考试科目：随机过程与排队论
考试形式：一页纸开卷
考试时间：2012 年秋

1. （10 分） 利用打靶试验，定义随机过程

$$X(t)=X(t,w)=\begin{cases}t, & \text{命中目标}w=w_1\\ \cos\pi t, & \text{没有命中目标}w=w_2\end{cases}$$

假定“命中目标”和“没有命中目标”的概率分别为 0.8 和 0.2，打靶试验相互独立，试求：

（1） $X(t)$ 的一维分布函数 $F(0.5,x)$ 和 $F(1,x)$；

（2） $X(t)$ 的二维分布函数 $F(0.5,1;x,y)$；

（3） $X(t)$ 的均值函数 $m_x(t)$，方差函数 $D_x(t)$ 以及协方差函数 $C_x(s,t)$。

注：$F(t,x)=p\{X(t)<x\},t\in T,x\in R=(-\infty,+\infty)$。

解：
暂无答案。

2. （10 分） 设在 $[0,t)$ 时段内乘客到达某售票处的数目是参数 $\lambda=2.5$（人/分）的泊松过程，求

（1） 在 5 分钟内有 10 位乘客到达售票处的概率；

（2） 第 10 位乘客在 5 分钟内到达售票处的概率；

（3） 响铃两乘客到达售票处的平均时间间隔。

解：
设 $N(t)$ 为 $[0,t)$ 内到达的乘客数，则 $N(t)\sim\Psi(2.5t)$

（1） $P(N(5)=10)=\dfrac{(2.5\times5)^{10}}{10!}e^{-2.5\times5}=\dfrac{12.5^{10}}{10!}e^{-12.5}\approx0.095643635$

（2） 设 τ_n 表示第 n 个乘客的到达时间，则

$$P\{\tau_10\le5\}=P\{N(5)\ge10\}=\sum_{k=10}^{\infty}\frac{12.5^k}{k!}e^{-12.5}=0.798569$$

（3） 设第 n 个与第 $n+1$ 个乘客到达的时间间隔为 T_n，则 T_n 服从参数为 $\lambda=2.5$ 的指数分布，故

$$E(T_n)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2.5}=0.4$$

3. （16 分） 设齐次马氏链 $\{X(n),n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3\}$，一步状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix}\frac14 & \frac12 & \frac14\\ \frac12 & \frac14 & \frac14\\ 0 & \frac14 & \frac34\end{bmatrix}$$

初始分布为

$X(0)$	1	2	3
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

（1） 求 $P\{X(0)=1, X(2)=3\}$；

（2） 求 $P\{X(2)=2\}$。

（3） 此链是否具有遍历性?

（4） 求平稳分布

解：

（1） 根据已知条件可得

$$P(2)=P^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}P\{X(0)=1, X(2)=3\}&=P\{X(0)=1\}P\{X(2)=3|X(0)=1\}\\&=p_1(0)p_{13}(2)\\&=1/2*3/8\\&=3/16\end{aligned}$$

（2） $P\{X(2)=2\}=\sum_{i=1}^{3}p_i(0)p_{i2}(2)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{16}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{31}{96}$

（3） 因为 $P(2)$ 中所有元素均大于 0，所以该齐次马氏链是遍历的。

（4） 遍历的齐次马氏链一定存在极限分布，其极限分布就是平稳分布

$$\begin{cases}\prod=\prod P\\ \sum_{i=1}^{3}\pi_i=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\pi_1=\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2\\ \pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{4}\pi_2+\frac{1}{4}\pi_3\\ \pi_3=\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{4}\pi_2+\frac{3}{4}\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{matrix}\Rightarrow\prod=\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4. （15 分） 设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

