Solução de um Problema de Autovalor Especial Gerado pela formulação do DIBEM Auto-Regularizado.

MESTRANDO: LUAN HENRIQUE SIRTOLI

ORIENTADOR: CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DOCETE OMNES GENTES

UFES

Introdução

Este trabalho se baseia no desenvolvimento da Equação de Helmholtz, utilizando o Método dos Elementos de Contorno (MEC), e sua derivação, o Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta (DIBEM).

A Equação de Helmholtz é um tipo de Equação Diferencial Parcial, tipicamente utilizada para descrever fenómenos físicos que são dependentes do tempo, e corresponde a um caso geral da Equação de LaPlace.

O Método dos Elementos de Contorno é um método computacional para a solução de sistemas de equações diferenciais, formuladas em forma integral, baseada na modelagem do contorno e do domínio de uma região, para resolução de diversos casos de problemas de engenharia.

A sua variante, o DIBEM, evita a discretização do domínio utilizando Funções de Base Radiais primitivas, assim, transformando a integral de domínio em uma simples Integral de Contorno.

Introdução

A teoria de campo escalar aborda problemas relevantes na engenharia e na física, e neste contexto, os casos abordados pela Equação de Helmholtz estão entre os mais importantes, já que eles estão relacionados à análise da resposta acústica no domínio da frequência.

Este trabalho, se baseia então em buscar uma solução para um problema de autovalor encontrado, ao ser expandida a equação de Helmholtz.

Fundamentação

Assim, parte-se da Equação de Helmholtz em forma de autovalor, utilizando notação indicial.

$$u_{,ii}(X) = -\lambda u(X) \tag{1}$$

Onde:

λ é um escalar,

A formulação do Método dos Elementos de Contorno **(MEC)** se inicia com o estabelecimento de uma equação integral no qual uma função auxiliar $b^*(\xi)$ é utilizada, assim, formando a equação:

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X) b^*(\xi; X) \mathrm{d}\Omega(X) = -\lambda \int_{\Omega} u(X) b^*(\xi; X) \mathrm{d}\Omega(X) \tag{2}$$

Neste modelo proposto, $b^*(\xi; X)$ equivale à Solução Fundamental de Laplace, subtraída de uma função adicional $G^*(\xi; X)$, assim:

$$b^*(\xi; X) = u^*(\xi; X) - \lambda G^*(\xi; X) \tag{3}$$

Como conhecido no MEC, os valores desses termos são:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r(\xi; X)) \tag{4}$$

$$G^*(\xi; X) = -\frac{1}{8\pi} [r^2(\xi; X) - \ln\big(r(\xi; X)\big)] \tag{5}$$

A função $G^*(\xi;X)$ é o Tensor de Galerkin, associado ao problema de LaPlace. Assim:

$$G^*_{,ii}(\xi;X) = u^*(\xi;X) \tag{6}$$

Portanto, a equação integral dada na Equação (2) será de tal forma:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_{,ii}(X)u^*(\xi;X)d\Omega(X) - \lambda\int_\Omega u_{,ii}(X)G^*(\xi;X)d\Omega(X\Big) \\ &= -\lambda\int_\Omega u(X)u^*(\xi;X)d\Omega(X) + \lambda\int_\Omega u(X)\lambda G^*(\xi;X)d\Omega(X\Big)\end{aligned} \tag{7}$$

Para deduzirmos a forma inversa da integral de contorno, faremos a integração por partes e aplicamos o Teorema da Divergência, como abordados no MEC. Esses procedimentos são aplicados em ambos os lados da Equação (7), de forma que dois termos da integral se cancelam, resultando:

$$\begin{aligned}&c(\xi)u(\xi) + \int_\Gamma u(X)q^*(\xi;X)d\Gamma(X) - \int_\Gamma q(X)u^*(\xi;X)d\Gamma(X\Big) \\ &+\lambda(-\int_\Gamma q(X)G^*(\xi;X)d\Gamma(X) + \int_\Gamma u(X)S^*(\xi;X)d\Gamma(X)) = \lambda^2\int_\Omega u(X)G^*(\xi;X)d\Omega(X\Big)\end{aligned} \tag{8}$$

Ainda assim, uma integral de domínio persiste no lado direito da Equação (8).

