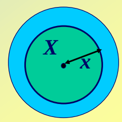
概率密度函数——射击试验

例1 一个靶子是半径为2米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，射击均能中靶，用X 表示弹着点与圆心的距离。试求X 的分布函数。

解： 由第一节可知，X 的分布函数为

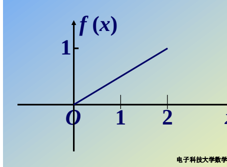
$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2\\ 1\ , & x\ge 2\end{cases}$$

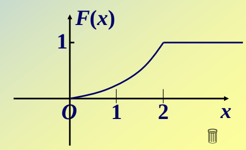


考虑函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0\le x<2\\ 0\ , & else\end{cases}$

$f(x)$ 的变上限积分为

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0\ , & x<0\\ \displaystyle\int_0^x \frac{t}{2}dt=\frac{x^2}{4}, & 0\le x<2\\ \displaystyle\int_0^2 \frac{t}{2}dt=1, & x\ge 2\end{cases}=F(x)$$





概率密度函数——仪器寿命问题

例2 使用了t 小时的电子管在以后的Δt 小时内损坏的概率等于$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, 其中$\lambda>0$ 为一常数, 试写出电子管的寿命T 的分布函数。

解： 由第一节可得，寿命T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

即是函数 $f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

的变上限积分。

概率密度函数——概率密度判定

例3 设

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in R$$

证明 $\varphi(x)$ 是概率密度函数。

证明： （1） $\varphi(x)>0$，$x\in R$ 显然成立。

（2） $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$

令 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$\overset{x=r\cos\theta}{\underset{y=r\sin\theta}{=\!=\!=}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr$$

$$=2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=2\pi$$

从而 $I=\sqrt{2\pi}$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=1$$

概率密度函数——函数参数确定

例4 设随机变量X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ke^{-\frac{x}{\theta}}, & x>\alpha\\ 0\ , & x\le\alpha\end{cases}\qquad \theta>0$$

试确定常数k 。

解： $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{\alpha}^{+\infty}k\,e^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$$=-\theta\,k\int_{\alpha}^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}d(-\frac{x}{\theta})=-\theta\,k\,e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{\alpha}^{+\infty}$$

$$=\theta\,k\,e^{-\frac{\alpha}{\theta}}\ \Longrightarrow\ k=\frac{1}{\theta}e^{\frac{\alpha}{\theta}}$$

概率密度函数——概率的计算

例5 已知随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

用Y表示对X进行三次独立重复观测中事件$\{X\le ½\}$出现的次数，求$P\{Y=2\}=?$

分析:把事件$\{X\le ½\}$看作事件A, 则Y表示进行3次独立实验时,事件A发生的次数,则 $Y\sim B(3, P(A))$

解： $P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2x\,dx=\frac{1}{4}$

所以 $Y\sim B(3,\ 1/4)$，从而

$$P\{Y=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$$

均匀分布——方程有实根的概率

例6 设随机变量$X\sim U(0, 5)$，求方程$4r^2+4Xr+X+2=0$中r有实根的概率p。

解： $p=P\{(4X)^2-4\times 4(X+2)\ge 0\}$

$=P\{X^2-(X+2)\ge 0\}$ $=P\{(X-2)(X+1)\ge 0\}$

$=P(\{X\le -1\}\cup\{X\ge 2\})$

$=P\{X\le -1\}+P\{X\ge 2\}$

$=P\{2\le X\le 5\}$

$$=\frac{5-2}{5}=\frac{3}{5}$$

均匀分布——四 舍 五 入

例7 在数值计算中,由于四舍五入引起的误差X服从均匀分布.如果小数后面第五位按四舍五入处理,试求误差在0.00003和0.00006之间的概率.

解法1 由题设知,误差在[-0.00005,0.00005] 上服从均匀分布,所以X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0.00005-(-0.00005)}=10000 & -0.00005\le x\le 0.00005\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故所求概率为:

$P\{0.00003\le x\le 0.00006\}=\int_{0.00003}^{0.00005}10000\,dx=0.2$

解法2 设真值为x_0,舍入为x,由于舍入值x在x_0 -0.00005与x_0 +0.00005之间的任一值都是等可能的.问题归结为向直线区域

$\Omega=\{x|\ x_0-0.00005\le x\le x_0+0.00005\}$

随机投一点,而事件

A={误差在0.00003与0.00006之间}

$=\{x|\ x_0+0.00003\le x\le x_0+0.00005\}$

从而P{A}= $\dfrac{A\text{长度}}{\Omega\text{的长度}}=\dfrac{0.00005-0.00003}{0.00005-(-0.00005)}=0.2$

