



Métodos Matemáticos

Aplicações das Equações Diferenciais

José Lucio Azevedo (00119110468@pq.uenf.br)

Daniel Brito dos Santos (danielbrito@pq.uenf.br)

João Vitor Fernandes Dias (00119110377@pq.uenf.br)

10.09.2020

1. Introdução

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias começa com os próprios criadores do Cálculo, Newton e Leibniz, no final do século XVII, motivados por problemas físicos. Em fins do século XVIII a teoria das Equações Diferenciais se transformou numa das ferramentas mais importante e eficaz para pesquisa científica e tecnológica.

A maioria das leis da Física, Biologia, Química e Ciências Sociais encontram suas expressões naturais nas Equações Diferenciais. A preocupação dominante desde aquela época até meados do século XIX era a obtenção de soluções das equações em forma explícitas. Entretanto, logo se verificou que o número de equações que podiam ser resolvidas em termos de funções elementares era muito pequeno. (JOSELITO, 2011)

Neste trabalho apresentaremos as equações diferenciais e sua classificação, bem como alguns exemplos e principalmente aplicações em modelos matemáticos, termo que define determinado sistema de equações que descrevem determinado fenômeno de maneira qualitativa ou quantitativa.

2. Referencial teórico

2.1. Definição

Uma equação diferencial é uma relação que existe entre uma variável independente (geralmente t) e suas derivadas. Para encontrar a solução devemos obter uma função y que com suas derivadas satisfaça a equação. Segue abaixo alguns exemplos de equações diferenciais. (SILVA, 2011)

2.2. Classificação de acordo com: (IEDO, 2011)

2.2.1. Tipo:

ordinária se as incógnitas forem funções de apenas uma variável, do contrário é **parcial**.

2.2.2. Ordem:

Pode ser de **1ª**, **2ª**, ..., **n-ésima ordem**, de acordo com a derivada de maior ordem presente na equação.

2.2.3. Linearidade:

linear caso seja possível escrever a equação como parcelas de produtos de uma das derivadas da incógnita multiplicada por uma função que não depende da incógnita. da seguinte forma:

Do contrário é chamada **não linear**.

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} = f(t).$$

A ordem da equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que ocorre na equação. Grau é o valor do expoente para a derivada mais alta da equação, quando a equação tem a forma de um polinômio na função incógnita e em suas derivadas, como por exemplo: $Ay^{(3)} + By^{(2)} + Cy^{(1)} + Dy^{(0)} = 0$

2.3. Solução

A solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem é uma família de funções que dependem de uma constante arbitrária. Podemos determinar uma solução específica a partir do conhecimento de pontos, chamamos esses casos de Problema de Valor Inicial. Entretanto a maior parte dos problemas necessitam de técnicas resolutivas, como por exemplo: fator integrante, separação de variáveis, substituição de y/x , equações exatas dentre outras.

3. Aplicação

3.1.1. Decaimento Radioativo

Na física atômica, o decaimento radioativo é bem definido usando EDOs. A medida de estabilidade de um determinado elemento é chamada de meia-vida. A meia-vida de um elemento é simplesmente o tempo necessário para que metade dos átomos de uma quantidade inicial N_0 se desintegre ou se transforme em átomos de outro elemento. Vejamos abaixo um estudo sobre o decaimento do U-238 usando EDO.

Um reator converte Urânio 238 em isótopo de Plutônio 239. Após 15 anos, foi detectado que 0,043% da quantidade inicial N_0 de Plutônio se desintegrou. Vamos encontrar a meia-vida desse isótopo, dada a taxa de desintegração que é proporcional à quantidade remanescente.

Seja $N(t)$ a quantidade de Plutônio remanescente num instante t . Usando a solução para um problema de valor inicial onde:

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN, N(0) = N_0$$

É dada por:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

Como enunciado, 0,043% dos átomos da quantidade N_0 se desintegrou, então nos resta 99,957% do elemento. Para calcularmos o valor de k usamos:

$$N(15) = N_0 e^{15k} = 0,99957 N_0$$

Resolvendo, temos:

$$N_0 e^{15k} = 0,99957 N_0$$

$$e^{15k} = 0,99957$$

$$15k = \ln(0,99957)$$

$$k = \frac{\ln(0,99957)}{15} = -0,00002867$$

Encontrando então o valor da constante k . Agora, substituindo na equação:

$$N(t) = N_0 e^{(-0,00002867)t}$$

Como a meia-vida é dado pelo instante onde:

$$N(t) = \frac{N_0}{2}$$

Então, vamos calcular o valor de t na equação acima:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{(-0,00002867)t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{(-0,00002867)t}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0,00002867} = 24.176,74 \text{ anos}$$

