$

sendo $Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) = \mathbb{R} - \{4\} / \ g(x) = \dfrac{1}{x-4} \in Dom(f) = \mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{4\}$

3.7 Translações Verticais e Horizontais de uma Função

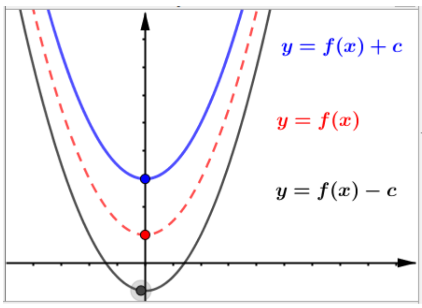
Suponha $c > 0$. Para obter o gráfico de:

a) A função $y = f(x) + c$ desloca o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima.

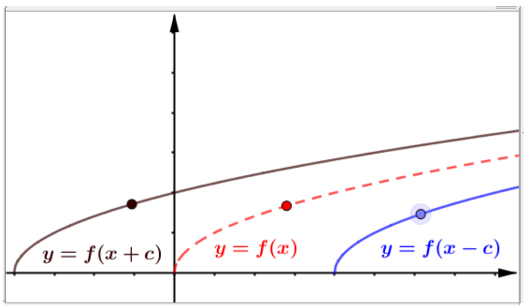
b) A função $y = f(x) - c$ desloca o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo.

c) A função $y = f(x - c)$ desloca o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para direita.

d) A função $y = f(x + c)$ desloca o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para esquerda.



Deslocamento Vertical



Deslocamento Horizontal

3.8 Expansões e Reflexões Verticais e Horizontais de uma Função

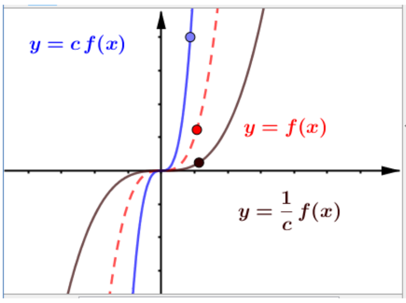
Suponha $c > 1$. O gráfico da função:

a) $y = cf(x)$, expande o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente pelo fator c.

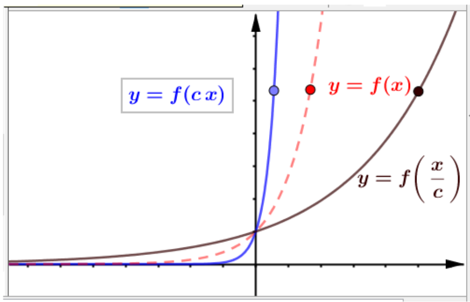
b) $y = \frac{1}{c}f(x)$, comprime o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente pelo fator c.

c) $y = f(\frac{x}{c})$, expande o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente pelo fator c.

d) $y = f(cx)$, comprime o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente pelo fator c.



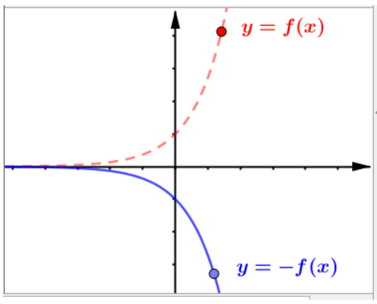
Expande e comprime verticalmente



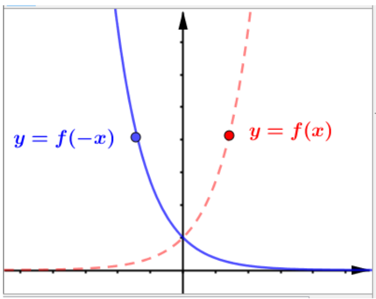
Expande e comprime horizontalmente

e) $y = -f(x)$, reflete o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo X.

f) $y = f(-x)$, reflete o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo Y.



Reflexão em torno do eixo X



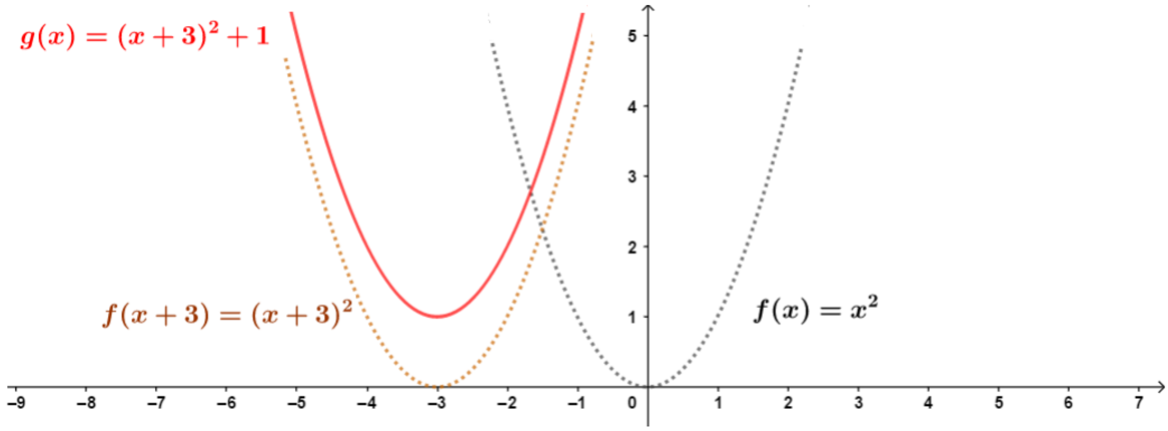
Reflexão em torno do eixo Y

Exemplo 3.6. *Esboce o gráfico da função* $g(x) = x^2 + 6x + 10$.

