



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Vitor Pancieri Pinheiro

**Aplicação do Método de Elementos de
Contorno com Integração Direta Regularizada a
Problemas Advectivo-Difusivos Bidimensionais**

Vitória

2018

Vitor Pancieri Pinheiro

Aplicação do Método de Elementos de Contorno com Integração Direta Regularizada a Problemas Advectivo-Difusivos Bidimensionais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. D.Sc. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Vitória
2018

Vitor Pancieri Pinheiro

Aplicação do Método de Elementos de Contorno com Integração Direta Regularizada a Problemas Advectivo-Difusivos Bidimensionais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Prof. D.Sc. Carlos Friedrich Loeffler Neto
Orientador
PPGEM-UFES

D.Sc. Eng. André Bulcão
CENPES-Petrobrás

Prof. D.Sc. José Antonio Fontes Santiago
COPPE-UFRJ

Prof. D.Sc. Julio Tomás Aquije Chacaltana
DEA-UFES

Vitória
2018

Vitor Pancieri Pinheiro Aplicação do Método de Elementos de Contorno com Integração Direta Regularizada a Problemas Advectivo-Difusivos Bidimensionais/
Vitor Pancieri Pinheiro. – Vitória, 2018- 97 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. D.Sc. Carlos Friedrich Loeffler Neto
Dissertação – , 2018.

1. Integração Direta.
2. Problemas Advectivo-Difusivos.
3. Processo de Regularização
4. Método de Elementos de Contorno I. Pinheiro, Vitor Pancieri. II. Universidade Federal do Espírito Santo. IV. Aplicação do Método de Elementos de Contorno com Integração Direta Regularizada a Problemas Advectivo-Difusivos Bidimensionais

CDU 02:141:005.7

"Há mais pessoas que desistem do que pessoas que fracassam".
(Henry Ford)

Resumo

As formulações mais usuais do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para resolver problemas advectivo-difusivos apresentam dificuldades significativas no tratamento do termo de transporte, por distintas razões. Enquanto a formulação clássica (MECC), que usa a solução fundamental advectivo-difusiva, é limitada para casos de campos de velocidade variável, a formulação de Dupla Reciprocidade (MECDR) apresenta problemas de precisão, sendo incapaz de produzir resultados satisfatórios, mesmo em problemas com números Peclét apenas moderados. Este trabalho aplica a recente Técnica de Interpolação Direta Regularizada com funções de base radial (MECIDR) para modelar o termo advectivo, permitindo assim uma boa precisão em problemas dominados pela advecção. O MECID apresentou resultados superiores à formulação com dupla reciprocidade em várias aplicações, como nos casos regidos pelas equações de Poisson e Helmholtz e, portanto, a sua extensão aos problemas advectivos-difusivos é uma consequência natural do seu desenvolvimento. Para avaliar o desempenho desta formulação, este projeto traz problemas-teste com solução analítica conhecida e já simulados pelas formulações anteriormente mencionadas, para expor a aplicabilidade e adequação do MECIDR neste contexto.

Palavras-chave: Integração Direta; Problemas Advectivo-Difusivos; Processo de Regularização; Método de Elementos de Contorno

Abstract

The most usual formulations of the Boundary Element Method (BEM) for solving the diffusive-advective problems present significant difficulties in the treatment of the transport term, for various reasons. While the classical formulation (CBEM), which uses the fundamental diffusive-advective solution, is limited in variable velocity fields, the Dual Reciprocity formulation (DRBEM) presents precision problems, being unable to produce satisfactory results even for moderate Peclét numbers. This work applies the recent Regularized Direct Interpolation Technique with radial basis functions (RDIBEM) to model the advective term, thus allowing good accuracy in problems dominated by advection. The DIBEM performance was superior to the formulation with dual reciprocity in several applications, as in the cases governed by the Poisson and Helmholtz equations, and thus, its extension to diffusive-advective problems is a natural consequence of its development. In order to evaluate the efficiency of the new formulation, test-problems with known analytical solution and already simulated by the formulations previously mentioned are solved, in order to expose the applicability and adequacy of RDIBEM in this context.

Keywords: Direct Integration; Advective-Diffusive Problems; Regularization Process; Boundary Element Method

Lista de ilustrações

Figura 1 – Croqui Representativo do Caso I	51
Figura 2 – Análise de Convergência em relação a P.I e EC. Pe=1	52
Figura 3 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial na Aresta Significativa - 320 EC Fixado	53
Figura 4 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial nos Pontos Internos- 320EC Fixado - Critério I e II	54
Figura 5 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial na Aresta Significativa - 1156 P.I Fixado	55
Figura 6 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial nos Pontos Internos- 1156 P.I Fixado - Critério I e II	56
Figura 7 – Croqui Representativo do Caso II	56
Figura 8 – Análise de Convergência em relação a P.I com Pe=1	58
Figura 9 – Análise de Convergência em relação a EC com Pe=1	58
Figura 10 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Fluxo na Aresta Significativa - 320 EC Fixado	59
Figura 11 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial nos Pontos Internos- 320EC Fixado - Critério I e II	60
Figura 12 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Fluxo na Aresta Significativa - 1156 P.I Fixado	61
Figura 13 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial nos Pontos Internos- 1156 P.I Fixado - Critério I e II	61
Figura 14 – Croqui Representativo do Caso III	62
Figura 15 – Análise de Convergência em relação a P.I com Pe=1	63
Figura 16 – Análise de Convergência em relação a EC com Pe=1	64
Figura 17 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Fluxo no Contorno- 320EC Fixado - Critério I e II	65
Figura 18 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Pontos Internos 320EC Fixado - Critério I e II	65
Figura 19 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Fluxos no Contorno - 1156 P.I Fixado - Critério I e II	66
Figura 20 – Análise Paramétrica do Número de Peclét -Pontos Internos - 1156 P.I Fixado - Critério I e II	67
Figura 21 – Croqui Representativo do Caso IV	68
Figura 22 – Análise de Convergência em relação a P.I com Pe=1	69
Figura 23 – Análise de Convergência em relação a EC com Pe=1	70

Figura 24 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Fluxo no Contorno- 320EC	
Fixado - Critério I e II	71
Figura 25 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Pontos Internos 320EC Fixado	
- Critério I e II	71
Figura 26 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Elementos de Contorno 1156	
P.I Fixado - Critério I e II	72
Figura 27 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Elementos de Contorno 1156	
P.I Fixado - Critério I e II	73
Figura 28 – Croqui Representativo do Caso IV	85

Lista de abreviaturas e siglas

MDF	Método de Diferenças Finitas
MEF	Método de Elementos Finitos
MVF	Método de Volumes Finitos
MEC	Método de Elementos de Contorno
MECC	Método de Elementos de Contorno Clássico
MECDR	Método de Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade
MECID	Método de Elementos de Contorno com Integração Direta
MECIDR	Método de Elementos de Contorno com Integração Direta Regularizada
MSV	Método de Separação de Variáveis
LE	Lado Esquerdo
LD	Lado Direito
LA	Lado Advectivo
LD	Lado Difusivo
EC	Elementos de Contorno
PI	Pontos Internos

Lista de símbolos

ρ	Massa específica do fluído
t	Tempo
x_i, x_j	Direções Cartesianas
u_i, u_j	Velocidade nas direções cartesianas
f_i	Força de campo por unidade volumétrica
T_{ij}	Tensor das tensões de um material contínuo
c_p	Calor específico a pressão constante do fluído
T	Temperatura do escoamento
β	Coeficiente de expansão térmica
p	Pressão termodinâmica
σ_{ij}	Tensor Viscoso de um fluido newtoniano
μ	Viscosidade Dinâmica de um fluido
D_{ij}	Tensor taxa de cisalhamento
λ	Constante gerada pela hipótese de Stokes
δ_{ij}	Delta de Kronecker
q_j	Vetor de Fluxo Térmico
k_{ij}	Tensor de Condutividade Térmica do Meio Contínuo
$T_{,i}$	Vetor Gradiente de Temperatura
k	Magnitude da Condutividade Térmica de um meio contínuo isotrópico
I	Matriz Identidade
V	Velocidade Característica
L	Comprimento Característico
T_s	Temperatura da superfície sólida

T_m	Temperatura Média do escoamento
x_j^*	Comprimento Adimensional
u_j^*	Velocidade Adimensional
T^*	Temperatura Adimensional
Pe	Número Adimensional de Peclét
Re	Número Adimensional de Reynolds
Pr	Número Adimensional de Prandtl
α	Difusividade Térmica do fluído
u	Campo Escalar Arbitrário
v_i	Vetor Velocidade
Ω	Domínio do Problema
X	Ponto Campo
ξ	Ponto Fonte
u^*	Solução Fundamental do problema
Γ	Contorno da Geometria do problema
n_i	Vetor unitário normal ao contorno
q	Fluxo correlato ao campo escalar u
q^*	Fluxo correlato ao campo escalar u^*
Δ	Função Delta de Dirac
r	Distância entre o ponto fonte e ponto campo
k	Condutividade Térmica do fluído
K_o	Função de bessel modificada de segunda espécie e ordem zero
K_1	Função de bessel modificada de segunda espécie e ordem um
$c(\xi)$	Constante correlata a localização do ponto fonte
$p(X)$	Ação de Domínio Artificial da técnica MECDR
α_ξ^j	Constante de ponderação da aproximação via bases radiais

F^j	Função de base radial selecionada
ψ	Primitiva de função de base radial selecionada
η^j	Primeira Derivada Normal da Função Primitiva
F^{-1}	Inversa da Matriz correlata às funções de bases radiais
v_x, v_y	Componentes do Vetor Velocidade do Escoamento
β	Constante de ponderação da aproximação via bases radiais
β^j	Variável de condensação de componentes de velocidade e cossenos diretores na MECIDR
u, v	Componentes da Velocidade nas Direções x e y
θ	Condição de Contorno Não-Homogênea de Potencial
Q	Condição de Contorno Não-Homogênea de Fluxo
$\gamma(x)$	Função Auxiliar da Proposta via MSV
$X_i(x)$	Função Exclusiva de x
$Y_i(y)$	Função Exclusiva de y
K_i	Constante de Proporcionalidade do MSV
λ	Raiz de Equação Característica
p	Variável Auxiliar em função da Componente u
q_i	Autovalores da Equação Transcendental

Sumário

1	Introdução	14
1.1	Objetivo do Trabalho	15
2	Estado da Arte	16
3	Modelagem Matemática	20
3.1	Princípios Fundamentais da Mecânica do Contínuo	20
3.2	Equações Cinemáticas e Constitutivas Relevantes	21
3.3	Hipóteses Simplificadoras	23
3.4	Equações Governantes de um Problema Convectivo	25
3.5	Definição do Problema	25
4	Formulação Numérica do Problema Advectivo-Difusivo	27
4.1	Contextualização e Limitações do MEC	27
4.2	Formulação Clássica do MEC	28
4.3	Formulação via Técnica do Dupla Reciprocidade	31
4.4	Formulação via Integração Direta Regularizada	36
4.4.1	Processo de Regularização do Termo Advectivo	38
4.4.2	Tratamento do Termo Regularizado	39
4.4.3	Tratamento do Termo Excedente de Domínio	40
4.4.4	Processo de Discretização do Lado Difusivo	41
4.4.5	Processo de Discretização do Lado Advectivo	41
4.4.6	Constituição do Sistema Linear	43
4.4.7	Determinação da Matriz Alfa	44
5	Análise de Resultados e Discussões	49
5.1	Metodologia Adotada	49
5.2	Caso I - Problema Unidimensional com Campo de Velocidade Uniforme	51
5.3	Caso II - Problema Bidimensional com Condições de Contorno Variáveis	56
5.4	Caso III - Problema Bidimensional com Condições e Contorno Variáveis	62
5.5	Caso IV - Problema Bidimensional com Condições de Contorno não-homogêneas	68
6	Considerações Finais	74
	Referências Bibliográficas	76
	Apêndice A: Malhador de Problema Advectivo-Difusivo	80
	Apêndice B: Solução Analítica do Caso IV	84
	Apêndice C: Algoritmo para Cálculo de Autovalores	93

1 Introdução

A relevância dos métodos numéricos computacionais no contexto contemporâneo da engenharia é notório, quer seja na academia ou nos mais diversos tipos de aplicação prática. A versatilidade e robustez associada aos mesmos permite, por sua vez, uma maior articulação nas investigações fenomenológicas de interesse ou mesmo na capacidade de dimensionar e projetar sistemas e equipamentos mais adequados, visto a grande dinâmica quando o foco é um comparativo de possíveis cenários técnicos. Neste tocante, destacam-se de sobremaneira o Métodos de Diferenças Finitas (MDF) [1], Método de Elementos Finitos (MEF) [2], Método de Elementos de Contorno (MEC) [3] e mais recentemente o Método dos Volumes Finitos (MVF) [4]. Tais técnicas tem aplicabilidade nos mais diversos campos da física-matemática, onde, logicamente, o estado da arte confronta-se com diversos temas de difícil trato, que geram, por sua vez, instabilidades numéricas.

Dentre as diversas áreas nas quais pode-se aplicar com êxito os métodos numéricos mencionados a priori, destaca-se a linha de termofluídos computacional, cuja natureza convectiva e naturalmente acoplada dos problemas confere a esta um série de desafios à performance dos métodos numéricos. Em um problema de dinâmica dos fluídos com simultânea transferência de calor tem-se complexidades associadas ao acoplamento de equações governantes via propriedades do meio contínuo, natureza não-trivial no relacionamento dos campos de pressão e velocidade, além de limitações intrínsecas à dominância dos efeitos advectivos.