A equação anterior introduziu duas novas funções, nas quais são:

$$q^*(\xi;X) = u^*_{,i}(\xi;X)n_i(X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi;X)} r_i(\xi;X)n_i(X) \tag{9}$$

$$S^*(\xi;X) = G^*_{,i}(\xi;X)n_i(X) = -\frac{[2\ln(r(\xi;X)) - 1]}{8\pi} r_i(\xi;X)n_i(X\Big) \tag{10}$$

Assim, é utilizado o DIBEM, para resolve-la. Assim, o núcleo completo dessa integral de domínio será aproximado utilizando funções de base radial $F^j(X^j;X)$, onde o argumento é composto pela distância Euclidiana entre os pontos base X^j e os pontos de domínio **X**.

O núcleo agora é não-singular, quando os pontos fonte são coincidentes com os pontos de campo, e consequentemente, nenhum procedimento de regularização é necessário. Assim, o método proposto transforma a integral de domínio utilizando uma função de interpolação primitiva $\Psi^j_{,ii}(X;X^j)$, na qual sua relação com a função radial $F^j(X;X^j)$ é apresentada abaixo:

$$\int_\Omega u(X)G^*(\xi;X)\mathrm{d}\Omega(X) = {}^\xi\alpha^j \int_\Omega F^j\big(X;X^j\big)\mathrm{d}\Omega(X) =$$

$${}^\xi\alpha^j \int_\Omega \Psi^j_{,ii}\big(X;X^j\big)\mathrm{d}\Omega(X) = {}^\xi\alpha^j \int_\Gamma \Psi^j_{,ii}\big(X;X^j\big)n_i\mathrm{d}\Gamma(X) = {}^\xi\alpha^j \int_\Gamma \eta^j\big(X;X^j\big)\mathrm{d}\Gamma(X) \tag{11}$$

Para cada ponto fonte ξ dado pela Equação (11), é feita uma leitura de todos os pontos base X^j em relação aos pontos do domínio **X**, com peso dos coeficientes ${}^{\xi}\alpha^j$. Assim, a Equação 8 se torna:

$$c(\xi)u(\xi)+\int_{\Gamma}u(X)q^{*}(\xi;X)d\Gamma(X)-\int_{\Gamma}q(X)u^{*}(\xi;X)d\Gamma(X\bigg)$$
$$+\lambda(-\int_{\Gamma}q(X)G^{*}(\xi;X)d\Gamma(X)+\int_{\Gamma}u(X)S^{*}(\xi;X)d\Gamma(X))=\lambda^{2}\,{}^{\xi}\alpha^{j}\int_{\Gamma}\eta^{j}(X;X^{j})\mathrm{d}\Gamma(X)\bigg)$$

Após os procedimentos de discretização padrão do BEM, pode se escrever uma equação matricial a partir da Equação acima.

(12)

Assim, temos a seguinte Equação:

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ic} & \cdots & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} S_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1 & \cdots & {}^1\alpha^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \cdots & {}^n\alpha^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

- Os coeficientes H_{ij} e G_{ij} são referentes, respectivamente, às integrações $u^*(\xi;X)$ e $q^*(\xi;X)$, no contorno.
- Os coeficientes W_{ij} e S_{ij} são referentes, respectivamente, às integrações $G^*(\xi;X)$ e sua derivativa normal $G^*_{,i}(\xi;X)$, no contorno.
- O vetor N_j representa a integração da função radial auxiliar $\eta^j(X^j;X)$.

Para problemas de Helmholtz, o DIBEM deve considerar os valores nodais do potencial $u(X)$ explicitamente, porém, na Equação (12) os valores potenciais nodais estão implicitos no vetor A_j. Esse potencial $U(X)$ deve ser explicito para permitir a construção da matriz de inércia.

Desta forma, o vetor A_j deve ser reescrito da seguinte forma:

$$A_\xi = [N_1 \quad \dots \quad N_m]\begin{bmatrix} {}^{\xi}\alpha^1 \\ \vdots \\ {}^{\xi}\alpha^m \end{bmatrix} \tag{13}$$

Os coeficientes ${}^{\xi}\alpha^j$ do ultimo vetor podem ser calculados resolvendo um sistema de equações algébricas, da seguinte forma:

$$[{}^{\xi}\alpha] = [F]^{-1}[{}^{\xi}\Lambda][F]\alpha = [F]^{-1}[{}^{\xi}\Lambda][u] \tag{14}$$

Deve ser ressaltado, que ao utilizar o DIBEM, a solução fundamental compõe o núcleo a ser interpolado. Na equação (14) a matriz diagonal ${}^{\xi}\Lambda$ é composta pelo Tensor de Galerkin $G^*(\xi; X)$.

