

Resumo da Pesquisa PPGEM

Luan Henrique Sirtoli

03 de Abril de 2019

1 Início

A presente pesquisa fundamenta-se no problema encontrado no artigo [1], que será discorrido no capítulo 2 deste resumo. No capítulo 3 iremos introduzir a nova pesquisa sendo abordada, e os avanços encontrados até a presente data.

2 Fundamentos da Pesquisa

Utilizando conceitos utilizados nos artigos [2], [3], [4], [5] e [6], iniciamos o resumo introduzindo a Equação de Helmholtz em forma de auto-valor, utilizando notação indicial.

$$u_{,ii}(X) = -\lambda u(X) \quad (1)$$

Nessa equação, o autovalor λ é um escalar, tendo o quadrado do mesmo, o valor de w/k . Assim, num domínio $\Omega(X)$ bidimensional e isotrópico, onde $X = X(x_1, x_2)$ limitado por um contorno $\Gamma(X)$.

A formulação do Método dos Elementos de Contorno (**MEC**) se inicia com o estabelecimento de uma equação integral no qual uma função auxiliar $b^*(\xi)$ é utilizada, assim, formando a equação:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X)b^*(\xi; X)d\Omega(X) = -\lambda \int_{\Omega} u(X)b^*(\xi; X)d\Omega(X) \quad (2)$$

Neste modelo proporsto, $b^*(\xi; X)$ equivale à Solução Fundamental de Laplace subtraída de uma função adicional $G^*(\xi; X)$, assim:

$$b^*(\xi; X) = u^*(\xi; X) - \lambda G^*(\xi; X) \quad (3)$$

Como conhecido no MEC, os valores desses termos são:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r(\xi; X)) \quad (4)$$

$$G^*(\xi; X) = -\frac{1}{8\pi} [r^2(\xi; X) - \ln(r(\xi; X))] \quad (5)$$

A função $G^*(\xi; X)$ é o Tensor de Galerkin, associado ao problema de LaPlace. Assim:

$$G_{,ii}^*(\xi; X) = u^*(\xi; X) \quad (6)$$

Assim, a equação integral dada na Equação (2) será de tal forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(\xi; X)d\Omega(X) - \lambda \int_{\Omega} u_{,ii}(X)G^*(\xi; X)d\Omega(X) \\ &= -\lambda \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega(X) + \lambda \int_{\Omega} u(X)\lambda G^*(\xi; X)d\Omega(X) \end{aligned} \quad (7)$$

Para deduzirmos a forma inversa da integral de contorno, faremos a integração por partes e aplicamos o Teorema da Divergência, como previamente ensinados no MEC. Esses procedimentos são aplicados em ambos os lados da Equação (7), de forma que dois termos da integral se cancelam, resultando:

$$\begin{aligned} & c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma(X) \\ & + \lambda(-\int_{\Gamma} q(X)G^*(\xi; X)d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} u(X)S^*(\xi; X)d\Gamma(X)) = \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega(X) \end{aligned} \quad (8)$$

A equação anterior introduziu duas novas funções, nas quais são:

$$q^*(\xi; X) = u_{,i}^*(\xi; X)n_i(X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)}r_i(\xi; X)n_i(X) \quad (9)$$

$$S^*(\xi; X) = G_{,i}^*(\xi; X)n_i(X) = -\frac{[2\ln(r(\xi; X)) - 1]}{8\pi}r_i(\xi; X)n_i(X) \quad (10)$$

Ainda assim, uma integral de domínio persiste no lado direito da Equação (8). Assim, é utilizado o DIBEM (Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions), para resolve-la. Assim, o núcleo completo dessa integral de domínio será aproximado utilizando funções de base radial $F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$, onde o argumento é composto pela distância Euclidiana entre os pontos base \mathbf{X}^j e os pontos de domínio \mathbf{X} .