Com foco nos problemas de advecção dominante é possível constatar avanços consistentes do método de elementos de contorno. Em sua formulação clássica o MEC responde com solidez a situações de forte advecção, entretanto limita-se a campos de velocidade constante por conta da complexidade atrelada à solução fundamental demandada [5]. A formulação de dupla reciprocidade (MECDR), por sua vez, não encontra-se limitada a campos de velocidade mais simples, todavia é restrito a baixos número de Peclét, onde o método já apresenta instabilidades [6]. A mais recente formulação baseada em integração direta (MECID), já apresentou excelentes resultados em problemas de Poisson [7] e Helmholtz [8], e portanto há uma demanda clara por uma investigação sequencial de sua performance em problemas advectivo-difusivos.

1.1 Objetivo do Trabalho

Em alinhamento com a demanda de investigação mais aprofundada de problemas advectivos-difusivos bidimensionais estacionários, o foco principal deste trabalho é determinar de forma sistêmica o comportamento da formulação de elementos de contorno por integração direta regularizada (MECIDR) frente a estes problemas, de forma a inferir sobre sua precisão e ver-satilidade.

Este objetivo é bipartido, uma vez que, baseada em aproximações por base radial, a formulação proposta têm dois parâmetros-chave de controle de precisão: quantidade de pontos discretos utilizados na malha de contorno e quantidade de pontos componentes da nuvem de pontos internos. A ciência destes dois fatores de controle permite uma análise da robustez da formulação proposta em relação à dominância dos efeitos advectivos, que pode ser considerado o objetivo específico desta dissertação.

2 Estado da Arte

Nesta seção pretende-se expor o processo de evolução do Método de Elementos de Contorno aplicado a problemas de advecção-difusão estacionários e não-estacionários. Para tanto os desenvolvimentos científicos são elencados em ordem de avanço no estado da arte e sempre que possível também de forma cronológica.

Ikeuchi & Onishi (1983) foram uns dos primeiros autores a abordar a solução do problema advectivo difusivo via método de elementos de contorno. Em seu artigo foi testada uma solução direta via formulação integral inversa, que utiliza a solução fundamental do próprio problema advectivo-difusivo e uma solução denominada de iterativa que utilizava a solução fundamental do problema de laplace. A formulação clássica apresenta resposta consistente e precisa para problema com condições puramente de Dirichlet em número de Peclét mediano, enquanto a análise de convergência de segunda ordem é alcançada para baixos números do adimensional. A formulação iterativa, baseada em solução fundamental mais simples, por sua vez, apresentou resultados razoáveis apenas para número de Peclét muito baixos e não exibiu monotonicidade, o que indica o patamar em desenvolvimento, da segunda formulação proposta pelos autores.

O artigo de Ikeuchi & Sakakihara (1985) resolve o problema convectivo-difusivo em regime estacionário através de um uma formulação de elementos de contorno, onde, o operador original do problema é transformado em um operador simétrico mesmo para casos dominados pela advecção. Os teste são realizados discretizando as expressões integrais por elementos constantes e lineares e as comparações são feitas em relação a solução analítica e ao método de elementos finitos formulado via técnica de Galerkin. Um experimento numérico com campo unidimensional de velocidades é testado até números medianos do adimensional de Peclét, apresentando bons resultados e nenhum sinal de desestabilização, enquanto o método de elementos finitos apresenta instabilidades devido a dominância da advecção. O comportamento observado já era esperado, pois a solução fundamental original do problema ainda é utilizada, mesmo que em formato transformado.

O artigo de Brebbia e Partridge (1990) sintetiza os resultados de teste sistêmicos correlatos a formulação de dupla reciprocidade em problemas de campo escalar generalizado. No tocante a problemas advectivo-difusivos são testados problemas lineares e não lineares, e até bidimensionais, entretanto mantendo-se uma geometria elíptica simples. Também não foi executada pelo autores uma análise paramétrica correlata a dominância dos efeitos advectivos, uma vez que o objetivo dos mesmos no artigo era, a priori, avaliar a versatilidade do método da dupla reciprocidade.

O trabalho de Wrobel & De Figueiredo (1991) apresenta a solução do problema advectivo-difusivo em regime permanente e transiente, ao solucioná-lo pela formulação clássica e também pela denominada aproximação de dupla reciprocidade. Os teste numéricos foram baseados

em problema com campo de velocidade constante, no qual a formulação clássica, tal como esperado, apresenta excelentes resultados para números de Peclét elevados. A formulação de dupla reciprocidade também apresentou excelentes resultados, porém, só foi testada para baixos valores de Peclét.

O periódico publicado por Wrobel, Qiu e Power (1991) executa uma comparação entre três diferentes formulações de elementos de contorno para problemas advectivos-difuvisos, sendo uma delas a formulação de dupla reciprocidade com uso da solução fundamental de Laplace. Dois casos com campos unidirecionais e variáveis de velocidade são testados e os resultados baseados em dupla reciprocidade, indicam, de forma geral, que só são possíveis resultados satisfatórios para campos de velocidade de baixa magnitude.

O trabalho de Wrobel & De Figueiredo (1991) apresenta uma formulação de elementos de contorno para problemas advectivo-difusivos baseada em uma decomposição do campo de velocidade em uma média e uma flutuação. Enquanto a parte média é incluída em uma tratamento que utiliza a solução fundamental correlata ao problema, a perturbação é acoplada a uma aproximação via dupla reciprocidade. Os resultados obtidos apontam para uma limitação de tal abordagem apenas no âmbito de problemas com difusão dominante.

O trabalho de Young e Eldho (2000) propõe a solução de problemas advectivo-difusivos por meio de um método híbrido que consiste em aliar o Método Lagrangiano-Euleriano ao Método de Elementos de Contorno. Este método híbrido foi testado no trabalho dos autores e teve boa resposta em problemas de velocidade variável, em problemas dominados pela difusão ou mesmo em problemas puramente advectivos com número de Peclét infinito. A formulação deste método utiliza a solução fundamental associada a um problema de Laplace-Poisson transiente, o que flexibiliza boa condição de trabalho com velocidades variáveis. O método proposto pelos autores, ao que tudo indica, consegue um bom balanço entre a problemática do formato do campo de velocidade e os efeitos numéricos indesejáveis causados pela dominância da advecção.

Massaro em (2001) em sua dissertação de mestrado executou um amplo estudo sobre o desempenho das formulações clássica e com técnica de dupla reciprocidade em problema advectivo-difusivos estacionários bidimensionais. O autor comparou, de forma separada, o desempenho de ambas as formulações frente a soluções analíticas de referência para casos com campos de velocidade uniforme e também variável. Como já era esperado, nos casos de velocidade variável só é possível o uso de formulações pautadas em aproximações via bases radiais, uma vez que a solução fundamental correlata não é previamente conhecida. Já em relação aos efeitos advectivos, a formulação clássica mostrou-se hábil a acompanhar o aumento no número de Peclét com baixos níveis de erro, enquanto a técnica de dupla reciprocidade manteve resultados consistentes apenas para números baixos do adimensional.

O artigo de Boztosun e Charafi (2002) desempenha uma comparação entre o método sem malha que utiliza-se da função *thin plate spline* (TPS) como aproximação de base radial, em

comparação com métodos clássicos dependentes de malha: o método das diferenças finitas e o método de elementos de contorno com dupla reciprocidade. Os resultados mostram que o método livre de malha apresenta melhores resultados nos casos testados tanto para problemas dominados pelas difusão quanto para problemas com maior influência do efeito advectivo. É importante ainda ressaltar que as denominações utilizadas neste periódico, pelos autores, como por exemplo, casos dominados pela advecção, são intrigantes, uma vez que, atualmente pode-se considerar tais testes como inseridos em um contexto de baixos números de Peclét.

O periódico de Loeffler e Mansur (2003) propõe uma formulação de dupla reciprocidade denominada quasi-dual (MECQDR), que apresenta uma redução nos erros de aproximação provindos de interpolações no domínio. Com uma série robusta de estudos de casos os autores constatam um comportamento superior da nova proposta de formulação em relação a dupla reciprocidade tradicional (MECDR), a medida que os efeitos da advecção tem sua importância acentuada com testes com números de Peclét crescentes. Por fim é importante destacar que mesmo o método MECQDR, apresenta resultados adequados para uso prático em engenharia apenas para faixas de Peclét medianas.

Loeffler, Cruz e Bulcão em (2015), apresentam em seu artigo uma nova forma de tratar a integral de domínio gerada pelo termo fonte em problemas de Poisson. Esta nova técnica, denominada de MECID, também baseada em aproximações por bases radiais é baseada numa aproximação completa no núcleo da integral de domínio, e foi testada pelos autores para cinco casos de naturezas físico-matemáticas bem distintas entre si. As análises realizadas basearam-se na sensibilidade da nova técnica ao refinamento de contorno, mas principalmente a quantidade de polos internos. Ficou evidenciado destas análises que a técnica MECID tem sua precisão substancialmente aumentada com a inclusão de polos internos, diferentemente da técnica da MECDR, largamente conhecida por usuários e pesquisadores do método. Os resultados em linhas gerais apontam para melhor performance da técnica MECID frente ao MECDR para todos os casos testados, desde que a quantidade de ponto internos seja devidamente ajustada. Por fim, é importante ressaltar a versatilidade da técnica MECID no tocante a grande variedade de funções de bases radiais, que podem ser utilizadas para interpolações nesta técnica, sem problemas de instabilidade.

Loeffler, Mansur e Barcelos em (2015) propõe em seu artigo a aplicação da técnica de integração direta (MECID) a problemas de autovalores de Helmholtz no intuito de obter frequências naturais de vibração. Neste problema a integral de domínio a ser aproximada tem contabilização física do termo de inércia. A técnica MECID é testada em diversos casos em uma e duas dimensões, com níveis de complexidade crescente, e comparada com a dupla reciprocidade (MECDR) e eventualmente com resultados gerados pelo método de elementos finitos (MEF). Os resultados do MECID mostram-se satisfatórios em todos os casos, o que motiva testes mais intensos desta técnica neste e em outros tipos de problemas clássicos de engenharia, em especial na área de acústica.

O trabalho de Carrer et. al em (2016) tem como foco uma análise holística do avanço do método de elementos de contorno em problemas advectivo-difusivos. Os autores comparam o desempenho de formulações transientes e estacionárias do método com soluções analíticas de referência ou com o método de elementos finitos na falta das mesmas. As formulações que utilizam solução fundamental correlata ao problema em questão respondem coerentemente ao gradual aumento da magnitude dos efeitos advectivos, enquanto o passo de tempo também mostra-se como variável de decisão importante quanto a acurácia do método. No tocante a formulações que utilizam soluções fundamentais mais simples há uma crescente desestabilização com aumento do número de Peclét, evidenciado pela grande quantidade de resultados exibida pelos autores. Por fim, também é evidenciado pelos autores a demanda de uma formulação capaz de lidar com velocidades variáveis dentre outras complexidades, o que alinha-se fortemente com a proposta desta dissertação.

O recente artigo de Loeffler e Mansur (2017) propõe um esquema de regularização aplicado à técnica de integração direta (MECIDR), no intuito de eliminar a singularidade existente no núcleo da integral de domínio a ser aproximada. Os testes são executados, entre eles, em problemas de Helmholtz mostrando resultados levemente superiores aos gerados sem o processo de regularização. A grande vantagem operacional destacada pelos autores para o uso da regularização consiste na grande redução no volume de entrada de dados tal como simplificação significativa na implementação computacional. Por fim, os autores destacam o potencial de aplicação do processo de regularização para muitos outros revelantes problemas, em especial, problemas advectivo-difusivos, nos quais o nível de singularidade nos núcleos de integrais interpolados é alto.

3 Modelagem Matemática

Em vias gerais a representação matemática de um problema mecânico generalizado pode ser feita de forma completa através de três grandes alicérces: equações governantes, expressões cinemáticas e equações constitutivas, de acordo com posto em [20]. Os princípios de conservação de massa, momento linear e energia são mostrados a seguir de maneira mais geral possível em uma primeira passagem para permitir a representação generalizada de um problema mecânico de escoamento com troca de calor [21].

3.1 Princípios Fundamentais da Mecânica do Contínuo

As leis naturais de conservação, por serem de aplicação ampla e geral, também são denominadas de princípios da mecânica do contínuo e podem ser aplicadas na modelagem de distintos fenômenos físicos. Tais leis desde sua concepção conceitual até suas demonstrações matemáticas podem ser encontradas em detalhes em literaturas clássicas tais como [22], [23] e também em [24].

A priori apresenta-se a expressão diferencial de conservação da massa, dada abaixo pela equação 3.1 em seu formato conservativo, na ausência de fontes e sorvedouros.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (3.1)$$

É possível observar que o termo de variação temporal da massa específica com o tempo, representado como primeiro termo da equação 3.1 tem magnitude equivalente ao termo divergente que o procede. Desta forma interpreta-se que a variação de massa específica no volume de controle em análise é igual ao balanço líquido das quantidades de fluxo mássico nas entradas e saídas deste mesmo volume de controle.

Na sequência apresenta-se a forma diferencial da conservação de quantidade de movimento linear via equação 3.2, que traduz-se em uma expressão dinâmica do movimento, oriunda da segunda lei de Newton.

