

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO TECNOLÓGICO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

LUAN HENRIQUE SIRTOLI

**SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALOR ESPECIAL GERADO PELA
FORMULAÇÃO AUTORREGULARIZADA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA AUTORREGULARIZADO**

VITÓRIA-ES

2020

LUAN HENRIQUE SIRTOLI

**SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALOR ESPECIAL GERADO PELA
FORMULAÇÃO AUTORREGULARIZADA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA AUTORREGULARIZADO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Espírito Santo, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

VITÓRIA-ES

2020

FICHA CATALOGRÁFICA

Sirtoli, Luan Henrique

Solução de um problema de autovalor especial gerado pela
formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno
com Interpolação Direta

Luan Henrique Sirtoli. – 2020.

Páginas 74 f.:il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro tecnológico,
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Vitória,
2014.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

1.MEC 2. MECID 3. MECDR 4. MEF 5. Poisson 6. Helmholtz

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALOR ESPECIAL GERADO PELA
FORMULAÇÃO AUTORREGULARIZADA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTOURNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA AUTORREGULARIZADO**

Luan Henrique Sirtoli

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto – Orientador

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Dr. Eng. André Bulcão - Examinador externo

Centro de Pesquisas da Petrobras – CENPES

Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara - Examinador interno

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Dr. Hércules de Melo Barcelos - Examinador externo

Instituto Nacional de Metrologia – INMETRO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Vitória (ES), 31 de Julho de 2020.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a nosso senhor Jesus Cristo, que permitiu e forneceu a força necessária para enfrentar os obstáculos encontrados durante minha caminhada, e manteve todos aqueles que estão próximos a mim saudáveis, apesar da pandemia.

Agradeço também ao professor Dr. Carlos Friedrich Loeffler, que sem os seus ensinamentos, sem seu absurdo conhecimento da engenharia mecânica, e sem puxões de orelha em seu escritório, este trabalho não teria sido possível. Agradeço seu apoio sempre presente e seus direcionamentos, que não só aumentaram a qualidade deste trabalho, mas também a minha melhor formação como engenheiro.

Também agradeço à minha família, em especial aos meus pais, Sandramar Franzin Soares e Mario Sergio Ribeiro Soares, que sempre deram de tudo para me educar e me apoiaram sempre em minhas escolhas; À minhas irmãs Nathalia, Marina, e à minha namorada Emanuely, que sempre estiveram ao meu lado nos momentos difíceis e me deram forças para sempre continuar.

Agradeço à Universidade Federal do Espírito Santo, em particular aos professores e funcionários do programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica que sempre estiveram presentes e deram apoio quando foi necessário.

RESUMO

O presente trabalho objetiva solucionar um problema de autovalor obtido após o desenvolvimento da Equação de Helmholtz na sua forma integral e posterior discretização seguindo a metodologia associada ao Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta. Visando remover o procedimento matemático de eliminação de singularidade baseado na Regularização de Hadamard, gerou-se uma nova equação integral a partir do uso de uma solução fundamental mais elaborada.

Contudo, a forma discreta desta formulação, denominada autorregularizada, gerou matrizes adicionais àquelas usualmente obtidas pelos métodos numéricos mais comuns. Diferentemente dos problemas de varredura, obtenção e resposta, em que a formulação mencionada apresentou bons resultados e fácil operacionalidade, o cálculo das frequências naturais torna-se bastante complexo e pouco ortodoxo, pois o problema de autovalor associado é de quarta ordem.

Assim, a solução deste tipo de problema requer uma abordagem diferente, onde será necessária uma manipulação matemática laboriosa e algumas aproximações. Neste contexto, destaca-se a generalização da Proposição de **Przemieniecky**, bem conhecida no tratamento de problemas de vibração amortecida, visando escrever a equação matricial numa forma acessível para sua resolução computacional.

PALAVRAS-CHAVE: Método dos Elementos de Contorno, Funções Radiais, Problemas de Campo escalar.

ABSTRACT

The present work aims to solve an eigenvalue problem obtained after the development of the Helmholtz Equation in its integral form and its later discretization following the methodology associated with the Direct Interpolation Boundary Elements Method. In order to eliminate the singularities eliminating mathematical procedure based on the Hadamard's Regularization, a new integral equation was generated based on the use of a more elaborate fundamental solution.

However, the discrete form of this formulation, named self-regulated form, generated matrices in addition to those usually obtained by the most common numerical methods. Unlike the response problems that are solved by a scanning, in which the mentioned formulation presented good results and easy operation, the calculation of natural frequencies now becomes quite complex and unorthodox, as the associated eigenvalue problem becomes a fourth order problem.

Thus, solving this type of problem requires a different approach, where laborious mathematical manipulation and some approximations will be necessary. In this context, the generalization of the Przemieniecky Proposition stands out, because it is well known in the treatment of damped vibration problems, aiming to write the matrix equation in an accessible form for its computational resolution.

KEYWORDS: Boundary Element Method, Radial Functions, Scalar Field Problems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Chapa engastada em uma extremidade e livre nas outras extremidades.	53
Figura 2 - Membrana retangular totalmente fixada. Fonte: Autoria própria.	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados da Interpolação da Função Radial Simples	55
Tabela 2 - Resultados da Interpolação da Função Log de Engaste	56
Tabela 3 - Resultados da Interpolação da Função Radial Simples	58

LISTA DE SIMBOLOS

u – Potencial

q – Derivada normal do Potencial

X – Ponto geométrico genérico

ξ – Ponto fonte

α – Ângulo da curva não suave em radianos

$u^*(\xi; X)$ – Solução fundamental

$q^*(\xi; X)$ – Derivada normal da solução fundamental

$c(\xi)$ – Coeficiente da posição do ponto ξ

Ω – Domínio físico

Γ – Contorno do domínio físico

H – Matriz de energia

G – Matriz de fluxo

M – Matriz de inércia

K – Propriedade difusiva ou rigidez

ρ – Propriedade de inércia

$U(X, t)$ – Potencial com conteúdo temporal

$r(\xi; X)$ - Distância euclidiana

F^j – Função radial de interpolação

X_j – Pontos base

ψ_j – Função primitiva

ξ_{α^j} – Valores correspondentes à função de interpolação

$\xi \Lambda_i$ – Matriz diagonal

ω – Frequência

ω_n – Frequência natural

∇ – Operador laplaciano

LISTA DE ABREVIATURAS

EDP – Equação Diferencial Parcial

FORTTRAN – IBM Mathematical Formula Translation System

GPS – Global Positioning System

MDF – Método das Diferenças Finitas

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MEF – Método dos Elementos Finitos

MVF – Método dos Volumes Finitos

MECDR – Método de Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade

MECID – Método de Elementos de Contorno com Interpolação Direta

TA – Termo Advectivo

TD – Termo Difusivo

~~**UFES** – Universidade Federal do Espírito Santo~~

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. OBJETIVO.....	2
1.2. ESTADO DA ARTE	3
2. BASE TEÓRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC).....	7
2.1. INTRODUÇÃO.....	7
2.2. PROBLEMAS DE CAMPO ESCALAR	7
2.2.1. DEFINIÇÃO	7
2.2.2. APLICAÇÕES	8
2.3. A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ.....	8
2.3.1. INTRODUÇÃO	8
2.3.2. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ	9
2.4. FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO 10	
2.4.1. INTRODUÇÃO	10
2.4.2. TRATAMENTO DO TERMO DIFUSIVO DA EQUAÇÃO de HELMHOLTZ....	12
2.5. FORMULAÇÃO MECID REGULARIZADA ATRAVÉS DO TRATAMENTO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ	16
2.5.1. INTRODUÇÃO	16
2.5.2. TRATAMENTO DO TERMO REATIVO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ....	17
2.5.3. DETERMINAÇÃO DA MATRIZ ALFA.....	22
2.5.4. OPERACIONALIZAÇÃO DO TERMO NO DOMÍNIO	23
2.6. A FORMULAÇÃO MECID AUTORREGULARIZADA APLICADA À PROBLEMAS DE HELMHOLTZ.....	27
3. FORMULAÇÃO MECID AUTORREGULARIZADA PARA PROBLEMAS DE AUTOVALOR.....	35
3.1. INTRODUÇÃO.....	35

3.2.	EQUACIONAMENTO DO MÉTODO	35
3.2.1.	ABORDAGEM PARA SOLUÇÃO DA INVERSA DE DUAS MATRIZES	36
3.2.2.	ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA SOLUÇÃO DA INVERSA DE DUAS MATRIZES	38
3.3.	PROPOSIÇÃO DE PRZEMIENIECKY	44
3.4.	ANALOGIA DA PROPOSIÇÃO DE PRZEMIENIECKY	47
4.	SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS.....	53
4.1.	CHAPA ENGASTADA	53
4.2.	MEMBRANA QUADRADA	57
5.	CONCLUSÕES	59
6.	REFERÊNCIAS	60
ANEXO A	- CÁLCULO DA DERIVADA DIRECIONAL DA FUNÇÃO DE GALERKIN	66

1. INTRODUÇÃO

A necessidade de solucionar problemas através de métodos numéricos se mostra atualmente algo bastante comum dentro da Engenharia, devido ao diverso e extensivo uso que é feito de soluções numéricas, quer seja nos estudos realizados na academia ou nas diversas possibilidades de aplicação prática demandados por problemas cada vez mais elaborados.

Estes diversos métodos desenvolvidos para resolução de problemas são aplicados constantemente em diversos campos da Engenharia, como por exemplo, Mecânica, Civil, Elétrica, entre outras.

Dentro deste contexto, diversos métodos se destacam devido sua grande gama de aplicações ou sua alta eficiência e confiabilidade. Alguns desses métodos numéricos são:

- Método dos Elementos Finitos (MEF) (Hrennikoff 1941), (Courant 1943)
- Método das Diferenças Finitas (MDF) (Forsythe e Wasow 1960)
- Método dos Volumes Finitos (MVF) (Eymard, Gallouët e Herbin 2000)
- Método dos Elementos de Contorno (MEC) (C. A. Brebbia 1978)

Para dar seguimento ao desenvolvimento dos métodos numéricos, e consequentemente, na evolução da engenharia, este trabalho busca contribuir com os avanços na pesquisa do Método dos Elementos de Contorno. Este método surgiu em meados da década de 70, (C. A. Brebbia 1978), (Brebbia e Walker 1980) (Brebbia e Dominguez 1994), e apesar de atingir um grande uso na atualidade, o MEC ainda perde muito em popularidade para o MEF, porém vem com o tempo ganhando cada vez um espaço maior.

Assim como os demais métodos apresentados acima, o MEC permite lidar com problemas de natureza física diversa, ou seja, é um método versátil. Pode-se ressaltar que possui uma boa precisão em comparação aos demais métodos citados e permite uma entrada de dados mais simples para suas modelagens.

Por fundamentar-se apenas na discretização do contorno, é possível apontar vantagens em relação às chamadas “técnicas de domínio”, como a mais fácil manipulação da entrada de dados, abordagem de problemas de fronteira móvel, problemas de fratura e meios infinitos e semi-infinitos. Por outro lado, as matrizes utilizadas no MEC, embora menores, não são

simétricas e não são esparsas, o que resulta em maior custo computacional, especialmente para grandes aplicações.

O MEC apresenta ainda vantagens de menor importância, como a melhor representação de concentração de ações (tensões e gradientes de outras grandezas em geral) e o cálculo simultâneo da variável básica e sua derivada.

1.1. OBJETIVO

Este trabalho dá continuidade a um conjunto de pesquisas empreendidas no âmbito da UFES e já publicadas em diversos periódicos especializados, buscando desenvolver o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (C. A. Brebbia 1978). Tais trabalhos, como este, visam tornar o campo de aplicação do MEC mais amplo, superando algumas de suas limitações no trato de integrais de domínio, que sempre se constituiu num grande desafio para a técnica.

Para alcançar este objetivo, duas vertentes se destacam: o Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (MECDR), (C. F. Loeffler 1988) e (Partridge, Brebbia e Wrobel 1992) e o Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta (MECID) (Loeffler, Barcelos e Mansur 2015) e (Loeffler, Cruz e Bulcão 2015). Ambos os métodos se enquadram como formulações que aplicam funções de base radial como recurso auxiliar.

As funções de base radial têm ganhado importância nos últimos anos devido a sua aplicação nas modernas formulações do Método dos Elementos Finitos, denominadas “meshless”. Contudo, já são usadas há várias décadas com o MEC.

Tais funções permitem escrever as equações integrais do MEC tão somente em termos de integrais de contorno. A MECID, mais recente, quando aplicada aos problemas de Helmholtz (Butkov 1988) se ramifica em duas vertentes, a formulação regularizada (Loeffler and Mansur 2017) e a formulação autorregularizada (Loeffler, Galimberti and Barcelos 2018).

Assim, considerando os bons resultados da formulação autorregularizada da MECID em suas aplicações aos problemas de resposta, ou seja, fazendo uma varredura em frequência (Loeffler, Galimberti and Barcelos 2018) e (Galimberti 2018), governados pela Equação de Helmholtz, objetivou-se elaborar matematicamente um modelo bidimensional autorregularizado adequado para calcular as frequências naturais associadas. Contudo, a forma autorregularizada gerou matrizes adicionais, que resultaram num problema de

autovalor de quarta ordem ou quarto grau, como demonstrado em (Galimberti 2018), com grande complexidade.

Portanto, o objetivo desta dissertação consiste exatamente em realizar um tratamento matemático adequado que permita escrever matricialmente o problema de autovalor de quarta ordem numa forma acessível e posteriormente obter sua solução computacional.

Para alcançar este objetivo, este trabalho irá demonstrar toda a base teórica do desenvolvimento do MEC, explicitando a MECID regularizada e MECID autorregularizada até problema de autovalor encontrado por (Galimberti 2018). Tal problema de autovalor será o ponto de partida do desenvolvimento deste trabalho, onde, espera-se o desenvolvimento de um tratamento matemático que possibilite a resolução deste problema de autovalor de quarta ordem com maior facilidade, buscando manter a precisão de cálculo do MECID.

1.2. ESTADO DA ARTE

A popularização do Método de Elementos de Contorno na Europa, no Brasil e mesmo na Ásia se deve, sobretudo, aos trabalhos de Brebbia na Universidade de Southampton a partir de 1976, que culminou em seu bem difundido livro (C. A. Brebbia 1978). Trabalhos anteriores foram feitos nos Estados Unidos por (Rizzo 1967), (Cruse 1973) e (Banerjee 1994), porém não obtiveram o devido impacto na comunidade científica, apesar da relevância destas pesquisas.

Fundamentados no tipo de formulação apresentado por Brebbia, diversos pesquisadores conseguiram obter diversos resultados prósperos e resolveram importantes problemas da engenharia, sobretudo nas áreas de Engenharia Civil e Engenharia Mecânica.