O núcleo agora é não-singular, quando os pontos fonte são coincidentes com os pontos de campo, e consequentemente, nenhum procedimento de regularização é necessário. De forma parecida ao DRBEM (Dual Reciprocity Boudary Element Method), o método proposto transforma a integral d domínio utilizando uma função de interpolação primitiva $\Psi_{,ii}^j(\mathbf{X}; \mathbf{X}^j)$, na qual sua relação com a função radial $F^j(\mathbf{X}; \mathbf{X}^j)$ é apresentada abaixo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega(X) &= \xi\alpha^j \int_{\Omega} F^j(X; X^j)d\Omega(X) = \xi\alpha^j \int_{\Omega} \Psi_{,ii}^j(\mathbf{X}; \mathbf{X}^j)d\Omega(X) \\ &= \xi\alpha^j \int_{\Gamma} \Psi_{,ii}^j(\mathbf{X}; \mathbf{X}^j)n_i d\Gamma(X) = \xi\alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(\mathbf{X}; \mathbf{X}^j)d\Gamma(X) \end{aligned} \quad (11)$$

Para cada ponto fonte ξ dado pela Equação (11), é feita uma leitura de todos os pontos base \mathbf{X}^j em relação aos pontos do domínio \mathbf{X} , com peso dos coeficientes $\xi\alpha^j$. Deve-se lembrar que o numero de pontos base \mathbf{X}^j devem ser iguais ao número de nós no contorno.

Após os procedimentos de discretização padrão do BEM, pode se escrever uma equação matricial à partir da Equação (8) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ic} & \cdots & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} \\ - \lambda \begin{bmatrix} S_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1 & \cdots & {}^1\alpha^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \cdots & {}^n\alpha^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Na equação matricial (12):

- Os coeficientes H_{ij} e G_{ij} são referentes, respectivamente, às integrações $u^*(\xi; X)$ e $q^*(\xi; X)$, no contorno.
- Os coeficientes W_{ij} e S_{ij} são referentes, respectivamente, às integrações $G^*(\xi; X)$ e sua derivativa normal $G_{,i}^*(\xi; X)$, no contorno.
- O vetor N_j representa a integração da função radial auxiliar $\eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$.

Para problemas de Helmholtz, o DIBEM deve considerar os valores nodais do potencial $u(X)$ explicitamente, porém, na Equação (6) os valores potenciais nodais estão implícitos no vetor A_j . Esse potencial $U(X)$ deve ser explicito para permitir a construção da matriz de inércia.

Desta forma, o vetor A_j deve ser reescrito da seguinte forma:

$$A_{\xi} = [N_1 \quad \cdots \quad N_m] \begin{bmatrix} \xi\alpha^1 \\ \vdots \\ \xi\alpha^m \end{bmatrix} \quad (13)$$

Os coeficientes $\xi\alpha^j$ do ultimo vetor podem ser calculados resolvendo um sistema de equações algébricas, da seguinte forma:

$$[\xi\alpha] = [F]^{-1}[\xi\Lambda][F]\alpha = [F]^{-1}[\xi\Lambda][u] \quad (14)$$

Deve ser ressaltado, que ao utilizar o DIBEM, a solução fundamental compõe o núcleo a ser interpolado. Na equação (14) a matriz diagonal $\xi\Lambda$ é composta pelo Tensor de Galerkin $G^*(\xi; X)$.

Após a implementação do algebrismo matricial, o sistema de elementos de contorno final pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ic} & \cdots & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} \\ - \lambda \begin{bmatrix} S_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{cc} & \cdots & M_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{ic} & \cdots & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

E é a partir da Equação (15) que iniciamos o trabalho da presente pesquisa.

3 Pesquisa Atual

Após a definição da Equação de Helmholtz (15), modelamos a equação para um problema de autovalor em vibração livre, obtendo assim, a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{cc} & H_{ci} \\ H_{ic} & H_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & G_{ci} \\ G_{ic} & G_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{cc} & W_{ci} \\ W_{ic} & W_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} \\ - \lambda \begin{bmatrix} S_{cc} & S_{ci} \\ S_{ic} & S_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Como os valores prescritos para vibração livre são iguais a 0, obtemos então, o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} H_{ci}u - G_{cc}q + \lambda W_{ci}u - \lambda S_{cc}q = \lambda^2 M_{ci}u \\ H_{ii}u - G_{ic}q + \lambda W_{ii}u - \lambda S_{ic}q = \lambda^2 M_{ii}u \end{cases} \quad (17)$$

$$(18)$$

A partir da Equação (17), isolando o termo q , obtemos:

$$q = (G_{cc}^{-1} + \frac{1}{\lambda}S_{cc}^{-1})(H_{ci}u + \lambda W_{ci}u - \lambda^2 M_{ci}u) \quad (19)$$