3.2. Crescimento de uma Colônia de Bactérias

Em uma colônia de bactérias com população inicial de B_0 bactérias, foi observado uma hora depois ($t=1$) que o número de bactérias passou a ser $\frac{3}{2}B_0$.

Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias numa amostra, vamos determinar o tempo necessário para que o número de bactérias seja o triplo do valor inicial. Dado o PVI:

$$\frac{dB(t)}{dt} = kB, B(0) = B_0$$

E usando a condição: $B(t) = \frac{3}{2}B_0$

Devemos primeiramente encontrar o valor da constante k .

$$\frac{dB(t)}{dt} - kB = 0$$

Multiplicando o fator de integração em ambos os lados da equação, obtemos a expressão:

$$\frac{d}{dt}[e^{-kt} B] = 0$$

E derivamos, chegando em: $e^{-kt} B = C \rightarrow B(t) = C e^{kt}$

Como queremos descobrir o valor de k no instante $t=1$, fazemos:

$$B_0 e^k = \frac{3}{2}B_0$$

$$k = \ln \frac{3}{2} = 0,4055$$

chegando em: $B(t) = B_0 e^{0,4055 t}$

Como queremos encontrar o tempo necessário para que o número de bactérias seja triplicado, fazemos:

$$3B_0 = B_0 e^{0,4055t}$$

$$t = \frac{\ln 3}{0,4055} \approx 2,71 \text{ horas}$$

3.3. Modelo SIR de epidemiologia (Kermack - McKendric)

Modelo simples e geral para descrever uma epidemia, mas, a partir dele essa busca por representações matemáticas epidemiológicas ganhou força levando ao surgimento de incontáveis novos modelos mais precisos e de diferentes abordagens.

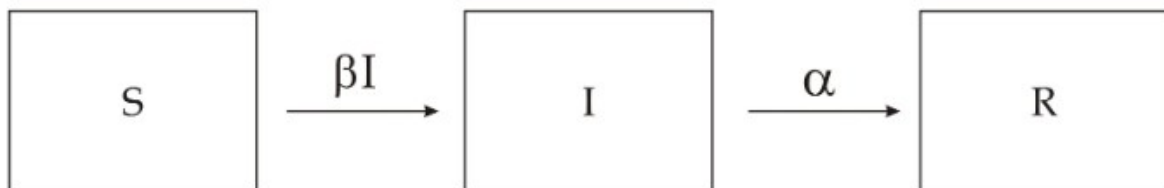
O SIR considera uma população fixa de N habitantes divididos em

1. Suscetíveis: podem adquirir infecção através do contato com um indivíduo infectado.
2. Infectados: podem transmitir a doença aos suscetíveis.
3. Removidos: indivíduos que não são suscetíveis incluindo recuperados, isolados e mortos.

Da seguinte forma:

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

Para cada doença teremos uma velocidade de propagação através das interações por meio das variáveis α (taxa de remoção) e β (taxa de transmissão). A dinâmica da epidemia se dá a partir dos valores iniciais das variáveis e os parâmetros de acordo com o seguinte esquema.



Então o modelo matemático é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases}$$

(JOSELITO, 2011)

3.4. Concentração de Resíduos Químicos em um Açude

Esse exemplo hipotético segue a linha de exemplos semelhantes aos propostos em Boyce e DiPrima, 2002.

Tomou-se assim um dado açude contendo inicialmente 10 milhões de galões de água potável. O açude recebe um fluxo indesejável de resíduos químicos contaminantes de origem industrial a uma taxa de 5 milhões de galões por ano e a mistura sai a uma mesma taxa. A concentração $y(t)$ de resíduos químicos na água que está entrando varia periodicamente com o tempo de acordo com a fórmula $y(t) = 2 + \sin 2t$ g/32al.