Após a implementação do algebrismo matricial, o sistema de elementos de contorno final pode ser escrito da seguinte forma:

$$
\begin{bmatrix} H_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{ic} & \cdots & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix}
$$
$$
-\lambda \begin{bmatrix} S_{cc} & \cdots & 0_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{ic} & \cdots & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ \vdots \\ q_i \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{cc} & \cdots & M_{ci} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{ic} & \cdots & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} \quad (15)
$$

Que é nossa Equação de Helmholtz em forma matricial.

Após a definição da Equação de Helmholtz (15), modelamos a equação para um problema de autovalor em vibração livre, obtendo assim, a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{u\bar{u}} & W_{u\bar{q}} \\ W_{q\bar{u}} & W_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} \\ -\lambda \begin{bmatrix} S_{u\bar{u}} & S_{u\bar{q}} \\ S_{q\bar{u}} & S_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} \tag{16}$$

Assim, devido aos valores prescritos serem iguais à 0, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} H_{u\bar{q}}u - G_{u\bar{u}}q + \lambda W_{u\bar{q}}u - \lambda S_{u\bar{u}}q = \lambda^2 M_{u\bar{q}}u & (17) \\ H_{q\bar{q}}u - G_{q\bar{u}}q + \lambda W_{q\bar{q}}u - \lambda S_{q\bar{u}}q = \lambda^2 M_{q\bar{q}}u & (18) \end{cases}$$

Isolamos o termo q na Equação (17):

$$q = (G_{u\bar{u}}^{-1} + \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1})(H_{u\bar{q}}u + \lambda W_{u\bar{q}}u - \lambda^2 M_{u\bar{q}}u\Big) \tag{19}$$

Chamamos então o termo $H_{u\bar{q}} + \lambda W_{u\bar{q}} - \lambda^2 M_{u\bar{q}}$ de Z e substituímos na Equação (19),

$$\mathrm{Z} = H_{u\bar{q}} + \lambda W_{u\bar{q}} - \lambda^2 M_{u\bar{q}}; \qquad \text{portanto:} \qquad q = (G_{u\bar{u}}^{-1} + \frac{1}{\lambda} S_{u\bar{u}}^{-1})(Zu)$$

Assim, nossa equação (18) se torna:

$$H_{q\bar{q}}u - G_{q\bar{u}}(G_{u\bar{u}}^{-1} + \frac{1}{\lambda}S_{u\bar{u}}^{-1})(Zu) + \lambda W_{q\bar{q}}u - \lambda S_{q\bar{u}}(G_{u\bar{u}}^{-1} + \frac{1}{\lambda}S_{u\bar{u}}^{-1})(Zu) = \lambda^2 M_{q\bar{q}}u \tag{22}$$

Fazendo a distribuição dos termos, chegamos na seguinte equação:

$$H_{q\bar{q}}u - G_{q\bar{u}}G_{u\bar{u}}^{-1}(Zu) + \frac{1}{\lambda}G_{q\bar{u}}S_{u\bar{u}}^{-1}(Zu) + \lambda W_{q\bar{q}}u - \lambda S_{q\bar{u}}G_{u\bar{u}}^{-1}(Zu) - S_{q\bar{u}}S_{u\bar{u}}^{-1}(Zu) = \lambda^2 M_{q\bar{q}}u \tag{23}$$

Para simplificar, chamamos os termos:

- $G_{q\bar{u}}G_{u\bar{u}}^{-1}$ de $T_{q\bar{u}}$;
- $G_{q\bar{u}}S_{u\bar{u}}^{-1}$ de $V_{q\bar{u}}$;
- $S_{q\bar{u}}G_{u\bar{u}}^{-1}$ de $Y_{q\bar{u}}$;
- $S_{q\bar{u}}S_{u\bar{u}}^{-1}$ de $Z'_{q\bar{u}}$