Chamamos então o termo $H_{ci} + \lambda W_{ci} - \lambda^2 M_{ci}$ de Z e substituímos na Equação (19), assim:

$$Z = H_{ci} + \lambda W_{ci} - \lambda^2 M_{ci} \quad (20)$$

$$q = (G_{cc}^{-1} + \frac{1}{\lambda}S_{cc}^{-1})(Zu) \quad (21)$$

Substituindo o termo q da Equação (21) na Equação (18), obtemos:

$$H_{ii}u - G_{ic}(G_{cc}^{-1} + \frac{1}{\lambda}S_{cc}^{-1})(Zu) + \lambda W_{ii}u - \lambda S_{ic}(G_{cc}^{-1} + \frac{1}{\lambda}S_{cc}^{-1})(Zu) = \lambda^2 M_{ii}u \quad (22)$$

Fazendo a distribuição dos termos, chegamos na seguinte equação:

$$H_{ii}u - G_{ic}G_{cc}^{-1}(Zu) + \frac{1}{\lambda}G_{ic}S_{cc}^{-1}(Zu) + \lambda W_{ii}u - \lambda S_{ic}G_{cc}^{-1}(Zu) - S_{ic}S_{cc}^{-1}(Zu) = \lambda^2 M_{ii}u \quad (23)$$

Para simplificar, chamamos os termos:

- $G_{ic}G_{cc}^{-1}$ de T_{ic} ;
- $G_{ic}S_{cc}^{-1}$ de V_{ic} ;
- $S_{ic}G_{cc}^{-1}$ de Y_{ic} ;
- $S_{ic}S_{cc}^{-1}$ de Z'_{ic} ;

Obtendo assim, a seguinte equação:

$$H_{ii}u - T_{ic}(Zu) + \frac{1}{\lambda}V_{ic}(Zu) + \lambda W_{ii}u - \lambda Y_{ic}(Zu) - Z'_{ic}(Zu) = \lambda^2 M_{ii}u \quad (24)$$

Assim, distribuindo Z na Equação (24):

$$\begin{aligned} & H_{ii}u - T_{ic}(H_{ci}u) - \lambda T_{ic}(W_{ci}u) + \lambda^2 T_{ic}(M_{ci}u) + \frac{1}{\lambda}V_{ic}(H_{ci}u) + V_{ic}(W_{ci}u) - \lambda V_{ic}(M_{ci}u) \\ & + \lambda W_{ii}u - \lambda Y_{ic}(H_{ci}u) - \lambda^2 Y_{ic}(W_{ci}u) + \lambda^3 Y_{ic}(M_{ci}u) - Z'_{ic}(H_{ci}u) - \lambda Z'_{ic}(W_{ci}u) + \lambda^2 Z'_{ic}(M_{ci}u) = \lambda^2 M_{ii}u \end{aligned} \quad (25)$$

Isolando os termos λ e u :

$$\begin{aligned} & u(H_{ii} - T_{ic}H_{ci} + V_{ic}W_{ci} - Z'_{ic}H_{ci}) \\ & + \lambda u(-T_{ic}W_{ci} - V_{ic}M_{ci} - Y_{ic}H_{ci} - Z'_{ic}W_{ci} + W_{ii}) \\ & + \lambda^2 u(T_{ic}M_{ci} - Y_{ic}W_{ci} + Z'_{ic}M_{ci} - M_{ii}) \\ & + \lambda^3 u(Y_{ic}M_{ci}) + \frac{u}{\lambda}(V_{ic}H_{ci}) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Assim, multiplicamos toda a Equação (26) por λ , e substituímos os seguintes termos:

- $V_{ic}H_{ci}$ por A ;
- $H_{ii} - T_{ic}H_{ci} + V_{ic}W_{ci} - Z'_{ic}H_{ci}$ por B ;
- $-T_{ic}W_{ci} - V_{ic}M_{ci} - Y_{ic}H_{ci} - Z'_{ic}W_{ci} + W_{ii}$ por C ;
- $T_{ic}M_{ci} - Y_{ic}W_{ci} + Z'_{ic}M_{ci} - M_{ii}$ por D ;
- $Y_{ic}M_{ci}$ por E ;

Assim, obtemos a seguinte equação:

$$u(A) + \lambda u(B) + \lambda^2 u(C) + \lambda^3 u(D) + \lambda^4 u(E) = 0 \quad (27)$$

\therefore

$$(A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D + \lambda^4 E)u = 0 \quad (28)$$

3.1 Proposição de Przeminiecky

De acordo com Przeminiecky [7], No capítulo 12.4 de seu livro, o seguinte sistema abaixo se enquadra como um problema de autovalor quadrático:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (29)$$