Alguns destes autores, que também foram de suma importância para o desenvolvimento do MEC até os dias atuais são: Telles e Wrobel (Brebbia, Telles e Wrobel 1984), Partridge (Partridge, Brebbia e Wrobel 1992), Ramachandran (Ramachandran 1994), Aliabadi (Aliabadi e Wrobel 2002) e Kythe (Kythe 1995) e Banerjee (Banerjee e Butterfield 1981). Tais pesquisadores são destacados devido à suas publicações de livros importantes, que contribuíram para a difusão do MEC.

Particularmente, ao se tratar problemas governados pela Equação de Helmholtz, alguns trabalhos tiveram certa relevância e merecem maior destaque, pois contribuíram ao vencer barreiras na aplicação da Equação de Helmholtz no MEC. Estes avanços permitiram a maior

difusão do MEC na comunidade científica, e deram maior qualidade ao MEC. Alguns destes trabalhos de maior destaque são:

- A pesquisa de Kagami e Fukai, que demonstrou o desenvolvimento da Equação de Helmholtz através do MEC (Kagami e Fukai 1984);
- O trabalho de Colin abordou, com sucesso, a solução de problemas de Autovalores pela aplicação do MEC em 1991. (Collin 1991).
- Kagawa, Yonghao e Zaheed estudaram a equação escalar de Helmholtz no MEC a partir da Formulação Variacional. (Kagawa, Yonghao e Zaheed 1996)

Mesmo após estes avanços, ao longo de seu desenvolvimento, outras limitações foram encontradas pelo MEC. Uma das limitações mais importantes consiste na dificuldade de transformar, de modo geral, as integrais de domínio em integrais de contorno.

Para sobrepor tal limitação, Nardini e Brebbia propuseram a aplicação de funções de base radial na abordagem de certos problemas modelados com o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Tal modelo foi apresentado em 1983 por Brebbia e Nardini em (Nardini e Brebbia 1983) justamente para a solução do problema de autovalor em estruturas. Este modelo proposto consiste na substituição das funções pertencentes ao núcleo das integrais de domínio por uma combinação linear de um produto de novas funções, que são então operacionalizadas em termos de funções primitivas, permitindo a transformação das suas integrais de domínio em integrais de contorno (Partridge, Brebbia e Wrobel 1992).

A aplicação desta formulação se mostrou bem-sucedida em diversos problemas, com ressalva aos problemas que apresentam um operador linear com um termo não-homogêneo na equação de governo (Nardini e Brebbia 1983) .

Esta técnica foi então denominada formulação com Dupla Reciprocidade (MECDR). Apesar de diversas técnicas terem sido propostas para superar tais limitações, o MECDR ainda se mostrou a principal técnica devido à sua precisão frente à diversas outras.

Muitos aprimoramentos na MECDR foram propostos a partir de então como (Loeffler e Mansur 1988), (Loeffler e Mansur 1989) e (Loeffler e Mansur 2003). Na UFES, alguns trabalhos relevantes foram desenvolvidos como dissertações de mestrado de André Bulcão (Bulcão 1999), Carlos Andrés (Vera-Tudela 1999) e César Massaro (Massaro 2001).

Os problemas regidos pela equação de Helmholtz podem ser divididos em três grupos (Galimberti 2018), tais quais são:

- Problemas diretos, onde o objetivo é determinar as amplitudes da onda $u(X)$ em função de um conjunto de condições de contorno do problema. Tais amplitudes são configurações de equilíbrio do sistema em face de uma excitação conhecida e aplicada permanentemente.
- Problemas de autovalor, nos quais objetiva-se encontrar as frequências naturais associadas a configurações do sistema, em que forças de inércia e forças resistentes se auto equilibram na ausência de ações externas. Este mesmo conceito aplica-se aos problemas de Helmholtz, mas englobam problemas mais simples da elasticidade como casos de torção, deflexão de membranas e vibração de barras.
- Problemas inversos, onde as propriedades do meio constitutivo são determinadas em vista do conhecimento da resposta do sistema.

Diferentes metodologias ainda estão sendo pesquisadas e discutidas na literatura especializada em busca de gerar soluções numéricas que atinjam resultados satisfatórios e com maior eficiência para os Problemas Diretos e Problemas de Autovalor.

Alguns trabalhos foram desenvolvidos buscando solucionar os problemas **citado** acima, como em (Loeffler, Galimberti e Barcelos 2018) e (Loeffler, Barcelos e Mansur 2015), assim como este trabalho, que tem por foco atuar no Problema de Autovalor da Equação de Helmholtz. Tais trabalhos empenham-se em solucionar estes problemas, pois a literatura aponta que o Método dos Elementos de Contorno, devido às suas características, é a principal técnica para lidar com esta classe de problemas, especialmente os casos de domínio abertos (Seznec 1980), (Mallardo e Aliabadi 1998) e (Chandler-Wilde e Langdon 2007). Porém, no próprio contexto do MEC, ainda não há uma técnica dominante, que apresente melhor precisão e custo computacional acessível.

Assim, a partir de 2012, diversos estudos foram desenvolvidos no âmbito do programa de pós graduação em engenharia mecânica da UFES para a melhoria do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta. Este método é uma potente variante do MECDR, capaz de resolver problemas com uma formulação matemática mais simplificada.

Trabalhos notáveis neste método, que contribuíram largamente para o desenvolvimento deste trabalho são:

- Apresentação do MECID formalmente utilizando funções de base radial por (Cruz 2012);
- Apresentação de resultados favoráveis ao MECID em preferência ao MECDR à aplicação de problemas governados pela Equação de Poisson (Loeffler e Cruz 2013);
- Estudo de funções de Base radial plena e compacta em problemas de Poisson (De Souza 2013)
- A comparação da qualidade dos resultados apresentados pelo MECID com outros Métodos como Método dos Elementos Finitos em Problemas de Poisson e Helmholtz (Barcelos 2014)
- A apresentação do desenvolvimento matemático e avaliação da eficiência e viabilidade da aplicação de uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno (MEC), dependente da frequência para o tratamento aproximado do termo não homogêneo que caracteriza a Equação de Poisson (Pereira 2014).
- Formulação MECID regularizada, aplicada aos problemas Advectivo-difusivos (Pinheiro 2018);
- A avaliação e comparação de técnicas da formulação MECID em problemas de autovalor por (Frossard 2016);
- A formulação e desenvolvimento do MECID para a resolução de problemas de Helmholtz utilizando as funções de interpolação de base radial sem regularização (Galimberti 2018).

Este último trabalho é o ponto de partida do desenvolvimento desta pesquisa, devido ao problema de autovalor encontrado ao fim de sua formulação teórica, que se busca solucionar no desenvolvimento deste trabalho.

2. BASE TEÓRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

2.1. INTRODUÇÃO

Este Capítulo tem por objetivo explicitar e expor de forma sólida a formulação do Método dos Elementos de Contorno. Para tal, é válido ressaltar à existência de algumas variantes do MEC original, denominadas MECDR, e MECID. Ambas ~~essas~~ variantes, diferentemente do MEC clássico, fazem uso das funções de base radial para transformar integrais de domínio em integrais de contorno.

Destas duas variantes, pode-se selecionar o MECID e ramificá-lo em duas abordagens, sendo a formulação MECID regularizada e a formulação MECID autorregularizada. Para demonstrar o MEC e suas variações, será utilizada como base a Equação de Helmholtz, que se caracteriza como um Problema de Campo Escalar. Assim, este Capítulo irá discorrer sobre os Problemas de Campo Escalar e as Equações de Helmholtz, podendo assim, introduzir a base teórica do MEC e de suas ramificações.

2.2. PROBLEMAS DE CAMPO ESCALAR

2.2.1. DEFINIÇÃO

Por definição, um Problema de Campo Escalar é um problema físico associado à Teoria de Campo ou Teoria Potencial, que objetiva integrar problemas presentes na natureza segundo um mesmo enfoque matemático (C. F. Loeffler 1988), (Moon e Spencer 1971).

Para tais problemas, cada ponto discriminado e avaliado no domínio físico do problema em estudo é associado a uma variável escalar denominada potencial. Esta variável pode representar diversas grandezas, entre estas: Pressão, Temperatura, Deslocamento, Densidades de carga elétrica, entre outras grandezas físicas da natureza.

Assim, por determinar uma única quantidade da grandeza em cada ponto do espaço avaliado, estes problemas são denominados **Problemas de Campo Escalar**.

2.2.2. APLICAÇÕES

Conforme previamente definido, dá-se a entender que a Teoria de Campo é capaz de abordar todos os fenômenos físicos da natureza. Com destaque, (Brebbia e Ferrante 1975) apresenta uma lista de problemas físicos que estão inseridos na ideia de campo escalar:

- Proteção catódica;
- Condução de calor;
- Escoamento potencial;
- Fluxo através de meios porosos;
- Condução elétrica;
- Difusão de massa.

Os problemas de representação mais simples, típicos de mecânica dos sólidos, também podem estar associados nesta categoria, como os seguintes:

- Torção uniforme de barras prismáticas na zona elástica;
- Deflexão de membranas;
- Escoamento de lubrificantes em mancais de deslizamento;
- Propagação de ondas acústicas

2.3. A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

2.3.1. INTRODUÇÃO

Dentro dos Problemas de Campo Escalar uma se destaca, a Equação de Helmholtz. Esta equação pode representar com grande fidelidade uma vasta quantidade de problemas nas mais diversas áreas, como: a Física Quântica, a Química e o Eletromagnetismo.

Ao aplicar a Equação de Helmholtz na Mecânica, mais especificamente, na representação de problemas vibracionais, esta equação define as amplitudes das configurações estacionárias em que os efeitos da inércia e das propriedades constitutivas se auto

equilibram, diante da ação de uma excitação com frequência conhecida, como apresentado por (Barcelos 2014) e fundamentado por (Butkov 1988).



Esta Equação pode ser deduzida a partir da derivação da Equação de Helmholtz duas vezes em relação ao tempo e duas vezes em relação ao espaço, como será demonstrado no capítulo 2.3.2.

2.3.2. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Assim, partindo da Equação Diferencial de Onda Acústica (Gaul, Kögl e Wagner 2012) como foi definida abaixo, pode-se fazer a dedução da Equação de Helmholtz.

$$U_{,ii}(X, t) = \frac{1}{k^2} \ddot{U}(X, t) \quad 2.1$$

Na equação anterior $U(X, t)$ é a resposta espacial do sistema para qualquer excitação com o tempo e k é a velocidade de propagação da onda acústica, definida por:

$$k^2 = \frac{E}{\rho} \quad 2.2$$

Na equação anterior E é o módulo de elasticidade e ρ é a densidade do material onde a onda se propaga. Nesta análise vibracional, busca-se as configurações de equilíbrio que estão associadas as frequências naturais. Assim pode-se admitir que o movimento, como a soma de seus harmônicos é representada por:

$$U(X, t) = u(X) e^{i\omega t} \quad 2.3$$

Derivando a equação 2.3 duas vezes em relação ao tempo:

$$\ddot{U}(X, t) = -\omega^2 u(X) e^{i\omega t} \quad 2.4$$

Derivando novamente a equação 2.3 duas vezes em relação ao espaço (X):

$$U_{,ii}(X, t) = u_{,ii}(X) e^{i\omega t} \quad 2.5$$

Aplicando as equações 2.4 e 2.5 na Equação Diferencial de Onda Acústica 2.1, obtém-se:

$$u_{,ii}(X) e^{i\omega t} = -\frac{1}{k^2} \omega^2 u(X) e^{i\omega t} \quad 2.6$$

Simplificando:

$$u_{,ii}(X) = -\frac{\omega^2}{k^2} u(X) \quad 2.7$$

Assim, é obtida a Equação de Helmholtz, na forma de uma Equação Diferencial Parcial no espaço (EDP) e que não possui dependência com relação ao tempo, somente com o espaço.

2.4. FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

2.4.1. INTRODUÇÃO

O MEC pode ser classificado como um método contido no grupo de técnicas denominadas técnicas de contorno, que abrange desde problemas simples à problemas com maior

complexidade, discretizando tais problemas com uma formulação integral aplicada apenas no contorno do domínio estudado.

Isto posto, para melhor deduzir e apresentar de forma mais didática os princípios da formulação integral do MEC, pode-se aplicá-lo a um caso simples, como os problemas governados pela **Equação de Laplace**. Ressalta-se que tais problemas são compostos por um termo dito difusivo, que também compõe o problema de Helmholtz. Assim, de forma a iniciar a dedução do MEC, é introduzida tal equação em sua forma indicial, como exemplificada abaixo:

$$u_{,ii}(X) = 0 \quad 2.8$$

Baseando-se nessa equação, pode-se obter a formulação em forma de equações integrais, primeiramente, pela multiplicação de ambos os lados da equação 2.8 por uma função auxiliar $u^*(\xi; X)$, seguido pela integração deste resultado em todo o domínio físico $\Omega(X)$ do problema, obtendo assim:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X) u^*(\xi; X) d\Omega = 0 \quad 2.9$$

Esta forma integral anterior é conhecida como forma integral forte (C. A. Brebbia 1978), onde, a função $u^*(\xi; X)$ é tomada como sendo a solução de um problema correlato.

Desta forma, busca-se à construção de um espaço funcional eficiente para minimização dos resíduos, quando se interpreta a equação integral 2.9 com base nos princípios do Método dos Resíduos Ponderados (Eiger 1989). Nessa condição de função correlata, essa Equação é chamada de Solução Fundamental do Problema.

Para o seguimento da Formulação Clássica do MEC, é conveniente abordar o lado esquerdo da Equação 2.9 de forma que doravante, será chamado de Termo Difusivo (TD), pois o objetivo desta dissertação é abordar os problemas de Helmholtz, cuja equação contém um termo difusivo e outro reativo. Este último será abordado mais à frente. Assim, considera-se:

$$T_d = \int_{\Omega} u_{,ii}(X) u^*(\xi; X) d\Omega \quad 2.10$$

2.4.2. TRATAMENTO DO TERMO DIFUSIVO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Para dar seguimento à Formulação do MEC, se faz necessário tratar o termo 2.10 em função de uma integral de Contorno. Desta forma, o tratamento deste Termo Difusivo pode ser facilmente obtido através da integração por partes, seguido do uso do Teorema da Divergência (Kaplan 1952), que farão com que integrais de domínio se tornem integrais de contorno, conforme largamente demonstrado em literatura correlata, como em (C. A. Brebbia 1982) (Brebbia e Dominguez 1994).