Solução: Note que $g(x) = (x + 3)^2 + 1 = f(x + 3) + 1$, sendo $f(x) = x^2$. Logo, o gráfico de $f(x+3)$ consiste em deslocar 3 unidades a esquerda de f, e o gráfico de $g(x)$, 1 unidade acima de $f(x + 3)$.

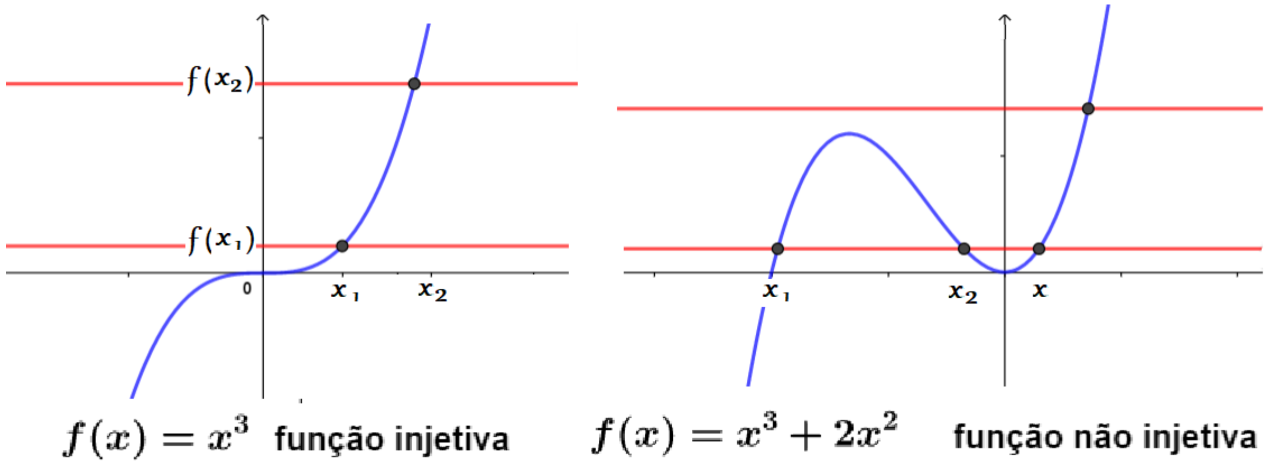
3.9 Classificação das Funções pelo seu Contradomínio

Definição 3.7. *Uma função diz-se* ***injetiva*** *(ou injetora), se e somente se, dois elementos quaisquer do seu domínio nunca podem ser associados a um mesmo elemento do contra-domínio. Ou*



seja, para quaisquer que sejam x_1 e x_2 (pertencentes ao domínio da função), x_1 diferente de x_2, então necessariamente, $f(x_1)$ é diferente de $f(x_2)$. Simbolicamente,

$$x_1 \neq x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$



Graficamente, uma função f é injetiva, se e somente se, nenhuma reta horizontal intersecta o seu gráfico em mais do que num único ponto.

Exemplo 3.7. *Funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, com n ímpar, são injetivas. Funções Afim $f(x) = ax + b$ e Exponenciais $f(x) = be^{ax}$, também.*

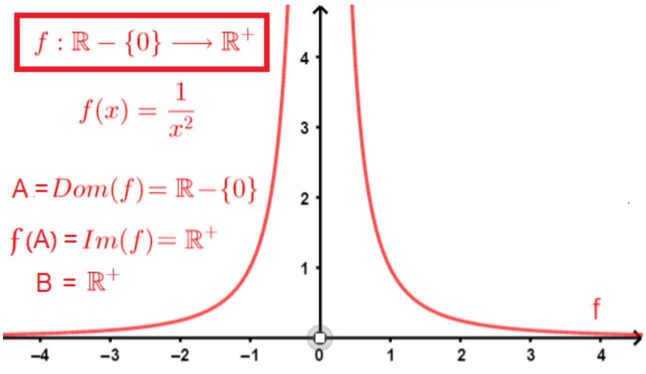
Definição 3.8. *Uma função diz-se* ***sobrejetora*** *(ou sobrejetiva), quando nenhum elemento do contra-domínio pode ficar sem associação com qualquer dos elementos do domínio. Ou seja, seu contra-domínio é igual a seu conjunto imagem, ou seja, se $f : A \to B$ é sobrejetiva, então*

$$f(A) = B$$

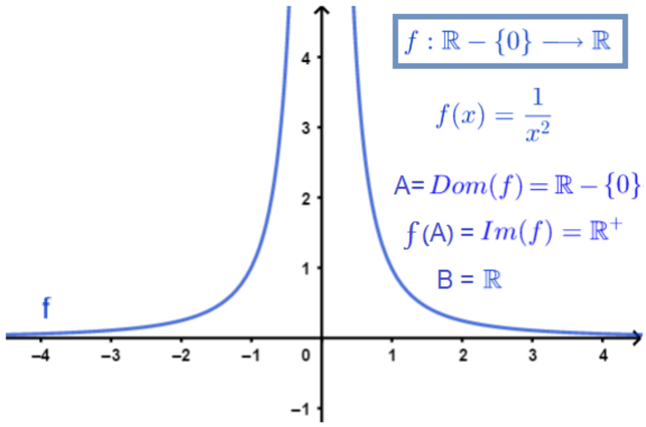
Dito de outro modo, para todo $b \in B$, existe um $a \in A = Dom(f)$, tal que $b = f(a)$.

