



赵燕江

## 基于 Matlab 的机器人工作空间求解方法

赵燕江 张永德 姜金刚 邵俊鹏

(哈尔滨理工大学 机械动力工程学院 哈尔滨 150080)

**摘 要:** 在对现有的机器人工作空间求解方法对比研究的基础上,提出了一种新的基于 Matlab 的机器人工作空间求解方法——仿真法,利用 Matlab/Simulink 中的 SimMechanics 工具箱,根据机器人的结构进行建模,利用仿真的形式跟踪手臂末端轨迹,并记录其末端点到达的位置坐标,绘制和计算出机器人工作空间。此求解方法克服了传统方法中对机器人运动学正、反解求解的弊端,也克服了利用极限理论编程运算的复杂。笔者将仿真法与蒙特卡洛法进行比较,结果证明仿真法得到的工作空间,不论是求解速度、图形效果还是数值计算结果均优于蒙特卡洛法。

**关 键 词:** 灵巧手; 工作空间; Matlab; 仿真法; 蒙特卡洛法

中图分类号: TP242

文献标识码: A

文章编号: 1003-8728(2009)12-1657-05

## A Method for Solving Robot Workspace Based on Matlab

Zhao Yanjiang, Zhang Yongde, Jiang Jin'gang, Shao Junpeng

(School of Mechanical and Power Engineering, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080)

**Abstract:** On the basis of analysis and comparison of existing methods for solving robotic workspace, we put forward a new method named simulation method based on Matlab software. This method utilizes the SimMechanics toolbox in Simulink in Matlab software to establish structural model, and records the coordinates of the arm tip in simulation. Then, the robotic workspace is drawn and calculated. This method avoids positive and inverse kinematics solutions, and overcomes the complex program based on limitation theory. We also compare the simulation method with the Monte-Carlo method. Result shows that the simulation method is superior to the Monte-Carlo method not only in sloving speed, but also in figure effect and numerical calculation of the workspee. In addition, this method is practical, and it integrates computation and simulation.

**Key words:** dexterous hand; workspace; Matlab; simulation method; Monte-Carlo method

机器人工作空间的大小代表了机器人的活动范围,它是衡量机器人工作能力的一个重要运动学指标<sup>[1]</sup>。在机器人的优化设计、控制及应用过程中,工作空间都是一个需要考虑的重要问题。机器人的工作空间定义为:不同关节运动所达到的末端执行器的所有位置的集合,该集合称为可达工作空间<sup>[2]</sup>。

目前,机器人工作空间的求解方法主要有解析法、图解法以及数值法<sup>[2,3]</sup>。解析法是通过多次包

络来确定工作空间边界,但其直观性不强,十分繁琐,一般只适用于关节数少于 3 个的机器人<sup>[4,5]</sup>。图解法求解的工作空间边界,得到的是工作空间的各类剖截面或者剖截线,这种方法直观性强,但是也受到自由度数的限制,当关节数较多时必须进行分组处理<sup>[6,7]</sup>。数值法是以极值理论和优化方法为基础的,计算机器人工作空间边界曲面上的特征点,构成边界曲线,再构成边界曲面。具有代表性的成果有搜索法、迭代法和蒙特卡洛法<sup>[8~10]</sup>。另外,文献[11]中提出的方法也应属在数值法之列。但此方法的运算量非常大,还需要进行运动学正解运算。笔者介绍一种仿真法求解机器人工作空间,不但可以省去运动学运算,还可以提高运算速度,数据更合理,图像效果更好。

收稿日期:2008-08-04

基金项目:黑龙江省教育厅科技计划项目(10541055)资助

作者简介:赵燕江(1979-),博士研究生,研究方向为多指灵巧手,医疗机器人 zhaoyj@hrbust.edu.cn;张永德(联系人),教授,博士 zhangyd@hrbust.edu.cn