Supondo que estes resíduos permanecem inertes no meio e que suas interações intermoleculares não influenciam no volume total. Sendo assim visto o fluxo de entrada e saída de água ser iguais o volume total do açude permanece constante em 10^7 galões. Usando a notação t para o tempo, medido em anos, e a quantidade de resíduos por $\phi(t)$, medido em gramas, tem-se

$$\frac{d\phi}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída}$$

Sendo que “taxa de entrada” e “taxa de saída” referem-se respectivamente as taxas pelas quais ocorrem o acréscimo e decréscimo de resíduos no açude.

$$\text{Taxa de entrada} = [(5 \cdot 10^6) \text{ gal/ano} (2 + \sin 2t) \text{ g/gal}]$$

$$\text{Taxa de saída} = [(5 \cdot 10^6) \text{ gal/ano} [\phi(t)/10^7] \text{ g/gal}]$$

$$= [\phi(t)/2] \text{ gal/ano}$$

Tem-se então a E.D.O.. que modela o sistema em g/ano,

$$\frac{d\phi}{dt} = [(5 \cdot 10^6) (2 + \sin 2t)] - [\phi(t)/2] \text{ gal/ano}$$

Se a variável dependente for trabalhada como:

$$\phi = \varphi \cdot 10^6$$

$$\text{Então,} \quad \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2} \varphi(t) = 10 + 5 \sin 2t$$

Inicialmente não havia contaminantes, sendo assim a condição inicial $\varphi(0)=0$.

O fator integrante, $\mu(t)$, que será encontrado é $e^{\frac{t}{2}}$. A equação resultante com o uso deste é:

$$\varphi \cdot t = 20 - \frac{40}{17} \cos 2t + \frac{10}{17} \sin 2t + c e^{-t/2}$$

A condição inicial que fomenta encontrar a constante $c = -300/17$. A solução do P.V.I. portanto é:

$$\varphi \cdot t = 20 - \frac{40}{17} \cos 2t + \frac{10}{17} \sin 2t - \frac{300}{17} e^{-\frac{t}{2}}$$

A Figura abaixo traz o gráfico da solução do P.V.I., onde em valores de t pequenos a parte exponencial é importante o que diminui com o crescimento de t , mostra ainda que a partir de certa etapa a solução consiste numa oscilação resultante das parcelas $\sin 2t$ e $\cos 2t$ presentes.

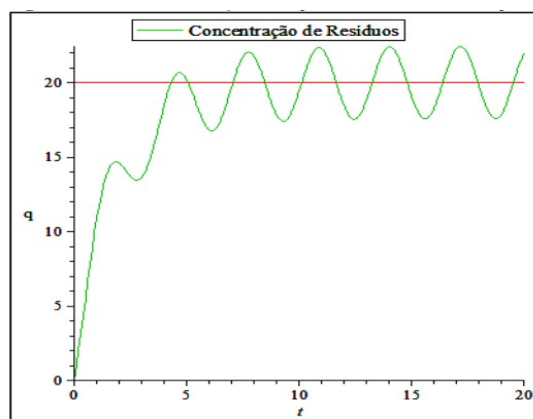
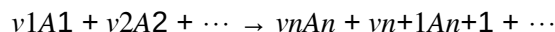


Gráfico: Variação da quantidade de resíduos pelo tempo.

3.5. Cinética Química

Um campo em que as E.D.O. estão muito presentes são os estudos físico químicos de cinética Química. Cinética Química é o estudo das velocidades da reação. Segundo Atkins e de Paula, 2012, a velocidade total da reação pode se dada pelo somatório do produto das concentrações molares pelas velocidades parciais de cada componente. Considerando os reagentes como taxa de saída e os produtos como a taxa de entrada, e sabendo que estes se anulam no ponto de equilíbrio, momento em que as reações direta (reagentes \rightarrow produtos) e inversa (produtos \rightarrow reagentes) coexistem com velocidades iguais. Tal que para uma reação,



pode ser reescrita tal que é

$$\sum_{i=1}^n v_i A_i = 0$$

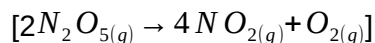
A cinética pode ser estudada conforme o número de estágios e fases de uma reação. Um campo importante no estudo da cinética Química é aquele em que se modela uma equação em termos da concentração das espécies reagentes e das constantes de velocidade chamada de lei de velocidade da reação. (MOORE, 1976).