Exemplo 3.8. *Funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = x^n$ com n ímpar são sobrejetoras, pois $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Funções Afim $f(x) = ax + b$ também.*

Para reconhecer se uma função $f : A \to B$ é representada através de um gráfico é ou não sobrejetora, basta identificar a imagem da função através deste gráfico e comparar com o contra-domínio que deve ser dado. Se $f(A) = B$ ela será sobrejetora. Se existir elemento do contra-domínio B que não faz parte da imagem $f(A)$, então ela não será sobrejetora.



Função Sobrejetiva



Função Não Sobrejetiva

Definição 3.9. *Uma função diz-se* ***bijetora*** *(ou bijetiva), se f é injetiva e sobrejetiva.*

Note que, para toda função injetiva $f : A \to B$, existe trivialmente, uma função bijetiva $g : A \to C = f(A) \subseteq B$, tal que $g(x) = f(x)$, $\forall\, x \in A$.

Exemplo 3.9. *A função $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é uma função injetora, más não sobrejetiva, ja que $f(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$. Porém, se restringimos seu contradomínio ao seu conjunto imagem, teremos que: $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tal que $g(x) = \sqrt{x}$ é uma função bijetiva.*

3.9.1 Função Inversa

Definição 3.10. *Uma função f é chamada* ***invertível****, quando existe uma função g, tal que:*

$$(f \circ g)(x) = x \quad e \quad (g \circ f)(y) = y \quad \Leftrightarrow \quad f \circ g = I \quad e \quad g \circ f = I$$

para todos x e y onde as composições são definidas.

A função g, quando existe, é chamado de **inversa** de f e é denotada por f^{-1}. Vejamos alguns exemplos:

a) A função identidade $I(x) = x$ é o exemplo mais simples de função invertível, cuja inversa é ela mesma $(I^{-1} = I)$: $(I \circ I)(x) = x$.

b) A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, também satisfaz $f \circ f = I$, e portanto $f^{-1} = f$

c) As funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ são inversas uma da outra.

Quando f é invertível, vemos que a equação $y = f(x)$ equivale a $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$. Assim, quando f é invertível e é definida por uma fórmula matemática, determinar a sua inversa equivale a resolver para x a igualdade $f(x) = y$, para cada y na imagem de f.

Exemplo 3.10.

A função $f(x) = 3x + 1$ é invertível. Vamos a determinar a sua inversa. Fazendo $y = 3x + 1$ e resolvendo para x, obtemos $x = \dfrac{1}{3}(y - 1)$. Escrevendo $g(y) = \frac{1}{3}(y - 1)$, temos que $g = f^{-1}$. De fato, $g(f(x)) = g(3x + 1) = \dfrac{1}{3}((3x + 1) - 1) = \dfrac{1}{3}x = x$. Analogamente, verificamos que $f(g(y)) = f(\dfrac{1}{3}(y - 1)) = 3\dfrac{1}{3}(y - 1) + 1 = (y - 1) + 1 = y$. Logo, $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{3}(y - 1)$. Vemos na Figura 3.27 que os gráficos de $f(x) = 3x + 1$ e de $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}(x - 1)$ são simétricos, um ao outro, com respeito à diagonal. Toda função injetora tem inversa no domínio da função. Em geral toda

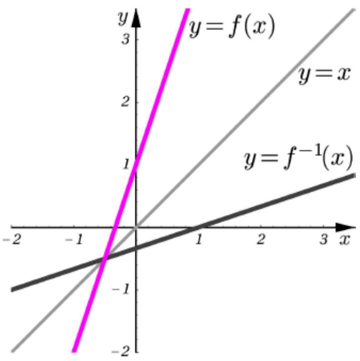


Figura 3.27: Gráfico da função $f(x) = 3x + 1$ e sua inversa.

função bijetora tem inversa. A função $f(x) = x^2$ não tem inversa em $\mathbb{R}$ porque não é injetora. Por outro lado, $f(x) = x^2$ tem inversa $f^{-1} = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$.

3.9.2 Função Logaritmo

Seja $a \in \mathbb{R}$, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Chamamos **função logarítmo** de base a a função f, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$

$$f(x) = \log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Da definição anterior observamos que $\mathrm{Dom}(log_a) = (0, +\infty)$, Por outro lado, podemos ver que a função logaritmo é a inversa da função exponencial, isto é, se $g(x) = a^x$, então $g^{-1}(x) = \log_a x$. A partir desta observação temos que : $\log_a a^x = x$ e $a^{\log_a x} = x$. Na Figura 3.28 vemos os gráficos das funções exponencial e logaritmo.