1 仿真法的基本原理和方法

利用 Matlab/Simulink 中的 SimMechanics 工具箱 根据机器人的机构简图 ,对机器人结构进行建模 ,进行运动仿真。跟踪仿真过程中的手臂末端轨迹 ,同时记录其末端点到达的位置坐标 ,输出到 Matlab 主界面的 Workspace 中。采集完数据后 ,返回 Matlab 主界面 ,进行后续的数据处理 ,如绘制机器人工作空间的三维图形等。

机器人工作空间的求解步骤如下:

- (1) 建立机器人的机构简图 ,确定各关节转角范围。
- (2) 根据机器人的机构简图 ,在 SimMechanics 中对机器人结构进行建模。
- (3) 在各关节施加不同的驱动信号 ,产生不同的转角组合 ,实现末端的位置集合 ,并使用位置传感器来记录各坐标数据。
- (4) 仿真并自动记录各坐标数据。
- (5) 数据的后处理。

2 工作空间图形的求解

现以排牙多指灵巧手为例 ,对其单个手指的工作空间进行计算。此多指灵巧手为 3 指 9 自由度的灵巧手 ,3 个手指的结构参数完全一致 ,各关节长度分别为  $l_1$ 、 $l_2$ 、 $l_3$  ,如图 1 所示。这样 ,为了求得多指灵巧手的工作空间 ,可先求得单指的工作空间。

2.1 单指机构简图及关节参数

根据排牙多指手的结构 ,建立单个手指的机构简图 ,如图 2 所示。 $l_1$ 、 $l_2$ 、 $l_3$  分别表示 3 个关节的杆长  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  分别表示 3 个关节的旋转角度。

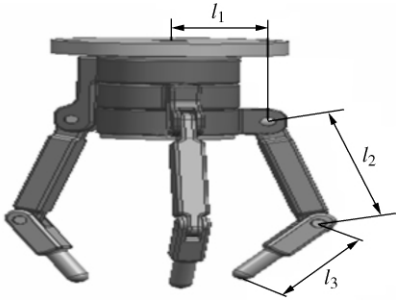


图 1 三指灵巧手三维模型

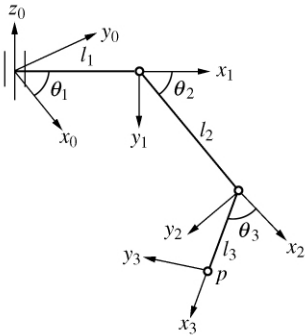


图 2 单个手指的机构简图

根据设计要求 ,单个手指各连杆及关节参数 ,见表 1。

表 1 单个手指连杆及关节参数

$l_1$	$l_2$	$l_3$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
20	14	10	$[-\pi, \pi]$	$[0, 3\pi/4]$	$[0, 3\pi/4]$