Para esse sistema, pose-se assumir uma solução tal:

$$\mathbf{U} = \mathbf{q}e^{pt} \quad (30)$$

Onde p é complexo. Assim, a Equação (29) se torna:

$$(p^2\mathbf{M} + p\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (31)$$

Que possui soluções diferentes de 0 para \mathbf{q} desde que:

$$|p^2\mathbf{M} + p\mathbf{C} + \mathbf{K}| = 0 \quad (32)$$

Para sistemas com diversos graus de liberdade, a formulação das Equações (31) e (32) se torna inconveniente. Assim, utilizando um método proposto por Duncan, podemos reduzir essas equações à uma forma padrão. Assim, combinaremos a Equação (29) com a identidade da Equação (33), para obtermos a Equação matricial (35):

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (33)$$

$$(34)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Assim, essa equação (35) pode ser reescrita da forma:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (36)$$

Agora, utilizando a Equação (30), a Equação 36 se torna:

$$(p\mathbf{A} + \mathbf{B})v = \mathbf{0} \quad (37)$$

Sendo essa ultima, uma forma muito mais simples de se resolver um problema de autovalor, por algum algoritmo computacional.

3.2 Analogia Para Nosso Sistema

Com a Proposição de Przemieniecky bem estruturada, pode-se então, fazer analogamente, o seguinte sistema de Equações:

$$\begin{cases} A\ddot{u} - A\ddot{u} + \frac{C}{2}\dot{u} - \frac{C}{2}\dot{u} \\ A\ddot{u} + B\ddot{u} + \frac{C}{2}\ddot{u} + \frac{C}{2}\dot{u} - \frac{C}{2}\dot{u} + D\dot{u} + Eu = 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$(39)$$

Assim, pode-se organizar o sistema em duas unicas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C}{2} \\ 0 & 0 & \frac{C}{2} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \\ u \end{bmatrix} = 0 \quad (40)$$

Assim, definimos as seguintes matrizes, sendo:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C}{2} \\ 0 & 0 & \frac{C}{2} & D \end{bmatrix}; \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \end{bmatrix}; \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \\ u \end{bmatrix}; \quad (41)$$

Assim, a Equação matricial (40) se torna

$$\mathbf{A}'\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}'\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (42)$$

Como em nosso sistema temos que:

$$u = ve^{wt} \quad (43)$$

Portanto, a Equação (42) se torna:

$$ve^{wt}(\mathbf{A}' + \mathbf{B}')\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (44)$$

\therefore

$$(w\mathbf{A}' + \mathbf{B}')\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (45)$$

De forma expandida, a Equação (45) tem a seguinte aparência:

$$w \left(\begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C}{2} \\ 0 & 0 & \frac{C}{2} & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w^3 \\ w^2 \\ w \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (46)$$

3.3 Ponto Atual

Para a resolução do problema de autovalor, procura-se uma forma de se resolver a forma simplificada da Equação (40), ou seja, a Equação (45):

$$(w\mathbf{A}' + \mathbf{B}')\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (47)$$

No ponto atual, busca-se formas de resolver essa problema de autovalor. Dentre algumas das possibilidades, estão o GMRES (Generalized minimal residual method), Métodos Jacobi-Davidson, ou algum outro método analítico.

4 Referências

- [1] Loeffler, C. F., Galimberti, R., Barcelos, H. M. 2018. A self-regularized scheme for solving Helmholtz problems using the boundary element direct integration technique with radial basis functions;
- [2] Loeffler, C. F., Cruz, A. L., Bulcão, A. 2015. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 50, pp. 97-108.
- [3] Loeffler, C. F., Barcelos, H. M., Mansur, W.J., Bulcão, A. 2015. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 61, pp. 218-225.
- [4] Loeffler, C. F., Zamprogno, L., Mansur, W. J., Bulcão, A. 2017. Performance of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potential Problems. *Computational Methods and Engineering and Sciences*, Vol. 113, 3, pp. 387-412.
- [5] Loeffler, C. F., Pereira, P. V. F., Lara, L. O. C., Mansur, W. J., 2017. Comparison between the Formulation of the Boundary Element Method that uses Fundamental Solution Dependent of Frequency and the Direct Radial Basis Boundary Element Formulation for Solution of Helmholtz Problems, *Eng. Analysis Boundary Elements*, 79, pp. 81-87.
- [6] Loeffler, C.F, Mansur, WJ, 2017. A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 74, pp. 14-18.
- [7] Przemieniecki, J.S., 1985. *Theory of matrix structural analysis*. Courier Corporation.