Obtendo assim, a seguinte equação:

$$H_{q\bar{q}}u - T_{q\bar{u}}(Zu) + \frac{1}{\lambda}V_{q\bar{u}}(Zu) + \lambda W_{q\bar{q}}u - \lambda Y_{q\bar{u}}(Zu) - Z'_{q\bar{u}}(Zu) = \lambda^2 M_{q\bar{q}}u \tag{24}$$

Expandindo todos os termos, e isolando os termos λ e u, obtemos:

$$\begin{aligned}
&u\left(H_{q\bar{q}} - T_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}} + V_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} - Z'_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}\right) \\
&+\lambda u\left(-T_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} - V_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} - Y_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}} - Z'_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} + W_{q\bar{q}}\right) \\
&+\lambda^2 u\left(T_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} - Y_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} + Z'_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} - M_{q\bar{q}}\right) \\
&+\lambda^3 u\left(Y_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}\right) + \frac{u}{\lambda\left(V_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}\right)} = 0
\end{aligned} \tag{25}$$

Assim, multiplicamos toda a Equação (26) por λ, e substituímos os seguintes termos:

- $V_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}$ por A;
- $H_{q\bar{q}} - T_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}} + V_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} - Z'_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}}$ por B;
- $-T_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} - V_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} - Y_{q\bar{u}}H_{u\bar{q}} - Z'_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} + W_{q\bar{q}}$ por C;
- $T_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} - Y_{q\bar{u}}W_{u\bar{q}} + Z'_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}} - M_{q\bar{q}}$ por D;
- $Y_{q\bar{u}}M_{u\bar{q}}$ por E;

Assim, obtemos, por fim a seguinte equação reduzida:

$$(A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D + \lambda^4 E)u = 0 \tag{26}$$

De acordo com Przeminiecky [7], No capitulo 12.4 de seu livro, o seguinte sistema abaixo se enquadra como um problema de autovalor quadrático:

$$MU + CU + KU = 0 \tag{27}$$

Então, para esse sistema, pode-se assumir uma solução tal:

$$U = qe^{pt} \tag{28}$$

Neste sistema proposto:

- U são os deslocamentos;
- q é a matriz coluna de amplitudes associada à U;

Assim:

$$(p^2 M + pC + K)q = 0 \tag{29}$$

Que possui soluções diferentes de 0 para q desde que:

$$|p^2M + pC + K| = 0 \tag{30}$$

Para sistemas com diversos graus de liberdade, a formulação das Equações (29) e (30) se torna inconveniente. Assim, utilizando um método proposto por Duncan, podemos reduzir essas equações à uma forma padrão. Assim, combinaremos a Equação (27) com a identidade da Equação (31), para obtermos a Equação matricial (33):

$$\mathbf{M\dot{U}} - \mathbf{M\dot{U}} = \mathbf{0} \tag{31}$$

$$\mathbf{M\ddot{U}} + \mathbf{C\dot{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{0} \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\ddot{U}} \\ \mathbf{\dot{U}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{-M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\dot{U}} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Definindo as matrizes abaixo, podemos reduzir a Equação matricial (33), de forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{-M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}; \mathbf{\dot{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\ddot{U}} \\ \mathbf{\dot{U}} \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{\dot{U}} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Assim, a Equação (33) se torna:

$$\mathbf{A\ddot{U}} + \mathbf{BU} = \mathbf{0} \tag{35}$$

Então, analogamente para a Equação de Helmholtz (26):

$$D\dddot{u} - D\dddot{u} = 0$$

$$C\ddot{u} - C\ddot{u} = 0$$

$$B\dot{u} - B\dot{u} = 0$$

$$A\ddddot{u} - A\ddddot{u} + \frac{C}{2}\dot{u} - \frac{C}{2}\dot{u}$$

$$A\ddddot{u} + B\dddot{u} + \frac{C}{2}\ddot{u} + \frac{C}{2}\dot{u} - \frac{C}{2}\dot{u} + D\dot{u} + Eu = 0$$

Assim, pode-se organizar o sistema em duas únicas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & D & 0 & 0 \\ E & D & C & B \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddddot{u} \\ \dddot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dddot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \\ u \end{bmatrix} = 0 \qquad (36)$$

Reduz-se esta equação, definindo as seguintes matrizes, sendo:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & D & 0 & 0 \\ E & D & C & B \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix}; B' = \begin{bmatrix} -D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \end{bmatrix}$$