2.2 单个手指在 Matlab 中结构建模

根据机器人的机构简图 ,在 SimMechanics 中对单个手指的结构进行建模 ,如图 3 所示。

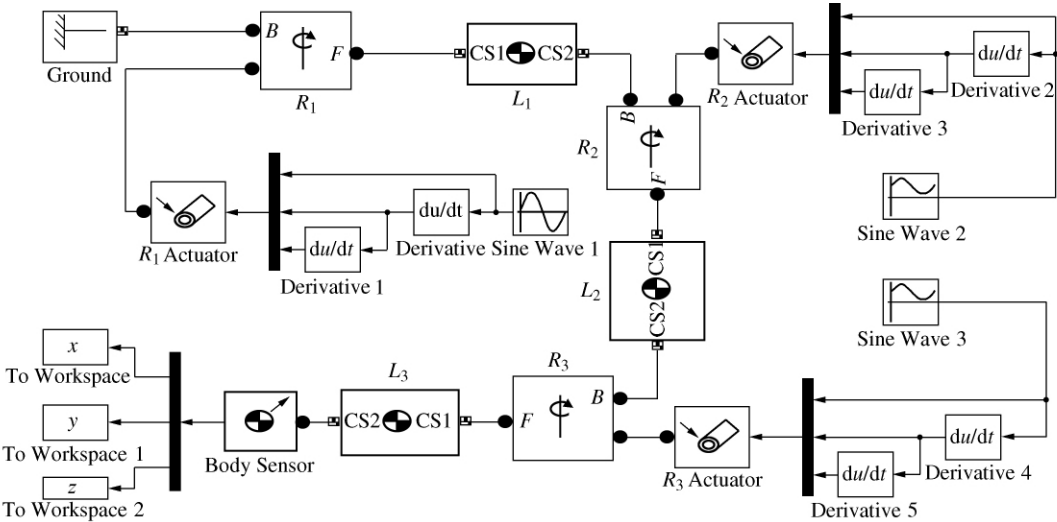


图 3 单个手指的结构建模

SimMechanics 模型主要由一个地模块、3 个转动关节模块、3 个驱动模块、3 个刚体模块和一个传感器模块组成。地( Ground) 表示固定机座; 转动关节  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R_3$  表示机器人的 3 个转动关节; 驱动  $R_1$  Actuator、 $R_2$  Actuator、 $R_3$  Actuator 分别驱动 3 个关节; 刚体  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  代表杆 1、杆 2、杆 3; 传感器( Body Sensor) 记录手指末端所到达的坐标。

关节模块, 需要设置各关节的转轴; 驱动模块, 需要在各关节施加不同的驱动信号, 这里我们选择正弦信号, 根据表 1 中给出的  $\theta$  范围, 改变其幅值和偏移量, 使其满足各关节的转角范围。并改变各正弦信号的频率或相位角以使得产生不同的关节角的变量组合; 刚体模块, 需要根据表 1 中给出的  $l$  值, 设置质量、转动惯量和初始位置; 传感器模块, 利用位置传感器跟踪仿真过程中的手指末端到达的位置, 并把数据返回到 Matlab 主界面的 Workspace 中, 以便后续的数据处理。

