

**考试科目：**随机过程与排队论

**考试形式：**一页纸开卷

**考试时间：**2012 年

1. (10 分) 若从  $t = 0$  开始每隔 0.5 秒抛掷一枚均匀的硬币做实验，定义随机过程

$$X(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & t \text{时刻抛得证明} \\ 2t, & t \text{时刻抛得反面} \end{cases}$$

求：

- (1)  $X(t)$  的一维分布函数  $F(0.5, x)$  和  $F(1, x)$ ;
- (2)  $X(t)$  的二维分布函数  $F(0.5, 1; x_1, x_2)$ ;
- (3)  $X(t)$  的均值函数  $m_x(t)$ ，方差函数  $D_x(t)$  以及协方差函数  $C_x(s, t)$ 。

2. (10 分) 设电话总机在  $[0, t)$  接到的电话呼叫数  $X(t)$  是泊松过程，平均每分钟 2 次，求：

- (1)  $[0, 2)$  内接到 3 次呼叫的概率；
- (2)  $[1, 2)$  内接到第 3 次呼叫的概率。

3. (16 分) 设齐次马氏链  $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$  的状态空间  $E = \{1, 2, 3\}$ , 转台转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- (1) 论其遍历性;  
 (2) 求平稳分布;  
 (3) 求概率  $P\{X(4) = 1 | X(1) = 2, X(2) = 3\}$ ;  
 (4) 已知  $X(0)$  的分布律如下表所示:

$X(0)$	1	2	3
$P$	0.2	0.3	0.5

求  $P\{X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3\}$  和  $X(2)$  的分布律。

4. (12 分) 设齐次马氏链  $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$  的状态空间  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 状态转移矩阵  $P$  如下边矩阵。求:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- (1) 画出状态转移图;  
 (2) 讨论各状态性质;  
 (3) 分解状态空间。

5. (16 分) 病人以每小时 3 人的泊松流到达医院, 假设该医院只有一个医生服务, 他的服务时间服从负指数分布, 并且平均服务一个顾客时间为 15 分钟。
- (1) 医生空闲时间的比例?
  - (2) 有多少病人等待看医生?
  - (3) 病人的平均等待时间?
  - (4) 一个病人等待超过一个小时的概率?
6. (15 分) 某加油站设有三条加油管, 汽车按平均每 2 分钟 1 辆的泊松流到来; 加油时间为指数分布, 参数  $\mu = 0.5$  辆/分钟。站内最多只能停放 2 辆车等待加油, 当汽车开来发现已有 2 辆车等待时, 它即往别处去加油。试求
- (1) 加油不需等待的概率;
  - (2) 加油站内平均车辆数;
  - (3) 排队等待加油的平均时间。

7. (15 分) 假定某电影网站有 2 台服务器, 其中 1 台运行, 1 台备用。当运行的服务器发生故障时, 发生故障的机器立刻由维修工去修理, 修好后转入备用。只有一个维修工人。如果服务器正常工作时间服从指数分布, 平均 9 天, 而调整维修一台服务器的时间是指数分布, 平均 3 天。求
- (1) 无备用服务器时, 网站正常运转的概率;
  - (2) 有备用服务器时, 由于停机网站无法运转的概率;
  - (3) 如果要求网站正常运转的概率不低于 0.995, 至少应该备用多少台服务器?
8. (6 分) 设有三台机器正常运转时间都为负指数分布, 其参数为 1. 有两个修理工, 修理时间服从负指数分布, 参数分别为 1 和 2. 试用生灭过程描述该系统故障机器数, 并画出状态转移速度图和求其平稳分布。