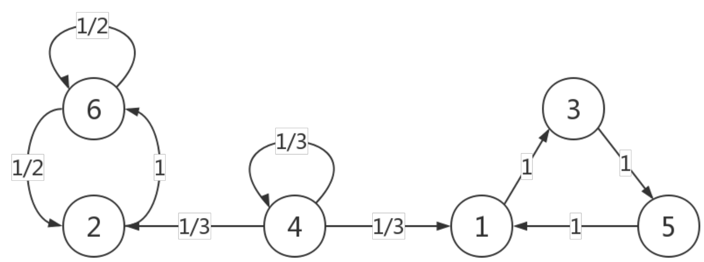
（1） 画出状态转移图；

（2） 讨论各状态性质；

（3） 分解状态空间。

解：

（1） 状态转移图



（2） 状态性质：

$f_{11}(1)=0, f_{11}(2)=0, f_{11}(3)=1, f_{11}(n)=0(n>3)$，所以 $f_{11}=1$，故状态 1 为常返状态。而 $\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{11}(n)=3<+\infty$，所以状态 5 为正常返状态。因为 $p_{11}(3n)=1>0(n\geq 1)$，所以状态 1 的周期是 3. 由于状态 1、3、5 互通，因此具有相同的状态性质。

$f_{66}(1)=\dfrac{1}{2}, f_{66}(2)=\dfrac{1}{2}, f_{66}(n)=0(n>2)$，所以 $f_{66}=1$，故状态 6 为常返状态。而 $\mu_6=\sum_{n=1}^{m} nf_{66}(n)=\dfrac{3}{2}<+\infty$，所以状态 6 为正常返状态。因为 $p_{66}>0$，所以状态 6 是非周期的。由于状态 2、6 互通，因此具有相同的状态性质。

$f_{44}(1)=\dfrac{1}{3}, f_{44}(n)=0(n>1)$，所以 $f_{44}=\dfrac{1}{3}<1$，故状态 4 为非常返状态。

（3） 状态空间分解为 $E=N+C_1+C_2=\{4\}+\{2,6\}+\{1,3,5\}$。

5. （16 分） 设有 2 台复印机，平均复印文件的速度为 $\mu=8$（件/分钟），文件到达率 $\lambda=12$（件/分钟），假设每件文件固定页数，试求：

（1） 等待复印的平均文件数 $\overline{N}_q$ 及在复印室内现有的平均文件数 $\overline{N}$；

（2） 每份文件在复印室里平均停留时间以及排队等待复印的平均时间；

（3） 文件到达后立即可以复印的概率；

（4） 平均忙的复印机数。

解：

由题意，按 $M/M/c/\infty$ 系统处理，其中 $\lambda = 12$（件/分钟），$\mu = 8$（件/分钟），$c = 2$，$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{3}{2}$，$p_c = \dfrac{3}{4}$。

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!} + \frac{c\rho^c}{c!(c-\rho)}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{2\times(\frac{3}{2})^2}{2\times(2-\frac{3}{2})}\right]^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$p_c = \frac{\rho^c}{c!}p_0 = \frac{(\frac{3}{2})^2}{2}\times\frac{1}{7} = \frac{9}{56}$$

（1） 等待复印的平均文件数

$$\overline{N}_q = \frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}p_c = \frac{\frac{3}{4}}{(1-\frac{3}{4})^2}\times\frac{9}{56} = \frac{27}{14}$$

在复印室内现有的平均文件数

$$\overline{N} = \overline{N}_q + \overline{N}_c = \frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}p_c + \rho = \frac{27}{14} + \frac{3}{2} = \frac{24}{7}$$

（2） 每份文件在复印室里排队等待复印的平均时间

$$\overline{W}_q = \frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}p_c = \frac{\frac{3}{4}}{12\times(1-\frac{3}{4})^2}\times\frac{9}{56} = \frac{9}{56}(\text{分钟})$$

每份文件在复印室里平均停留时间

$$\overline{W} = \overline{W}_q + E[X] = \frac{9}{56} + \frac{1}{8} = \frac{2}{7}(\text{分钟})$$

（3） 文件到达后需要等待的概率

$$p = \sum_{j=c}^{\infty}p_j = \frac{1}{1-\rho_c}p_c = \frac{1}{1-\frac{3}{4}}\times\frac{9}{56} = \frac{9}{14}$$

文件到达后可以立即复印的概率 $\dfrac{5}{14}$。

（4） 平均忙的复印机数 $\overline{N}_c = \rho = \dfrac{3}{2}$。

6. （12 分） 某单位有 10 辆汽车，3 个修理工，假定每辆车平均 30 天修理一次，平均修理时间为 6 天，汽车正常运行时间和修理时间都服从指数分布。求：