2.3 工作空间图形的生成

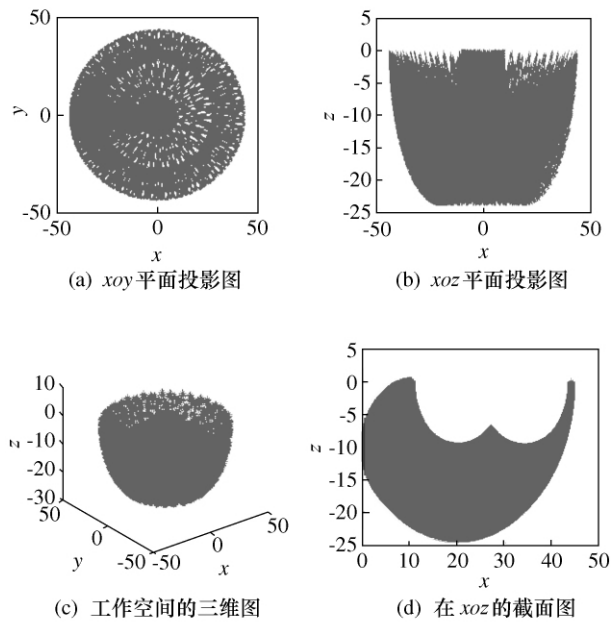


图 4 仿真法求得灵巧手单指工作空间

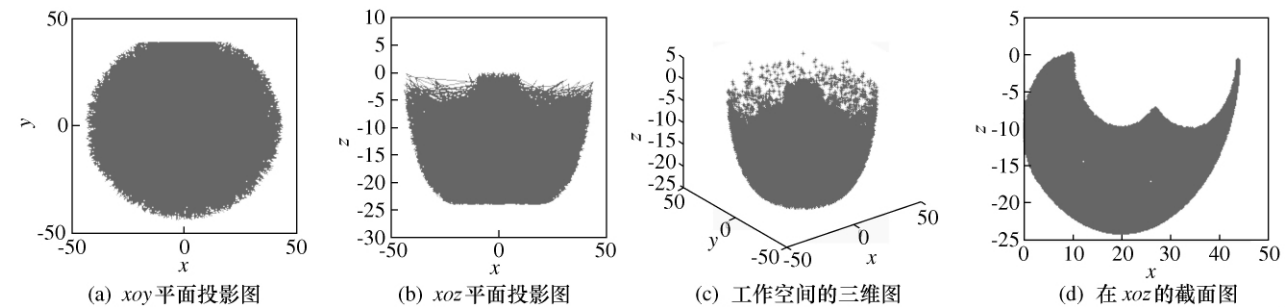


图 5 坐标点为 2 万点时工作空间的效果图

仿真停止后, 各坐标数据已经返回到 Matlab 主界面的 Workspace 中, 再调用 `plot( x ,y )`、`plot( x ,z )` 和 `plot 3( x ,y ,z , ' * ' )` 命令, 分别绘制出灵巧手单指工作空间的  $xoy$  平面投影图、 $xoz$  平面投影图和三维图, 如图 4( a) ~ 图 4( c) 所示。

为了求灵巧手工作空间的  $xoz$  平面的截面图, 我们可以把第一个关节  $R_1$  的驱动信号 Sine Wave 1 的幅值设置为 0, 重新仿真, 这样手指就只会在  $xoz$  平面内运动, 此时利用所得数据, 执行 `plot( x ,z , ' * ' )` 命令, 便会得到工作空间的  $xoz$  平面的截面图, 如图 4( d) 所示。

2.4 仿真法与蒙特卡洛法的工作空间图形比较

目前, 求解机器人工作空间用的较多的方法就是蒙特卡洛法, 它是利用随机抽样来求解数学问题的一种数值方法。其基本思想是: 机械手的各关节是在其相应取值范围内工作的, 当所有关节在取值范围内随机取值后, 末端点的所有随机值的集合就构成了机械手的工作空间。根据图 2 进行机器人运动学正运算可得末端点可达的空间位置为

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c \theta_1 c \theta_{23} + l_2 c \theta_1 c \theta_2 + l_1 c \theta_1 \\ l_3 s \theta_1 c \theta_{23} + l_2 s \theta_1 c \theta_2 + l_1 s \theta_1 \\ - l_3 s \theta_{23} - l_2 s \theta_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

因此, 可取机械手各关节变量的随机值, 并将其代入运动学正解方程, 由此得到机械手末端点的三维坐标值。最后, 将这些三维坐标点输出到图形设备上, 得到机械手工作空间的仿真图形<sup>[3]</sup>。随机关节变量由下式求得

$$\theta_i = \theta_i^{\min} + ( \theta_i^{\max} - \theta_i^{\min} ) \times \text{Rand}( N, 1 ) \quad (2)$$

式中:  $\theta_i^{\min}$  为关节  $i$  转动范围的最小值;  $\theta_i^{\max}$  为关节  $i$  转动范围的最大值。

下面笔者将仿真法与蒙特卡洛法进行比较: 图 5、图 6 为蒙特卡洛法求得的灵巧手工作空间, 分别为坐标点为 2 万和 5 万点时工作空间的  $xoy$ 、 $xoz$  平面投影图、三维图和  $xoz$  截面图。而图 4 是用仿真法求得的灵巧手工作空间, 坐标点数为 2 万个。