指数分布——灯 管 寿 命

例8 设某类日光灯管的使用寿命服从参数为λ=0.0005的指数分布，求：

(1) 任取一根灯管，能正常使用1000h以上的概率；

(2) 若这根灯管已使用了1000h，还能再使用1000h以上的概率。

解: 因为X~E(λ) 所以X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad \lambda=0.0005$$

1) $P\{X>1000\}=1-P\{X\le 1000\}=1-\int_0^{1000}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=1-\left(1-e^{-1000\lambda}\right)$

$$=e^{-1000\times 0.00005}=e^{-0.5}\approx 0.607$$

2) $P\{X>2000\ |X>1000\}=\dfrac{P\{X>2000,\,X>1000\}}{P\{X>1000\}}$

$$=\frac{P\{X>2000\}}{P\{X>1000\}}=\frac{\int_{2000}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx}{\int_{1000}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx}$$

$$=\frac{e^{-2000\lambda}}{e^{-1000\lambda}}$$

$$=e^{-1000\lambda}$$

≈ 0.607

正态分布——正态分布事件概率

例9 已知随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明

$$P\{|X-\mu|<x\}=2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-1$$

证明: $P\{|X-\mu|<x\}=P\{\mu-x<X<\mu+x\}$

$$=\Phi\left(\frac{\mu+x-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-x}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]$$

$$=2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-1$$

特别地，有

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)-1=0.6826$$

$$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0.9974$$

这说明X以很大的概率密集在$x=\mu$的附近，

见书上 3σ原理

正态分布——车门设计

例10 公共汽车的车门是按男子与车门碰头的机会在0.01以下来设计的.设男子身高X服从参数为μ=172cm，σ=6 的正态分布.即X~N(172,36).问车门的高度该如何设计.

解：设车门的高度为h cm，按设计要求

$P\{X\geq h\}\leq 0.01$ 或者 $P\{X<h\}\geq 0.99$

因为 X~N(172,36) 所以

$$P\{X<h\}=\Phi\left(\frac{h-172}{6}\right)\geq 0.99$$

查表有$\Phi(2.33)=0.9901>0.99$

故$(h-172)/6=2.33$ 即$h=172+6\times 2.33=186$cm

故设计车门高度为186cm时,可使男子与车门顶碰头的机会不大于0.01

正态分布——分位数

例11 设$X \sim N(10, 2^2)$，求α使 $P\{|X-10|<\alpha\}=0.9$

解: $P\{|X-10|<\alpha\}=2\Phi\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1=0.9$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0.95$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2}=1.645$$

$$\Rightarrow \alpha=3.29$$

正态分布——电池可靠性估计

例12 设某种电池的寿命为X小时, $X \sim N(300, 35^2)$,

求 (1) 电池寿命在335小时以上的概率p_1

(2) 求允许时限x, 使电池寿命在$(300-x, 300+x)$的概率不小于0.9。

解: (1) $p_1=P\{X>335\}$

$$=1-P\{X\leq 335\}$$

$$=1-\Phi\left(\frac{335-300}{35}\right)$$

$$=1-\Phi(1)$$

$$=1-0.8413=0.1587$$

(2) $0.9 \leq P\{300-x<X<300+x\}$

$$=2\Phi\left(\frac{x}{35}\right)-1$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{35}\right)\geq 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{x}{35} \geq 1.645$$

$$\Rightarrow x \geq 57.75$$

(2) $0.9 \le P\{300 - x < X < 300 + x\}$

$$= 2\Phi\left(\frac{x}{35}\right) - 1$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{35}\right) \ge 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{x}{35} \ge 1.645$$

$$\Rightarrow x \ge 57.575$$

既非离散也不连续的反例

例13 设有一均匀陀螺,在其圆周的一半圆周上都标明刻度1,另一半圆周上均匀地刻上区间(0,1)上的诸数字.旋转陀螺,求它停下来时其圆周上触及桌面上的点刻度X的分布函数.

解: 设A= "落在刻度为1的半圆周上"

$$P(A) = 1/2$$

1) $x<0$ 时 $F(x)=0$

2) $0\le x<1$ 时 $F(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, \bar{A}\}$

$$= P(\bar{A})P(X \le x | \bar{A})$$

$$= \frac{1}{2}x$$

3) $x \ge 1$ $F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$