（1） 该单位无车可用的概率；

（2） 需要修理的汽车的平均数；

（3） 每辆汽车等待修理的平均时间？

解：

由题意，按 $M/M/c/m/m$ 排队系统处理，其中 $c=3$，$m=10$，$\lambda=1/30$（辆/天），$\mu=1/6$（辆/天），$\rho=1/5$，因此

$$p_0=\left(\sum_{i=0}^{c-1}C_m^i\rho^i+\sum_{j=\rho}^{m}C_m^i\frac{i!}{c!c^{i-c}}\rho^i\right)^{-1}=0.1546$$

（1） 该单位无车可用的概率

$$p_{10}=p_m=\frac{m1}{c!c^{m-c}}p^mp_0=0.000004379$$

（2） 需要修理的汽车的平均数

$$\overline{N}=\sum_{j=0}^{c-1}\frac{m!\rho^j}{(j-1)!(m-j)!}p_0+\frac{m!}{c!}\frac{j\rho^j}{(m-j)!c^{j-1}}p_0=1.9584\text{辆}$$

（3）

$$p_j=C_m^j\frac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^jp_0,j=c,c+1,\ldots,m$$

$$p_4=0.06926,\qquad p_5=0.02770,\qquad p_6=0.009235,$$
$$p_7=0.0023626,\qquad p_8=0.0004925,\qquad p_9=0.0000044$$

平均等待队长

$$\overline{N}_q=\sum_{j=c}^{m}(j-c)p_j=0.164735(\text{辆})$$

每辆汽车等待修理的平均时间

$$\overline{W}_q=\frac{\overline{N}_q}{\lambda(m-\overline{N})}=0.61456(\text{天})$$

7. （15 分） 某计算中心的信息交换站接受到的信息流为泊松流，每秒钟到达 15 份信息，信息从交换站输出服从指数分布，平均每秒钟 20 份，若缓冲器的存储空间仅可存储 4 份信息，试求：

（1） 平稳时的概率分布，信息损失的概率；

（2） 信息交换站的平均信息数，缓冲器中的平均信息数；

（3） 每份信息在交换站的平均逗留时间和平均等待时间。

解：

由题意，系统总容量 $K=1+4=5$，$\lambda=15$（份/秒），$\mu=20$（份/秒），$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{3}{4}$，按 $M/M/1/K$ 系统处理。

（1） 平稳时的概率分布为

$p_0=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}=\dfrac{0.25}{1-0.75^6}=0.304$

$P_1=p_0p=0.304\times 0.75=0.228$

$P_2=p_0p^2=0.304\times 0.75^2=0.171$

$P_3=p_0p^3=0.304\times 0.75^3=0.128$

$P_4=p_0p^4=0.304\times 0.75^4=0.096$

$P_5=p_0p^5=0.304\times 0.75^5=0.072$

$p_5=0.072$ 即为信息损失的概率。

（2） 平稳时在信息交换站的平均信息数为

$$L=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}=\frac{0.75}{0.25}-\frac{6\times 0.75^6}{1-0.75^6}=1.70(\text{份})$$

在缓冲器中等待处理的平均信息数位

$$L_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}-\frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}=\frac{0.75^2}{0.25}-\frac{6\times 0.75^6}{1-0.75^6}=1.00(\text{份})$$

（3） 因为平稳时有效到达的速度为

$$\lambda_c=\lambda(1-p_K)=15\times(1-0.072)=13.92$$

所以每份信息在交换站的平均逗留时间和平均等待时间分别为

$$W=\frac{L}{\lambda_c}=\frac{1.70}{13.92}=0.122(\text{秒})$$
$$W_q=\frac{L_q}{\lambda_c}=\frac{1.00}{13.92}=0.72(\text{秒})$$

8. （6 分） 有一排队系统，顾客到达为参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松过程，顾客到达看到队长为 k 时，进入系统的概率为 $1/(k+1)$；顾客（... 缺失）

解：

暂无答案。