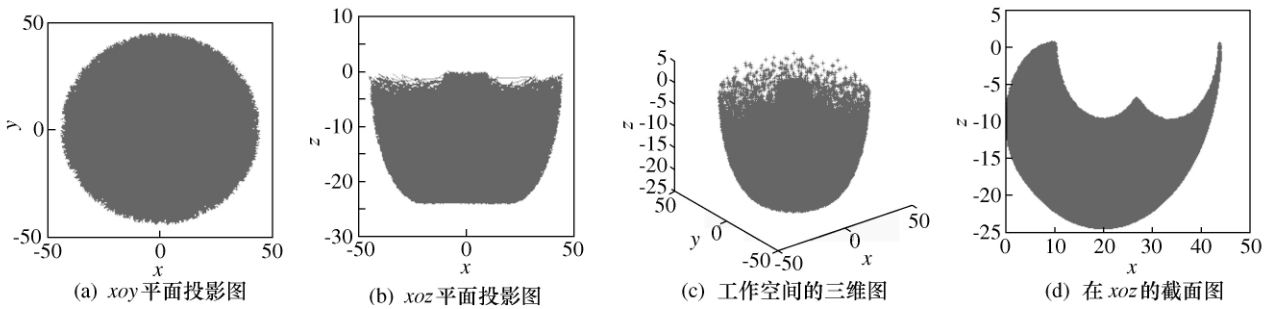


图6 坐标点为5万点时工作空间的效果图

从图形效果上看,图4的图形轮廓远比图5、图6的清楚,但前者的坐标点却远少于后者。分析原因是因为蒙特卡洛法是利用随机抽样组成转角组合来计算坐标点的,所以这些坐标点也是随机的,没有规律的,因而边界轮廓就可能不是很清晰、完整;而仿真法是按照运动过程记录其坐标点,所以很容易得到边界点,这些坐标点有序的排布形成清晰、完整的轮廓。所以仿真法可以利用较少的坐标点而清晰、完整的表达出工作空间的形状和轮廓。

从用时上看,在相同环境下运行,仿真法用时3 s,蒙特卡洛法2万坐标点的用时35 s,而蒙特卡洛法5万坐标点的用时则为130 s,点数越多用时越长,但边界轮廓的清晰度却变化不大,如图5和图6所示。而仿真法处理多点坐标的速度影响不大。

### 3 工作空间面积的求解

得到工作空间的几何形状之后,就要求解工作空间的面积。面积的求解是非常重要的,简单而准确的求面积的方法对于机构的优化设计具有重要的价值。为了便于比较,首先采用图解方法求解工作空间的面积<sup>[6]</sup>。然后以此为标准,比较仿真法与蒙特卡洛法求得的工作空间。

#### 3.1 解析法求工作空间面积

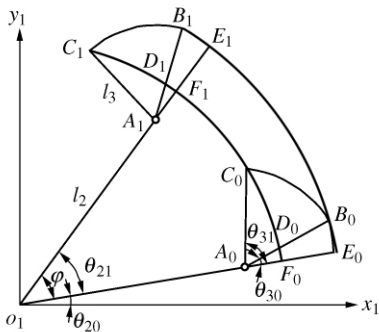


图7 双杆灵巧手工作空间

由于本灵巧手在  $xoz$  平面内的工作空间可抽象

为由杆  $l_2$  和  $l_3$  组成的双杆机械手,所以相当于求双杆机械手工作空间。如图7所示,中间关节  $O_1A$  长  $l_2$ 、与  $x$  轴夹角  $\theta_2$ ,末端关节  $AB$  长  $l_3$ 、与  $O_1A$  夹角  $\theta_3$ 。