O tratamento deste termo se inicia ao integrar o lado esquerdo da equação 2.10 por partes, onde é encontrada uma forma integral chamada de Forma Fraca, representada pela equação 2.11:

$$T_d = \int_{\Omega} u_{,ii}(X) u^*(\xi; X) d\Omega = \int_{\Omega} (u_i u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} (u_i u_{,i}^*) d\Omega \quad 2.11$$

Após integrar novamente a equação 2.11 através da integração por partes, é obtido a Forma Integral Inversa, dada pela equação 2.12:

$$T_d = \int_{\Omega} u_{,ii}(X) u^*(\xi; X) d\Omega = \int_{\Omega} (u_i u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} (u u_{,i}^*)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega \quad 2.12$$

A obtenção deste modelo é de suma importância para o desenvolvimento do MEC, pois com ele pode-se aplicar o Teorema da Divergência de Gauss (Stewart 2001) sobre a equação 2.12 para levá-la ao contorno Γ . O resultado deste é apresentado na equação abaixo:

$$T_d = \int_{\Gamma} u_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u u_{,i}^* n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega \quad 2.13$$

Onde o termo n_i representa o vetor normal à superfície no ponto campo. Para simplificar a equação 2.13, os valores abaixo são adotados:

$$u_{,i} n_i = q(\xi; X) \quad 2.14$$

$$u_{,i}^* n_i = q^*(\xi; X) \quad 2.15$$

Assim, a partir da combinação da equação 2.19 e da equação 2.15, pode-se definir sua derivada direcional $q^*(\xi; X)$, também chamada de fluxo fundamental (C. A. Brebbia 1978):

$$u_{,i}^* n_i = q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n} \quad 2.16$$

Onde os termos q e q^* representam respectivamente: o fluxo, e o fluxo fundamental de ponderação u^* , o qual foi apresentado na equação 2.19. Desta forma, pode-se reescrever a equação 2.13 da seguinte forma:

$$T_d = \int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega \quad 2.17$$

Analisando a equação 2.17, percebe-se que o último termo desta ainda está contido no domínio Ω , ainda representando uma integral de domínio. Assim, para tratar este termo, é necessário relacionar este termo com a função Delta de Dirac demonstrada em 2.18:

$$u_{,ii}^*(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad 2.18$$



Na qual a solução correlata ao problema é amplamente conhecida na literatura em exemplares como (C. A. Brebbia 1982) e (Wrobel 2002), e dada abaixo:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{\ln r(\xi; X)}{2\pi} \quad 2.19$$

Sendo $r(\xi; X)$ a distância euclidiana entre o ponto fonte ou de aplicação de carga ξ e um ponto X genérico do domínio chamado ponto de campo.

Para definir a derivada direcional $q^*(\xi; X)$, também chamada de fluxo fundamental, basta combinar a equação 2.19 com a equação 2.15 (C. A. Brebbia 1978), desta forma:

$$u_{,i}^* n_i = q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n} \quad 2.20$$



Utilizando as propriedades da função 2.18 como apresentado em 2.21 (Courant e John 1974):

$$\int_{\Omega} u(X) u_{,ii}^*(\xi; X) d\Omega = - \int_{\Omega} u(X) \Delta(\xi; X) d\Omega = -c(\xi) u(\xi) \quad 2.21$$

Onde, a função $c(\xi)$ é uma função de ponto, e de acordo com sua posição no domínio, seu valor pode variar. Assim, considerando que este ponto pode estar posicionado dentro ou fora do domínio, ou em seu contorno, (C. A. Brebbia 1978) propõe os seguintes valores para tal:

$$c(\xi) = 1, \quad \text{caso } \xi \text{ esteja dentro do domínio } \Omega(X) \quad 2.22$$

$$c(\xi) = 0.5, \quad \text{caso } \xi \text{ esteja sobre o contorno } \Gamma(X) \quad 2.23$$

$$c(\xi) = 0, \quad \text{caso } \xi \text{ esteja fora do domínio } \Omega(X) \quad 2.24$$

Deve-se notar, que $c(\xi)$ somente possuirá os valores descritos acima para problemas nos quais o contorno analisado é suave. Ao considerar problemas em que cantos e curvas não suaves estejam envolvidos, $c(\xi)$ terá seu valor calculado de acordo com a expressão abaixo:

$$c(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad 2.25$$

Onde α é o valor do ângulo da curva não suave em radianos. Para finalizar então a formulação do MEC, basta aplicar o valor encontrado para o Termo Difusivo na Equação de Laplace em sua forma integral, dada pela Equação 2.9:

$$T_d = \int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma - c(\xi) u(\xi) \quad 2.26$$

Por fim, é necessário discretizar essa equação em forma matricial no contorno. Assim, devido aos procedimentos seguintes, para um ponto fonte genérico ξ , obtém-se equação matricial.

$$T_d = \{H_{\xi 1} u_1(\xi; X_1) + \dots + H_{\xi S} u_n(\xi; X_n)\} - \{G_{\xi 1} q_1(\xi; X_1) + \dots + G_{\xi S} q_n(\xi; X_n)\} \quad 2.27$$

Assim, o procedimento para a avaliação numérica das integrais, bem simples e bem conhecido, é demonstrado abaixo:

$$\begin{cases} H_{11}u_1 + \dots + H_{1n}u_n - G_{11}q_1 - \dots - G_{1n}q_n = T_d^1 \\ H_{21}u_1 + \dots + H_{2n}u_n - G_{21}q_1 - \dots - G_{2n}q_n = T_d^2 \\ \vdots \\ H_{n1}u_1 + \dots + H_{nn}u_n - G_{n1}q_1 - \dots - G_{nn}q_n = T_d^n \end{cases} \quad 2.28$$

Agrupando este sistema de equações, obtém-se a equação matricial final:

$$[H]\{U\} - [G]\{Q\} = \{T_D\} \quad 2.29$$

Onde, U e Q são, respectivamente, os vetores de potencial e fluxo prescritos, contendo os valores que devem ser calculados, e G e H são, respectivamente, as matrizes provenientes das integrais de função de ponderação para o potencial e fluxo.

2.5. FORMULAÇÃO MECID REGULARIZADA ATRAVÉS DO TRATAMENTO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

2.5.1. INTRODUÇÃO

Tratado o Termo Difusivo da Equação de Helmholtz, outro termo da equação requer atenção e tratamento. Assim, para exemplificar e facilitar o entendimento, a equação de Helmholtz, apresentada em 2.7 no capítulo 2.1, será reintroduzida como a equação 2.30 abaixo:

$$u_{,ii}(X) = -\frac{\omega^2}{k^2}u(X) \quad 2.30$$

Da mesma forma na qual foi desenvolvido o MEC no capítulo 2.1, aplica-se a Forma Integral Forte na Equação de Helmholtz demonstrada na equação 2.30, assim, será obtida a equação 2.31, considerando uma função de ponderação u^* :

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(\xi;X)d\Omega = -\frac{\omega^2}{k^2}\int_{\Omega} u(X)u^*(\xi;X)d\Omega \quad 2.31$$

Neste contexto, a função u^* representa uma função de ponderação que corresponde à solução do problema de campo escalar estacionário, governado pela equação de Poisson. Essa função é a solução fundamental do problema de Laplace em um domínio infinito, como já demonstrado anteriormente neste trabalho.

Para o seguimento da Formulação do MECID, se demonstrou conveniente abordar o lado esquerdo e lado direito da Equação 2.31 de forma separada no capítulo 2.4.2. Desta forma, pode se separar a Equação 2.31 em dois termos, chamados de Termo Difusivo (TD) e Termo Reativo (TR), respectivamente:

$$\begin{aligned} T_d &= \int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(\xi;X)d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi;X)d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi;X)d\Gamma - c(\xi)u(\xi) \end{aligned} \quad 2.32$$

Desta forma, o termo restante do lado direito da Equação 2.31 é representado pelo Termo Reativo abaixo, que requer tratamento para se tornar uma Integral de Contorno.

$$T_r = -\frac{\omega^2}{k^2}\int_{\Omega} u(X)u^*(\xi;X)d\Omega \quad 2.33$$

2.5.2. TRATAMENTO DO TERMO REATIVO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

A discretização desta equação utilizando dos métodos usuais do MEC seria feita a partir de nós funcionais representativos da distribuição do campo de variáveis e conformação geométrica do corpo. Porém, para a geração de um sistema de equações com possibilidade

de resolução a partir da discretização, faz-se necessária uma varredura de todos os pontos situados no contorno, adotando mesma quantidade de pontos forte ξ equivalente aos nós funcionais definidos pelo processo de discretização.

Ao adotar este procedimento, o posicionamento dos pontos forte ξ coincidindo com todos os nós funcionais causará uma singularidade no núcleo da integral de domínio demonstrada pelo lado direito da equação 2.67.

À fim de evitar essa singularidade, duas nuvens, uma de pontos forte e uma de pontos distintas, eram adotadas. Para evitar esta abordagem problemática, (Loeffler e Mansur 2017), propôs uma abordagem similar à Hadamard, onde as singularidades foram eliminadas, de forma que a entrada de dados e o processo de implementação do MECID se tornaram mais rápidos, já que ambos os pontos campo e pontos fonte podem coincidir.

Esta abordagem consiste na inserção de um termo regularizador que soma e subtrai um mesmo termo integral de domínio, como apresentado pela equação 2.34 a seguir. Este procedimento gerou bons resultados e vem se mostrando eficaz em alguns problemas centrais de engenharia, como demonstrado em (Loeffler e Mansur 2017). Isto posto:

$$T_r = \frac{\omega^2}{k^2} \left[\int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right] + \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \quad 2.34$$

Assim, para dar prosseguimento ao tratamento do termo reativo, deve-se proceder à interpolação da parcela original e o termo de regularização núcleo completo da integral de domínio, que será diretamente interpolada utilizando funções de base radial como apresentado na equação 2.35 a seguir:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \left[\int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right] \approx \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} \xi \alpha^i F^i(X; X^i) d\Omega \quad 2.35$$

Onde $\xi \alpha^i$ é uma constante que depende o ponto forte ξ e dos pontos interpolantes (X^i) . Como a função de interpolação $F^i(X; X^i)$ pertence à classe de funções radiais, seu

argumento é composto pela Distância Euclidiana $r(X; X^i)$, na qual caracteriza as posições dos pontos base X^i relativas aos pontos de domínio genéricos X . Esta Distância Euclidiana é definida pela seguinte expressão abaixo:

$$r(X; X^i) = \sqrt{(x_1^i - x_1^e)^2 - (x_2^i - x_2^e)^2} \quad 2.36$$

Estes dois pontos abordados na distância euclidiana são os pontos base e de interpolação.

De forma similar ao MECDR (Partridge, Brebbia e Wrobel 1992), o método proposto também utiliza uma função primitiva de interpolação $\Psi^i(X^i; X)$ da função $F^i(X^i; X)$:

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^i F^i(X; X^i) d\Omega = \int_{\Omega} \xi \alpha^i \Psi_{,jj}^i(X; X^i) d\Omega \quad 2.37$$

Assim, é aplicado o Teorema da Divergência ao lado direito da equação, transformando a integral de domínio em uma integral de contorno:

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^i \Psi_{,jj}^i(X; X^i) d\Omega = \int_{\Gamma} \xi \alpha^i \Psi_{,j}^i(X; X^i) n_j(X) d\Gamma \quad 2.38$$

Simplificando a equação, define-se:

$$\Psi_{,j}^i(X^i; X) n_j(X) = \eta^i(X^i; X) \quad 2.39$$

Por fim, encontra-se:

$$\int_{\Gamma} \xi \alpha^i F^i(X; X^i) n_j(X) d\Gamma = \xi \alpha^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma \quad 2.40$$

Portanto, a forma integral do Termo Reativo é encontrada a partir da inserção do valor deduzido do núcleo:

$$T_r = \frac{\omega^2}{k^2} \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(X^j; X) d\Gamma + \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \quad 2.41$$

Por fim, a equação de governo do problema de Helmholtz pode ser definida por:

$$\begin{aligned} c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma \\ = \frac{\omega^2}{k^2} \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(X^j; X) d\Gamma + \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \end{aligned} \quad 2.42$$

Por ora, o segundo termo do lado direito da equação, chamado doravante de **termo excedente**, deverá ser mantido em sua forma de integral de domínio, **que será abordado novamente**, em um momento mais conveniente.

$$T_e = \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \quad 2.43$$

Assim, o tratamento matemático e discretização dos termos restantes serão executados conforme demonstrado por (Loeffler, Barcelos e Mansur 2015).

Para a tal discretização, é seguido o procedimento comum ao MEC. Portanto, para um ponto fonte genérico ξ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& \{H_{\xi_1}u_1(\xi; X_1) + \dots + H_{\xi_S}u_n(\xi; X_n)\} - \{G_{\xi_1}q_1(\xi; X_1) + \dots + G_{\xi_S}q_n(\xi; X_n)\} \\
& = \\
& \frac{\omega^2}{k^2} \left\{ \begin{aligned} & \xi \alpha_1 \left(\int_{\Gamma_1} \eta_1^1(X^1; X_1) d\Gamma_1 + \dots_n + \int_{\Gamma_n} \eta_n^1(X^1; X_n) d\Gamma_n \right) \\ & + \dots_m \\ & \xi \alpha_m \left(\int_{\Gamma_1} \eta_1^m(X^m; X_1) d\Gamma_1 + \dots_n + \int_{\Gamma_n} \eta_n^m(X^m; X_n) d\Gamma_n \right) \end{aligned} \right\} \\
& = \\
& \frac{\omega^2}{k^2} \{ \xi \alpha_1 N_1 + \dots + \xi \alpha_m N_m \}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Os pontos X citados nesta equação são pontos coincidentes com os pontos fonte, um procedimento usual do MEC. Entretanto, os pontos de interpolação ou pontos base X^i também são coincidentes com os pontos nodais X na aproximação da integral de domínio. Assim, os pontos base X^i devem ser diferenciados dos pontos fonte ξ em vista de evitar singularidades.

