分布律——产品检验

例 某种产品在生产过程中的废品率为p（0<p<1），对产品逐个检查，直到检查出5个不合格品为止，试写出停止检查时已检查的产品个数X 的分布律。

解：进行 k 次检查，指定的5次检查出现不合格品的概率为 $p^5(1-p)^{k-5}$。

事件$\{X=k\}$相当于第k 次检查到的产品必为不合格品，而前$k-1$ 次检查中查出4 件不合格品。

这种情形共有 C_{k-1}^4种不同的方式。

故分布律为 $P\{X=k\}=C_{k-1}^4\, p^5(1-p)^{k-5}$,

其中，$k=5,6,\ldots$

#

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

分布律——抛骰子

例 同时抛掷两颗骰子,观察它们出现的点数,求两颗骰子中出现的最大点数的概率分布.

解:设两颗骰子中出现最大点数为X,则X的可能取值为:1,2,3,4,5,6

基本事件总数：36

$\{X=1\}$ 只包含一个基本事件

$\{X=k\}$ 包含的基本事件个数

两颗骰子都出现k点 1

一颗出现k点,另一颗小于k点

$C_2^1\cdot 1\cdot C_{k-1}^1$

X的分布律为

X	1	2	3	4	5	6
p	1/36	1/12	5/36	7/36	1/4	11/36

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

二项分布——产品抽检试验

例 设有一批同类产品共有N 个，其中次品有M 个，现从中任取(有放回)n 个，试求取出n 件中所含的次品件数X 的分布律。

解：设想产品是逐件有放回取出，由于各次抽到的次品是相互独立的，抽n 件产品相当于做n 重贝努里试验。

故 $X\sim B(n,\frac{M}{N})$

所以, X 的分布律为 $P\{X=k\}=C_n^k(\frac{M}{N})^k(1-\frac{M}{N})^{n-k}$,

其中 $k=0,1,2,\ldots,n$。

思考：将抽取方式改为无放回抽取，试写出X 的分布律。$P\{X=k\}=\dfrac{C_{N-M}^{n-k}C_M^k}{C_N^n}$ $k=0,1,..,l$ $l=\min(M,n)$

此时称X服从超几何分布.

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

二项分布——强弱对抗试验

例3：强弱两队进行乒乓球对抗赛，得胜人多的一方获胜，已知强队每个队员获胜的概率为0.6，下面两个方案中哪一个对弱队有利？

（1）双方各出3人； （2）双方各出7人。

解：设$A=$\{弱队获胜\}，弱队获胜的人数为X。

双方逐对较量从而相互独立，故是独立重复试验。

（1）当双方各出3人时，$X\sim B(3,0.4)$。

所以 $P(A)=P\{X\ge 2\}=\sum_{k=2}^{3}C_3^k(0.4)^k(0.6)^{3-k}$

≈ 0.352

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

（2）当双方各出7人时， $X\sim B(7,0.4)$ 。

所以 $P(A)=P\{X\ge 4\}=\sum_{k=4}^{7}C_7^k(0.4)^k(0.6)^{7-k}$

≈ 0.290

故我们得到：第一种方案对弱队更有利一些。

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

二项分布——设备排障试验

例4：有300台独立运转的同类机床，每台发生故障的概率都是0.01，若一人排除一台的故障。问至少需要多少名工人，才能保证不能及时排除故障的概率小于0.01。

解：设X 表示同一时刻发生故障的机床数,

$X\sim B(300,0.01)$。

配N 个工人，应使

$0.01>P\{X>N\}=1-P\{X\le N\}$

$=1-\sum_{k=0}^{N}C_{300}^k(0.01)^k(1-0.01)^{300-k}$

即是求上述不等式成立的最小N 值。

电子科技大学数学科学学院 杜鸿飞 hongfeidu@qq.com

因为300×0.01 = 3（此值很小），故可近似认为X服从λ为3 的泊松分布。即 $X \sim P(3)$。

于是 0.01 > $P\{X > N\} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3}$

查P381 的附表1 可得

$$P\{X \geq 8\} = 0.011905 > 0.01$$

$$P\{X \geq 9\} = 0.003803 < 0.01$$

思考：至少需要配备修理工人8个还是9 个？

至少需要配备8 个修理工人

结合X的含义可知，当有8个工人时，出故障的机床无人修理的概率小于0.01

泊松分布——宇宙粒子

已知运载火箭在飞行中,进入它的仪器舱的宇宙粒子数服从参数为λ的泊松分布.而进入仪器舱的每个粒子落到仪器的重要部位的概率等于p,试求恰有k个粒子落到仪器重要部位的概率.

分析：粒子落到仪器重要部位的试验是由前后相关联的两个试验所组成：

第一个试验是宇宙粒子进入仪器舱，进入的粒子数服从泊松分布；

再是进入仪器舱的这些粒子落到仪器舱重要部位，其数目服从二项分布；

这类问题可用全概率公式求解。

解：从第一个试验入手，划分样本空间。

设 X表示宇宙粒子进入仪器舱的个数。

由题设X~P(λ) 即

$$P\{X=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \quad ,m=0,1,2,....$$

显然 {X=m} ,(m=0,1,2,..)构成样本空间的一个划分

（回忆：样本空间的有限划分如何定义？）

设 Y表示落到重要部位的粒子数，由题意知

$$P\{Y=k|X=m\}=C_m^k p^k(1-p)^{m-k}, \quad k=0,1,2,....,m$$

由全概率公式得所求概率为

$$P\{Y=k\}=\sum_{m=o}^{+\infty}P\{X=m\}P\{Y=k|X=m\}$$

$$=\sum_{m=o}^{+\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} * C_m^k p^k(1-p)^{m-k} \qquad (m \geq k)$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-k}(1-p)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$\underline{\underline{n=m-k}} \quad \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda} * e^{\lambda(1-p)}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p} \qquad k=0,1,2,....$$

落到仪器重要部位的粒子数服从参数为λp 的泊松分布。