Uma Lei de Velocidade ou lei cinética de reação é uma equação em que há a velocidade da reação é uma variável dependente das concentrações das espécies envolvidas pela equação global Química para reação num dado instante. Em muitos casos é possível obter soluções analíticas, ou experimentais, conhecidas como lei de velocidade integrada que são muito úteis. (MOORE, 1976).

O acompanhamento analítico exige um termostato para manter a temperatura constante e um bom cronômetro. A maior dificuldade, entretanto reside em acompanhar a concentração do reagente ou do produto. Moore, 1976, menciona que segundo as características de cada reação constantes físicas podem ser analisadas, como volume, pressão e índice de absorção ou refração.

Os estudos de L. Wilhermy em 1850 demonstraram que a velocidade do decréscimo da concentração de um reagente $[A]$ com o tempo é proporcional ao reagente não modificado. (MOORE, 1976).

Para as chamadas reações de “primeira ordem”, uma reação do tipo $A \rightarrow B + C$, uma reação desse tipo é a da decomposição do pentóxido de dinitrogênio,



a forma integrada da lei de velocidade,

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

$$[A]_{\square} = [A]_0 e^{-kt}$$

onde k é a constante de reação que depende apenas da temperatura e na equação representa a constante de proporcionalidade, e [A] é a concentração molar de uma espécie da reação. (MOORE, 1976).

A justificativa para as leis integradas baseia-se no fato de que as leis de velocidade são E.D.O... A integração assim se dá,

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

A equação pode ser integrada diretamente, pois k é independente de t. Para o instante inicial t=0, a concentração de [A] é $[A]_0$. Serão considerados como limites de integração,

$$\int_{[A]_0}^{[A]} \frac{dA}{A} = -k \int_0^t dt$$

$$e^{\ln\left(\frac{[A]}{[A]_0}\right)} = e^{-kt}$$

$$[A]_{\square} = [A]_0 e^{-kt}$$

A Figura abaixo mostra um gráfico da tendência de decaimento do reagente em uma reação de primeira ordem. Onde a concentração do reagente diminui exponencialmente com o tempo numa velocidade determinada pela constante k, sendo que quanto maior k mais rápido o decaimento.

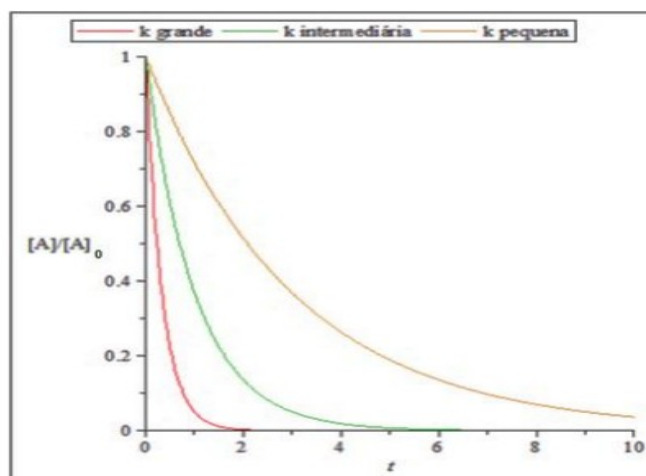


Gráfico: Decaimento do reagente segundo a variação de k

4. Considerações Finais

Com tudo, nota-se o variado uso das equações diferenciais no mundo moderno, tanto de forma direta usada por profissionais mais “próximos” da população em geral no dia a dia, como citado no item 3.3 sobre epidemias (como a que vivemos hoje), quanto de forma indireta, quando são usadas no avanço da ciência como um todo, na física, química, etc. A sociedade atual foi moldada em leis que utilizam das equações diferenciais, assim, deixando claro a sua extrema importância para o desenvolvimento científico matemático.

5. Referência Bibliográfica

[Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações](#)

[MATEMÁTICA APLICADA: O USO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS FÍSICOS E BIO-QUÍMICOS.](#)

<https://classroom.google.com/u/2/w/MTlxODYyMzQwNTgz/t/all>

[Aplicações das Equações Diferenciais - Matemática](#)

[Equações Diferenciais Ordinárias em Alguns Contextos Históricos e Reais](#)

[O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MODELAGEM DE SISTEMAS NATURAIS E OUTROS](#) Lucas Rangel Thomas