Assim, o procedimento para a avaliação numérica das integrais previamente apresentadas em 2.44, bem simples e bem-conhecido, é demonstrado abaixo:

$$\begin{cases} H_{11}u_1 + \dots + H_{1n}u_n - G_{11}q_1 - \dots - G_{1n}q_n = \frac{\omega^2}{k^2} \{ {}^1\alpha_1 N_1 + \dots + {}^n\alpha_m N_m \} \\ H_{21}u_1 + \dots + H_{2n}u_n - G_{11}q_1 - \dots - G_{2n}q_n = \frac{\omega^2}{k^2} \{ {}^2\alpha_1 N_1 + \dots + {}^n\alpha_m N_m \} \\ \dots \\ H_{n1}u_1 + \dots + H_{nn}u_n - G_{n1}q_1 - \dots - G_{nn}q_n = \frac{\omega^2}{k^2} \{ {}^n\alpha_1 N_1 + \dots + {}^n\alpha_m N_m \} \end{cases} \tag{2.45}$$

Desta forma, ao agrupar este procedimento, obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{1m} \\ H_{n1} & H_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{1m} \\ G_{n1} & G_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_n \end{Bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} {}^1\alpha_1 & \dots & {}^1\alpha_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha_1 & \dots & {}^n\alpha_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{Bmatrix} = \lambda^2 \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} \tag{2.46}$$

Onde, nesta equação matricial 2.46, será considerado $\lambda = \frac{\omega}{k}$, e cada termo do vetor de coeficientes $[A_\xi]$ corresponde a um dos pontos fonte.

$$A_\xi = \{N_1 \quad \dots \quad N_m\} \begin{Bmatrix} \xi\alpha_1 \\ \vdots \\ \xi\alpha_m \end{Bmatrix} \quad 2.47$$

2.5.3. DETERMINAÇÃO DA MATRIZ ALFA

Ao avaliar a Equação 2.40 percebe-se a existência de uma matriz $[A_\xi]$, cujo valor é, por hora, desconhecido. Sabe-se que esta matriz é composta pelos coeficientes $\xi\alpha^i$, onde, cada coeficiente pode ser calculado utilizando-se da equação básica de interpolação (Loeffler, Barcelos e Mansur 2015), abaixo:

$$[\xi\alpha] = [F]^{-1}[\xi\Lambda][F]\alpha \quad 2.48$$

Para esta equação, elementos de contorno lineares com nós posicionados nos extremos são utilizados. Portanto, os valores de $u(X)$ são definidos como inicialmente posicionados ao centro do elemento e então interpolados para as extremidades para evitar singularidades.

A matriz $[\xi\Lambda]$ é a matriz diagonal, na qual os termos da diagonal são a solução fundamental. Logo cada termo A_ξ será:

$$[A_\xi] = \{N_1 \quad \dots \quad N_m\} \begin{bmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \xi\Lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi\Lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi\Lambda_1 u_\xi & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi\Lambda_n u_\xi \end{bmatrix} \right) \quad 2.49$$

Pode-se fazer, por conveniência, uma simplificação tal que:

$$[A_\xi] = \{S_1 \quad \dots \quad S_n\} \left(\begin{bmatrix} {}^\xi\Lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & {}^\xi\Lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^\xi\Lambda_1 u_\xi & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & {}^\xi\Lambda_n u_\xi \end{bmatrix} \right) \quad 2.50$$

Esta subtração, demonstrada em 2.50, é responsável por eliminar a singularidade, pois ao considerar que o índice n representa o total de pontos fonte, incluindo o contorno e pontos internos, obtém-se uma forma sintética do vetor A_ξ :

$$[A_\xi] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_2^1\Lambda_2 \\ -S_3^1\Lambda_3 \\ -\dots \\ -S_n^1\Lambda_n \end{bmatrix} & S_2^1\Lambda_2 & \dots & S_n^1\Lambda_n \\ S_1^2\Lambda_1 & \begin{bmatrix} -S_1^2\Lambda_1 \\ -S_3^2\Lambda_3 \\ -\dots \\ -S_n^2\Lambda_n \end{bmatrix} & \dots & S_n^2\Lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^\xi\Lambda_1 & S_2^\xi\Lambda_2 & \dots & \begin{bmatrix} -S_1^\xi\Lambda_1 \\ -S_3^\xi\Lambda_3 \\ -\dots \\ -S_{n-1}^\xi\Lambda_{n-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad 2.51$$

A partir desta manipulação matemática, os termos ${}^i\Lambda_i$ que causavam a singularidade na coincidência dos pontos fonte e campo não mais existirão.

2.5.4. OPERACIONALIZAÇÃO DO TERMO NO DOMÍNIO

O último termo restante no lado direito da equação 2.41 terá então, sua operacionalização efetuada. Primeiramente, retira-se o termo $u(\xi)$ da integral, pois seu valor já é conhecido neste ponto. Tem-se, então:

$$\int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega = u(\xi) \int_{\Omega} u^*(\xi; X) d\Omega \quad 2.52$$

Embora seja dado em termos de uma integral de domínio, sua estrutura permite reescrevê-lo em termos de um integral de contorno utilizando o conceito do Tensor de Galerkin (Kytke 1995).

$$u^*(\xi; X) = G_{,ii}^*(\xi; X) \quad 2.53$$

Assim, a equação 2.52 se torna:

$$\int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega = u(\xi) \int_{\Omega} G_{,ii}^*(\xi; X) d\Omega \quad 2.54$$

Com base na equação anterior, aplica-se o Teorema de Gauss para transformar a integral de domínio numa integral de contorno:

$$\int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega = u(\xi) \int_{\Omega} G_{,i}^* n_i(\xi; X) d\Omega \quad 2.55$$

A função $G_{,i}^* n_i(\xi; X)$, conforme demonstrado por (Galimberti 2018), é dada por:

$$G_{,i}^* n_i(\xi; X) = \xi P^x = \frac{1}{4\pi} \{0,5 - \ln r(\xi; X)\} r_i n_i \quad 2.56$$

Desta forma, ao aplicar o processo de discretização na Equação 2.55:

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\int_1^1 P_1 d\Gamma_1 \right) + \dots + \int_1^1 P_n d\Gamma_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\int_1^2 P_1 d\Gamma_1 \right) + \dots + \int_1^2 P_n d\Gamma_n & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \left(\int_1^n P_1 d\Gamma_1 \right) + \dots + \int_1^n P_n d\Gamma_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad 2.57$$

A equação matricial 2.46 pode então, ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{Bmatrix} (A_1 + Z_1) \\ \vdots \\ (A_n + Z_n) \end{Bmatrix} \quad 2.58$$

Ou ainda, por simplicidade, pode-se escrever o último termo da matriz como sendo uma matriz de massa do sistema:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad 2.59$$

Onde a matriz M representa o vetor A subtraindo o vetor Z em cada ponto calculado, colocando-se em evidência o vetor u , que é o potencial. Desta forma:

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & H_{ci} \\ H_{ic} & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} \quad 2.60$$

Esta equação 2.60 necessita ser adequadamente resolvida, pois envolve simultaneamente valores potenciais e valores para suas derivativas, como na equação 2.46. Portanto, com valores nodais prescritos para \bar{u} e \bar{q} devem ser utilizados (C. F. Loeffler 1986).

$$\begin{bmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ u \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \bar{q} \end{Bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ u \end{Bmatrix} \quad 2.61$$

Levando em consideração,  que os valores prescritos para \bar{u} e \bar{q} são nulos. Assim:

$$H_{u\bar{q}} u - G_{u\bar{u}} q = \lambda^2 M_{u\bar{q}} u \quad 2.62$$

$$H_{q\bar{q}} u - G_{q\bar{u}} q = \lambda^2 M_{q\bar{q}} u \quad 2.63$$

Das equações 2.62 e 2.63, eliminando a derivada do potencial q , obtêm-se:

$$[\bar{H}]\{u\} = \lambda^2 [\bar{M}]\{u\} \quad 2.64$$

Onde $\{u\}$ é um vetor coluna e:

$$[\bar{H}] = [H_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[H_{uq}] \quad 2.65$$

$$[\bar{M}] = [M_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[M_{uq}] \quad 2.66$$

2.6. A FORMULAÇÃO MECID AUTORREGULARIZADA APLICADA À PROBLEMAS DE HELMHOLTZ

Após ter o MECID Regularizado bem demonstrado no capítulo anterior, pode-se dar início à formulação do MECID Autorregularizado. Esta formulação demonstrou melhores resultados que a Formulação Regularizada, e possui como vantagens, calcular diretamente as frequências e simplificar o MECID ao eliminar a fase de regularização.

Conforme demonstrado por (Loeffler, Galimberti e Barcelos 2020), este método aplicado à problemas de respostas bidimensionais detectou pontos de ressonância com melhor precisão, e apresentou menores erros que o MECID regularizado.

Esta formulação se inicia com o estabelecimento de uma equação integral no qual uma função auxiliar $b^*(\xi)$ é utilizada:

$$b^*(\xi; X) = u^*(\xi; X) - \lambda G^*(\xi; X) \quad 2.67$$

Onde, para simplificação, define-se:

$$\lambda = \frac{\omega^2}{k^2} \quad 2.68$$

Esta função auxiliar $b^*(\xi)$ proposta na equação 2.67 é composta pela solução fundamental u^* de um problema relacionado aos problemas governados pela Equação de Helmholtz, e G^* é o Tensor de Galerkin, com seus respectivos valores definidos abaixo:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r(\xi; X)) \quad 2.69$$

$$G^*(\xi; X) = -\frac{r^2(\xi; X)}{8\pi} [\ln(r(\xi; X)) - 1] \quad 2.70$$

Assim, partindo da Equação de Helmholtz em sua forma indicial como exemplificada abaixo:

$$u_{,ii}(X) = -\lambda u(X) \quad 2.71$$

Aplica-se a função auxiliar aos dois lados da equação, e, após **integralizando** a equação 2.71:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X) b^*(\xi; X) d\Omega(X) = -\lambda \int_{\Omega} u(X) b^*(\xi; X) d\Omega(X) \quad 2.72$$

Assim, ao substituir os valores da função auxiliar, pode-se expandir a equação 2.72 para desenvolver os termos conhecidos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{,ii}(X) u^*(\xi; X) d\Omega(X) - \lambda \int_{\Omega} u_{,ii}(X) G^*(\xi; X) d\Omega(X) \\ = -\lambda \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega(X) + \lambda^2 \int_{\Omega} u(X) \lambda G^*(\xi; X) d\Omega(X) \end{aligned} \quad 2.73$$

Assim, para dar seguimento neste procedimento, se faz necessário deduzir a Forma Integral Inversa da integral de contorno. Para tal, é feita a integração por partes e a aplicação do Teorema da Divergência de Gauss (Stewart 2001), como previamente desenvolvido no capítulo 2. Assim, ao integrar o lado esquerdo da equação 2.73 por partes, tem-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& -c(\xi)u(\xi) - \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X) d\Gamma(X) \\
& - \lambda \int_{\Omega} u_{,ii}(X)G^*(\xi; X) d\Omega(X) \\
& = -\lambda \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X) d\Omega(X) + \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X) d\Omega(X)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Como o quarto termo do lado esquerdo da equação 2.74 ainda continua sendo uma integral de domínio, pode-se trabalhá-lo através da aplicação da integração por partes, de forma que integrando a primeira vez, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_{,ii}(X)G^*(\xi; X) d\Omega(X) \\
& = \left[\int_{\Omega} \left(u_{,i}(X)G^*(\xi; X) \right)_{,i} d\Omega(X) - \int_{\Omega} \left(u_{,i}(X)G^*_{,i}(\xi; X) \right) d\Omega(X) \right]
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Integrando a mesma por partes uma segunda vez:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_{,ii}(X)G^*(\xi; X) d\Omega(X) \\
& = \left[\int_{\Omega} \left(u_{,i}(X)G^*(\xi; X) \right)_{,i} d\Omega(X) - \int_{\Omega} \left(u(X)G^*_{,i}(\xi; X) \right)_{,i} d\Omega(X) \right. \\
& \quad \left. + \int_{\Omega} \left(u(X)G^*_{,ii}(\xi; X) \right) d\Omega(X) \right]
\end{aligned} \tag{2.76}$$

É aplicado o Teorema da Divergência para levar o primeiro e o segundo termo após a igualdade para o contorno:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_{,ii}(X) G^*(\xi; X) d\Omega(X) \\
&= \left[\int_{\Gamma} \left(u_{,i}(X) G^*(\xi; X) \right) n_i d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \left(u(X) G^*_{,i}(\xi; X) \right) n_i d\Gamma(X) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \left(u(X) G^*_{,ii}(\xi; X) \right) d\Omega(X) \right] \tag{2.77}
\end{aligned}$$

Por fim, pode-se fazer uma última modificação, considerando que a derivada segunda do tensor de Galerkin G^* é igual a solução fundamental u^* , tem-se que:

$$G^*_{,ii}(\xi; X) = u^*(\xi; X) \tag{2.78}$$

Logo, a equação 2.77 se torna:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_{,ii}(X) G^*(\xi; X) d\Omega(X) \\
&= \left[\int_{\Gamma} \left(u_{,i}(X) G^*(\xi; X) \right) n_i d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \left(u(X) G^*_{,i}(\xi; X) \right) n_i d\Gamma(X) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \left(u(X) u^*(\xi; X) \right) d\Omega(X) \right] \tag{2.79}
\end{aligned}$$

Ao substituir a equação 2.79 na equação 2.74, tem-se, finalmente:

$$\begin{aligned}
& -c(\xi)u(\xi) - \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X) d\Gamma(X) \\
& - \lambda \left[\int_{\Gamma} \left(u_i(X)G^*(\xi; X) \right) n_i d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \left(u(X)G_{,i}^*(\xi; X) \right) n_i d\Gamma(X) \right. \\
& \left. + \int_{\Omega} \left(u(X)u^*(\xi; X) \right) d\Omega(X) \right] \\
& = -\lambda \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X) d\Omega(X) + \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X) d\Omega(X)
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Onde duas novas funções foram introduzidas. Seus respectivos valores são:

$$u_i^*(\xi; X)n_i(X) = q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} r_i(\xi; X)n_i(X) \tag{2.81}$$

$$G_{,i}^*(\xi; X)n_i(X) = S^*(\xi; X) = -\frac{1}{4\pi} [\ln(r(\xi; X)) - 0,5] r_i(\xi; X)n_i(X) \tag{2.82}$$

Assim, com a expansão da equação 2.80, combinada com uma inversão de sinais em toda a equação, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X) d\Gamma(X) \\
& + \lambda \int_{\Gamma} \left(u_i(X)G^*(\xi; X) \right) n_i d\Gamma(X) - \lambda \int_{\Gamma} \left(u(X)G_{,i}^*(\xi; X) \right) n_i d\Gamma(X) \\
& + \lambda \int_{\Omega} \left(u(X)u^*(\xi; X) \right) d\Omega(X) \\
& = \lambda \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X) d\Omega(X) - \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X) d\Omega(X)
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Na equação 2.83 pode-se anular o último termo do lado esquerdo da equação com o primeiro termo do lado direito, substituindo as 2.81 e 2.82 em 2.83, obtendo a equação final:

$$\begin{aligned}
 c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X) d\Gamma(X) \\
 + \lambda \int_{\Gamma} q(X)G^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \lambda \int_{\Gamma} u(X)S^*(\xi; X) d\Gamma(X) \\
 = -\lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X) d\Omega(X)
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Pode-se observar que todo o lado esquerdo da equação está sendo integrado ao longo do contorno e, portanto, obedecendo a metodologia de solução do MEC. Assim, resta somente a conversão da expressão do lado direito da equação 2.84 para uma integral de contorno.