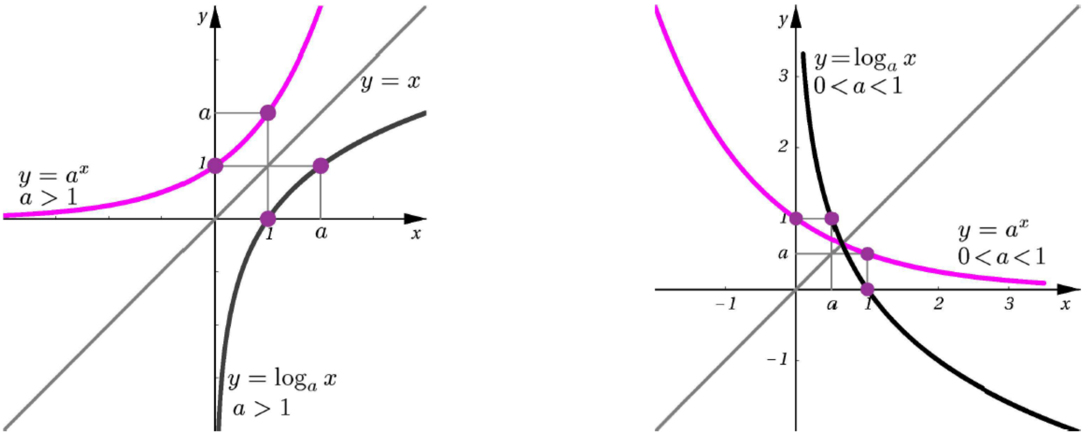


Figura 3.28: Gráficos da função exponencial e logaritmo para $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Quando a base do logaritmo for o número real e, o logaritmo é chamado de logaritmo natural, e escrito como: $\log_e x = \ln x$. Logo temos que :

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x \quad \text{e} \quad \ln e^x = x, \quad e^{\ln x} = x.$$

Proposicição 3.1. *(Propriedades do logaritmo na base a) Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$ números reais quaisquer. Valem as seguintes propriedades:*

1. $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$.
2. $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.
4. $\log_a x^y = y \log_a x$.
5. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
6. Se $a > 1$ e $x < y$, então $\log_a x < \log_a y$.
7. Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $\log_a x > \log_a y$.
8. (**Mudança de base**) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

3.10 Exercícios

1. Ache o domínio e a imagem da função dada pela equação e esboce o seu gráfico.

$a)\ y = \sqrt{1 - x^2}$

$b)\ y = |2x - 3|$

$c)\ y = \sqrt{4 - x}$

$d)\ y = \begin{cases} 6x + 7 & \text{se } x \leq -2, \\ 4 - x & \text{se } x > 2. \end{cases}$

$e)\ f(x) = x - [\![x]\!]$

$f)\ f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}$

$g)\ y = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 2, \\ 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$

$h)\ y = \dfrac{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4)}{(x^2 - 5x + 6)(x + 2)}$

$i)\ y = x|x|$

2. Determine o domínio e a imagem da função dada por $f(x) = |x + 2|$. Calcule:

$a)\ f(-2)$

$b)\ \big(f(-3)\big)^2$

$c)\ f(2) - f(3)$

$d)\ f(a^2)$

3. Nas seguintes funções, verifique se a função é par, ímpar ou nem par ou ímpar.

$a)\ f(x) = x^4 + 3$

$b)\ g(t) = \dfrac{2t}{4 + 3t^2}$

$c)\ f(x) = x^4 + x$

$d)\ h(y) = \dfrac{\sqrt{y^2 + 1}}{|y|}$

$e)\ h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, f quaisquer função.

$f)\ g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, f quaisquer função.

$g)\ f(x) = 5x^3 + 7x$

$h)\ f(x) = \phi(|x|)$, para quaisquer função ϕ.

4. Dada a medida do ângulo em graus determine a medida correspondente em radianos.

$(a)\ -45°$, $\quad b)\ 175°$, $\quad c)\ -300°$, $\quad d)\ 130°$, $\quad e)\ 260°$, $\quad f)\ 30°$, $\quad g)\ -60°$

5. Dada a medida do ângulo em radianos, determine a medida correspondente em graus.

$(a)\ \dfrac{2\pi}{9}$, $\quad b)\ \dfrac{-7\pi}{8}$, $\quad c)\ \dfrac{\pi}{3}$, $\quad d)\ \dfrac{-7\pi}{4}$, $\quad e)\ \dfrac{43\pi}{6}$.

6. Seja f uma função definida por $f(x) = 5x+3$ e seja g uma função definida por $g(x) = 3x+k$, onde k é uma constante real. Determine o valor de k de tal modo que $f \circ g = g \circ f$.

7. Seja f definida por $f(x) = x - 3$ e g definida por $g(x) = x^2 + 4$. Determine

$a)\ (f \circ g)(4)$ $\quad b)\ (g \circ f)(3)$ $\quad c)\ (f \circ g)(x)$ $\quad d)\ (g \circ f)(x)$.

8. Seja $f(x) = (1 - x^n)^{1/n}$, $0 \leq x \leq 1$. Ache $f \circ f$.

9. Expresse a função na forma $f \circ g \circ h$:

$(a)\ F(x) = (\ln(x^2) + 1)^{101}$ $\quad (b)\ F(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{|x|}}{1+\sqrt[3]{|x|}}\right)$ $\quad (c)\ G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+\cos x}}$

$(d)\ G(x) = (\sec(t^2)\tan(t^2))^7$

10. Ache as inversas das seguintes funções.

$a)\ f(x) = 7x - 19 \qquad c)\ f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0.$

$b)\ f(x) = (2x+2)^{1/2} \quad d)\ f(x) = \sqrt{4 - x^2},\ x \geq 0.$

11. Para as funções do item anterior, diga quais são crescentes ou decrescentes.

12. Dada a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, mostre que $(f \circ f)(x) = |x|$.

13. Determine a função f (inclusive o seu domínio) que satisfaça a propriedade: $\dfrac{f(x) - 3}{f(x) + 3} = x.$

14. Seja a função $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Mostre que:

$$f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{2+x}{x}, \quad f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x-2}{x}, \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x), \quad f(f(x)) = -\frac{1}{x}$$