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

Assim sendo o termo do lado esquerdo representa o produto entre a inércia e a aceleração da partícula de contínuo, enquanto o lado direito representa, respectivamente, a soma das forças de campo com as forças de superfície por unidade de volume, que atuam sobre a partícula. Esta última classe de forças é representada por um divergente do tensor extra-tensão ou tensor das tensões, notação esta utilizada em [25], [24].

Por fim o princípio conservativo da energia também é exibido em seu formato diferencial pela expressão 3.3, cuja origem é proveniente da primeira lei da termodinâmica e cujos detalhes

algebricos podem ser melhor apreciados em literaturas tais como [26], [27] e [28].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho c_p u_j T) = \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (3.3)$$

A interpretação conceitual correta da equação 3.3, pode ser feita tomando-se o lado esquerdo da mesma como totalização do taxa de variação total dos fluxos entálpicos no volume de controle, formado por uma parcela global correlata à transiência e outra parcela correlata ao transporte convectivo. Esta quantidade deve ser causada, no caso mais geral, pela superposição de três efeitos, representados por três termos no lado direito da mesma equação. O primeiro deles contabiliza os efeitos de compressibilidade, o segundo é ligado ao fenômeno de dissipação viscosa e o último correlato aos efeitos difusivos.

3.2 Equações Cinemáticas e Constitutivas Relevantes

Uma observação atenciosa sobre o conjunto de equações 3.1, 3.2 e 3.3 revela que é preciso conhecer sobre a constituição dos termos inerentes ao tensor extra tensão T_{ij} presente na equação de momento, tal como o tensor viscoso σ_{ij} e fluxo de calor q_j que surgem no balanço de energia.

Neste ponto de constatação também é preciso sair da generalidade das equações da mecânica do contínuo para então definir um problema de termofluídios, e assim sendo o tensor constitutivo de um fluido newtoniano é mostrado a seguir pela equação 3.4, e devidamente alinhado com a literatura em [29] e [25].

$$T_{ij} = 2\mu D_{ij} + (\lambda D_{kk} - p) \delta_{ij} \quad (3.4)$$

A escrita algébrica da equação 3.4 é proveniente de uma decomposição esférica-desviadora do tensor das tensões e um posterior rearranjo de acordo com a diagonal principal e os demais termos do tensor.

Na equação de conservação de energia 3.3, por sua vez, ainda é necessária a definição constitutiva do tensor viscoso e do vetor fluxo de calor. No caso do tensor viscoso, este pode ser definido tal como o tensor extra-tensão da equação 3.4, entretanto excluindo a parte inerente a pressão termodinâmica, em conformidade com [26].

$$\sigma_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij} \quad (3.5)$$

Já o fluxo de calor, pode ser definido de forma conveniente através da Lei de Fourier, que preconiza um fluxo dependente da característica do meio contínuo e do gradiente de temperatura que o motiva, tal como abaixo na expressão 3.6. A equação de taxa para mecanismo

condutivo, trabalhada aqui, tal como outras equações constitutivas importantes podem ser apreciadas em mais detalhes em literatura específica tal como em [30] e [31].

$$q_j = -k_{ij}T_{,i} \quad (3.6)$$

Uma vez postas as expressões constitutivas, é preciso agora correlacionar algumas quantidades tensoriais apresentadas a campos físicos de interesse através de expressões cinemáticas. Inicia-se portanto pela definição do tensor taxa de cisalhamento D_{ij} , que surge na equação constitutiva de um fluído newtoniano em consonância com [29] e [22].

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad D_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = u_{k,k} \quad (3.7)$$

Desta maneira, a expressão 3.7 associa o tensor taxa de cisalhamento com o gradiente do campo de velocidade do escoamento, que deve, por sua vez, ser determinado a posteriori através da solução do conjunto de equações diferenciais do modelo. Por fim, a constante λ que surge na constituição newtoniana pode ser associada com a viscosidade, de acordo com a expressão através da relação de Stokes [29], [26].

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (3.8)$$

A seguir na equação constitutiva do fluxo de calor de Fourier, surge um tensor k_{ij} que representa a condutividade térmica do meio contínuo em questão. Trata-se de uma entidade tensorial pois, no caso mais geral, esta propriedade pode variar na três direções espaciais de forma não padronizada, caracterizando a anisotropia do meio contínuo. Entretanto, em um caso mais simples, considerando-se a isotropia do meio contínuo, no caso nosso fluído newtoniano em questão, a escrita do tensor condutividade térmica k_{ij} , reduz-se ao formato da equação 3.9 a seguir.

$$k_{ij} = k\delta_{ij} \quad (3.9)$$

Desta forma, com tais considerações constitutivas e cinemáticas é possível reescrever os princípios gerais da mecânica do contínuo dados pelas expressões 3.1, 3.2 e 3.3, para um problema de escoamento de um fluído newtoniano isotrópico com troca simultânea de calor, cujo modelo é agora representado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais. Este conjunto de equações ainda apresenta elevado grau de complexidade, uma vez que, as equações de momento e energia ainda encontram-se acopladas por conta da dependência de propriedades físicas, tal como a viscosidade com a temperatura e também dificuldades inerentes a efeitos

de compressibilidade que constituem grandes desafios para a aplicação eficiente de métodos numéricos, de forma geral.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0 \quad (3.10)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-p + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_p u_i T) = \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] \quad (3.12)$$

Por fim, é preciso adequar de forma coerente o modelo matemático a ser utilizado com o problema-alvo. O grande desafio do processo de modelagem matemática de um fenômeno é equilibrar a complexidade do modelo utilizado à demanda de verossimilhança requerida pela aplicação em questão [32], [33], [21], [34].

3.3 Hipóteses Simplificadoras

No intuito de simplificar o conjunto de equações 3.10, 3.11 e 3.12 e adequar o modelo a um problema convectivo de modelagem mais simples, a adoção de algumas hipóteses simplificadoras se faz necessária.

1. Regime Estacionário
2. Fluído Newtoniano Isotrópico
3. Propriedades Termo-físicas Constantes
4. Escoamento Incompressível
5. Dissipação Viscosa Desprezível
6. Forças de Campo Desprezadas

É importante também salientar como cada uma das hipóteses adotadas acima afeta algebraicamente o modelo diferencial final, e por esta razão, executa-se a seguir a análise individual de cada uma delas.

Ao adotar-se o regime estacionário, há a preconização de que as variáveis de interesse do escoamento não variam significativamente com o tempo. Tal hipótese é razoável em processos ou fenômenos convectivos onde, depois de decorrido um determinado tempo, observa-se uma

constância média nas aferições de variáveis. Portanto esta é uma hipótese razoável em diversos problemas de interesse prático, onde deseja-se justamente modelar o comportamento do sistema em sua etapa estabilizada, evitando complexidades inerentes a modelagem transitória.

O modelo constitutivo de fluído newtoniano isotrópico pode ter sua análise dividida em duas partes bem definidas. A priori, a reologia newtoniana caracteriza-se como um modelo simples, que pode ser utilizado para descrever o comportamento deformacional de fluidos em muitas situações de interesse prático. Caso haja necessidade de utilizar-se de uma caracterização reológica mais complexa e aderente à aplicação, estas podem ser encontradas em clássicos da área como [24], [35] e [25]. No vigente trabalho, um modelo reológico newtoniano é robusto o suficiente para atender as expectativas das aplicações-teste. Uma segunda parte da hipótese versa sobre a isotropia do meio contínuo fluido. Ao considerar-se esta premissa, há a demanda de entrada de um valor único de condutividade térmica, uma vez que este já é capaz de definir o tensor isotrópico [27].

A terceira hipótese adotada torna as propriedades termo-físicas do escoamento invariantes, ou seja, não permite por exemplo que propriedades como viscosidade e condutividade térmica variam com temperatura ou pressão. Tal premissa reduz consideravelmente a complexidade do modelo, uma vez que permite o desacoplamento entre as equações conservativas de momento e energia. Tal desacoplamento é de essencial importância, principalmente no que tange a possibilitar a geração de soluções analíticas de referência para casos simples, que são utilizadas para validar novas formulações numéricas.

Na sequência, a adoção de um escoamento incompressível simplifica substancialmente o modelo convectivo final, uma vez que anula múltiplos termos nas equações e elimina um grande foco de instabilidades numéricas, uma vez que, a representação numérica de um problema compressível demanda formulações de sobremaneira mais robustas. Desta forma, a manutenção de um modelo razoavelmente simples alinha-se com a ideia de testar uma formulação e analisar seu desempenho de maneira objetiva e clara.

Pode-se assumir a negligência dos efeitos de dissipação viscosa de forma condicional, ou seja, após uma análise da importância deste fenômeno no contexto do problema de interesse. É importante aqui ressaltar, que este efeito nem sempre pode ser desprezado, e portanto, exige-se por parte do engenheiro a sensibilidade técnica necessária para adotar e justificar suas hipóteses de modelagem. No presente caso, em específico, este efeito não se encontra em foco para o estudo e não será considerado relevante.

Por fim, como sexta e última hipótese as forças de campo, que em nosso caso, resumem-se a ações gravitacionais são também desprezadas por não estarem inseridas em nosso foco de análise e não terem influência significativa sobre os problemas que serão aqui testados.

3.4 Equações Governantes de um Problema Convectivo

A aplicação das hipótese de engenharia elencadas e devidamente interpretadas anteriormente permite a simplificação e adequação do modelo matemático que descreve um problema convectivo, e que é governado pelas equações a seguir.

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.13)$$

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.14)$$

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \quad (3.15)$$

O modelo de problema convectivo descrito pelas equações 3.13, 3.14 e 3.15 é formado por duas leis conservativas escalares, representadas pelas conservação de massa e conservação de energia e por pela conservação de momento linear que tem natureza vetorial. Com tal colocação, em duas dimensões, constata-se um montante de cinco equações diferenciais com o mesmo número de incógnitas, provenientes dos campos de velocidade, pressão e temperatura. Portanto, a solução completa do problema convectivo demanda a solução do conjunto de equações diferenciais para então determinar-se todos os campos físicos de interesse.

3.5 Definição do Problema

Neste trabalho em específico, o objetivo central não reside em resolver o problema convectivo por completo, e sim trabalhar apenas com a equação de energia, também conhecida como equação de advecção-difusão quando algebrizada no formato da equação 3.15. Desta forma a equação de trabalho aqui é de natureza escalar e o foco está na determinação do campo de temperatura e respectivos fluxos de calor.

Para trabalhar de forma mais consistente com a equação diferencial de energia em questão, é conveniente escrevê-la em sua forma adimensionalizada. Os parâmetros capazes de processar a adimensionalização são colocados abaixo, onde ressalta-se V e L como, respectivamente, velocidade e comprimento característicos, e T_s e T_m como temperaturas da superfície sólida e temperatura média do escoamento.

$$x_j^* \equiv \frac{x_j}{L} \quad u_j^* \equiv \frac{u_j}{V} \quad T^* \equiv \frac{T - T_s}{T_m - T_s} \quad (3.16)$$

A inserção dos parâmetros destacados na expressão 3.16, e sua substituição na expressão de interesse 3.15, tem como resultados após algebrismos simples na expressão abaixo.

$$u_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} \quad (3.17)$$

O grupamento adimensional que surge do processo algébrico é denominado número de Peclét e contabiliza, por sua vez, um balanço entre as taxas de transferência de calor advectiva frente à condutiva [36], [27]. Em outras palavras um número de Peclét perto da unidade simboliza um problema onde os efeitos advectivos e difusivos são parelhos. Enquanto, por outro lado, o crescimento do número de Peclét, representa fisicamente a tendência de dominância dos efeitos advectivos. Uma definição matemática deste adimensional é dada abaixo para uma melhor elucidação do conceito.

$$Pe_L = Re_L Pr_L = \frac{VL}{\alpha} \quad (3.18)$$

Desta forma de posse das gradezas caraterísticas e das propriedades termofísicas condensadas na variável de difusividade térmica α , é possível determinar o número de Peclét. Um dos objetivos centrais do vigente trabalho é testar a sensibilidade na formulação MECID em problemas advectivos-difusivos com predominância dos efeitos advectivos, ou seja, incrementando gradualmente os valores de Peclét.

4 Formulação Numérica do Problema Advectivo-Difusivo

Este capítulo é dedicado a expor de forma concisa a formulação de problemas advectivo-difusivos via método de elementos de contorno. Para fazê-lo de forma metódica é necessário ressaltar a existência de três formulações bem consolidadas, sendo a primeira denominada formulação clássica (MECC) por utilizar a solução fundamental correlata ao problema advectivo-difusivo, a segunda representada pela técnica da dupla reciprocidade (MECDR), onde já há o uso de funções de bases radiais e solução fundamental mais simples e uma terceira e mais recente chamada de técnica de integração direta (MECID), que também vale-se da utilização de bases radiais, porém, com diferenças substanciais em relação à dupla reciprocidade. A seguir é dado um quadro geral de evolução do método de elementos de contorno com suas principais potencialidades e limitações correlatas à problemas advectivo-difusivos e em seguida a exposição cuidadosa, porém sintética, de cada uma das formulações constituintes do estado da arte do método neste tipo de problema físico.