Para tal, o lado direito da equação pode ser resolvido por uma aproximação de seu núcleo, de forma que:

$$u(X)G^*(\xi; X) = \xi \alpha^j F^j(X^j; X) \tag{2.85}$$

Para dar continuidade no desenvolvimento da equação 2.85, é utilizada estratégia semelhante ao desenvolvimento do MECID regularizado dado pela equação 2.35, onde se admite uma função de base radial $F^j(X^j; X)$ que possui uma função primitiva associada, definida como $\Psi_{,ii}^j$. Entretanto, neste desenvolvimento, a integral do lado esquerdo da equação 2.85 é formada pelo tensor de Galerkin, e não pela solução fundamental u^* .

Assim, desenvolvendo esta mesma estratégia de forma simplificada, o lado direito da equação 2.84 se desenvolve da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X) d\Omega(X) = \int_{\Omega} \xi \alpha^j F^j(X^j; X) d\Omega(X) = \int_{\Omega} \xi \alpha^j \Psi_{,ii}^j(X^j; X) d\Omega \tag{2.86}$$

Assim, é aplicado o Teorema da Divergência ao lado direito da equação, transformando a integral de domínio em uma integral de contorno:

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^j \Psi_{,ii}^j(X^j; X) d\Omega = \int_{\Gamma} \xi \alpha^j \Psi_{,i}^j(X^j; X) n_i(X) d\Gamma = \int_{\Gamma} \xi \alpha^j \eta^j(X^j; X) d\Gamma \quad 2.87$$

Desta forma, a equação 2.84 se torna:

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X) d\Gamma(X) \\ + \lambda \int_{\Gamma} q(X)G^*(\xi; X) d\Gamma(X) - \lambda \int_{\Gamma} u(X)S^*(\xi; X) d\Gamma(X) \\ = -\lambda^2 \int_{\Gamma} \xi \alpha^j \eta^j(X^j; X) d\Gamma \end{aligned} \quad 2.88$$

De forma similar ao tratamento matemático e discretização dos termos demonstrados por (Loeffler, Barcelos e Mansur 2015) e neste trabalho na Equação 2.44, é expandida a equação 2.88. Portanto, para um ponto fonte genérico ξ , tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{cc} & 0_{ci} \\ H_{ic} & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{cc} & 0_{ci} \\ W_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} S_{cc} & 0_{ci} \\ S_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} \\ = \lambda^2 \begin{bmatrix} {}^1\alpha_1 & {}^1\alpha_m \\ {}^n\alpha_1 & {}^n\alpha_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_m \end{Bmatrix} = \lambda^2 \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad 2.89$$



Onde, os coeficientes H_{ij} e G_{ij} são originados da integração de $u^*(\xi; X)$ e $q^*(\xi; X)$ no contorno. De forma similar, os coeficientes W_{ij} e S_{ij} são provenientes da integração de $G^*(\xi; X)$ e sua derivada normal no contorno.

Como $\Psi_{,ii}^j$ é conhecido, η^j pode ser facilmente calculado. Assim, de acordo com (Galimberti 2018), sabe-se que:

$$\eta^j(X^i; X) = \Psi_{,i}^j(X^j; X)n_i = \frac{r^2}{16} [4 \ln r(X^j; X) - 1] r_i n_i \quad 2.90$$

Para problemas de Helmholtz, o MECID deve considerar os valores nodais do potencial $u(X)$ explicitamente, porém, na Equação 2.89, os valores nodais estão implícitos no vetor $\{A_j\}$. Estes potenciais devem ser explicitados para possibilitar a construção da matriz de Inércia $[M]$.

Assim, para finalizar a equação matricial do MECID, somente falta calcular os valores do coeficiente $\xi \alpha^i$. Este coeficiente pode ser encontrado a partir do desenvolvimento da Equação 2.91 abaixo:

$$[\xi \alpha^i] = [F]^{-1} [\xi \Lambda] [F] \alpha = [F]^{-1} [\xi \Lambda] \{u\} \quad 2.91$$

Onde, na equação 2.91, a matriz $[\Lambda^*]$ é diagonal, e formada pelo tensor de Galerkin $G^*(\xi; X)$. Assim, para dar continuidade ao desenvolvimento da formulação, basta desenvolver a equação matricial 2.91 analogamente ao desenvolvimento de 2.48, para um ξ qualquer. Com base neste desenvolvimento, pode-se afirmar então que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{q} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \bar{q} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{u\bar{u}} & W_{u\bar{q}} \\ W_{q\bar{u}} & W_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{q} \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} S_{u\bar{u}} & S_{u\bar{q}} \\ S_{q\bar{u}} & S_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \bar{q} \end{Bmatrix} \\ = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{q} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad 2.92$$

Nesta última equação foram destacadas as submatrizes com valores nodais prescritos para \bar{u} e \bar{q} .



3. FORMULAÇÃO MECID AUTORREGULARIZADA PARA PROBLEMAS DE AUTOVALOR

3.1. INTRODUÇÃO

Fisicamente, pode-se definir um problema de autovalor como um problema onde se buscam configurações auto equilibradas na condição de vibração livre, ou seja, os valores das **Condições de Contorno de Neumann** são nulos. Essas condições especificam os valores que a derivada de uma solução deve tomar no contorno do domínio.

Para um problema elástico, as forças inerciais e forças elásticas se equilibram sem a interferência de esforços externos. Similarmente, este conceito pode ser aplicado aos problemas de Helmholtz, que também englobam problemas mais simples da elasticidade como casos de torção, deflexão de membranas e vibração de barras.

3.2. EQUACIONAMENTO DO MÉTODO

Inicialmente, é interessante escrever o sistema do MEC usando submatrizes, nas quais os valores prescritos de \bar{u} e \bar{q} sejam claramente identificados, conforme **mostrado anteriormente** e rerepresentado aqui por conveniência:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{q} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \bar{q} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{u\bar{u}} & W_{u\bar{q}} \\ W_{q\bar{u}} & W_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{q} \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} S_{u\bar{u}} & S_{u\bar{q}} \\ S_{q\bar{u}} & S_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \bar{q} \end{Bmatrix} \\ = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{q} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad 3.1$$

Assim, como para um problema de autovalor, **os valores de \bar{u} e \bar{q} são nulos**, a equação matricial 3.1 se toma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \bar{q} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{u\bar{u}} & W_{u\bar{q}} \\ W_{q\bar{u}} & W_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} S_{u\bar{u}} & S_{u\bar{q}} \\ S_{q\bar{u}} & S_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \bar{q} \end{Bmatrix} \\ = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad 3.2$$

Distribuindo os valores da equação 3.2, gera-se duas equações acopladas, tal que:

$$H_{u\bar{q}}u - G_{u\bar{u}}q + \lambda W_{u\bar{q}}u - \lambda S_{u\bar{u}}q = \lambda^2 M_{u\bar{q}}u \quad 3.3$$

$$H_{q\bar{q}}u - G_{q\bar{u}}q + \lambda W_{q\bar{q}}u - \lambda S_{q\bar{u}}q = \lambda^2 M_{q\bar{q}}u \quad 3.4$$

Assim, de acordo com (Loeffler e Mansur 1986), partindo da equação 3.3, o termo q é isolado, na forma mostrada à seguir:

$$q = (G_{u\bar{u}} + \lambda S_{u\bar{u}})^{-1} (H_{u\bar{q}}u + \lambda W_{u\bar{q}}u - \lambda^2 M_{u\bar{q}}u) \quad 3.5$$

Porém, nesta equação 3.5 encontra-se uma dificuldade. Ao isolar o termo q , é obtida a inversão da soma de duas matrizes $(G_{u\bar{u}} + \lambda S_{u\bar{u}})^{-1}$, onde $S_{u\bar{u}}$ está multiplicado pelo escalar λ , assim dificultando o procedimento. Dessa forma, esse termo terá que ser explicitado de uma forma aproximada.

3.2.1. ABORDAGEM PARA SOLUÇÃO DA INVERSA DE DUAS MATRIZES

Para tal, embora não seja usual, existem soluções propostas para resolução da inversa da soma de duas matrizes. Uma delas é a extensão da Identidade de Hua da álgebra polinomial, que é demonstrada em (Cohn 1991). Sua adaptação para a álgebra matricial é apresentada em (Schott 2016), e será demonstrada neste capítulo. Assim, inicia-se tal demonstração introduzindo a Identidade de Hua na equação 3.6:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - (A + AB^{-1}A)^{-1} \quad 3.6$$

Percebe-se na equação 3.6, que a Identidade de Hua ainda mantém o cálculo da inversa da soma de duas matrizes, porém, a sua utilização na literatura se dá visando um melhor condicionamento das operações matriciais. Neste trabalho, particularmente, a Identidade de Hua será utilizada visando o melhor controle do escalar λ que a adoção dela proporciona.

Assim, a Identidade de Hua pode ser simplificada através da operacionalização do segundo termo do lado direito. Para tal, utiliza-se da propriedade que estabelece que a inversa do produto de duas matrizes é definida produto das inversas, mas na ordem inversa. Assim, o segundo termo do lado direito da equação 3.6 pode ser operado da seguinte forma:

$$(A + AB^{-1}A)^{-1} = [A(I + B^{-1}A)]^{-1} = (I + B^{-1}A)^{-1}A^{-1} \quad 3.7$$

Assim, aplicando esta propriedade na equação 3.6:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - (I + B^{-1}A)^{-1}A^{-1} \quad 3.8$$

Considerando então, que:

$$\begin{cases} A = \lambda S_{u\bar{u}} \\ B = G_{u\bar{u}} \end{cases} \quad 3.9$$

Usando-se diretamente a identidade de Hua, pode-se visualizar melhor o coeficiente λ :

$$\begin{aligned} (\lambda S_{u\bar{u}} + G_{u\bar{u}})^{-1} &= \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} - (I - G_{u\bar{u}}^{-1} \lambda S_{u\bar{u}})^{-1} \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[S_{u\bar{u}}^{-1} - (I - G_{u\bar{u}}^{-1} \lambda S_{u\bar{u}})^{-1} S_{u\bar{u}}^{-1} \right] \end{aligned} \quad 3.10$$

Chamando então, o seguinte termo da expressão acima de $K_{u\bar{u}}^{-1}$:

$$S_{u\bar{u}}^{-1} - (I - G_{u\bar{u}}^{-1} \lambda S_{u\bar{u}})^{-1} S_{u\bar{u}}^{-1} = K_{u\bar{u}}^{-1} \quad 3.11$$

A equação 3.10 se torna a seguinte equação:

$$(\lambda S_{u\bar{u}} + G_{u\bar{u}})^{-1} = \frac{1}{\lambda} [S_{u\bar{u}}^{-1} - K_{u\bar{u}}^{-1}] \quad 3.12$$



Testes preliminares confirmaram que ao se encontrar um escalar λ multiplicando igualmente ambos os termos $S_{u\bar{u}}^{-1}$ e $K_{u\bar{u}}^{-1}$ os resultados gerados foram insatisfatórios. Buscou-se, então, uma nova estratégia em que o escalar λ apresente graus distintos na expressão final.

3.2.2. ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA SOLUÇÃO DA INVERSA DE DUAS MATRIZES

Esta nova tática se baseia numa outra modelagem para a inversa da soma de matrizes. É inspirada nas seguintes expressões binomiais:

$$\frac{1}{a+b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (-b)^{-n}}{b}; \quad \text{para } |a| < |b| \quad 3.13$$

$$\frac{1}{a+b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n (-a)^{-n}}{a}; \quad \text{para } |b| < |a| \quad 3.14$$

Estas expressões tem ligação com a Identidade de Hua, mas apresentam a possibilidade de uma simplificação conveniente aos propósitos deste trabalho.

Considerando o caso da equação 3.13, em que $\lambda B > A$, e tomando apenas os primeiros dois termos da série:

$$\frac{1}{A + \lambda B} = \frac{(A)^0(-\lambda B)^0}{\lambda B} + \frac{(A)^1(-\lambda B)^{-1}}{\lambda B} = \frac{I}{\lambda B} - \frac{(AB^{-1})}{\lambda^2 B} = \frac{I}{\lambda B} - \frac{A}{\lambda^2 B^2} \quad 3.15$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A + \lambda B} &= \frac{I}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda B - A}{B^2} \right] = \left[\frac{(\lambda B - A)B^{-2}}{\lambda^2} \right] = \left[\frac{B^{-1}(\lambda B - A)B^{-1}}{\lambda^2} \right] \\ &= \frac{I}{\lambda^2} [\lambda B^{-1} - B^{-1}AB^{-1}] \end{aligned} \quad 3.16$$

De uma forma similar à que foi adotada anteriormente, agora se faz:

$$\begin{cases} A = G_{u\bar{u}} \\ B = \lambda S_{u\bar{u}} \end{cases} \quad 3.17$$

Assim:

$$(\lambda S_{u\bar{u}} + G_{u\bar{u}})^{-1} = \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} - \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} \left[G_{u\bar{u}}^{-1} + \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} \right]^{-1} \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} \quad 3.18$$

Onde, pode-se simplificar os termos do lado direito da equação gerando a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} - \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} \left[G_{u\bar{u}}^{-1} + \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} \right]^{-1} \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} &= \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} S_{u\bar{u}}^{-1} \left[G_{u\bar{u}}^{-1} + \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} \right]^{-1} S_{u\bar{u}}^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} [S_{u\bar{u}}^{-1} G_{u\bar{u}} S_{u\bar{u}}^{-1}] \end{aligned} \quad 3.19$$

De modo similar à 3.11, pode-se chamar:

$$K_{u\bar{u}}^{-1} = S_{u\bar{u}}^{-1} G_{u\bar{u}} S_{u\bar{u}}^{-1} \quad 3.20$$

Portanto, a equação 3.18 se torna:

$$(\lambda S_{u\bar{u}} + G_{u\bar{u}})^{-1} = \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} K_{u\bar{u}}^{-1} \quad 3.21$$

Vale a pena ressaltar que devido a hipótese que para altas frequências o produto da matriz S pelo coeficiente λ tende à zero, e que baixíssimas frequências não serão abordadas por este modelo, pode-se considerar:

$$\frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} \approx 0 \quad 3.22$$

Uma consideração similar a equação 3.22 não é possível de ser feita para o primeiro caso mostrado, onde $A = \lambda S_{u\bar{u}}$ e $B = G_{u\bar{u}}$, pois resultam respostas fisicamente inconsistentes. Além disso, sem a consideração feita em 3.22, uma diferença muito mais importante entre as equações 3.12 e 3.21 aparece, que pode ser identificada somente após a montagem completa do sistema matricial: a ordem das potências que envolvem o coeficiente λ .