设中、末关节旋转界限角分别为  $\theta_{i0}、\theta_{i1} (i = 2, 3)$ ,以  $O_1$  为圆心,分别以  $O_1B_0、O_1C_0$  为半径画  $\varphi$  弧度的圆弧  $B_0B_1、C_0C_1$ 。末端  $B$  工作范围为圆弧  $B_0B_1、B_1C_1、C_1C_0、C_0B_0$  所包围的面积  $S$ 。将弧  $B_1B_0、C_1C_0$  延长至  $O_1A$  延长线交于  $E_0、F_0$ 。由几何关系可得  $B_0C_0D_0$  与  $B_1C_1D_1$ ,  $B_0D_0F_0E_0$  与  $B_1D_1F_1E_1$  面积分别相等,故得到  $B_0B_1C_1C_0$  与  $E_0E_1F_1F_0$  面积相等。故灵巧手工作空间面积

$$S = \frac{1}{2} | \theta_{21} - \theta_{20} | (O_1B_0^2 - O_1C_0^2) = \varphi | \cos\theta_{30} - \cos\theta_{31} | l_2 l_3 \quad (3)$$

通过表1的数据计算工作空间面积  $S = 563.1186 \text{ mm}^2$ 。

#### 3.2 数值法求工作空间面积

笔者采用的方法为数值的近似算法,采用“按列划分”的方法<sup>[3]</sup>。考虑定积分

$$S = \int_a^b | f(x) - g(x) | dx \quad (4)$$

不论在实际问题中的意义如何,在数值上都等于曲线  $z_1 = f(x)$ ,  $z_2 = g(x)$  与直线  $x = a$ ,  $x = b$  所围成的曲边梯形的面积。因此,不管  $f(x)$ ,  $g(x)$  以什么形式给出,只要近似地算出相应的曲边梯形的面积,就得到所给定积分的近似值。对面积的近似计算方法可以采用线性逼近的方法,如:矩形法、梯形法,也可以采用非线性的近似方法如抛物线法或样条曲线法等<sup>[2]</sup>。但是考虑到计算的简单和快速,在这里采用了矩形来近似的计算工作空间面积。所谓矩形法就是把曲边梯形分成若干个窄曲边梯形,然后用窄矩形近似代替窄曲边梯形,从而求得所需的面积,如图8所示。近似算法的步骤如下:

(1) 在工作空间上的点集  $X[i]$  中,搜索  $x$  坐标的极值点,即  $x_{\max}$  和  $x_{\min}$ 。这两个点对应的直线即为工作空间的两条边界线  $a, b$ ,如图8中所示。

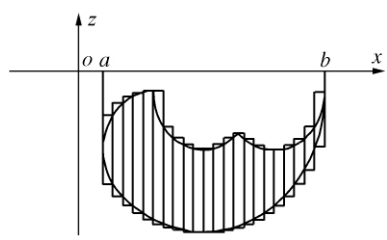


图 8 工作空间的矩形近似法

(2) 根据所需要的精度可以将工作空间沿该方向划分为若干列, 设为  $n$ , 则每一列的宽度为

$$\varepsilon = (x_{\max} - x_{\min}) / n \tag{5}$$

(3) 在每一个  $\varepsilon$  内搜索  $z$  坐标的极值。在计算每一个  $\varepsilon$  单元面积的时候, 要根据工作空间形状的不同, 考虑不同的计算方法。这里, 我们考虑两种情况

(a)  $\varepsilon$  内不存在空腔: 即笔者研究的工作空间, 如图 8 所示。此时只要求出  $z$  坐标的两个极值, 即  $z_{\max}$  和  $z_{\min}$  即可。 $\varepsilon$  宽度的近似矩形面积为

$$S_{\varepsilon} = \varepsilon (z_{\max} - z_{\min}) \tag{6}$$

(b)  $\varepsilon$  内存在空腔: 空腔把工作空间分成两个部分。此时需要求得每个部分的  $z$  坐标的极大极小值, 即  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , 如图 9 所示。 $z_1, z_4$  容易求得, 关键求  $z_2, z_3$ 。我们把该  $\varepsilon$  范围内所有  $z$  值由大到小排序。从  $z_1$  开始逐点判断两个相邻的点沿  $z$  方向的差值是