4.1 Contextualização e Limitações do MEC

Os avanços feitos pelo método de elementos de contorno no contexto dos problemas de natureza advectivo-difusiva foram substanciais desde que a proposta de formulação clássica surgiu por meio da solução fundamental correlata ao problema. Esta primeira formulação lida muito bem com o efeito dominante da advecção, uma vez que a solução fundamental correlata ao problema original faz com que a mesma responda muito bem incrementos no número de Peclét. Entretanto como desvantagem da formulação MECC, tem-se a impossibilidade de simular problemas com campos variáveis de velocidade, uma vez que, a solução fundamental disponível na literatura em [37] contempla apenas campos de velocidade uniformes. A técnica de dupla reciprocidade (MECDR), que surgiu sequencialmente, foi um verdadeiro marco no desenvolvimento do método dos elementos de contorno, uma vez que, ao utilizar uma solução fundamental simples e padronizada aliada a um processo de interpolação via funções de bases radiais consegue conferir versatilidade na solução de diversos problemas mais complexos, cuja solução fundamental não precisa ser necessariamente ser conhecida. Todavia, ao submeter a formulação MECDR a situações de advecção dominante percebeu-se uma grande fragilidade da técnica, que apresenta altos níveis de erro com o crescimento do número de Peclét, mesmo para magnitudes relativamente baixas do adimensional. Neste contexto, a formulação baseada em integração direta (MECID) surge como uma alternativa tão versátil quanto o MECDR no tocante a também utilizar aproximações por funções de bases radiais, porém, cujo desempenho frente a problemas com fortes efeitos advectivos ainda não é conhecido de forma plena. É portanto, latente a demanda de testes sistêmicos sobre esta formulação MECID, para então determinar a robustez da mesma frente aos problemas dominados pela advecção, demanda esta que motiva o vigente trabalho.

4.2 Formulação Clássica do MEC

É prudente seguir uma ordem cronológica na exposição das formulações disponíveis para problemas advectivos-difusivos e, portanto, inicia-se pela formulação clássica do método de elementos de contorno. Tal formulação baseia-se no uso da solução fundamental correlata ao problema, que pode ser apreciada em mais detalhes em [37].

No objetivo de sempre manter a exposição da formulação numérica o mais simples e elegante possível, usa-se aqui a notação indicial, largamente presente na literatura do método de elementos de contorno e da física-matemática de forma geral. A equação de governo do problema advectivo-difusivo dadas as hipóteses elencadas no capítulo II pode ser escrita em notação indicial como segue.

$$u_{,ii} = v_i u_{,i} \quad (4.1)$$

É perceptível aqui que as propriedades termo-físicas ou mesmo termodinâmicas no caso da versão dimensional na equação de governo ou mesmo o número de Peclét, no caso da equação adimensional, são aqui omitidos por simplicidade, por se tratarem de constantes que não variam no domínio espacial Ω .

Multiplica-se agora ambos os lados da equação 4.1 pela solução fundamental correlata u^* , e integra-se ao longo do domínio genérico Ω .

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X) u^*(X, \xi) d\Omega = \int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}(X) u^*(X, \xi) d\Omega \quad (4.2)$$

Para a sequência da formulação é prudente denominar o lado esquerdo da equação 4.2 de lado difusivo (LD) e o lado direito da mesma de lado advectivo (LA), dados os efeitos físicos representados por cada lado do balanço de energia.

$$LD = \int_{\Omega} u_{,ii}(X) u^*(X, \xi) d\Omega \quad (4.3)$$

$$LA = \int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}(X) u^*(X, \xi) d\Omega \quad (4.4)$$

Na sequência o tratamento do lado difusivo, constituído por um operador laplaciano auto-adjunto, pode ser facilmente tratado com o uso das identidades de Green [32] ou, analogamente, via integração por partes, seguido do uso do Teorema da Divergência [38] para a conversão de integrais de domínio para o contorno, conforme largamente reportado na literatura correlata em [39], [40], [41].

$$LD = \int_{\Gamma} q(X) u^*(X, \xi) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X) q^*(X, \xi) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{,ii}^*(X, \xi) u(X) d\Omega \quad (4.5)$$

Uma vez resolvido o lado difusivo, parte-se para o tratamento do lado advectivo onde a integração por partes é novamente utilizada para desmembrar o núcleo da integral que compõe o lado advectivo da equação 4.4.

$$(v_i u u^*)_{,i} = (v_i u)_{,i} u^* + v_i u u^*_{,i} \quad \therefore \quad (v_i u u^*)_{,i} = [v_{i,i} u + v_i u_{,i}] u^* + v_i u u^*_{,i} \quad (4.6)$$

Na aplicação da integração por partes, conforme pode ser observado na expressão 4.6, surge a entidade do divergente do campo de velocidade, que segundo a hipótese de incompressibilidade do escoamento [24], adotada no capítulo anterior, anula-se. Portanto, algebraicamente tem-se:

$$v_{i,i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.7)$$

Desta maneira é possível anular um dos termos da decomposição exposta pela equação 4.6 e reescrever propriamente o núcleo da integral do lado advectivo tal como segue.

$$(v_i u u^*)_{,i} = v_i u_{,i} u^* + v_i u u^*_{,i} \quad \therefore \quad v_i u_{,i} u^* = (v_i u u^*)_{,i} - v_i u u^*_{,i} \quad (4.8)$$

A inserção da decomposição da equação 4.8 na equação 4.4 gera a seguinte bipartição da integral original.

$$\int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}(X) u^*(X, \xi) d\Omega = \int_{\Omega} [v_i(X) u(X) u^*(X, \xi)]_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} v_i(X) u(X) u^*_{,i}(X, \xi) d\Omega \quad (4.9)$$

É possível neste ponto aplicar o Teorema da Divergência, apreciado em maiores detalhes em literaturas [38] e [42], para então converter a primeira integral de domínio do lado direito da equação 4.9 para uma escrita no contorno, tal como segue.

$$\int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}(X) u^*(X, \xi) d\Omega = \int_{\Gamma} n_i(X) v_i(X) u(X) u^*(X, \xi) d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X) u(X) u^*_{,i}(X, \xi) d\Omega \quad (4.10)$$

Substituindo então as expressões de tratamento das equações 4.5 e 4.10, na equação 4.2, chega-se a formulação integral inversa do problema dada abaixo.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} q(X) u^*(X, \xi) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(X) q^*(X, \xi) d\Gamma + \int_{\Omega} u^*_{,ii}(X, \xi) u(X) d\Omega = \\ \int_{\Gamma} n_i(X) v_i(X) u(X) u^*(X, \xi) d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X) u(X) u^*_{,i}(X, \xi) d\Omega \end{aligned} \quad (4.11)$$

A sentença integral inversa representada na equação 4.11, pode ser reorganizada de maneira providencial, de forma a reconstruir uma expressão de governo baseada na solução fundamental, onde é possível evidenciar a equação de governo que caracteriza o problema fundamental correlato, tal como segue.

$$\int_{\Omega} [u_{,ii}^*(X, \xi) + v_i(X)u_{,i}^*(X, \xi)] u(X)d\Omega = \quad (4.12)$$

$$\int_{\Gamma} u(X)q^*(X, \xi)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(X, \xi)d\Gamma + \int_{\Gamma} n_i(X)v_i(X)u(X)u^*(X, \xi)d\Gamma$$

O problema correlato ao advectivo-difusivo em um domínio infinito cuja excitação de campo é descrita por um pulso representado matematicamente pela função Delta de Dirac, é também chamado de problema fundamental. Para melhor visualização este problema é algebraicamente posto abaixo.

$$u_{,ii}^* + v_i u_{,i}^* = -\Delta(X, \xi) \quad (4.13)$$

A solução da equação 4.13 não é trivial e pode ser melhor consultada na literatura [37]. É possível observar que tanto o campo potencial u^* , quanto seu fluxo correlato q^* ficam dependentes de funções de Bessel [43], cujo tratamento matemático na determinação das integrais não é tarefa simples, como citado e debatido em detalhes em [44] e [15], devido a singularidades matemáticas.

$$u^*(X, \xi) = \frac{1}{2\pi k} e^{-\mu r} K_o(\mu r) \quad \mu = \frac{\|V\|}{2k} \quad (4.14)$$

$$q^*(X, \xi) = \frac{1}{2\pi k} e^{-\mu r} \left[-\mu K_1(\mu r) \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{V_n}{2k} K_o(\mu r) \right] \quad (4.15)$$

Utilizando-se então da equação 4.13, e inserindo-a então na expressão 4.12, e aplicando-se convenientemente as propriedades inerentes ao Delta de Dirac, é possível então a seguinte escrita.

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(X, \xi)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(X, \xi)d\Gamma + \int_{\Gamma} n_i(X)v_i(X)u(X)u^*(X, \xi)d\Gamma = 0 \quad (4.16)$$

A escrita da equação 4.16 ainda encontra-se no domínio contínuo. Ao realizar-se um processo de discretização, onde fixa-se o ponto fonte ξ em cada ponto da malha numérica e interpola-se com todos os demais pontos, inclusive o próprio ponto, é possível gerar um sistema matricial com ordem igual ao número de pontos nodais. Tal discretização permite a escrita

matricial, e portanto discreta, onde as matrizes $[G]$, $[H]$ e $[S]$ são determinadas diretamente das integrais correspondentes na sentença 4.16.

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} + [S]\{u\} = 0 \quad (4.17)$$

$$[H']\{u\} = [G]\{q\} \quad [H'] = [H + S] \quad (4.18)$$

4.3 Formulação via Técnica do Dupla Reciprocidade

A técnica de dupla reciprocidade proposta inicialmente por Nardini e Brebbia em meados de 1983 representou um avanço substancial no panorama de consolidação do método de elementos de contorno, uma vez que confere ao método uma versatilidade ao aproximar termos mais complexos por meio de funções de base radial, e flexibilizar o uso de uma solução fundamental mais simples em detrimento a solução fundamental correlata ao problema, que nem sempre é conhecida ou de dedução trivial. Tal flexibilidade permitiu a aplicação da dupla reciprocidade a diversos problemas complexos e relevantes no contexto da física matemática, como pode ser constatado em [45], [11], [46] e [47].

Segue-se aqui a mesma lógica da exposição utilizada para a formulação clássica e adota-se novamente como padrão a notação indicial para tornar mais dinâmica e leve a exposição dos pormenores da formulação da técnica de dupla reciprocidade. Inicia-se com a equação de governo do problema com a exclusão proposital dos coeficientes ou adimensionais correlatos por simplicidade, tal como segue.

$$u_{,ii} = v_i u_{,i} \quad (4.19)$$

Multiplica-se a equação 4.19 pela solução fundamental u^* de ambos os lados da sentença e integra-se ao longo do domínio Ω da geometria, e gera-se então a formulação integral forte relacionada ao problema.

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(X, \xi)d\Omega = \int_{\Omega} v_i(X)u_{,i}(X)u^*(X, \xi)d\Omega \quad (4.20)$$

Já é possível aqui destacar, que a solução fundamental utilizada como função auxiliar na técnica da dupla reciprocidade é a solução fundamental de Laplace/Poisson encontrada na literatura em [40], que tem natureza matemática muito mais simples do que a solução fundamental correlata do problema advectivo-difusivo propriamente dito.

Uma outra diferença fundamental inerente a técnica da dupla reciprocidade (MECDR) é a forma inicial de trato do termo advectivo contabilizado no lado direito da equação 4.20. O procedimento característico, mostrado em detalhes em [45], consiste em interpretar o termo de advecção como uma ação de domínio $p(X)$. Desta maneira todo o lado direito da equação

de governo é substituído pela ação de domínio, e com isso a formulação integral forte, dada em 4.20 pode ser reescrita como a seguir.