Seguindo esta última estrutura, a equação característica teria ordem 4, uma estrutura mais coerente com o problema que se quer resolver, enquanto na estrutura anterior, caso se prosseguissem com os algebrismos, o sistema matricial envolveria expoentes de ordem 3.

Assim, após definida a inversa da soma das matrizes, pode-se dar seguimento ao procedimento. Para fins de facilitar o entendimento, é repetida a equação 3.5:

$$q = (G_{u\bar{u}} + \lambda S_{u\bar{u}})^{-1} (H_{u\bar{q}} u + \lambda W_{u\bar{q}} u - \lambda^2 M_{u\bar{q}} u) \quad 3.23$$

Define-se uma nova expressão para facilitar os cálculos, e, portanto:

$$Z_{u\bar{q}} = (H_{u\bar{q}} + \lambda W_{u\bar{q}} - \lambda^2 M_{u\bar{q}}) \quad 3.24$$

De forma que, substituindo as equações 3.21 e 3.24 na equação 3.23:

$$q = \left(\frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} K_{u\bar{u}}^{-1} \right) (Z_{u\bar{q}} u) \quad 3.25$$

E substituindo o novo valor de q encontrado na equação 3.25 na equação 3.4:

$$\begin{aligned} H_{q\bar{q}} u - G_{q\bar{u}} \left[\left(\frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} K_{u\bar{u}}^{-1} \right) (Z_{u\bar{q}} u) \right] + \lambda W_{q\bar{q}} u \\ - \lambda S_{q\bar{u}} \left[\left(\frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} K_{u\bar{u}}^{-1} \right) (Z_{u\bar{q}} u) \right] = \lambda^2 M_{q\bar{q}} u \end{aligned} \quad 3.26$$

Que, fazendo a distribuição dos termos, chega-se à seguinte equação:

$$\begin{aligned} H_{q\bar{q}} u - \frac{1}{\lambda} G_{q\bar{u}} (S_{u\bar{u}}^{-1}) (Z_{u\bar{q}} u) + \frac{1}{\lambda^2} G_{q\bar{u}} (K_{u\bar{u}}^{-1}) (Z_{u\bar{q}} u) + \lambda W_{q\bar{q}} u - S_{q\bar{u}} (S_{u\bar{u}}^{-1}) (Z_{u\bar{q}} u) \\ + \frac{1}{\lambda} S_{q\bar{u}} (K_{u\bar{u}}^{-1}) (Z_{u\bar{q}} u) = \lambda^2 M_{q\bar{q}} u \end{aligned} \quad 3.27$$

Para simplificação da equação, define-se os seguintes termos:

$$\begin{cases} T_{q\bar{u}} = G_{q\bar{u}} S_{u\bar{u}}^{-1} \\ V_{q\bar{u}} = G_{q\bar{u}} K_{u\bar{u}}^{-1} \\ Y_{q\bar{u}} = S_{q\bar{u}} S_{u\bar{u}}^{-1} \\ Z'_{q\bar{u}} = S_{q\bar{u}} K_{u\bar{u}}^{-1} \end{cases} \quad 3.28$$

$$\begin{aligned} H_{q\bar{q}u} - \frac{1}{\lambda} T_{q\bar{u}}(Z_{u\bar{q}}u) + \frac{1}{\lambda^2} V_{q\bar{u}}(Z_{u\bar{q}}u) + \lambda W_{q\bar{q}u} - Y_{q\bar{u}}(Z_{u\bar{q}}u) + \frac{1}{\lambda} Z'_{q\bar{u}}(Z_{u\bar{q}}u) \\ = \lambda^2 M_{q\bar{q}u} \end{aligned} \quad 3.29$$

Assim, substituindo o valor de $Z_{u\bar{q}}$ definido em 3.24 na equação 3.29, obtém-se:

$$\begin{aligned} H_{q\bar{q}u} - \frac{1}{\lambda} T_{q\bar{u}}(H_{u\bar{q}} + \lambda W_{u\bar{q}} - \lambda^2 M_{u\bar{q}})u + \frac{1}{\lambda^2} V_{q\bar{u}}(H_{u\bar{q}} + \lambda W_{u\bar{q}} - \lambda^2 M_{u\bar{q}})u \\ + \lambda W_{q\bar{q}u} - Y_{q\bar{u}}(H_{u\bar{q}} + \lambda W_{u\bar{q}} - \lambda^2 M_{u\bar{q}})u \\ + \frac{1}{\lambda} Z'_{q\bar{u}}(H_{u\bar{q}} + \lambda W_{u\bar{q}} - \lambda^2 M_{u\bar{q}})u = \lambda^2 M_{q\bar{q}u} \end{aligned} \quad 3.30$$

Após a distribuição dos termos em parênteses:

$$\begin{aligned} H_{q\bar{q}u} - \frac{1}{\lambda} T_{q\bar{u}}(H_{u\bar{q}})u - \frac{1}{\lambda} T_{q\bar{u}}(\lambda W_{u\bar{q}})u + \frac{1}{\lambda} T_{q\bar{u}}(\lambda^2 M_{u\bar{q}})u + \frac{1}{\lambda^2} V_{q\bar{u}}(H_{u\bar{q}})u \\ + \frac{1}{\lambda^2} V_{q\bar{u}}(\lambda W_{u\bar{q}})u - \frac{1}{\lambda^2} V_{q\bar{u}}(\lambda^2 M_{u\bar{q}})u + \lambda W_{q\bar{q}u} - Y_{q\bar{u}}(H_{u\bar{q}})u \\ - Y_{q\bar{u}}(\lambda W_{u\bar{q}})u + Y_{q\bar{u}}(\lambda^2 M_{u\bar{q}})u + \frac{1}{\lambda} Z'_{q\bar{u}}(H_{u\bar{q}})u + \frac{1}{\lambda} Z'_{q\bar{u}}(\lambda W_{u\bar{q}})u \\ - \frac{1}{\lambda} Z'_{q\bar{u}}(\lambda^2 M_{u\bar{q}})u = \lambda^2 M_{q\bar{q}u} \end{aligned} \quad 3.31$$

Organiza-se toda a equação 3.31:

$$\begin{aligned}
H_{q\bar{q}}u - \frac{1}{\lambda}T_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u - T_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u + \lambda T_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u + \frac{1}{\lambda^2}V_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u + \frac{1}{\lambda}V_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u \\
- V_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u + \lambda W_{q\bar{q}}u - Y_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u - \lambda Y_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u + \lambda^2 Y_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u \\
+ \frac{1}{\lambda}Z'_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u + Z'_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u - \lambda Z'_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u = \lambda^2 M_{q\bar{q}}u
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Por fim, toda a equação 3.32 é multiplicada por λ^2 e os termos afins são reorganizados e isolados:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 H_{q\bar{q}}u - \lambda T_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u - \lambda^2 T_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u + \lambda^3 T_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u + V_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u + \lambda V_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u \\
- \lambda^2 V_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u + \lambda^3 W_{q\bar{q}}u - \lambda^2 Y_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u - \lambda^3 Y_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u \\
+ \lambda^4 Y_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u + \lambda Z'_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u + \lambda^2 Z'_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u - \lambda^3 Z'_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u \\
= \lambda^4 M_{q\bar{q}}u
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
V_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u - \lambda T_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u + \lambda V_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u + \lambda Z'_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u + \lambda^2 H_{q\bar{q}}u - \lambda^2 T_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u \\
- \lambda^2 V_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u - \lambda^2 Y_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}u + \lambda^2 Z'_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u + \lambda^3 T_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u \\
+ \lambda^3 W_{q\bar{q}}u - \lambda^3 Y_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}u - \lambda^3 Z'_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u + \lambda^4 Y_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}u - \lambda^4 M_{q\bar{q}}u \\
= 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
(V_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}})u + \lambda(V_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} + Z'_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}} - T_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}})u \\
+ \lambda^2(H_{q\bar{q}} - T_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} - V_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} - Y_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}} + \lambda^2 Z'_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}})u \\
+ \lambda^3(T_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} + W_{q\bar{q}} - Y_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} - Z'_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}})u \\
+ \lambda^4(Y_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} - M_{q\bar{q}})u = 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Assim, fazendo as seguintes substituições:

$$\begin{aligned}
A &= V_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}; \\
B &= V_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} + Z'_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}} - T_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}; \\
C &= H_{q\bar{q}} - T_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} - V_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} - Y_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}} + \lambda^2 Z'_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}}; \\
D &= T_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} + W_{q\bar{q}} - Y_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} - Z'_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}};
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$E = Y_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} - M_{q\bar{q}};$$

Com a definição dessas novas matrizes de apoio, resume-se o sistema completo na seguinte forma:

$$(A)u + \lambda(B)u + \lambda^2(C)u + \lambda^3(D)u + \lambda^4(E)u = 0 \quad 3.37$$

Resultando, por fim, na equação 3.38, que possui a forma de uma equação característica:

$$(A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D + \lambda^4 E)u = 0 \quad 3.38$$

3.3. PROPOSIÇÃO DE PRZEMIENIECKY

Para dar início à resolução da equação característica 3.38, uma das alternativas é buscar uma solução com estrutura próxima, já apresentada na literatura, onde seus conceitos possam ser aproveitados. Assim, partindo da proposição de (Przemieniecki 1985), no capítulo 12.4 de seu livro, enquadra-se o sistema a seguir como um problema de autovalor quadrático:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \quad 3.39$$

Como demonstrado no desenvolvimento matemático dos artigos de (Chu, Hwang e Lin 2005) e (Hwang, Lin e Mehrmann 2003), sistemas matriciais desta ordem aparecem na solução de problemas de análise estrutural com amortecimento e na simulação acústica de materiais poro-elásticos.

Para este sistema, (Przemieniecki 1985) afirma que sua a solução possui a seguinte forma:

$$u(X, t) = U(x)e^{\lambda t} \quad 3.40$$

Onde, no sistema proposto, $u(X, t)$ representa o vetor de deslocamentos ou uma grandeza primária qualquer, dado pelo produto de uma amplitude $U(x)$ e uma função de tempo, expressa em termos do parâmetro λ . A proposta de solução é a mesma encontrada em (Stewart 2001) para resolver uma equação diferencial, transformando-a numa equação algébrica. Aqui, intenta-se eliminar as derivadas temporais da equação matricial. Portanto, ao substituir a equação 3.40 em 3.39, e aplicar as derivadas em relação ao tempo:

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)Ue^{\lambda t} = 0 \quad 3.41$$

Esta equação possui soluções não-triviais desde que o determinante dos termos internos aos parênteses seja nulo, evitando assim, a pré-multiplicação por uma inversa do sistema matricial em questão:

$$|\lambda^2 M + \lambda C + K| = 0 \quad 3.42$$

Para sistemas com diversos graus de liberdade, a formulação das equações 3.41 e 3.42 se torna inconveniente. Assim, utilizando um método que foi proposto inicialmente por (Duncan 1956.), pode-se reduzir essas equações a uma forma padrão. Contudo, é preciso voltar à equação de equilíbrio dinâmico 3.39, e reescrevê-la adequadamente.

Desta forma, a equação 3.39 é combinada com a identidade dada pela equação 3.43 à seguir, gerando assim uma equação matricial de maior ordem, porém formatada tal como um problema de autovalor padrão.

$$M\dot{U} - M\dot{U} = 0 \quad 3.43$$

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = 0 \quad 3.44$$

Assim, pode-se reescrever as expressões 3.43 e 3.44 como uma equação matricial, definida pela equação seguinte:

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \dot{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.45$$

Para melhor reescrever a equação 3.45, define-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \\ \dot{w} = \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{U} \end{bmatrix} \\ w = \begin{bmatrix} \dot{U} \\ U \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad 3.46$$

Desta forma, a equação 3.45 é reescrita como:

$$A\dot{w} + Bw = 0 \quad 3.47$$

A relação entre as acelerações e velocidades e entre as velocidades e o deslocamento é dada por λ ; então, pode-se escrever o problema em questão na forma padrão de um problema de autovalor:

$$\lambda Aw + Bw = 0 \quad 3.48$$

E, portanto:

$$-\lambda Aw = Bw \quad 3.49$$

Essa última forma é muito mais simples de se resolver através de um algoritmo computacional disponível na literatura. Detalhes adicionais sobre a linearização e resolução deste problema podem ser obtidos em (Afolabi 1987).

3.4. ANALOGIA DA PROPOSIÇÃO DE PRZEMIENIECKY

Partindo da equação 3.38, percebe-se que a mesma possui ordem bem maior que a equação apresentada por Przemieniecky (vide Eq. em 3.39). Porém, devido às similaridades, o modelo proposto pode ser aproveitado e adaptado. Nesse sentido, analogamente, pode-se escrever as seguintes identidades envolvendo sistemas de equações matriciais:

$$\begin{cases} D\ddot{u} - D\ddot{u} = 0 \\ C\ddot{u} - C\ddot{u} = 0 \\ B\dot{u} - B\dot{u} = 0 \end{cases} \quad 3.50$$

Assim, combinando as identidades propostas em 3.50, é obtida a equação:

$$Eu^{IV} + D\ddot{u} + C\ddot{u} + B\dot{u} + Au + [D\ddot{u} - D\ddot{u}] + [C\ddot{u} - C\ddot{u}] + [B\dot{u} - B\dot{u}] = 0 \quad 3.51$$

Desta forma, pode-se formar um sistema de equações considerando 3.51 e 3.50, tal que:

$$\begin{cases} Eu^{IV} + D\ddot{u} + C\dot{u} + B\dot{u} + Au + [D\ddot{u} - D\ddot{u}] + [C\dot{u} - C\dot{u}] + [B\dot{u} - B\dot{u}] = 0 \\ D\ddot{u} - D\ddot{u} = 0 \\ C\dot{u} - C\dot{u} = 0 \\ B\dot{u} - B\dot{u} = 0 \end{cases} \quad 3.52$$

Pode-se organizar tal sistema em uma equação matricial contendo duas únicas matrizes:

$$\begin{bmatrix} E & D & C & B \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{IV} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -A \\ D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{u} \\ u \end{bmatrix} = 0 \quad 3.53$$

Por conveniência, define-se as matrizes apresentadas anteriormente como:

$$\begin{cases} A' = \begin{bmatrix} E & D & C & B \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix} \\ B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -A \\ D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad 3.54$$

Portanto, a equação matricial 3.53 se torna:

$$A' \begin{bmatrix} u^{IV} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \\ u \end{bmatrix} + B' \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{u} \\ u \end{bmatrix} = 0 \quad 3.55$$

Da mesma forma, como demonstrado anteriormente em 3.40, pode-se reescrever 3.55:

$$A' \begin{bmatrix} U^{IV} \\ \ddot{U} \\ \dot{U} \\ U \end{bmatrix} + B' \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \dot{U} \\ U \end{bmatrix} = 0 \quad 3.56$$

Assim, considerando a matriz coluna apresentada anteriormente como w :

$$w = \begin{bmatrix} \ddot{U} \\ \dot{U} \\ U \end{bmatrix} \quad 3.57$$

Assim, a expressão 3.56 se torna:

$$A' \dot{w} + B' w = 0 \quad 3.58$$

Que pode ser reescrita como:

$$\lambda A' w = -B' w \quad 3.59$$

Ressalta-se que neste caso, diferentemente do que usualmente se encontra nas análises vibracionais em estruturas, λ são autovalores que podem estar relacionados às frequências naturais. Também vale ressaltar que a análise de problemas de autovalor quadráticos – não os de quarta ordem como os que aqui são abordados – já tem extensa pesquisa reunida ao longo dos anos, visando, sobretudo, a estabilidade numérica dos algoritmos, que são iterativos (Dumont 2007), (Afolabi 1987).