15. Expresse a função na forma $f \circ g \circ h$:

$(a)\ F(x) = (\ln(x^2) + 1)^{101}$ $\quad (b)\ F(x) = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{|x|}}{1+\sqrt[3]{|x|}}\right)$ $\quad (c)\ G(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{1+\cos x}}$ $\quad (d)\ G(x) = (\sec(t^2)\tan(t^2))^7$

16. Resolva as equações em x:

$(a)\ e^{7-4x} = 6 \qquad (b)\ e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \qquad (c)\ \ln x + \ln(x-1) = 1 \qquad (d)\ \ln(\ln x) = 1$

17. Encontre uma fórmula para a função inversa :

$(a)\ f(x) = e^{2x+1} \quad (b)\ f(x) = \ln(x+3) \quad (c)\ f(x) = \dfrac{e^x}{1+2e^x} \quad (d)\ f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

18. Esboce o gráfico e ache o domínio e a imagem das funções trigonométricas

$(i)\ \ a)\ f(x) = \cot x, \quad b)\ g(x) = \sec x, \quad c)\ h(x) = \csc x.$

(ii) As funções do item (i) são par ou ímpar?

19. Esboce os graficos das funções,

$a)\ f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad b)\ f(x) = 2\cos x, \quad c)\ f(x) = \cos(x + \pi/2), \quad d)\ f(x) = 2 + \cos x,$

20. Mostre que as seguintes funções são periódicas. Encontre o periodo.

$a)\ f(x) = \operatorname{sen} 3x, \quad b)\ f(x) = \cos(x/2 - 4), \quad c)\ f(x) = 3\operatorname{sen}(2 - 5x), \quad d)\ f(x) = \cos(\pi - x),.$

21. Prove a lei dos cossenos que estabelece que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, onde a, b, c são os comprimentos dos lados de um triângulo e θ é o ângulo formado pelos lados a e b.

22. Prove as seguintes identidades trigonométricas.

    (i) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

    (ii) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.

    (iii) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

    (iv) $\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \pm \cos\theta\operatorname{sen}\phi$.

    (v) $\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$.

23. Prove as seguintes identidades hiperbólicas.

    (i) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

    (ii) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

    (iii) $1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$.

    (iv) $\operatorname{senh}(\theta \pm \phi) = \operatorname{senh}\theta\cosh\phi \pm \cosh\theta\operatorname{senh}\phi$.

    (v) $\cosh(\theta \pm \phi) = \cosh\theta\cosh\phi \pm \operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\phi$.

24. Faça o esboço do gráfico de cada função:

    (a) $y = \log_{10}(x+5)$ (b) $y = -\ln x$ (c) $y = \ln(-x)$ (d) $y = |\ln x|$

    (e) $y = \ln x + 2$

Capítulo 4

Limites

O uso básico de limites e descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um valor dado.

Seja $f(x) = x^2$ uma função que representa a área de uma placa de lado x. Quando x se aproxima de 2 a função área $f(x) = x^2$ se aproxima de 4.

Observe que na analise deste limite estamos apenas preocupados com os valores de f próximos do ponto $x = 2$ e não com o valor de f em $x = 2$.

Definição 4.1. ***(Definição intuitiva de limite)*** *Se os valores de $f(x)$ puderam ser definidos tão próximos de L, fazendo x suficientemente próximos de a (com $x \neq a$)), então escrevemos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

o qual deve ser lido como "o limite de $f(x)$ quando x tende a $\underline{a}$ é L"

Também podemos escrever como:

$f(x) \longrightarrow L$ quando $x \longrightarrow a$

Exemplo 4.1. *Estime o valor de* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

Observamos que a função $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ não esta definida quando $x = 1$, mas isso não importa, pois pela definição estamos interessados quando x se aproxima de 1, mas não quando $x = 1$. Nas Tabelas 4.1 estão os valores de $f(x)$ para os valores de x que tendem a 1.

Com base nesses valores podemos conjeturar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0,5$$

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

$\downarrow$	$\downarrow$
1	0,5

Tabela 4.1

Agora vamos definir uma nova função a partir de f definindo como 2 quando $x = 1$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Esta nova função g tem o mesmo limite quando x tende a 1, isto é, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 0,5$.

Os gráficos da função do Exemplo 4.1 e de g estão ilustrados na Figura 4.1.

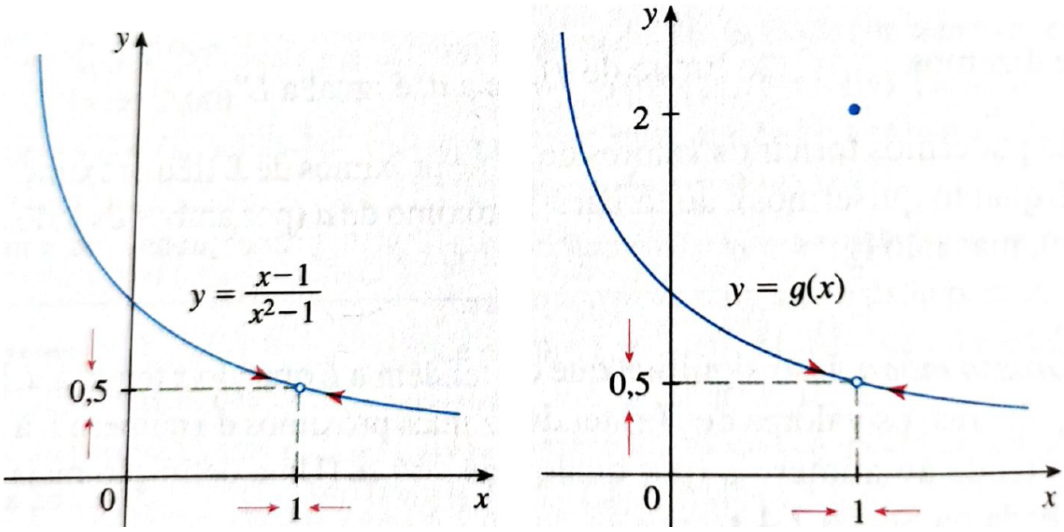


Figura 4.1

Exemplo 4.2. *Consideremos a função $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} & se\ x \neq 2 \\ 1 & se\ x = 2 \end{cases}$$