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(X, \xi)d\Omega = \int_{\Omega} p(X)u^*(X, \xi)d\Omega \quad (4.21)$$

Analogamente ao que foi feito a priori, na formulação antecedente, denomina-se o parte esquerda da equação 4.21 como lado difusivo (LD) e a parte direita como lado advectivo (LA), de acordo com o mostrado na sequência na equações 4.22 e 4.23.

$$LD = \int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(X, \xi)d\Omega \quad (4.22)$$

$$LA = \int_{\Omega} p(X)u^*(X, \xi)d\Omega \quad (4.23)$$

Sequencialmente é necessário focar no tratamento do lado advectivo dado pela expressão 4.23, uma vez que o lado difusivo tem simples trato, como já visto na formulação clássica via integração por partes e teorema da divergência. A técnica da dupla reciprocidade preconiza a aproximação do termo de domínio $p(X)$ como um somatório de funções de bases radiais ponderado por coeficientes a determinar α_{ξ}^j , tal como mostra a equação 4.24 abaixo. Uma vez escolhida a função de base radial a ser utilizada, sua primitiva ψ também é conhecida, coerentemente com a identidade conceitual mostrada abaixo.

$$p(X) \cong \alpha_{\xi}^j F^j(X, ; X^j) \quad \psi_{,ii} = F^j \quad (4.24)$$

Substituindo-se a aproximação por bases radiais proposta pela expressão 4.24 no lado advectivo (LA), dado pela equação 4.23, tem-se:

$$\int_{\Omega} p(X)u^*(X, \xi)d\Omega \cong \int_{\Omega} \alpha_{\xi}^j F^j(X; X^j)u^*(X, \xi)d\Omega = \int_{\Omega} \alpha_{\xi}^j \psi_{,ii}(X; X^j)u^*(X, \xi)d\Omega \quad (4.25)$$

A integração por partes é aqui aplicada pela primeira vez, utilizada para descarregar o operador derivada de sobre a função primitiva ψ parcialmente para a solução fundamental u^* .

$$(\psi_{,i}u^*)_{,i} = \psi_{,ii}u^* + \psi_{,i}u_{,i}^* \quad \therefore \quad \psi_{,ii}u^* = (\psi_{,i}u^*)_{,i} - \psi_{,i}u_{,i}^* \quad (4.26)$$

A substituição da decomposição proposta pela equação 4.26 na equação 4.25 e posterior aplicação do Teorema da Divergência, levando possíveis integrais de domínio para o contorno, resulta no formato abaixo.

$$\int_{\Omega} \alpha_{\xi}^j [(\psi_{,i}u^*)_{,i} - \psi_{,i}u_{,i}^*]d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha_{\xi}^j n_i \psi_{,i}u^* d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha_{\xi}^j \psi_{,i}u_{,i}^* d\Omega \quad (4.27)$$

A estrutura da equação 4.27 revela uma das integrais já correlata ao contorno e uma integral de domínio remanescente. Para transferir esta segunda integral também ao contorno, aplica-se por uma segunda vez o procedimento de integração por partes tal como segue.

$$(\psi u_{,i}^*)_{,i} = \psi_{,i} u_{,i}^* + \psi u_{,ii}^* \quad \therefore \quad \psi_{,i} u_{,i}^* = (\psi u_{,i}^*)_{,i} - \psi u_{,ii}^* \quad (4.28)$$

Ainda por motivos de sintetizar a formulação, define-se neste ponto uma nova variável η^j dependente dos cossenos diretores e do gradiente da função primitiva ψ .

$$\eta^j = n_i \psi_{,i} \quad (4.29)$$

Substituindo então a decomposição da equação 4.28 e a definição da equação 4.29, na expressão 4.27, e aplicando o Teorema da Divergência na integrais possíveis, é possível chegar ao seguinte formato.

$$\int_{\Gamma} \alpha_{\xi}^j \eta^j u^* d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha_{\xi}^j [(\psi u_{,i}^*)_{,i} - \psi u_{,ii}^*] d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha_{\xi}^j \eta^j u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha_{\xi}^j \psi n_i u_{,i}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \alpha_{\xi}^j \psi u_{,ii}^* d\Omega \quad (4.30)$$

Uma análise da equação 4.30 revela duas integrais já endereçadas ao contorno e uma integral de domínio que ainda demanda tratamento. Entretanto, é perceptível o fato de que o operador laplaciano foi completamente transferido de sobre a primitiva da função radial ψ para a solução fundamental u^* . Desta forma pode-se tratar a integral de domínio em questão com a conveniente escrita do problema fundamental de Laplace/Poisson mostrada a seguir.

$$u_{,ii}^* = -\Delta(X, \xi) \quad (4.31)$$

A solução correlata ao problema é amplamente conhecida na literatura em exemplares como [39], [5], [48], e dada abaixo, onde também define-se por conveniência o fluxo relacionado a solução fundamental, q^* .

$$u^*(X, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (4.32)$$

$$q^* = n_i u_{,i}^* \quad (4.33)$$

A inserção do problema fundamental dado pela equação 4.31 e da definição do fluxo correlato a solução fundamental dado pela expressão 4.33, ambas na sentença da equação 4.30,

e com uso apropriado da propriedades do Delta de Dirac, permitem a seguinte escrita do lado advectivo.

$$LA = \int_{\Omega} p(X) u^*(X, \xi) d\Omega = \\ \alpha_{\xi}^j \left\{ -c(\xi) \psi(\xi) + \int_{\Gamma} \eta^j(X; X^J) u^*(X, \xi) d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi(X; X^J) q^*(X, \xi) d\Gamma \right\} \quad (4.34)$$

A formulação integral final pode ser escrita alinhando o tratamento do lado advectivo recém escrito pela equação 4.34 com o tratamento clássico do lado difusivo, que consiste na manipulação de um operador auto-adjunto, resultando na seguinte expressão integral final no domínio contínuo.

$$c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X) q^*(X, \xi) d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X) u^*(X, \xi) d\Gamma = \\ \alpha_{\xi}^j \left\{ -c(\xi) \psi(\xi) + \int_{\Gamma} \eta^j(X; X^J) u^*(X, \xi) d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi(X; X^J) q^*(X, \xi) d\Gamma \right\} \quad (4.35)$$

Pode-se neste ponto do algebrismo impor o processo de discretização sobre a sentença 4.35, gerando assim um sistema matricial resultante da seguinte forma:

$$[H] [u] - [G] [q] = \{[H] [\psi] - [G] [\eta]\} \alpha \quad (4.36)$$

Neste ponto do desenvolvimento da técnica se faz ainda necessário determinar os coeficientes α . Para tanto relembra-se da definição de força artificial de campo p , colocado abaixo no formato de suas componentes em x e y .

$$p = v_i u_i, \quad \therefore \quad p_x = v_x \frac{\partial u}{\partial x} \quad p_y = v_y \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.37)$$

$$p = \alpha_j F_j \quad \therefore \quad \alpha_j = F_j^{-1} p \quad (4.38)$$

Percebe-se na equação 4.37 a presença das derivadas parciais ou gradientes correlatos ao campo potencial u . Estas derivadas ainda estão em formato contínuo e também precisam ser aproximadas a posteriori. Todavia antes disso, para uma visão mais geral da formulação discreta gerada até aqui, substituindo as definições da aproximação por bases radiais da ação de domínio reapresentada por comodidade na equação 4.38 acima, e as expressões da equação 4.37, na expressão 4.36, tem-se:

$$[H] [u] - [G] [q] = \{[H] [\psi] - [G] [\eta]\} F^{-1} (p_x + p_y) = \\ \{[H] [\psi] - [G] [\eta]\} F^{-1} \left(v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.39)$$

Neste ponto, para facilitar a escrita vamos definir uma matriz $[S]$, que tem componentes em duas direções de acordo com a estrutura algébrica a seguir.

$$[S_X] = \{[H][\psi] - [G][\eta]\} F^{-1} [V_x] \quad \therefore \quad [S_Y] = \{[H][\psi] - [G][\eta]\} F^{-1} [V_Y] \quad (4.40)$$

Substituindo então as definições recém fixadas pelas equação 4.40, na equação 4.39, podemos chegar a seguinte estrutura.

$$[H][u] - [G][q] = [S_X] \frac{\partial u}{\partial x} + [S_Y] \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.41)$$

A equação 4.41 evidencia de forma muito clara a presença das derivadas em relação as direções x e y e uma clara demanda por uma aproximação para as mesmas. Apesar da natureza contínua da derivada, em detrimento ao restante da estrutura já devidamente posta em lógica discreta, o que pode provocar certa discrepância conceitual, esta forma ainda mostra-se como apropriadamente didática para a exposição da lógica da dupla reciprocidade. A aproximação aqui será feita no próprio campo escalar u , utilizando-se uma segunda aproximação via bases radiais tal como mostrado na sequência.

$$u = \beta F \quad \therefore \quad \beta = F^{-1}u \quad (4.42)$$

Da aproximação estabelecida na equação 4.42, pode-se diferenciar em relação as duas direções espaciais, de forma a estabelecer uma aproximação para as derivadas parciais.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \beta = F_x F^{-1} u \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \beta = F_y F^{-1} u \quad (4.43)$$

Substituindo as aproximações das derivadas parciais dadas pela expressão 4.43, na expressão 4.41, pode-se reescrever a equação matricial da seguinte forma:

$$[H][u] - [G][q] = [S_X F_x F^{-1} + S_Y F_y F^{-1}] \{u\} \quad (4.44)$$

Para uma representação algébrica ainda mais compacta pode-se ainda sintetizar através de uma matriz $[R]$, a exposição da expressão final, conforme visto nas definições abaixo.

$$[R_x] = S_X F_x F^{-1} \quad [R_y] = S_Y F_y F^{-1} \quad [R] = [R_x] + [R_y] \quad (4.45)$$

Com o uso da definição da equação 4.45, na expressão 4.44, o sistema matricial discreto final do problema advectivo-difusivo via técnica na dupla reciprocidade pode ser compactado conforme abaixo na equação 4.46.

$$[H - R][u] = [G][q] \quad (4.46)$$

4.4 Formulação via Integração Direta Regularizada

Inicia-se com a exposição da equação de governo simplificada da advecção-difusão mostrada abaixo. Todo o desenvolvimento porvir é feito com utilização da notação indicial, uma vez que esta facilita de sobramaneira a exposição algébrica e confere objetividade e elegância ao desenvolvimento matemático, tal como as formulações anteriormente expostas. Aqui, vale também reinterar as omissões de propriedades termofísicas por simplicidade, uma vez que não variam em função do espaço ou do campo escalar u .

$$u_{,ii} = v_i u_{,i} \quad (4.47)$$

Ao multiplicar-se os dois lados da equação 4.47 por uma solução auxiliar, denominada solução fundamental, no caso desta formulação de natureza mais simples que a correlata ao problema original, chega-se a chamada formulação integral forte do problema. Mais detalhes acerca da estrutura da solução fundamental utilizada nesta formulação serão expostos em momento propício. É importante ressaltar também que as relações funcionais são expostas, de forma proposital, para deixar mais claros os procedimentos algébricos e evitar possíveis erros de formulação.

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X)u^*(\xi, X)d\Omega(X) = \int_{\Omega} v_i(X)u_{,i}(X)u^*(\xi, X)d\Omega(X) \quad (4.48)$$

Devido a extensão do tratamento matemático dado a posteriori com base na formulação integral representada pela equação 4.48, faz-se conveniente pensar a álgebra em duas partes, onde o lado esquerdo da equação representa o lado difusivo (LD) e o lado direito é tratado como lado advectivo (LA).

O lado difusivo, se visto isoladamente, corresponde a equação diferencial de Laplace, cujo tratamento matemático na seara do método dos elementos de contorno é vastamente conhecido e encontrado com facilidade na literatura especializada como em [39], [40], [3] e também [5]. Segue abaixo portanto, formulação integral inversa correlata ao lado difusivo.

$$LD = c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi, X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi, X)d\Gamma \quad (4.49)$$

Uma análise mais atenta da formulação inversa apresentada em 4.49 revela que a função de ponto que surge como primeiro termo é resultado do tratamento de uma integral de domínio via solução fundamental de Laplace/Poisson. Apesar do problema original ser de natureza física advectivo-difusiva, a solução fundamental utilizada aqui é a de Laplace/Poisson, devido a sua simplicidade dentro outros fatores mais elaborados que serão expostos doravante. A estrutura de tal solução fundamental clássica é mostrada abaixo para problemas bidimensionais em

alinhamento com a literatura em [41].

$$u^*(\xi, X) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi, X) \quad (4.50)$$

Hipoteticamente, se o problema posto fosse o de Laplace, o resultado final, pós-discretização, seria o sistema linear posto abaixo cujas incógnitas podem ser potenciais e fluxos, cujos cálculos são feitos de forma simultânea na mecânica dos método de elementos de contorno. Os coeficientes podem ser definidos na sequência, e são clássicos na literatura correlata ao método como pode ser visto em [5] e [39].

$$[H][u] = [G][q] \quad (4.51)$$

$$H_{\xi j} = \int_{\Gamma_j} q^*(\xi, X) d\Gamma_j \quad (4.52)$$

$$G_{\xi j} = \int_{\Gamma_j} u^*(\xi, X) d\Gamma_j \quad (4.53)$$

Uma vez tratado o lado difusivo é possível focar no tratamento do lado advectivo da equação de governo, cujo lidar é um pouco mais elaborado. Por conveniência e conforto o lado advectivo visto de forma separada é exposto abaixo novamente, tal como o desenvolvimento da integração por partes afim de trabalhar a integral de domínio.

$$LA = \int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}(X) u^*(\xi, X) d\Omega \quad (4.54)$$

$$(v_i u u^*)_{,i} = (v_i u)_{,i} u^* + v_i u u_{,i}^* \quad (4.55)$$

$$(v_i u u^*)_{,i} = [v_{i,i} u + v_i u_{,i}] u^* + v_i u u_{,i}^* \quad (4.56)$$

$$v_{i,i} = 0 \quad (4.57)$$

$$v_i u_{,i} u^* = (v_i u u^*)_{,i} - v_i u u_{,i}^* \quad (4.58)$$

Com a utilização da técnica de integração por partes, ilustrada pela equação 4.55, e utilizando as premissas da hipótese de incompressibilidade do fluído, representada matematicamente pela equação 4.57, é possível chegar a uma formulação integral fraca, mostrada abaixo pela equação 4.59.

$$LA = \int_{\Omega} (v_i u u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} v_i u u_{,i}^* d\Omega \quad (4.59)$$

Sequencialmente, via teorema da divergência é possível transpor a primeira integral gerada do domínio para o contorno.

$$LA = \int_{\Gamma} v_i(X) n_i(X) u(X) u^*(\xi, X) d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X) u(X) u_{,i}^*(\xi, X) d\Omega \quad (4.60)$$

Observe então que o primeiro termo da equação 4.60 já está contabilizado como uma integral de contorno, e portanto, não representa mais grande problema a nível de manipulação matemática. Volta-se então, a partir de agora, nosso foco para o tratamento da segunda integral que ainda está correlata ao domínio.