No caso em questão, resolve-se uma equação de mais alta ordem, e autovalores que não estão associados às frequências naturais podem ser calculados. Tais autovalores podem ser complexos ou negativos, sem interesse físico. (Hurty e Rubinstein 1964) fazem uma análise

física dos resultados da solução de um sistema de autovalor quadrático, usado quase sempre para se empreender uma análise estrutural de um sistema com amortecimento não proporcional, em que os autovalores complexos, que aparecem aos pares conjugados, têm um significado físico associado à existência de fases no movimento do sistema, de amortecimento e conseqüente não periodicidade. Contudo, muitas deles são números reais com significado harmônico.

Embora a obtenção de valores complexos seja claramente previsível no modelo dado pela 3.40, a expectativa de que o comportamento harmônico fosse encontrado naturalmente junto com outros valores espúrios não se confirmou. Assim, foi admitida uma relação complexa entre o deslocamento e suas derivadas, ou seja:

$$u(X, t) = U(X)e^{i\lambda t} \quad 3.60$$

Onde i é a unidade complexa. Neste caso, espera-se forçosamente a ocorrência de um movimento harmônico acompanhado de outros comportamentos. Assim sendo, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = Ue^{i\lambda t} \\ \dot{u} = i\lambda Ue^{i\lambda t} \\ \ddot{u} = -\lambda^2 Ue^{i\lambda t} \\ \ddot{\ddot{u}} = -i\lambda^3 Ue^{i\lambda t} \\ u^{IV} = -i\lambda^3 Ue^{i\lambda t} \end{array} \right. \quad 3.61$$

Chega-se então ao seguinte sistema matricial:

$$[\lambda^4 E - \lambda^2 C + A]u - i[\lambda^3 D - \lambda B]u = 0 \quad 3.62$$

Verificou-se que a solução em separado da parcela complexa do sistema matricial, ou seja:

$$\lambda^2 Du = Bu \quad 3.63$$

Resultou em autovalores praticamente nulos; porém, não se deve resolver cada colchete separadamente, pois há perda de informações importantes relacionada ao conjunto. Assim, entre os muitos testes efetuados, foi simulada a seguinte organização:

$$[\lambda^4 E + \lambda^3 D' - \lambda^2 C + \lambda B' + A]u = 0 \quad 3.64$$

Na equação anterior foi feito:

$$\begin{cases} D' = -iD \\ B' = -iB \end{cases} \quad 3.65$$

Apesar da expectativa de que algum erro seja introduzido devido à grande manipulação matemática, a consideração da submatriz C negativa (devido à adoção do expoente complexo) mudou o panorama dos resultados para melhor.

Também é necessário melhorar o condicionamento do sistema dado pela equação matricial

3.64. Isto foi feito adicionando-se a certas matrizes, já apresentadas, a outras que já compõem o sistema, conforme mostrado:

$$L = \begin{bmatrix} E & D & -C & B \\ 0 & D + W_{q\bar{q}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C + W_{q\bar{q}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B + H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \quad 3.66$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -A \\ D + W_{q\bar{q}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C + W_{q\bar{q}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B + H_{q\bar{q}} & 0 \end{bmatrix} \quad 3.67$$

Esta alteração foi fundamental para que o modelo numérico retornasse resultados aceitáveis e mostrasse convergência com o refinamento da malha. Na realidade, a pesquisa de algoritmos iterativos para o tratamento mais consistente de matrizes não simétricas ainda é uma área em desenvolvimento. Considerando as novas matrizes estabelecidas pelas equações 3.66 e 3.67, o problema de autovalor fica:

$$\lambda Lu = Ju \quad 3.68$$

4. SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Para o presente trabalho, apenas dois exemplos simples serão simulados, pois se sabe que o modelo apresenta aproximações importantes no modelo matemático, como a aproximação da equação 3.22, e fortes limitações no processamento computacional, mais bem descritas no capítulo seguinte.

Neste trabalho usam-se elementos de contorno isoparamétricos lineares, de igual tamanho, e a interpolação feita pela MECID usa funções radiais simples e de placa fina, que tiveram desempenho consolidado em muitas aplicações anteriores (Barcelos 2014), (Frossard 2016).

Os autovalores foram calculados através da rotina baseada no algoritmo Hessenberg que é preparada para calcular autovalores associados a matrizes não simétricas. Tal rotina está implementada na linguagem FORTRAN 77, como todo o programa computacional do MEC. Uma parte do código já foi testada anteriormente em outros problemas afins, de modo que possui eficácia previamente comprovada, como exemplificado em (Barcelos 2014), (Frossard 2016), (Galimberti 2018), entre outros.

4.1. CHAPA ENGASTADA

A primeira simulação desenvolvida consiste em uma chapa quadrada de dimensões unitárias, engastada apenas em uma extremidade, como mostrado na figura:

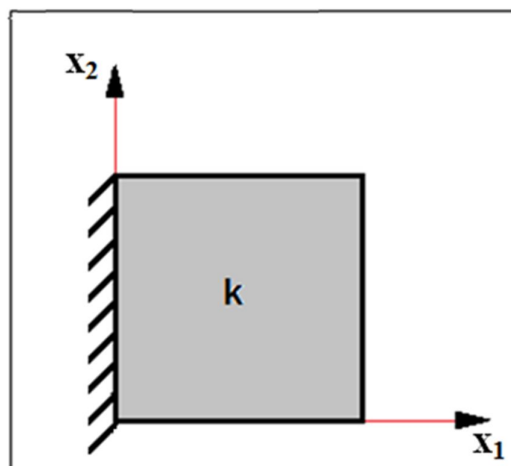


Figura 1 - Chapa engastada em uma extremidade e livre nas outras extremidades.

As propriedades físicas e os lados da chapa foram considerados unitários para simplificar os cálculos a serem desenvolvidos. Foram usados elementos de contorno isoparamétricos lineares, de igual tamanho, e a interpolação feita pela MECID empregou funções radiais simples.

Os autovalores são calculados e comparados com as frequências naturais na barra, que são calculadas analiticamente pela fórmula:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{4m^2 + 4n^2 - 4n + 1} \quad 4.1$$

As frequências naturais incluem os valores relacionados à vibração transversa.

Primeiramente são mostrados os resultados obtidos com a função radial simples. Diversas malhas foram usadas, mas, devido às limitações da programação computacional, nenhuma malha acima de 500 graus de liberdade pode ser resolvida. Essa limitação se dá ao sistema ser quatro vezes maior do que o sistema matricial clássico do MEC para cálculo de autovalor, assim há uma dimensão declarada no programa de 2000 espaços, que para ser superada precisaria de uma reprogramação otimizada.

Em razão da relação apresentada na equação 3.61, os resultados dos autovalores calculados pelo programa estão associados ao quadrado das frequências naturais.

Na Tabela 1 são demonstrados os resultados reais positivos para os autovalores. Na convenção aqui utilizada (NC/NI), tem-se número de nós de contorno (NC) / número de pontos interpolantes (NI), identificando a malha utilizada para a simulação.

Tabela 1 - Resultados da Interpolação da Função Radial Simples

QUANT. DE NÓS DE CONTORNO/ QUANT. DE PONTOS INTERPOLANTES				
84/144	164/144	164/225	164/324	ω_{mn}^2
0.9795	0.99356	0.9935	0.99357	2.4699
12.486	12.187	12.175	12.164	12.3594
15.331	14.383	14.53	14.658	22.2539
17.0923	17.55	17.243	17.024	32.1841
28.899	27.631	27.463	27.336	42.0889
39.4176	39.332	38.8032	38.4324	61.9431
54.9182	61.145	60.6144	60.2448	61.9431
58.7938	91.745	91.9206	91.965	71.9545
61.6538	93.696	93.047	92.5635	91.8396
91.9687	99.658	99.023	98.5179	102.0302
93.7016	107.737	107.046	106.453	111.9787
100.468	114.492	114.061	113.737	121.7712

Devido à aproximação feita para o cálculo da inversa da soma das matrizes na equação 3.22, a determinação da primeira frequência foi grandemente prejudicada. Outras frequências mais baixas, dentre as frequências calculadas, também estão bem longe da precisão devida e necessitariam de malhas mais refinadas para uma melhor qualidade dos autovalores. Certas frequências mais altas, contudo, foram mais bem descritas, como a segunda, a sexta e a nona, nas quais a segunda e a nona frequência da simulação são axiais, devido à convergência direta com a sexta e nona frequência da resolução analítica.

Comumente os modelos numéricos discretos não conseguem representar adequadamente alguns modos de vibração, especialmente os modos mais altos, que consomem mais energia e demandam uma representação espacial mais elaborada. No entanto, usando o MECID e, conseqüentemente, funções de base radial, a disposição dos pontos de interpolação interna em cada malha altera os resultados e não pode ser apropriada para descrever com precisão certos modos, que não são necessariamente os modos mais altos.

Assim, devido a esse comportamento do MECID, sempre são esperadas algumas oscilações na curva de diferença relativa quando a posição dos pontos de interpolação é alterada. Apesar das imprecisões nos resultados, observa-se uma convergência nos

resultados numéricos. Resultados com melhor qualidade não puderam ser obtidos devido às aproximações no modelo matemático. Tal convergência não havia sido obtida em outros modelos testados, assim, devido à não-convergência, tais dados não existem para serem apresentados.

Tabela 2 - Resultados da Interpolação da Função Log de Engaste

QUANT. DE NÓS DE CONTORNO/ QUANT. DE PONTOS INTERPOLANTES					
84/144	84/225	164/144	164/225	164/324	ω_{mn}^2
0.9795	0.97958	0.99357	0.99357	0.99356	2.4699
12.3396	12.3416	12.089	12.0893	12.0866	12.3594
16.8735	17.1068	15.596	15.8912	25.5561	22.2539
33.4516	34.0601	17.37	16.8832	36.3417	32.1841
42.5878	45.1677	25.634	25.6059	57.9543	42.0889
51.0394	49.7525	37.048	36.6269	91.9149	61.9431
59.815	59.4087	58.3916	58.1349	102.4377	61.9431
74.6862	76.9945	91.9151	91.9295	108.66	71.9545
88.0378	86.8812	103.246	102.769	126.098	91.8396
92.1106	92.1179	108.589	108.65	159.8708	102.0302
102.746	102.425	126.443	126.198	168.8214	111.9787
107.9749	108.034	159.37	159.763	182.5951	121.7712

Na Tabela 2 são apresentados os resultados para o mesmo problema usando a função radial de placa fina.

Pode-se notar uma certa dispersão na sequência de frequências calculadas, no sentido de que à medida que se efetuou o refinamento, alguns autovalores mais altos descenderam da escala de ordenamento e se introduziram mais abaixo, e vice versa. A malha mais refinada (164/324) mostra claramente esse efeito, se comparada à malha com (164/225). Esse efeito pode ser exemplificado ao avaliar que as frequências de quinta à decima terceira frequência apresentada pela malha (164/225), agora são representadas pelas frequências de terceira à decima primeira frequência da malha (164/324).

4.2. MEMBRANA QUADRADA

Para testar o método anteriormente apresentado será introduzido o problema de vibração em membrana quadrada, que também possui solução analítica. Tais resultados serão comparados com o retornado pelo MECID. A Figura 2 mostra as características físicas e geométricas do problema, que possui dimensões e propriedades unitárias também unitárias por conveniência. Os valores analíticos são para frequências naturais apresentados (Meirovitch 1967) e definidos conforme a seguinte expressão:

$$\omega_{mn} = \pi\sqrt{(m^2 + n^2)}$$

4.2

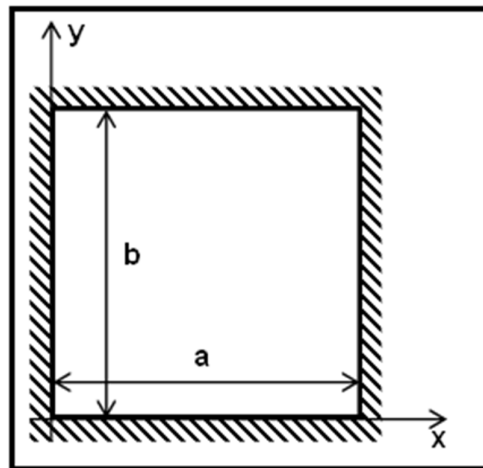


Figura 2 - Membrana retangular totalmente fixada. Fonte: Autoria própria.

Este exemplo tem um comportamento numérico distinto do anterior. Os graus de liberdade, fundamentais na análise dinâmica, são dados exclusivamente pelos pontos internos interpolantes, enquanto no caso anterior apenas um quarto dos pontos nodais havia sido eliminado do sistema matricial. Assim, este problema é numericamente bem mais difícil de modelar qualitativamente do que o caso previamente estudado.

O fato de que os graus interpolantes do contorno também são eliminados faz com que a quantidade de pontos internos interpolantes cresça em importância no modelo discreto.

Os resultados obtidos refletem essa maior dificuldade numérica; os autovalores agora calculados estão bem menos precisos do que os calculados anteriormente. Apenas a função radial simples foi empregada na interpolação.

