座位号

学院________

姓名________

学号________

密 封 线 以 内 答 题 无 效

电子科技大学研究生试卷

（考试时间：______至________，共 2 小时）

课程名称 __图论及应用__ 教师________ 学时 __60__ 学分 __3__

教学方式 __堂上授课__ 考核日期 __2019__ 年 __5__ 月______日 成绩______

考核方式：__________（学生填写）

一．填空题(每空 3 分，共 15 分)

1. 图 G 的邻接矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 G 的生成树的棵数为 __8__.

2. 设 G_1 是 (n_1, m_1) 简单图，G_2 是 (n_2, m_2) 简单图，则 G_1 和 G_2 的(Cartesian)积图 $G_1 \times G_2$ 的边数 $m(G) = \underline{n_1 m_2 + n_2 m_1}$.

3. 图 1 中最小生成树 T 的权值 $W(T) =$ __23__.

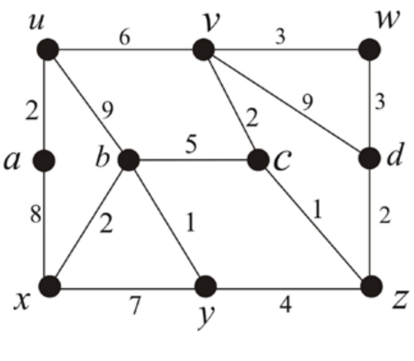


图 1

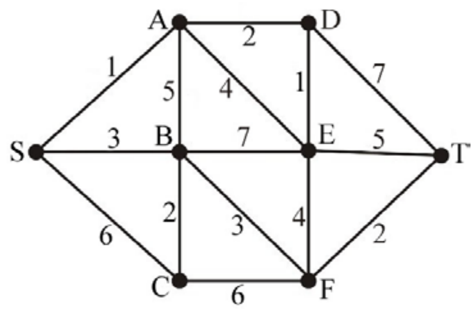


图 2

4. 图 2 中 S 到 T 的最短路的长度为 __8__.

5. 设 G 是 n 阶简单图，且不包含三角形，则其边数一定不超过 $\underline{\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor}$.

二．单项选择题(每题 3 分，共 15 分)

1. 关于彼得森(Petersen)图, 下面说法**正确**的是（ B ）

A. 彼得森图是哈密尔顿图;

B. 彼得森图是超哈密尔顿图;

C. 彼得森图可 1-因子分解;

D. 彼得森图是可平面图.

2. 下面说法**正确**的是（ C ）

A. 有割点的三正则图一定没有完美匹配;

B. 有割边的三正则图一定没有完美匹配;

C. 存在哈密尔顿圈的三正则图必能 1 因子分解;

D. 正则的哈密尔顿图必能 2 因子分解.

3. 关于图的度序列, 下面说法**正确**的是（ B ）

A. 任意两个有相同度序列的图都同构;

B. 若图 G 度弱于图 H，则图 G 的边数小于等于图 H 的边数;

C. 若非负整数序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数，则它一定是图序列;

D. 如果图 G 所有顶点的度和大于或等于图 H 所有顶点的度和，则图 G 度优于图 H.

4. 关于图的补图, 下面说法**错误**的是（ A ）

A. 若图 G 连通，则其补图必连通;

B. 若图 G 不连通，则其补图必连通;

C. 图 G 中的一个点独立集，在其补图中的点导出子图必为一个团;

D. 存在 5 阶的自补图.

5. 关于欧拉图, 下面说法**正确**的是（ D ）

A. 每个欧拉图有唯一的欧拉环游;

B. 每个顶点的度均为偶数的图是欧拉图;

C. 欧拉图中一定没有割点;

D. 欧拉图中一定没有割边.

(三).(10 分)若阶为 25 且边数为 62 的图 G 的每个顶点的度只可能为 3，4，5 或 6，且有两个度为 4 的顶点，11 个度为 6 的顶点，求 G 中 5 度顶点的个数。

解：设 5 度顶点有 x 个，由握手定理得到：

$$4\times2+6\times11+5x+(25-x-13)\times3=124$$

解得 $x=7$ 。

四. (10 分) 证明: (1) 若 $k>0$, 则 k 正则偶图(二部图)可 1 因子分解;

(2) 若 $k>1$, 则 k 正则偶图没有割边.

证明: (1) 若图 G 是 k 正则偶图且 $k>0$, 则 G 有完美匹配 M. 那么 G-E(M_1)仍然是二部图且是正则图. 所以 G-E(M_1)有完美匹配 M_2, 故可以得到一个图 G 的完美匹配序列 M_1, M_2,...M_k. 由取法知 M_1, M_2,...M_k两两无公共边, 即为 G 的 1 因子分解.

(2) 设 G 是 k 正则偶图且 $k>0$. 用反证法. 假设 G 有割边 e=uv, 则 G-e 有两个连通分支 G_1和 G_2. 不妨设 $u\in V(G_1),\ v\in V(G_2)$. 显然 G_1和 G_2都是二部图. 那么 G_1有二部划分 X,Y 且 $u\in X$. 则 G_1中仅有 u 点的度为 k-1, 其余顶点的度均为 k. 则 $k|Y|=k|X|-1$. 因 $k>0$,故这是一个矛盾. 因此结论成立.

五. (10 分) 设 T 是完全 m 元树, i 是分支点数, t 是树叶数. 证明: $(m-1)i=t-1$.