4.4.1 Processo de Regularização do Termo Advectivo

O foco do tratamento do lado advectivo resume-se então à manipulação matemática da integral de domínio restante na expressão 4.60. A técnica da integração direta (MECID), propõe a aproximação de todo o núcleo da integral de domínio via funções de bases radiais, tal como pode ser visto e maiores detalhes nas referências [8], [7]. Ambas as técnicas fazem a citada aproximação através de uma soma de coeficientes e funções de bases radiais. Um extenso trabalho de testes de eficiência destas funções radiais foi feita em [49], sendo o comportamento de algumas delas já conhecido e previsível.

É também inserido neste desenvolvimento um artifício matemático para o tratamento de singularidade quando há coincidência entre ponto fonte e ponto interpolante, na contabilização da solução fundamental. Tal artifício tem como fundamento a soma e subtração de uma mesmo termo integral de domínio, sendo denominado de processo de regularização, e ilustrado a seguir pela equação 4.61, a seguir. Tal procedimento gerou bons resultados a nível de estado da arte e vem se mostrando eficaz em alguns problemas centrais de engenharia, como pode ser apreciado em [19].

$$\begin{aligned} LA &= \int_{\Gamma} v_i(X) n_i(X) u(X) u^*(\xi, X) d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) u(X) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) u(\xi) d\Omega - \int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) u(\xi) d\Omega \end{aligned} \quad (4.61)$$

Conforme pode ser visto na equação 4.61 acima, os últimos dois termos com sinais opostos constituem os termos regularizadores, e tem como principal função o tratamento da singularidade como exposto a priori. Ao acoplarmos um dos dois termos com segunda integral da equação 4.61, como mostrado a seguir, cria-se um termo de domínio que será rotulado como termo regularizado. Tal denominação se deve ao fato de sua nulidade quando da coincidência do ponto fonte com o ponto interpolante.

$$LA = \int_{\Gamma} v_i(X) n_i(X) u(X) u^*(\xi, X) d\Gamma - \int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) [u(X) - u(\xi)] d\Omega \quad (4.62)$$

$$- \int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) u(\xi) d\Omega$$

Como há sempre um equilíbrio entre ganho de acurácia e custo matemático, percebe-se que a equação 4.62 traz a presença de três termos integrais. Apenas para somatizar uma visão geral, o primeiro termo não representa dificuldades por já se encontrar no contorno. O segundo termo, chamado regularizado será tratado com a técnica MECID e as aproximações serão feitas utilizando funções de bases radiais. Dedicase a seguir uma seção específica ao tratamento de cada um dos dois termos integrais de domínio.

4.4.2 Tratamento do Termo Regularizado

O termo regularizado será tratado, como já citado anteriormente através da técnica de integração direta, que preconiza por sua vez a aproximação de todo o núcleo da integral via funções de base radial. Por conveniência o termo a ser tratado é exposto abaixo pela equação 4.63.

$$TR = \int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) [u(X) - u(\xi)] d\Omega \quad (4.63)$$

A aproximação do núcleo pode ser acompanhada abaixo, sendo definida como uma soma de produtos entre funções de base radial e coeficientes por hora indeterminados.

$$v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) [u(X) - u(\xi)] \cong \alpha_j^\xi F_j(X_j, X) \quad (4.64)$$

Uma vez que os coeficientes são constante numéricas, estes podem ser retirados das integrais e o tratamento matemático das funções de base radial como núcleos de integração é feito através de suas funções primitivas. Este tratamento é mostrado de forma sucinta na sequência de passos ilustrados pela equação 4.65 a seguir, onde os conceitos de primitivas e teorema da divergência são utilizados.

$$TR \cong \int_{\Omega} \alpha_j^\xi F_j(X_j, X) d\Omega = \alpha_j^\xi \int_{\Omega} \psi_{,ii}^j d\Omega = \alpha_j^\xi \int_{\Omega} (\psi_{,i})_{,i}^j d\Omega = \alpha_j^\xi \int_{\Gamma} (\psi_{,i} n_i)^j d\Gamma \quad (4.65)$$

É possível neste ponto, trabalhar algebraicamente a equação 4.65, em vistas a ter expressões algébricas mais compactas. Define-se de forma inicial uma nova variável que acople o produto entre o cosseno diretor e o gradiente da primitiva como segue.

$$\eta_j = \psi_{,i}^j n_i \quad (4.66)$$

Utilizando a definição da equação 4.66 para então reescrever a equação 4.65, é possível reescrevê-la no formato a seguir.

$$TR \cong \alpha_j^\xi \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma \quad (4.67)$$

A quantificação da integral presente na equação acima pode ser condensada numa notação mais simples tal como abaixo.

$$N_j = \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma \quad (4.68)$$

Desta forma o termo regularizado pode equacionado em função dos coeficientes a determinar α e das quantidades N_j , resultando em:

$$TR \cong \alpha_j^\xi N_j \quad (4.69)$$

4.4.3 Tratamento do Termo Excedente de Domínio

Subsequente ao tratamento do termo regularizado, o último termo que demanda tratamento algébrico é um termo de domínio inserido na formulação devido ao artifício da regularização. Para melhor exposição da álgebra, tal termo é escrito de forma isolada abaixo.

$$TE = \int_{\Omega} v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) u(\xi) d\Omega \quad (4.70)$$

Como o termo de potencial $u(\xi)$ não depende das coordenadas espaciais, pode, por sua vez, deixar a integral, restando agora apenas os dois outros termos que compõe o núcleo tratável da mesma. Com aplicação simples da integração por partes, em 4.71 e 4.72, e posterior transferência para o contorno via teorema da divergência, a integral, já no contorno, pode ser posta tal como na equação 4.73.

$$(v_i u^*)_{,i} = v_{i,i} u^* + v_i u_{,i}^* \quad (4.71)$$

$$v_i u_{,i}^* = (v_i u^*)_{,i} \quad (4.72)$$

$$TE = u(\xi) \int_{\Gamma} v_i(X) n_i(X) u^*(\xi, X) d\Gamma \quad (4.73)$$

Após o tratamento deste termo de domínio a formulação integral do problema difusivo-advectivo com regularização chega ao fim, estando assim, neste nível de manipulação algébrica, pronta para ser discretizada.

4.4.4 Processo de Discretização do Lado Difusivo

O processo de discretização de uma equação integral corresponde conceitualmente a uma migração do domínio contínuo, descrito pela equação integral de governo para uma perspectiva discreta onde a análise é focada apenas em alguns pontos discretos do domínio. Por sua natureza, o MEC exige apenas a discretização do contorno, gerando assim uma redução significativa na dimensão do problema e portanto em sua complexidade. De forma análoga ao tratamento algébrico dado ao termo difusivo em seção anterior, a discretização do lado difusivo é vastamente conhecida e pode ser sintetizada abaixo. Para maiores detalhes deste desenvolvimentos clássicos vide [39], [40] e [3].

$$LD = c(\xi)u(\xi) + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u_j(X)q^*(\xi, X)d\Gamma_j \right\} - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} q_j(X)u^*(\xi, X)d\Gamma_j \right\} \quad (4.74)$$

Para facilitar a visualização do sistema linear em seção a posteriori, usa-se então as definições das expressões 4.52 e 4.53 para expor a seguir o desenvolvimento de cada linha do sistema linear. É importante notar que cada linha do sistema é gerada pela alocação do ponto fonte ξ sobre um dos nós de cálculo do elemento da malha de contorno e posterior interpolação com todos os demais pontos nodais.

$$LD = c(\xi)u(\xi) + \{u_1H_{\xi 1} + u_2H_{\xi 2} + \dots + u_NH_{\xi N}\} - \dots - \{q_1G_{\xi 1} + q_2G_{\xi 2} + \dots + q_NG_{\xi N}\} \quad (4.75)$$

4.4.5 Processo de Discretização do Lado Advectivo

O processo de discretização e sua aplicação ao lado advectivo é mostrada em maiores detalhes com o tratamento individual de cada um dos três termos que o compõe. Inicia-se pelo termo mais simples de contorno que é mostrado abaixo com todas as relações funcionais por conveniência.

$$T1 = \int_{\Gamma} (v_i n_i)^j u^j u^*(\xi, X) d\Gamma \quad (4.76)$$

Ao discretizar-se para um número N arbitrário de elementos no contorno, tem-se:

$$T1 = \sum_{j=1}^N \left((v_i n_i)^j \int_{\Gamma_j} u^j(X)u^*(\xi, X)d\Gamma_j \right) \quad (4.77)$$

Observa-se da expressão 4.77 que o potencial u assim como o produto entre a velocidade e o cosseno diretor são dependentes apenas do elemento e portanto não dependem do contorno,

podendo deixar a integral. Desta forma, fazendo uso da definição da equação 4.53 é possível escrever a forma discretizada do termo como segue.

$$T1 = \left\{ (v_i n_i)^1 u^1 G_{\xi 1} + \dots + (v_i n_i)^N u^N G_{\xi N} \right\} \quad (4.78)$$

O segundo termo a ser trabalhado é o regularizado, que por sua vez foi aproximado utilizando funções de base radial através do MECID. Por momento não há como manipular este termo uma vez que os coeficientes α ainda permanecem desconhecidos, ao contrário dos termos N_j que são calculáveis. O termo proveniente da aproximação é apenas mostrado aqui em sua forma expandida.

$$T2 \cong \alpha_j^\xi N_j = \alpha_1^\xi N_1 + \dots + \alpha_{nel}^\xi N_{nel} \quad (4.79)$$

Por fim o termo excedente de domínio é mostrado abaixo também de forma individual por facilidade, reiterando ainda as relações funcionais que se fazem úteis para o processo de discretização.

$$T3 = u(\xi) \int_{\Gamma_j} (v_i n_i)^j u^*(\xi, X) d\Gamma_j \quad (4.80)$$

Perceba que, no núcleo da integral, os termos inerentes aos fluxos de velocidade também podem deixar a integral por serem inerentes a cada elemento do contorno discretizado. Desta forma, o formato discretizado da equação 4.80 torna-se:

$$T3 = u(\xi) \left\{ \sum_{j=1}^N \left((v_i n_i)^j \int_{\Gamma_j} u^*(\xi, X) d\Gamma_j \right) \right\} \quad (4.81)$$

A utilização da definição da equação 4.53 resulta em uma forma expandida conforme segue.

$$T3 = u(\xi) \left\{ (v_i n_i)^1 G_{\xi 1} + \dots + (v_i n_i)^N G_{\xi N} \right\} \quad (4.82)$$

Enfim após a discretização dos três termos individualmente é possível organiza-los de forma uníssona no formato discretizado em função do termo fonte ξ para o lado advectivo do problema.

$$LA = \left\{ (v_i n_i)^1 u^1 G_{\xi 1} + \dots + (v_i n_i)^N u^N G_{\xi N} \right\} + \alpha_1^\xi N_1 + \dots + \alpha_N^\xi N_N \quad (4.83)$$

$$+ u(\xi) \left\{ (v_i n_i)^1 G_{\xi 1} + \dots + (v_i n_i)^N G_{\xi N} \right\} \quad (4.84)$$

O formato de escrita mostrado na sentença 4.84 acima tal como a que representa o lado difusivo na equação 4.75 serão de sobremaneira usuais na formação do sistema linear, que é o foco da seção a posteriori.

4.4.6 Constituição do Sistema Linear

Uma vez executado com sucesso o procedimento de discretização da equação integral de governo é possível gerar um sistema linear responsável por calcular os potenciais e fluxos incógnitos em cada elemento do contorno. Para tanto, uma visão geral de uma linha do sistema matricial é mostrada abaixo, resultado que sintetiza a seção anterior.

$$c(\xi)u(\xi) + \{u_j H_{\xi j}\} - \{q_j G_{\xi j}\} = \{v_i^k n_i^k u^j G_{\xi j}\} - \{\alpha_j^\xi N_j\} - u(\xi) \{(v_i n_i)^j G_{\xi j}\} \quad (4.85)$$

Por ser um termo recorrente na formulação o produto entre escalar entre o vetor velocidade e o cosseno diretor é condensado em uma nova variável β^j conforme a seguir.

$$\beta^j = (v_i n_i)^j \quad (4.86)$$

Cada um dos termos da equação 4.85 acima, pode ser melhor visualizado ao expandir a notação indicial implícita em cada termo, expondo a formação de cada linha do sistema linear através de matrizes linha e coluna. Abaixo essa configuração é exposta dividindo-se por LD e LA como vem sendo feito de forma recorrente.

$$LD = c(\xi)u(\xi) + (H_{\xi 1} \dots H_{\xi 2} \dots H_{\xi N}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} - (G_{\xi 1} \dots G_{\xi 2} \dots G_{\xi N}) \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

$$LA = (G_{\xi 1} \dots G_{\xi 2} \dots G_{\xi N}) \begin{pmatrix} \beta^1 u_1 \\ \vdots \\ \beta^N u_N \end{pmatrix} + (\xi \alpha_1 \dots \xi \alpha_2 \dots \xi \alpha_N) \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_N \end{pmatrix} + \left\{ (G_{\xi 1} \dots G_{\xi 2} \dots G_{\xi N}) \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^N \end{pmatrix} \right\} u(\xi) \quad (4.88)$$

O sistema matricial pode ser facilmente expandido, alocando o ponto fonte ξ em cada um dos nós funcionais do contorno e executando a varredura de interpolações, gerando assim um sistema linear com matrizes de coeficientes de ordem idêntica ao número de elementos que discretizam o a malha numérica. O formato do sistema matricial gerado é exibido abaixo.