Assim o sistema da Equação (36) se torna:

$$A' \begin{bmatrix} \dddot{u} \\ \dddot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \end{bmatrix} + B' \begin{bmatrix} \dddot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \\ u \end{bmatrix} = 0 \tag{37}$$

Como em nosso sistema, temos que $u = ve^{\lambda t}$, portanto, podemos definir a matriz w abaixo:

$$w = \begin{bmatrix} \dddot{u} \\ \ddot{u} \\ \dot{u} \\ u \end{bmatrix}; \tag{38}$$

Então nosso sistema final será:

$$A'w + B'w = 0 \tag{39}$$

Assim, expandindo $u = ve^{\lambda t}$ em w, temos:

$$w = w(x,t) = V(x)e^{\lambda t}$$

$$\therefore$$

$$w(x,t) = \lambda V(x)e^{\lambda t};$$

Que, quando aplicadas na Equação (39), tornam a mesma da seguinte forma:

$$A'\lambda V(x)e^{\lambda t} + B'V(x)e^{\lambda t} = 0 \tag{40}$$

Simplificando a Equação (40), temos:

$$e^{\lambda t}(\lambda A' + B')V(x) = 0 \tag{41}$$

E então, à partir desta equação, podemos começar a simular os resultados obtidos desta modelagem.

	2018	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ	JAN	FEV	MAR
Disciplinas Cursadas	X															
Tema	X															
Revisão Bibliográfica	X	X	X	X	X	X	X	X								
Início da Pesquisa	X															
Revisão do material da matéria de MEC		X	X													
Estudo da pesquisa deixada por outros mestrandos		X	X													
Revisão dos artigos utilizados por outros mestrandos			X	X												
Revisão das fontes utilizados nestes artigos			X	X	X	X	X	X								
Pesquisa em livros relacionados ao tema			X	X	X	X	X	X								
Registro dos Materiais utilizados	X	X	X	X	X	X	X	X								
Modelagem				X	X	X										
Definição do caminho a ser tomado para solucionar o problema				X	X											
Utilização dos Artigos Encontrados para Modelar Solução para o Problema					X	X										
Simulação						X	X	X	X	X	X					
Modificar Código para Escrita das Matrizes						X										
Adaptação do Código de Trabalhos Anteriores						X	X									
Criação de Funções Especificas para Resolução do Nosso problema							X	X	X							
Otimização do Código								X	X							
Simulação de Problemas de Simples Resolução								X	X							
Conferência dos Resultados								X	X							
Simulação de Problemas de Dificil Resolução									X	X						
Conferência dos Resultados									X	X	X					
Comparação dos erros com outros Métodos										X	X					
Escrita						X	X	X	X	X	X	X				
Escrita da Monografia						X	X	X	X	X	X	X				
Revisão de Conteúdo										X	X	X				
Revisão de Gramática											X	X	X			
Impressão												X	X			
Defesa													X	X	X	X

Referências

[1] Loeffler, C. F., Galimberti, R., Barcelos, H. M. 2018. A self-regularized scheme for solving Helmholtz problems using the boundary element direct integration technique with radial basis functions;

[2] Loeffler, C. F., Cruz, A. L., Bulcão, A. 2015. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 50, pp. 97-108.

[3] Loeffler, C. F., Barcelos, H. M., Mansur, W.J., Bulcão, A. 2015. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 61, pp. 218-225.

[4] Loeffler, C. F., Zamprogno, L., Mansur, W. J., Bulcão, A. 2017. Performance of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potential Problems. Computational Methods and Engineering and Sciences, Vol. 113, 3, pp. 387-412.

[5] Loeffler, C. F., Pereira, P. V. F., Lara, L. O. C., Mansur, W. J., 2017. Comparison between the Formulation of the Boundary Element Method that uses Fundamental Solution Dependent of Frequency and the Direct Radial Basis Boundary Element Formulation for Solution of Helmholtz Problems, Eng. Analysis Boundary Elements, 79, pp. 81-87.

[6] Loeffler, C.F, Mansur, WJ, 2017. A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem. Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 74, pp. 14-18.

[7] Przemieniecki, J.S., 1985. Theory of matrix structural analysis. Courier Corporation.