证明: 由 T 是完全 m 元树, 故 T 有 i-1 个点的度为 m+1, 1 个点的度为 m, t 个点的度为 1. 由握手定理得.

$$(i-1)(m+1)+m+t=2|E(G)| \qquad \ldots\ldots(1)$$

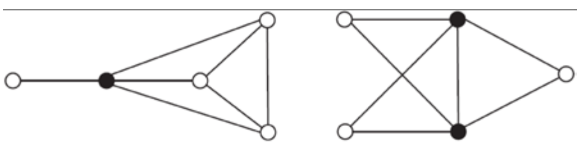
再由树的性质得

$$i+t-1=|E(G)| \qquad \ldots\ldots(2)$$

将(2)代入(1)即得 $(m-1)i=t-1$

六. (10 分) (1) 画出 $C_{1,5}$ 和 $C_{2,5}$.

(2) 对于一般的 m 和 n, 其中 $1\le m<\dfrac{n}{2}$. 证明: $C_{m,n}$ 图不是哈密尔顿图.



(1) $C_{1,5}$ $C_{2,5}$

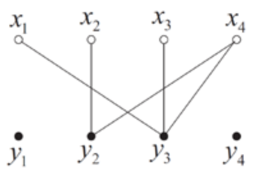
(2) 由 $C_{m,n}$ 的定义, 删除交图中的 K_m 的 m 个顶点后,图有 m+1 个连通分支. 这与哈密尔顿图的必

要条件矛盾. 故 $C_{m,n}$ 都不是哈密尔顿图.

七. (10 分) 某工厂有 4 名工人和 4 种工作. 每个工人干不同工作的效率由下面矩阵 A 给出(a_{ij} 代表工人 i 干第 j 件工作的效率). 试给 4 名工人分别安排一种工作, 使得他们总的效率最高.

$$A=\begin{pmatrix}12&14&15&14\\9&11&6&8\\10&9&16&14\\12&13&13&10\end{pmatrix}$$

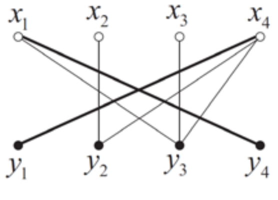
解: 先给出矩阵 A 的初始可行顶点标号,
$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}12&14&15&14\\9&11&6&8\\10&9&16&14\\12&13&13&10\end{pmatrix} & \begin{array}{c}15\\11\\16\\13\end{array}\\ \begin{array}{cccc}0&0&0&0\end{array} & \end{array}$$



画出该标号的相等子图为. 该图无完美匹配, 故找到一个 S 与 T, 满足 $N(S)=T$. 此时,S={x_1, x_2 ,x_3, x_4}, T={ y_2 ,y_3}, 算出 $\alpha_l=1$. 故对矩阵 A 的初始标号进行更改得到

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}12&14&15&14\\9&11&6&8\\10&9&16&14\\12&13&13&10\end{pmatrix} & \begin{array}{c}14\\10\\15\\12\end{array}\\ \begin{array}{cccc}0&1&1&0\end{array} & \end{array}$$

此时在原来图的基础上会有一些新加入的边, 形成新的图



此图有完美匹配 M: $x_1y_4, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_1$.

因此给第 1 个工人分配第 4 份工作,

第 2 个工人分配第 2 份工作,

第 3 个工人分配第 3 份工作,

第 4 个工人分配第 1 份工作是一种效率最高的分配方式.

八. (10 分) 富勒烯图(Fullerene graph)是一种只包含五边形面和六边形面的三正则平面图. 试求富勒烯图的五边形面的个数.

解: 设 G 为任意一个富勒烯图. 试 G 的总面数为 f, 而五边形面的个数为 f_5, 六边形面的个数为 f_6

由欧拉公式得 $n-m+f=2$ (1)

$f= f_5+ f_6$ (2)

G 是三正则图, 则有 $3n=2m$ (3)

G 只包含五边形面和六边形面, 故 $5f_5+ 6f_6=2m$ (4)

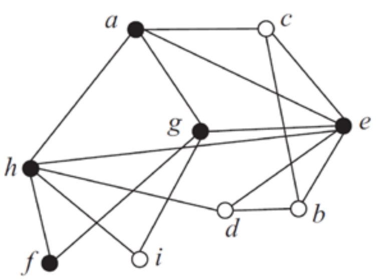
将(1)式中的 f, n 分别用(2), (3) 代替后得, $f_5+ f_6=2+(1/3)m$. 再结合(4)即得 $f_5=12$.

九. (10 分) 某车站有如下 9 种品名的危险货物要存放于仓库中: a 鞭炮, b 压缩氧, c 丙酮, d 火柴, e 锂电池, f 棉花, g 溴, h 硝酸, i 氢氧化钠. 其中一些货物是互不相容的, 如果它们相互接触, 则会引起爆炸或损坏. 每种货物与其它货物不相容的情况如下: "×"表示不相容.

$a\times c;$ $a\times e;$ $a\times g;$ $a\times h;$ $b\times c;$ $b\times d;$ $b\times e;$ $c\times e;$ $d\times e;$ $d\times h;$ $e\times g;$ $e\times h;$ $f\times g;$ $f\times h;$ $g\times i;$ $h\times i$

试确定需要仓库的最少数量, 使得存储后的货物是安全的. 并给出一种可行的存储方案.

解: 结合题意, 用图的顶点着色解决问题. 用一个顶点表示一种货物, 两种货物不相容则对应的两个顶点连一条边. 这样就是求图的点色数,以及一种可行的着色方案.



用 3 个颜色无法对图进行正常着色. 因为 a,c,b,d,h 现在一个 5 长圈,点 e 与这 5 个点都相邻. 故至少需要 4 个颜色进行正常着色. 容易给出图的一种 4 色着色方案.

一种着色方案代表一个色类的货物可以放在同一仓库:{c,f,i},{a,b},{h,g},{e}