$$[c][u] + [H][u] - [G][q] = [G'][u] - [\alpha][N] - [D][u] \quad (4.89)$$

Uma análise mais atenta do sistema matricial de 4.89 revela a presença de duas matrizes diagonais $[c]$ e $[D]$. Além disso, focando apenas no lado direito do sistema matricial nota-se que as duas matrizes $[G']$ e $[D]$ são específicas desta formulação, e por tal motivo, são mostradas a seguir de forma expandida. Importante salientar que a notação indicial foi utilizada na exposição dos elementos da matriz diagonal $[D]$, para tornar compacta sua visualização. Por

sua vez as matrizes $[c]$, $[H]$ e $[G]$ são clássicas das formulações mais simples do Método de Elementos de Contorno e podem ser facilmente encontradas nas referências [39] e [40].

$$[G'] = \begin{pmatrix} \beta^1 G_{11} & \beta^2 G_{12} & \beta^3 G_{13} \\ \beta^1 G_{21} & \beta^2 G_{22} & \beta^3 G_{23} \\ \beta^3 G_{31} & \beta^3 G_{32} & \beta^3 G_{33} \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

$$[D] = \begin{pmatrix} \beta^j G_{1j} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^j G_{2j} & 0 \\ 0 & 0 & \beta^j G_{3j} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta^1 G_{11} + \dots + \beta^N G_{1N}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (\beta^1 G_{N1} + \dots + \beta^N G_{NN}) \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Com isso uma visão atualizada do sistema linear, gerado até então, pode ser apreciada abaixo de forma bipartida novamente, mostrando primeiramente o LD expandido e logo em seguida o LA.

$$LD = \begin{bmatrix} c(\xi_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c(\xi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$LA = \begin{bmatrix} \beta^1 G_{11} & \dots & \beta^N G_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^1 G_{N1} & \dots & \beta^N G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}_1\alpha_1 & \dots & {}_1\alpha_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_N\alpha_1 & \dots & {}_N\alpha_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\beta^1 G_{11} + \dots + \beta^N G_{1N}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (\beta^1 G_{N1} + \dots + \beta^N G_{NN}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

4.4.7 Determinação da Matriz Alfa

A priori uma outra análise na equação matricial 4.89 revela que os termos da equação obedecem a um padrão de produto entre matriz coeficiente e vetor de potenciais ou fluxos. Uma exceção a esse padrão nesta etapa na formulação se localiza no termo regularizado que foi aproximado via técnica da integração direta (MECID). É preciso então, nesta fase determinar a matriz de coeficientes $[\alpha]$.

Para tanto é preciso iniciar com um retorno à aproximação proposta pelo MECID, onde todo o núcleo da integral do termo regularizado foi aproximada por uma somatória de bases radiais [50] ponderadas por coeficientes a determinar, como pode ser revisto abaixo.

$$\alpha_j^\xi F_j(X, X_j) \simeq v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) [u(X) - u(\xi)] \quad (4.94)$$

Com objetivo de sintetizar o algebrismo, o produto entre a velocidade e o gradiente da solução fundamental é condensado em um termo novo conforme segue em forma compacta e matricial diagonal.

$$\Lambda^\xi = v_i(X) u_{,i}^*(\xi, X) \quad (4.95)$$

$$[\xi \Lambda] = \begin{bmatrix} \xi \Lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi \Lambda_N \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

É conveniente neste ponto escrever a equação 4.94 em forma matricial, uma vez que expandindo-se tal equação e, alocando o ponto fonte sobre todos os nós funcionais, pode-se expor o resultado da seguinte forma:

$$[F] [\xi \alpha] = [\xi \Lambda] [u(X) - u(\xi)] \quad (4.97)$$

Para uma visualização mais clara da expressão acima sua forma matricial é elencada abaixo.

$$\begin{bmatrix} F_1^1 & \cdots & F_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_N^1 & \cdots & F_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \alpha_1 \\ \vdots \\ \xi \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \Lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi \Lambda_N \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} - [u(\xi)] \right\} \quad (4.98)$$

Uma vista mais cuidadosa na equação matricial 4.98 acima revela que todos os termos de sua formulação são matrizes ou vetores, inclusive o vetor $[u(\xi)]$, ainda não escrito de forma expandida, constituído pela função de ponto. Entretanto, este também pode ser escrito como um vetor uniforme, ou seja, cujas componentes são todas idênticas por estar sendo multiplicado por uma matriz diagonal, e com isso, não alterando o resultado matemático. A versão reescrita da expressão 4.98 é posta abaixo.

$$\begin{bmatrix} F_1^1 & \cdots & F_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_N^1 & \cdots & F_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \alpha_1 \\ \vdots \\ \xi \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \Lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi \Lambda_N \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(\xi) \\ \vdots \\ u(\xi) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.99)$$

Para tornar então o vetor $[\alpha]$, determinado pode-se pré multiplicar ambos os lados da equação 4.99 pela inversa matriz da bases radiais, $[F]^{-1}$, expondo então a seguinte expressão para o cálculo dos coeficientes a determinar em forma compacta e expandida, respectivamente, nas equações 4.100 e 4.101.

$$[\alpha] = [F]^{-1} [\Lambda] [u(X)] - [F]^{-1} [\Lambda] [u(\xi)] \quad (4.100)$$

$$\begin{bmatrix} \xi\alpha_1 \\ \vdots \\ \xi\alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 & \cdots & F_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_N^1 & \cdots & F_N^N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi\Lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi\Lambda_N \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(\xi) \\ \vdots \\ u(\xi) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.101)$$

Com a forma adequada de calcular os coeficientes α é possível tratar o termo matricial regularizado que ainda não se encontra em função dos potenciais a determinar no contorno. As próximas etapas algébricas trabalham no sentido de executar esta manipulação. Primeiramente nomeia-se o termo regularizado a se trabalhar como um novo vetor denominado de $[A]$ tal como segue.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\alpha_1 & \cdots & 1\alpha_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N\alpha_1 & \cdots & N\alpha_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_N \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Uma vez feita tal definição, para um melhor desenvolvimento da álgebra é possível trabalhar no cálculo de cada componentes do vetor $[A]$, que por sua vez é função da localização do ponto fonte, assim como todas as linhas do sistema linear.

$$A_\xi = (N_1 \dots N_N) \begin{pmatrix} \xi\alpha_1 \\ \vdots \\ \xi\alpha_N \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

Esta forma de trabalho é conveniente, pois, durante a determinação dos coeficientes α , o vetor de coeficientes inerentes a um ponto fonte genérico foi isolado, tal como na expressão matricial acima.

Ao substituir o vetor de coeficientes $[\alpha]$ determinado na equação 4.101 na equação 4.103, posta anteriormente, tem-se:

$$A_\xi = (N_1 \dots N_N) \begin{bmatrix} F_1^1 & \cdots & F_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_N^1 & \cdots & F_N^N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi\Lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi\Lambda_N \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(\xi) \\ \vdots \\ u(\xi) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.104)$$

Por simplicidade, condensa-se o produto dos primeiros dois termos matriciais como a seguir.

$$(S_1 \dots S_N) = (N_1 \dots N_N) \begin{bmatrix} F_1^1 & \cdots & F_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_N^1 & \cdots & F_N^N \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.105)$$

De tal forma que agora cada coeficiente do vetor $[A]$, que depende da posição do ponto fonte, pode ser descrito matematicamente como:

$$A_\xi = (S_1 \dots S_N) \begin{bmatrix} \xi\Lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi\Lambda_N \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(\xi) \\ \vdots \\ u(\xi) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.106)$$

Com alguma manipulação algébrica é possível escrever todo o vetor $[A]$ definido na equação 4.106 da forma a seguir.

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N [-S_{i1}\Lambda_i(1 - \delta_{i1})] & S_{21}\Lambda_2 & \dots & S_{N1}\Lambda_N \\ S_{12}\Lambda_1 & \ddots & \sum_{i=1}^N [-S_{i2}\Lambda_i(1 - \delta_{i2})] & \dots & S_{N2}\Lambda_N \\ S_{1N}\Lambda_1 & S_{2N}\Lambda_2 & \dots & \sum_{i=1}^N [-S_{iN}\Lambda_i(1 - \delta_{iN})] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Abaixo, isola-se apenas a modelagem dos termos da diagonal, onde pode-se perceber claramente o tratamento da singularidade produzido pelo procedimento de regularização proposto nesta formulação. Quando há coincidência do ponto fonte com o ponto interpolante, o operador Delta de Dirac se encarrega de anular o termo vigente, promovendo assim uma tendência a melhora dos resultados numéricos.

$$\sum_{i=1}^N [-S_{i\xi}\Lambda_i(1 - \delta_{i\xi})] \quad (4.108)$$

Com a observação acima da modelagem do vetor $[A]$ definido pela equação 4.107 o sistema linear está completo e pode agora ser escrito exclusivamente em função de potenciais e fluxos e matrizes de coeficientes determináveis. O lado difusivo e advectivo são mostrado em sequência, respectivamente.

$$LD = \begin{bmatrix} c(\xi_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c(\xi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} - \dots - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

$$LA = \left\{ \begin{bmatrix} \beta^1 G_{11} & \cdots & \beta^N G_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^1 G_{N1} & \cdots & \beta^N G_{NN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N [-S_{i1}\Lambda_i(1-\delta_{i1})] & \cdots & S_{N1}\Lambda_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1N}\Lambda_1 & \cdots & \sum_{i=1}^N [-S_{iN}\Lambda_i(1-\delta_{iN})] \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \beta^j G_{1j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=1}^N \beta^j G_{Nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

Por fim organizando-se o sistema matricial final de forma compacta para uma visualização mais clara é possível chegar a um formato final com a estrutura que segue.

$$\{ [H'] - [G'] + [Z] + [S] \} [u] = [G] [q] \quad (4.111)$$

Por conveniência as matrizes de coeficientes são definidas abaixo de maneira reiterada, encerrando a definição do sistema linear resultante do problema advectivo-difusivo com regularização utilizando a técnica de integração direta via funções de bases radiais.

$$[H'] = \begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c(\xi_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c(\xi_N) \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

$$[G'] = \begin{bmatrix} \beta^1 G_{11} & \cdots & \beta^N G_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^1 G_{N1} & \cdots & \beta^N G_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N [-S_{i1}\Lambda_i(1-\delta_{i1})] & \cdots & S_{N1}\Lambda_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1N}\Lambda_1 & \cdots & \sum_{i=1}^N [-S_{iN}\Lambda_i(1-\delta_{iN})] \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \beta^j G_{1j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{i=1}^N \beta^j G_{Nj} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

5 Análise de Resultados e Discussões

Este capítulo é dedicado a expor a resposta da formulação proposta (MECIDR), a diversos tipos de simulações no intuito de avaliar sua performance nos problemas advectivos-difusivos. Para tanto foram selecionados quatro casos, que serão submetidos a testes sistêmicos conforme a metodologia descrita em detalhes a seguir.

5.1 Metodologia Adotada

A definição objetiva de uma metodologia e seu detalhamento é importante para conferir credibilidade e reproduzibilidade aos resultados científicos. Portanto, nesta seção determina-se o algoritmo de teste adotado e define-se que tipos de análise devem ser executadas em cada caso proposto com sua respectiva motivação e fundamentação.

A priori, com a observação de que a formulação sob teste, MECIDR, é fundamentada em bases radiais, tem-se dois parâmetros principais de controle de refinamento de malha: quantidade de pontos de contorno (EC) que efetuam a discretização do contorno e quantidade de pontos internos (PI) que conferem precisão às interpolações. No vigente trabalho as malhas possuem nós duplos implementados nas quinas e a discretização é feita com base em elementos de contorno lineares. O eficiência do tipo de elemento de contorno utilizado: constante, linear e quadrático foi estudado com completude na referência [51], sendo o elemento linear o que apresenta o melhor balanço entre precisão e simplicidade de implementação para a grande maioria dos problemas de campo escalar.

Neste contexto, as duas primeiras análises realizadas em cada um dos quatro casos são relativas à convergência em relação a estes dois parâmetros-chave. Em outras palavras, espera-se uma queda sistemática do erro médio atrelado a malha com o incremento da quantidade de elementos de contorno ou expansão da nuvem de pontos internos. Estas análises são responsáveis por inferir sobre a robustez e tendência convergente da formulação proposta. Tais testes são realizados com a utilização de um valor unitário para o número de Peclét, o que traduz uma análise com dominância dos efeitos difusivos. É importante ressaltar também que os erros para estes testes de convergência utilizam o critério erro I, equação 5.3, que é abordado em detalhes na sequência.

Na sequência, em cada caso é realizada uma análise paramétrica em relação ao número de Peclét, na qual os efeitos advectivos são gradualmente amplificados através do aumento deste adimensional, no intuito de verificar o intervalo de precisão da formulação MECIDR. Num primeiro momento esta análise é efetuada com uma malha fixa de contorno e gerando curvas para diferentes tamanhos de nuvem de pontos internos. Com isto, é possível avaliar se uma maior quantidade de pontos internos é capaz de aumentar o intervalo de precisão do método.

Por fim uma segunda análise paramétrica correlata à situações com dominância da advecção é realizada, mas, fixando desta vez, a quantidade de pontos internos e variando o nível de

refinamento da malha de contorno. Esta análise permite, por sua vez, a determinação da relação entre a quantidade de elementos de contorno e a acurácia da formulação em problemas dominados pela advecção. É válido ressaltar que não foram feitas análises específicas para determinar um balanço ideal entre a quantidade de elementos de contorno e quantidade de pontos internos, apesar de sabido que esta proporção pode influenciar significativamente a precisão do método.