Tabela 3 - Resultados da Interpolação da Função Radial Simples

QUANT. DE NÓS DE CONTORNO/ QUANT. DE PONTOS INTERPOLANTES					
84/144	84/225	164/144	164/225	164/324	ω_{mn}^2
8.61064	8.5451	8.5914	8.5451	8.51465	19.7391
18.16	17.871	18.13464	17.871	17.6999	49.3478
18.2828	17.8873	18.14557	17.8873	17.72035	49.3478
45.0311	44.0385	44.66674	44.038	43.63456	78.9556
59.6519	58.9881	59.53348	58.988	58.63164	98.6943
61.8291	61.1692	61.95456	61.169	60.63612	98.6943
82.6897	81.4169	82.4125	81.4169	80.77194	128.3032
83.7839	81.5618	82.511	81.5618	80.95417	128.3032
106.4193	105.4033	106.6581	105.4033	104.5291	167.9406
106.5278	105.4156	106.6665	105.4133	104.5446	167.9406
135.0431	131.9681	133.5834	131.968	130.9164	177.6515
138.156	135.2091	136.7063	135.2091	134.2057	197.3912

5. CONCLUSÕES

Uma vez que a os resultados da formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta são melhores que os resultados da formulação regularizada em problemas de diretos governados pela Equação de Helmholtz, procurou-se analisar a possibilidade e aplicá-la em problemas de autovalor e futuramente em problemas de resposta, usando a Equação da Onda.

Nesse sentido, examinaram-se os procedimentos matemáticos capazes de conduzir o modelo autorregularizado do MECID a uma forma pertinente a um problema de autovalor.

Contudo, embora haja modelos similares para o problema dito quadrático, o caso em questão é muito mais complicado, pois é de quarta ordem e arrola uma estrutura em que cada matriz constitutiva do sistema está multiplicada pelo coeficiente associado ao autovalor.

Para que se chegar ao intento desejado, uma aproximação foi feita no cálculo das derivadas do potencial, que são eliminadas no modelo de um problema de autovalor. Tal aproximação, além de outros problemas numéricos que não puderam ser mais bem estudados, fizeram com que os resultados numéricos alcançados ficassem aquém do desejado.

Assim, o uso da formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno deve ser aplicada apenas na obtenção do espectro de frequências via varredura, pois neste caso seus resultados foram bastante precisos. Essa precisão e funcionalidade não puderam ser reproduzidas no caso do cálculo direto dos autovalores associados.

De qualquer modo, uma vez demonstrada sua consistência matemática, o modelo obtido pode ser aprimorado numericamente através de uma programação computacional otimizada e uso de algoritmos iterativos, voltados para a solução de problemas de autovalor de grande porte com matrizes não simétricas.

Todavia, ressalta-se que o objetivo proposto foi alcançado, pois um procedimento matemático consistente foi desenvolvido e retornou resultados coerentes, embora sem a precisão de outros modelos. Ressalta-se ainda que não foi identificado nenhum trabalho similar na literatura especializada.

6. REFERÊNCIAS

- Afolabi, Dare . "Linearization of the quadratic eigenvalue problem." *Computers & Structures* 26, nº 6 (1987): 1039-1040.
- Aliabadi, Mohammad H, e Luiz C. Wrobel. *The boundary element method, volume 2: applications in solids and structures*. John Wiley & Sons, 2002.
- Banerjee, Prasanta Kumar. *The Boundary Element Methods in Engineering*. London: McGraw-Hill, 1994.
- Banerjee, Prasanta Kumar, e Roy Butterfield. *Boundary element methods in engineering science*. London: McGraw-Hill, 1981.
- Barcelos, Hércules de Melo. "Comparação de desempenho entre a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno com Funções Radiais e o Método dos Elementos Finitos em problemas de Poisson e Helmholtz." Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2014.
- Brebbia, C. A. *Boundary element methods in engineering*. NY, USA: Springer New York, 1982.
- Brebbia, Carlos A. *The Boundary Element method for Engineers*. London: Pentech Press., 1978.
- Brebbia, Carlos A., e A. J. Ferrante. *The Finite Element Technique*. Porto Alegre: URGs, 1975.
- Brebbia, Carlos Alberto, e Jose Dominguez. *Boundary elements: an introductory course*. WIT press, 1994.
- Brebbia, Carlos Alberto, e Stephen Walker. *Boundary element techniques in engineering*. London: Newnes-Butterworths, 1980.
- Brebbia, Carlos Alberto, José Claudio Faria Telles, e Luiz C. Wrobel. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. Springer Science & Business Media, 1984.
- Bulcão, André. "Formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade Usando Elementos de Ordem Superior Aplicada a Problemas de

- Campo Escalar Generalizado.” Universidade Federal do Espírito Santo, PPGEM, 1999.
- Butkov, E. *Física matemática*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- Chu, Moody T., Tsung-Min Hwang, e Wen-Wei Lin. “A novel deflation technique for solving quadratic eigenvalue problems.” 2005.
- Cohn, P. M. *Further Algebra and Applications*. Springer, 1991.
- Collin, Robert E. *Field theory of guided waves*. IEEE Press, 1991.
- Courant, R. “Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations.” *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1943: 1–23.
- Courant, R., e F., John. *Introduction to Calculus & Analysis*. John Wiley & Sons, 1974.
- Cruse, Thomas A. “Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis.” *Computers & Structures* 3.3 (1973): 509-527.
- Cruz, A L. “Modelagem Direta de Integrais de Domínio Usando Funções de Base.” Universidade Federal do Espírito Santo, PPGEM, 2012.
- De Souza, Lorenzo Zamprogno. “Utilização De Funções De Base Radial De Suporte Compacto Na Modelagem Direta De Integrais De Domínio Com O Método Dos Elementos De Contorno.” Vitória, ES: Universidade Federal do Espírito Santo, PPGEM, 2013.
- Dumont, Ney A. “On the solution of generalized non-linear complex-symmetric eigenvalue problems.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007.
- Duncan, W. J. “Reciprocity of triply-partitioned matrices.” *The Aeronautical Journal*, 1956.: 131-132.
- Eiger, Sérgio. “Modelos de escoamentos turbulentos.” *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos*, 1989.
- Eymard, Robert, Thierry Gallouët, e Raphaële Herbin. “Finite volume methods.” *Handbook of numerical analysis* 7, 2000: 713-1018.
- Forsythe, George E., e Wolfgang R. Wasow. “Finite Difference Methods.” *Partial Differential*, 1960.

- Frossard, A. L. C. “Avaliação Do Desempenho De Técnicas Para Melhoria Da Formulação MECID Em Problemas De Autovalor.” Vitória, ES: Universidade Federal do Espírito Santo, 2016.
- Galimberti, Ramon. “Formulação do método dos elementos de contorno para resolver problemas de Helmholtz usando funções de interpolação de base radial sem regularização.” Vitória, 2018.
- Gaul, L., M. Kögl, e M. Wagner. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course with Advanced Topics*. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- Hrennikoff, A. “Solution of problems of elasticity by the framework method.” *Journal of applied mechanics*, 1941: 169–175.
- Hurty, W. C., e M. F. Rubinstein. *Dynamic of Structures*. Prentice Hall, 1964.
- Hwang, Tsung-Min, Wen-Wei Lin, e Volker Mehrmann. “Numerical solution of quadratic eigenvalue problems with structure-preserving methods.” *SIAM Journal on Scientific Computing* 24, nº 4 (2003): 1283-1302.
- Kagami, Shin, e Fukai. “Application of boundary-element method to electromagnetic field problems.” *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 1984: 455-461.
- Kagawa, Yukio, Sun Yonghao, e Mahmood Zaheed. “Regular boundary integral formulation for the analysis of open dielectric/optical waveguides.” *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 1996: 1441-1450.
- Kaplan, W. *Advanced calculus*. Cambridge, Mass: Addison-Wesley Press, 1952.
- Kythe, Prem K. *An introduction to boundary element methods*. CRC press, 1995.
- Loeffler, Carlos Friedrich. “Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno aplicada a problemas de campo escalar.” 1988.
- Loeffler, Carlos Friedrich. “Vibrações Livres de Barras e Membranas Através do Método de Elementos de Contorno.” *Revista Brasileira de Engenharia*, v.4, 1986: 5-23.
- Loeffler, Carlos Friedrich, A. L. Cruz, e André Bulcão. “Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method.” *Engineering Analysis with Boundary Elements* 50 (2015): 97-108.

- Loeffler, Carlos Friedrich, e A. L. Cruz. "Avaliação da Precisão e Outras Propriedades Numéricas na Integração ao Longo de Superfícies Geradas por Funções de Base Radial." *Anais do CNMAC*, 2013.
- Loeffler, Carlos Friedrich, e Webe João Mansur. "A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem." *Engineering Analysis with Boundary Elements* 74 (2017): 14-18.
- Loeffler, Carlos Friedrich, e Webe João Mansur. "Dual reciprocity boundary element formulation for potential problems in infinite domains." *Boundary Elements X*, 1988: 155-163.
- Loeffler, Carlos Friedrich, e Webe João Mansur. "Dual reciprocity boundary element formulation for transient elastic wave propagation analysis in infinite domains." *Advances in Boundary Elements*, 1989: 1023-1036.
- Loeffler, Carlos Friedrich, e Webe João Mansur. "Quasi-dual reciprocity boundary-element method for incompressible flow: Application to the diffusive–advective equation." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003: 1167-1186.
- Loeffler, Carlos Friedrich, e Webe João Mansur. "Vibrações Livres de Barras e Membranas Através do Método dos Elementos de Contorno." *Revista Brasileira de Engenharia (RBE)* 4, nº 2 (1986): 5-23.
- Loeffler, Carlos Friedrich, Hercules M Barcelos, e Webe João Mansur. "Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation." *Engineering Analysis with Boundary Elements* 61 (2015): 218-225.
- Loeffler, Carlos Friedrich, L. Zamprogno, Webe João Mansur, e André Bulcão. "Performance of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potential Problems." *Computational Methods and Engineering and Sciences* 113, nº 3 (2017): 387-412.
- Loeffler, Carlos Friedrich, P. V. Pereira, L. O. C. Lara, e Webe João Mansur. "Comparison between the Formulation of the Boundary Element Method that uses Fundamental Solution Dependent of Frequency and the Direct Radial Basis Boundary Element Formulation for Solution of Helmholtz Problems." *Eng. Analysis Boundary Elements* 79 (2017): 81-87.

- Loeffler, Carlos Friedrich, Ramon Galimberti, e Hercules de Melo Barcelos. "A self-regularized Scheme for solving Helmholtz problems using the boundary element direct integration technique with radial basis functions." *Engineering Analysis with Boundary Elements* 118, 2020: 11-19.
- Loeffler, Carlos Friedrich, Ramon Galimberti, e Hercules M Barcelos. *A self-regularized scheme for solving Helmholtz problems using the boundary element direct integration technique with radial basis functions*. 2018.
- Massaro, César Augusto Menegatti. "O Método dos Elementos de Contorno Aplicado na Solução de Problemas de Transferência de Calor Difusivos - Advectivos." Vitoria, ES: Universidade Federal do Espírito Santo, PPGEM, 2001.
- Meirovitch, L.,. *Analytical methods in vibrations*. Macmillan, 1967.
- Moon, P., e D. E. Spencer. *Field Theory for Engineers*. New Jersey: Springer, 1971.
- Nardini, D., e Carlos Alberto Brebbia. "Transient dynamic analysis by the boundary element method." *Boundary Elements*, 1983: 719-730.
- Partridge, P. W., Carlos A. Brebbia, e L. C. Wrobel. "The Dual Reciprocity, Boundary Element method." *Computational Mechanics Publications and Elsevier*, 1992.
- Pereira, Pedro Vinicius Moreira. "Uso de funções de base radial de suporte pleno na solução das integrais de domínio da equação de Poisson usando o Método dos Elementos de Contorno." Vitoria, ES: Universidade Federal do Espírito Santo, PPGEM, 2014.
- Pinheiro, Vitor Pancieri . "Aplicação do Método de Elementos de Contorno Com Integração Direta Regularizada a Problemas Advectivo-difusivos Bidimensionais." Vitória, ES: Universidade Federal do Espírito Santo, PPGEM, 2018.
- Przemieniecki, Janusz Stanisław. *Theory of matrix structural analysis*. Courier Corporation, 1985.
- Ramachandran, P. A. *Boundary Element Methods in Transport Phenomena*. London: Computational Mechanics Publication and Elsevier Applied Science, 1994.
- Rizzo, Frank J. "An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics." *Quarterly of applied mathematics* 25 (1967): 83-95.
- Schott, James R. *Matrix Analysis for Statistics*. Vol. 3. John Wiley & Sons, 2016.

Stewart, James. *Cálculo*. Vol. 2. São Paulo: Pioneira, 2001.

Vera-Tudela, Carlos Andres Reyna. "Elastodinâmica Bidimensional Traves do Método dos Elementos de Contorno Com Dupla Reciprocidade." Vitória, ES: Universidade Federal do Espírito Santo, PPGEM, 1999.

Wrobel, L. C. *The boundary element method, applications in thermo-fluids and acoustics*. John Wiley & Sons, 2002.

ANEXO A - CÁLCULO DA DERIVADA DIRECIONAL DA FUNÇÃO DE GALERKIN

Para este trabalho, se faz necessária a utilização da função de Galerkin, sendo sua dedução obtida a partir da manipulação da solução fundamental. Para tal dedução, é utilizada a seguinte relação entre a função de Galerkin e a solução fundamental do problema correlato:

$$G_{,ii}^*(\xi; X) = u^*(\xi; X) \quad \text{A-1}$$

Onde:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{\ln r(\xi; X)}{2\pi} \quad \text{A-2}$$

Como essas são funções radiais é necessário definir o laplaciano para coordenadas polares:

$$G_{,ii}^*(\xi; X) = \frac{\partial^2 G^*(\xi^j; X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G^*(\xi^j; X)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G^*(\xi^j; X)}{\partial \theta^2} = -\frac{\ln r(\xi; X)}{2\pi} \quad \text{A-3}$$

Considerando que as funções trabalhadas aqui não possuem variação em θ :

$$G_{,ii}^*(\xi; X) = \frac{d^2 G^*(\xi^j; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG^*(\xi^j; X)}{dr} = -\frac{\ln r(\xi; X)}{2\pi} \quad \text{A-4}$$

Reorganizando a equação A-4:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dG^*(\xi^j; X)}{dr} \right) = -r \frac{\ln r(\xi; X)}{2\pi} \quad \text{A-5}$$

Integrando ambos os lados:

$$\frac{dG^*(\xi^j; X)}{dr} = - \frac{r (2 \ln r(\xi; X) - 1)}{8\pi} \quad \text{A-6}$$

Integrando novamente:

$$G^*(\xi^j; X) = - \frac{r^2 (\ln r(\xi; X) - 1)}{8\pi} \quad \text{A-7}$$

Calculando a derivada direcional da função de Galerkin:

$$G_{,i}^*(\xi^j; X) n_i = \frac{\partial G^*(\xi^j; X)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} n_i \quad \text{A-8}$$