Vamos a calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$

É comum dizer que f tem uma *indeterminação* em $x = 2$, pois, apesar de f estar definida em $x = 2$, não sabemos qual é o seu comportamento nas vizinhanças desse ponto. Queremos saber, então, o que acontece com os valores de $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ quando tomamos valores para x próximos porém diferentes de 2.

Calcular o limite significa levantar a indeterminação. Para isso, vamos fazer uso de algumas propriedades de álgebra elementar. Usando a propriedade $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ podemos fatorar $x - 2 = (\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})}\\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Na Figura 4.2 vemos o gráfico da função.

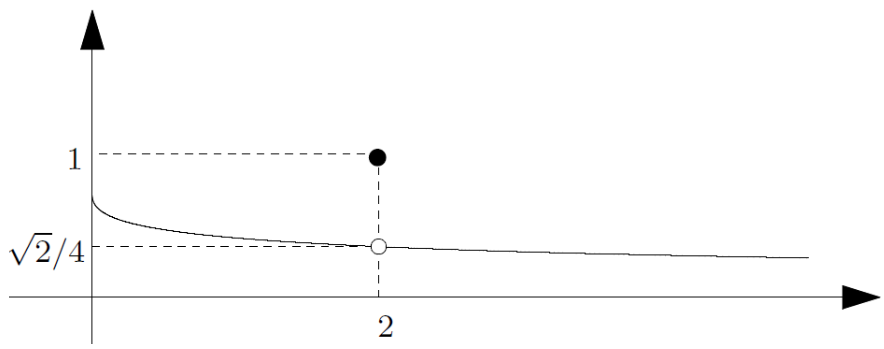


Figura 4.2

Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$
3. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{5+t}-\sqrt[3]{5}}{t}$

4.0.1 Limites Laterais

Consideremos a função: $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$

Observamos que quando x tende a 1 pela esquerda $f(x)$ tende a 1. Quando x tende a 1 pela direita $f(x)$ tende a 2 (Ver Figura 4.3). Não há um número único para o qual $f(x)$tende quando

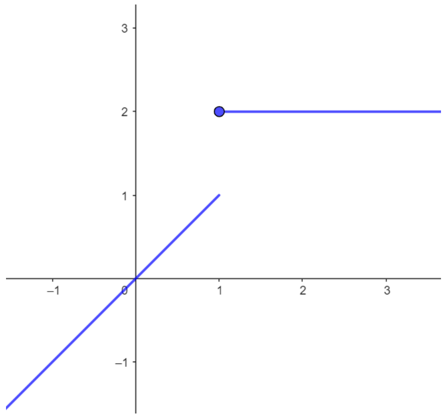


Figura 4.3

x tende a 1.

Portanto, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ não existe.

Para estes casos, podemos considerar somente os limites laterais e escrevemos :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à esquerda de f quando x tende a a pela esquerda** é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.

Analogamente escrevemos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à direita de f quando x tende a a pela direita** é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x maior que a.

A partir da definição de limite lateral temos a seguinte proposição:

Teorema 4.1.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Exemplo 4.3. *Seja a função*

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & se\ x \geq 3/2, \\ 6-4x & se\ x < 3/2. \end{cases}$$

Calcule os seguintes limites laterais: $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x)$

Existe $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x)$?

4.0.2 Limites Infinitos

Como exemplo vamos calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ se existir.

A medida que x tende a 0, x^2 também tende a 0, e $\dfrac{1}{x^2}$ fica arbitrariamente grande como vemos na Figura 4.4. Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número, e não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

Para indicar o tipo de comportamento da função anterior usamos a notação:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Isso não significa que consideramos ∞ como um número. Tampouco significa que o limite existe. Expressa simplesmente uma maneira particular de não existência do limite.

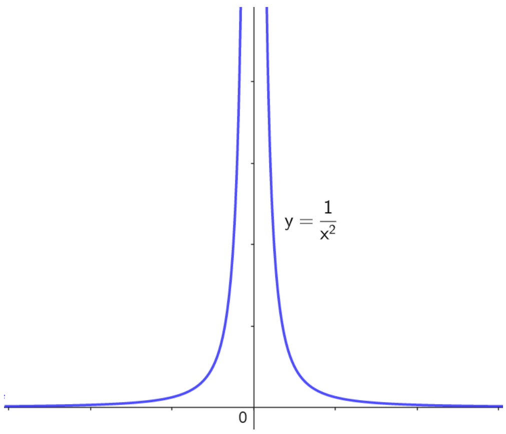


Figura 4.4

Podemos definir **Limite Infinito** da seguinte maneira:

Seja f uma função definida exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Analogamente,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes, porém negativos ao tornar-nos x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Definições similares são dadas no caso de limites laterais.