否大于某一个设定值, 这个值一般采用列宽  $\varepsilon$ 。如果大于该值, 则说明由  $A_1, A_2$  与  $A_3, A_4$  围成的区域内存在着空腔, 同时记录这两个相邻的点  $z_2, z_3$ 。则  $\varepsilon$  宽度的近似矩形面积为

$$S_{\varepsilon} = \varepsilon [(z_1 - z_2) + (z_3 - z_4)] \tag{7}$$

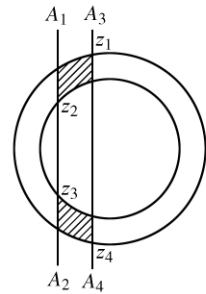


图 9 存在有空腔的工作空间

(4) 计算工作空间的总面积。总面积  $S$  为所有  $\varepsilon$  单元面积的总和

$$S_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n S_{\varepsilon i} \tag{8}$$

3.3 仿真法与蒙特卡洛法的工作空间面积比较

通过编制计算程序, 利用仿真法所得数据计算结果如表 2 所示。利用蒙特卡洛法所得数据计算结果如表 3 所示。

表 2 仿真法数据计算结果

$n$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
计算结果 ( $\text{mm}^2$ )	576.4 930	568.8 314	566.2 774	564.9 549	563.8 388	562.8 351	561.6 449	560.6 445	559.3 876	556.9 310
误差	2.38%	1.01%	0.56%	0.33%	0.13%	0.05%	0.26%	0.44%	0.66%	1.10%

表 3 蒙特卡洛法数据计算结果

$n$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
计算结果 ( $\text{mm}^2$ )	569.3 259	559.8 586	554.9 452	551.2 307	547.0 965	543.2 382	538.1 987	536.5 261	531.8 912	527.0 196
误差	1.10%	0.58%	1.45%	2.11%	2.85%	3.53%	4.43%	4.72%	5.55%	6.41%

由表 2 可以看出, 利用仿真法所得数据当划分列数在 600 附近时, 计算结果最接近理论值, 而且列数在 300 至 900 之间时, 计算的误差均小于 1%, 误差的差别不大。由表 3 可以看出, 利用蒙特卡洛法所得数据当划分列数在 200 附近时, 计算结果最接近理论值, 而且划分列数不同所引起的误差变化很大。这说明利用仿真法所得工作空间的边缘轮廓要

比利用蒙特卡洛法所得工作空间的边缘轮廓更完整、更准确。因为在划分列数很多, 即划分列单元很小时, 只有在边缘轮廓完整、准确的情况下, 才能保证所得计算结果接近理论值。这也说明利用仿真法所得数据要比利用蒙特卡洛法所得数据更合理。

( 下转第 1666 页)

图 3(d) 表明,在对开路面上制动时,EBD 分级控制能够在制动初期(约为  $0 \sim 0.3$  s)使左前、右后轮的轮速变化趋势一致,可避免因为左右路面摩擦力差异引起的某车轮先抱死现象。

图 3(e) 表明,在右转弯制动初期(约为  $0 \sim 0.3$  s),EBD 分级控制能够使得汽车左右轮轮速变化规律一致,减少了由于离心力作用使得右侧摩擦力减小而致使右(后)轮提前抱死的可能性。

#### 4 结论

EBD 分级控制能够在 ABS 控制起作用前协调整车制动力分配,充分利用了车轮和地面之间的附着力,让各轮的抱死趋于一致而具有良好的整车制动平稳性,是一种较为有效的新的 EBD 控制方法,可解决整车制动力分配问题。它抓住了汽车制动初期的本质特征,只需要检测 4 个车轮的轮速,不需要精确的汽车制动动力学模型,降低了模型的不确定性对 EBD 系统的影响,可提高开发效率。

#### [参考文献]

- [1] 余志生. 汽车理论 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007
- [2] Nakazawa M, Isobe O. Braking force distribution control for improved vehicle dynamics and brake performance [J]. *Vehicle System Dynamics*, 1995, 24: 413 ~ 426
- [3] 胡学英. 基于 ABS 的 EBD 控制技术的仿真研究 [D]. 北京: 中国农业大学, 2006
- [4] Wang G Y, Liu Z D, Ma Y F. Electronic brake-force distribution control methods of ABS-equipped vehicles during cornering braking [J]. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2007, 16(1): 34 ~ 37
- [5] 程军. 汽车防抱死制动系统的理论与实践 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1999
- [6] 陈炯, 王会义, 宋健. 基于滑移率和减速度的 ABS 模糊控制仿真研究 [J]. *汽车工程*, 2006, 28(2): 148 ~ 151
- [7] 李士勇. 模糊控制·神经控制和智能控制论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1998
- [8] Donghyun K, Hyunsoo K. Vehicle stability control with regenerative braking and electronic brake force distribution for a four-wheel drive hybrid electric vehicle [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 2006, 220(6): 683 ~ 693

(上接第 1661 页)

#### 4 结论

笔者在对比研究机器人工作空间的现有求解方法的基础上,提出了仿真法求解机器人工作空间。对排牙多指灵巧手进行了工作空间图形和面积的求解。并比较了仿真法与蒙特卡洛法所得的工作空间,结果表明,不论是求解速度、图形效果还是数值计算结果,仿真法均优于蒙特卡洛法。仿真法所得的数据更合理,所得工作空间边缘轮廓更完整、准确,图像更清晰。而且此求解方法克服了传统方法中对机器人正、反解求解的弊端,也克服了利用极限理论编程运算的复杂。此方法不但适用于转动关节的机器人,对移动关节的机器人也同样适用,尤其对用解析方法难以描述的高冗余度的机器人、并联机器人工作空间以及多臂机器人的公共有效工作空间优势尤为明显。

#### [参考文献]

- [1] 刘敏娟, 崔建昆. 手指可达工作空间的三维建模 [J]. *上海理工大学学报*, 2006, 28(1): 95 ~ 98
- [2] 曹毅, 李秀娟, 宁祎等. 三维机器人工作空间及几何误差分析 [J]. *机械科学与技术*, 2006, 25(12): 1458 ~ 1502
- [3] 崔玉洁, 张祖立, 范磊. 基于蒙特卡洛方法的采摘机械手工作空间分析 [J]. *农机化研究*, 2007, 12: 62 ~ 64
- [4] 赵献丹, 何庆中, 刘明等. 基于 MATLAB 的微电驱串联机械手工作空间域解算与仿真 [J]. *四川理工学院学报*, 2006, 19(5): 5 ~ 8
- [5] Xu W F, Li L T, Liang B, et al. Workspace analysis of space 3R robot [J]. *Journal of Astronautics*, 2007, 28(5): 1389 ~ 1394
- [6] 谭朝阳. 机械手工作空间分析 [J]. *机械*, 2003, 30(3): 15 ~ 17
- [7] 郭立, 高文杰. 卫生陶瓷施釉机器人工作空间的研究 [J]. *机床与液压*, 2007, 35(6): 29 ~ 32
- [8] Diao X M, Ou M. Workspace analysis of a 6-DOF cable robot for hardware-in-the-loop dynamic simulation [A]. *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* [C], IROS, 2006: 4103 ~ 4108
- [9] Piao M B, et al. Research on workspace of a two-arm surgical robot [A]. *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation* [C], 2007
- [10] 傅绍文, 姚郁. 六自由度 Stewart 平台四维工作空间搜索方法 [J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2007, 39(1): 11 ~ 13
- [11] 钟勇, 朱建新. 一种新的机器人工作空间求解方法 [J]. *机床与液压*, 2004, 4(4): 66 ~ 67
- [12] 曹毅, 王树新, 李群智. 基于随机概率的机器人工作空间及其面积求解 [J]. *制造业自动化*, 2005, 27(2): 23 ~ 29