Definição 4.2. *A reta $x = a$ é chamada de **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Exemplo 4.4. *Encontre* $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{2x}{x-4}$ *e* $\lim_{x \to 4^-} \dfrac{2x}{x-4}$

Se x esta próximo de 4 pela direita $x - 4$ é positivo. Consequentemente, $\dfrac{2x}{x-4} > 0$ e $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{2x}{x-4} = \infty$.

Por outro lado, se x esta próximo de 4 pela esquerda $x - 4$ é negativo. Consequentemente, $\dfrac{2x}{x-4} < 0$ e $\lim_{x \to 4^-} \dfrac{2x}{x-4} = -\infty$. Portanto, pela definição de assintota vertical, a reta $x = 4$ é assintota da função. Ver Figura 4.5

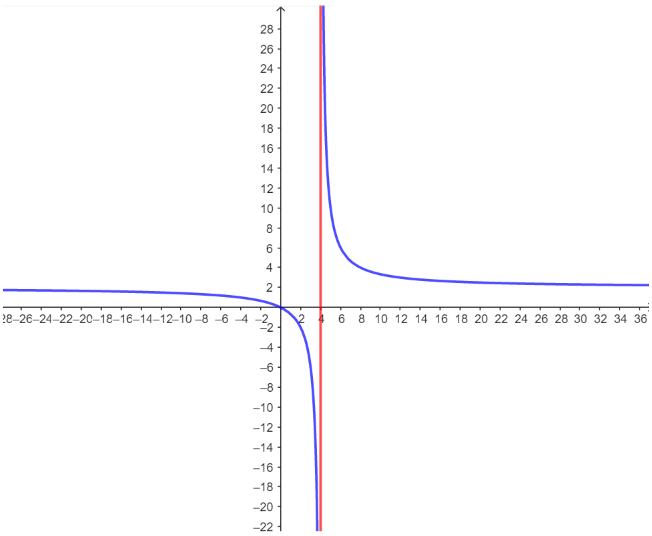


Figura 4.5: Gráficos da função $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$

4.0.3 Propriedades de Limites

Supondo que c seja uma constante e os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existam, então:

1. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3. $\lim\limits_{x \to a} [cf(x)] = c\lim\limits_{x \to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

6. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$

7. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

Exemplos:

1. $\lim\limits_{x \to 0} [\operatorname{sen} x - \cos x] = \lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x - \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 0 + 1 = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 1} [4x^3 - 2x^2 + 1] = \lim\limits_{x \to 1} 4x^3 - \lim\limits_{x \to 1} 2x^2 + \lim\limits_{x \to 1} 1 = 4\lim\limits_{x \to 1} x^3 - 2\lim\limits_{x \to 1} x^2 + \lim\limits_{x \to 1} 1 = 3$

Teorema 4.2. ***(Teorema do Confronto)*** *Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para qualquer x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente, em $x = a$. Suponha também que*

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

. Então, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Exemplo 4.5. *Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$*

Solução:

Sabemos que $1 \leq \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \leq 1$ para todo $x \neq 0$.

Logo, $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \leq x^2$ para todo $x \neq 0$.

Pelo Teorema do confronto:

$$\lim_{x \to 0} \left(-x^2\right) \leq \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to 0} x^2$$
$$0 \leq \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 0$$

Consequentemente, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$

Teorema 4.3. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$ *(θ em radianos)*

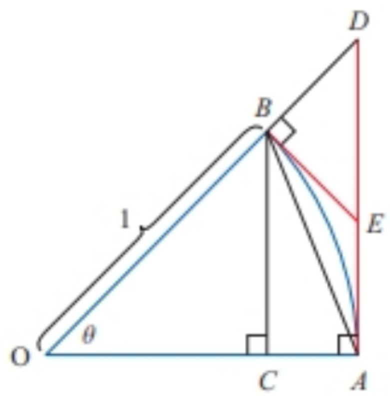


Figura 4.6

Demonstração: Suponhamos que $0 < \theta < \dfrac{\phi}{2}$. Da Figura 4.6 temos:

Área $\triangle\, OAB$ < Área do setor OAB $<\leq$ Área $\triangle\, OAD$. Expressando esta desigualdade em função de $theta$ temos:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

Dividimos os três termos da desigualdade por $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$ que é positivo.

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

Tomando a recíproca:

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} > \cos\theta$$

Desde que $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$, temos $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

4.1 Exercícios

1. Determine os seguintes limites

$a)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

$b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x+1}{x+5}$

$c)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

$d)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

$e)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$f)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

$g)\ \lim_{h\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-h}}{h}$

$h)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{(3+x)^2-9}{x}$

$i)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

$j)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{(1/\sqrt{x})-1}{1-x}$

$k)\ \lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

$l)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{x}$

2. Determine o limite.

$a)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

$b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x}$

$c)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

$d)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{2x^2}$

$e)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$f)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x\cos 4x}$

$g)\ \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}(1/x)$

$h)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

$i)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+a)-\operatorname{sen} a}{x}$

3. Determine o limite da função no ponto indicado

$a)\ f(x) = \begin{cases} x^3-27 & \text{se } x \neq 3 \\ 20 & \text{se } x = 3, \end{cases}$ limite quando $x \to 3$.

$b)\ f(x) = \left[\sqrt{1+\dfrac{1}{|x|}} - \sqrt{\dfrac{1}{|x|}}\right]$ limite quando $x \to 0$.

$c)\ f(x) = (x-2)^{50}$ limite quando $x \to 1$.

$d)\ f(x) = \dfrac{(x-1)^{64}}{(x-3)^{87}}$ limite quando $x \to 1$.

4. Determine os seguintes limites.

$a)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

$b)\ \lim_{x\to y} \dfrac{x^n-y^n}{x-y}$

$c)\ \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

$d)\ \lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{6+t}-\sqrt{6}}{t}$

$e)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{1-x}{2-\sqrt{x^2+3}}$

$f)\ \lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{5+t}-\sqrt[3]{5}}{t}$

5. Use as propriedades de limites para calcular cada limite, dado que $\lim_{x\to 3} f(x) = 12$ e $\lim_{x\to 3} g(x) = 3$.

$a)\ \lim_{x\to 3} [f(x)+g(x)]$

$b)\ \lim_{x\to 3} \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

$c)\ \lim_{x\to 3} [f(x)-g(x)]$

$d)\ \lim_{x\to 3} [f(x)-g(x)]^{3/2}$

$e)\ \lim_{x\to 3} \sqrt{f(x).g(x)}$

$f)\ \lim_{x\to 3} \dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$

6. Para cada função f determine os limites $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)$.

$a)\ f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\le 0, \\ x\sin\frac{1}{x} & \text{se } x>0. \end{cases}, a=0$

$b)\ f(x)=\begin{cases} 2 & \text{se } x<1, \\ -1 & \text{se } x=1, \\ -3 & \text{se } x>1. \end{cases}, a=1$

$c)\ f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{se } x\le -2, \\ 3-x & \text{se } x>-2. \end{cases}, a=-2$

$d)\ f(x)=\begin{cases} |x-1| & \text{se } x<-1, \\ 0 & \text{se } x=-1, \\ |1-x| & \text{se } x>-1. \end{cases}, a=-1$

$e)\ f(x)=\begin{cases} 3+x^2 & \text{se } x<-2, \\ 0 & \text{se } x=-2, \\ 11-x^2 & \text{se } x>-2. \end{cases}, a=-2$

$f)\ f(x)=\begin{cases} 2 & \text{se } x<-2, \\ \sqrt{4-x^2} & \text{se } -2\le x\le 2, \\ -2 & \text{se } x>2. \end{cases}, a=2$

$g)\ f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{se } x<1, \\ 2 & \text{se } x=1, \\ 7-2x & \text{se } x>1. \end{cases}, a=1$

$h)\ f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{se } x\ge 3/2, \\ 6-4x & \text{se } x<3/2. \end{cases}, a=3/2$

$i)\ f(x)=\begin{cases} 1+x^2 & \text{se } x\le 0, \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x>0. \end{cases}, a=0$

$j)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } x<0, \\ x^2 & \text{se } x\ge 0. \end{cases}, a=0$

7. No problema anterior diga quais das funções são contínuas e quais são descontínuas. Diga além disso que tipo de descontinuidades ela tem.

8. Diga se a função é contínua em a.

$a)\ f(x)=\begin{cases} 5+x & \text{se } x\le 3 \\ 9-x & \text{se } x>3 \end{cases}; a=3$

$b)\ f(x)=\begin{cases} |x-5| & \text{se } x\ne 5 \\ 2 & \text{se } x=5 \end{cases}; a=5$

$c)\ f(x)=\begin{cases} 3+x^2 & \text{se } x<-2 \\ 0 & \text{se } x=-2 \\ 11-x^2 & \text{se } x>-2 \end{cases}; a=-2$

$d)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{se } x\ne 2 \\ 1 & \text{se } x=2 \end{cases}; a=2$

$e)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{se } x\ne 2 \\ 0 & \text{se } x=2 \end{cases}; a=2$

9. Dada a função $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{se } x\ne 1, \\ b & \text{se } x=1. \end{cases}$ determine o valor de b para que f seja contínua.

10. Determine os seguintes limites se existem e suas respectivas assíntotas.

$a)\ \lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2}{x-2}$

$b)\ \lim_{x\to 4^-} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-3x-4}$

$c)\ \lim_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+1}{x-2}$

$d)\ \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}$

$e)\ \lim_{x\to 5^-} \dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$

$f)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{7x^3-15x^2}{13x}$

$g)\ \lim_{x\to -\infty} \dfrac{1+6x}{-2+x}$

$h)\ \lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^{100}-x^{99}}{x^{101}-x^{100}}$

$i)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{8x}{\sqrt[4]{3x^2+5}}$

$j)\ \lim_{x\to -\infty} \dfrac{6x^2}{\sqrt[3]{5x^6-1}}$

$k)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}$

$l)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x}-x$

$m)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x+4}{3x^2-5}$

$n)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2x^5}$

$o)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{x^2+x}}$

Referências Bibliográficas

[1] Anton, Howard *Cálculo, um novo horizonte*. Bookman, 6^a edição - Porto Alegre, 2000.

[2] Caldeira, André M. , Da Silva, Luiza O., Machado, Maria S., Medeiros, Valeria Z. *Pré-Cálculo*. Cengage Learning, 3^a edição -São Paulo 2011.

[3] Demana, Franklin D. , Waits, Bert K., Foley, Gregory D., Kennedy, Daniel *Pré-Cálculo*. Pearson, 3^a edição -São Paulo 2016.

[4] Flemming, Diva M. , Gonçalves, Miriam B. *Cálculo A*. Pearson, 6^a edição -São Paulo 2007.

[5] Foulius, Munem A. , Foulis, David J. *Cálculo, Volume 1*. LTC, Rio de Janeiro, 1982.

[6] Stewart, James *Cálculo, Volume 1*. Cengage Learningn, tradução da 6^a edição norte-americana, 2010.

[7] Thomas, George *Cálculo, Volume 1*. Pearson, 11^a edição - São Paulo, 2008.