O agrupamento físico que governa o balanço de efeitos advectivos e condutivos na versão adimensional da equação de energia é o número de Peclét. A definição clássica deste adimensional é posta abaixo novamente por conveniência, e pode ser encontrada com facilidade no melhor da seara da literatura de transferência de calor, tal como em [36], [21], [26].

$$Pe_L = Re_L Pr_L = \frac{VL}{\alpha} \quad (5.1)$$

Nos quatro casos a serem analisados, por motivo de simplicidade, as geometrias são quadrados de lados unitários e o fluido que escoa sobre o domínio tem difusividade térmica α também unitária, o que reduz a estrutura de mensuração do número de Peclét a uma velocidade característica a ser selecionada. Adota-se aqui o módulo do vetor velocidade como parâmetro hidrodinâmico característico, uma vez que os quatro casos são testados com campos constantes de velocidade.

$$Pe_L = \|\vec{V}\| \quad (5.2)$$

As análises em todos os quatro casos, no tocante a malha de contorno, são feitas apenas nas arestas significativas, que são devidamente apontadas na descrição detalhada de cada caso, exceto se informado explicitamente de forma adversa. Esta opção justifica-se pela dificuldade que as funções interpolantes de bases radiais tem de interpolar valores de pequena e grande magnitude simultaneamente de acordo com [50], e portanto, considerar as arestas onde isto ocorre seria uma forma de atribuir ao método um desempenho não condizente com a realidade.

A avaliação do erro numérico cometido em cada nó da malha numérica, por sua vez, é feita através de dois critério de erro, dados nas expressões que seguem. Tem-se que o parâmetro de proporção do critério I é baseado no maior valor analítico relacionado à aresta analisada, no caso de um nó de contorno, ou o maior valor analítico da nuvem de pontos internos, quando se tratar de um nó desta natureza. Já o critério II baseia-se no valor analítico de cada nó para efetuar a ponderação percentual, padrão este clássico, e largamente utilizado na literatura de métodos numéricos de forma geral.

$$e_I = \frac{|u_{numerico} - u_{exato}|}{\max |u_{exato}|} \quad e_{II} = \frac{|u_{numerico} - u_{exato}|}{u_{exato}} \quad (5.3)$$

O uso deste critério I de cálculo de erro fundamenta-se principalmente em sua capacidade de compensação dos altos níveis artificiais de erros em quinas, onde há descontinuidades da

variável básica, que não pode ser realizada com o uso do critério clássico II. Entretanto, é comum em algumas situações a apresentação de baixos níveis de erro através do critério I, mesmo quando a solução numérica e analítica já apresentam certo distanciamento. Para lidar com tal característica, o critério II é sempre usado como parâmetro comparativo, afim de definir um intervalo comum aos dois critérios como uma zona de confiabilidade, na qual sabe-se que a formulação apresenta resultados coerentes.

Por fim, vale salientar que nenhuma métrica escolhida para representar o erro cometido por um método numérico é livre de crítica. Portanto, no que tange a garantir a consistência dos resultados gerados em alinhamento com sua referência analítica, estes valores são sempre comparados de maneira absoluta antes da exposição gráfica e tabular final, garantindo assim que os critérios não estejam conferindo um comportamento de desempenho artificial à formulação.

5.2 Caso I - Problema Unidimensional com Campo de Velocidade Uniforme

O primeiro caso a ser testado consiste em um problema com escoamento unidimensional, com fluxo nulo imposto nas arestas horizontais, fluxo não-homogêneo na aresta direita e potencial nulo prescrito na aresta esquerda do domínio, mostrado abaixo na Figura 1.

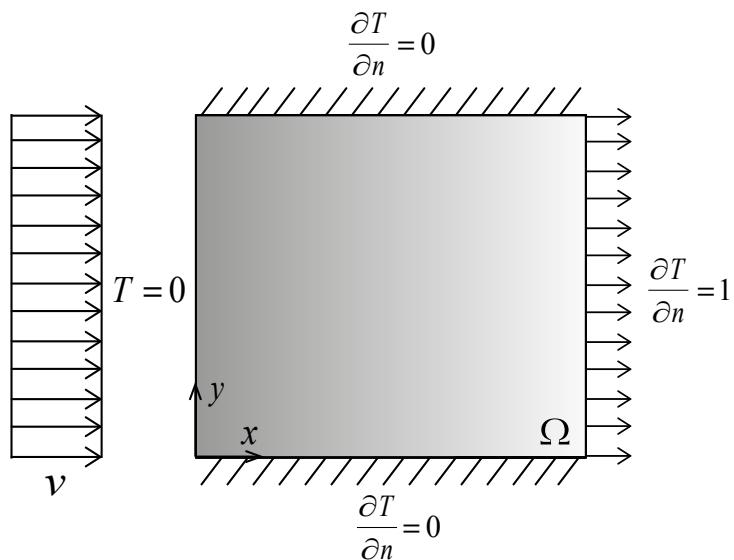


Figura 1 – Croqui Representativo do Caso I

Este caso é considerado simples, pois há escoamento em apenas uma direção. Adicionalmente, os fluxos nulos em arestas opostas fazem com que sua física seja governada matematicamente por uma equação diferencial ordinária, posta a seguir.

$$\rho c_p v \frac{dT}{dx} = k \frac{d^2T}{dx^2} \quad (5.4)$$

A solução analítica da equação diferencial ordinária de segunda ordem é de fácil obtenção e segue posta abaixo, juntamente com o sua derivada correlata. Estas expressões são utilizadas como referências na determinação dos erro numéricos cometidos pela formulação de elementos de contorno.

$$T(x) = \frac{e^{vx} - 1}{ve^v} \quad \frac{dT}{dx} = \frac{e^{vx}}{e^v} \quad (5.5)$$

Por se tratar de um contorno que demanda o cálculo de potencial em três de suas quatro arestas, a priori, vamos desprezar os resultados de fluxo que teoricamente seriam provenientes da aresta esquerda. Nesta linha de raciocínio, os potenciais são calculados em três arestas, entretanto, os resultados são exibidos com base apenas nos potenciais da aresta direita, que possui valores significativos. Isto pode ser facilmente vislumbrado pela natureza exponencial na solução analítica em 5.5, que gera valores de pequena e grande magnitude nos potenciais na aresta horizontal, com o crescimento gradual da velocidade do escoamento nas análises executadas, que , por sua vez, não são factíveis de serem interpolados pelas funções de bases radiais.

Inicia-se a exibição dos resultados com dois testes de convergência, que tem como parâmetros-chave a quantidade de pontos internos e o nível de refinamento da malha de contorno. O erro de potencial da aresta significativa é então trazido no eixo das ordenadas, em relação aos parâmetros elencados.

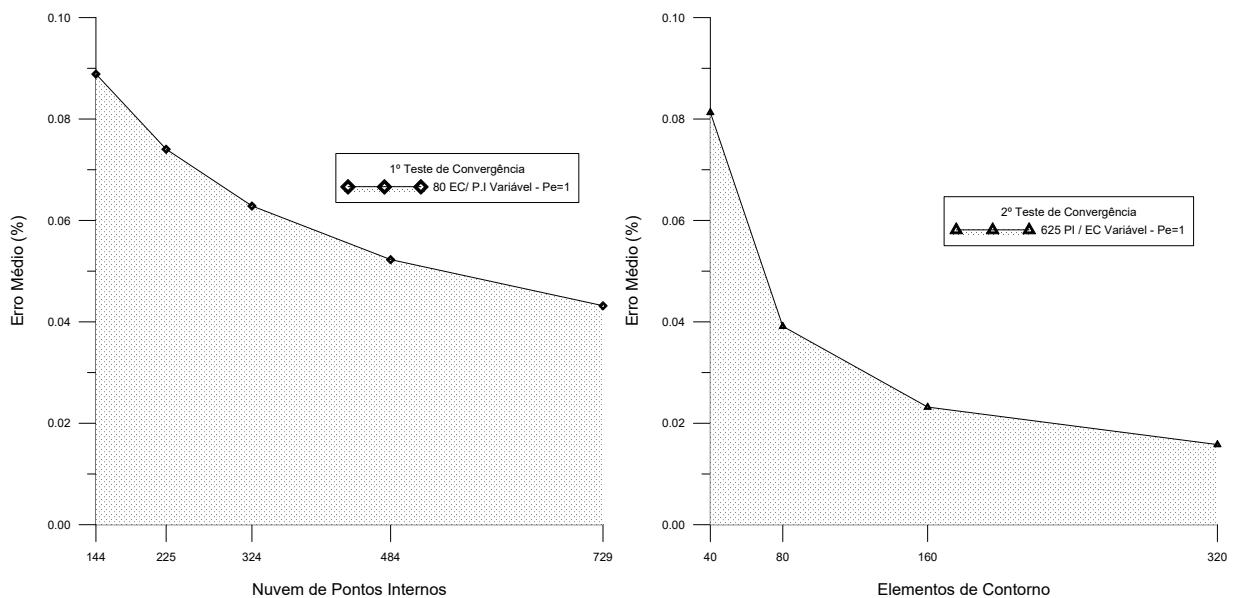


Figura 2 – Análise de Convergência em relação a P.I e EC. Pe=1

No gráfico da esquerda da Figura 2, os testes foram feitos para uma malha de contorno fixada com 80 elementos de contorno (EC) lineares, e a nuvem de pontos internos teve sua densidade gradualmente aumentada. Observa-se que uma queda sistemática do erro numérico é obtida quando do uso de uma maior quantidade de pontos internos. Já no gráfico da direita,

fixa-se um conjunto de 625 pontos internos (P.I), e varia-se agora o nível de refinamento no contorno, o que gera uma resposta de aumento da precisão dos resultados. Os dois testes executados apontam para um bom comportamento da formulação regularizada proposta no tocante a convergência.

Num segundo momento, executa-se uma a primeira análise paramétrica citada na metodologia, em que os efeitos da advecção tem sua magnitude gradualmente acrescida pelo aumento do adimensional de Peclét. Para tanto, uma malha de 320 EC é fixada, e são testadas três nuvens distintas de pontos internos, cada uma com quantidades aproximadamente proporcionais ao dobro da anterior. É importante destacar aqui, que apresentam-se os resultados de potenciais para a aresta significativa e para os pontos internos de forma separada. Tal secção justifica-se pelo fato dos resultados no pontos internos serem fortemente influenciados pelas oscilações provenientes de arestas com valores não-significativos. Desta forma, uma análise conjunta não permitiria isoler os comportamentos acerca da precisão de cada conjunto, gerando análises não conclusivas. Inicia-se portanto com a exibição dos erros correlatos aos potenciais na aresta considerada significativa, que pode ser exibida com um critério unificado de erro, uma vez que a natureza da solução analítica provoca uma equivalência entre os critérios I e II, nesta aresta.

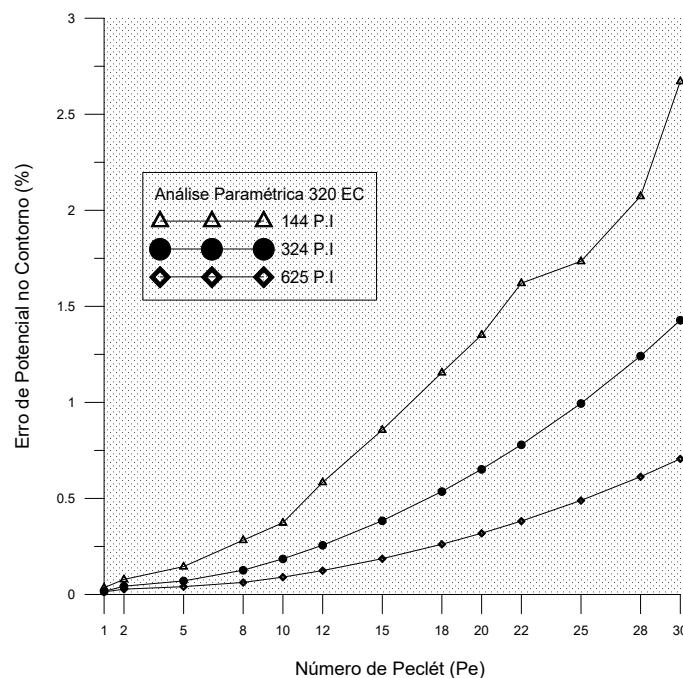


Figura 3 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial na Aresta Significativa - 320 EC Fixado

A Figura 3 demonstra um bom desempenho da formulação proposta para números de Peclét até mesmo medianos, onde os níveis de erro são mantidos em patamares de aplicação em engenharia. É possível observar também uma redução clara e significativa dos níveis de erro, quando aumenta-se a nuvem de pontos internos usada na malha, o que alinha-se com um comportamento já esperado mostrados por testes de convergência. Em particular, para este

resultado, pode-se inferir que mesmo para problemas dominados pela advecção, o quantidade de pontos internos continua a representar um forte parâmetro de controle de precisão.

Na sequência apresenta-se os resultados para os potenciais nos pontos internos para as mesma três nuvens de pontos internos, e também aumentando gradativamente o número de Peclét. Neste caso, porém, os erros medidos pelos critérios I e II são distintos, sendo prudente então mostra-los lado a lado para permitir uma comparação mais ajustada.

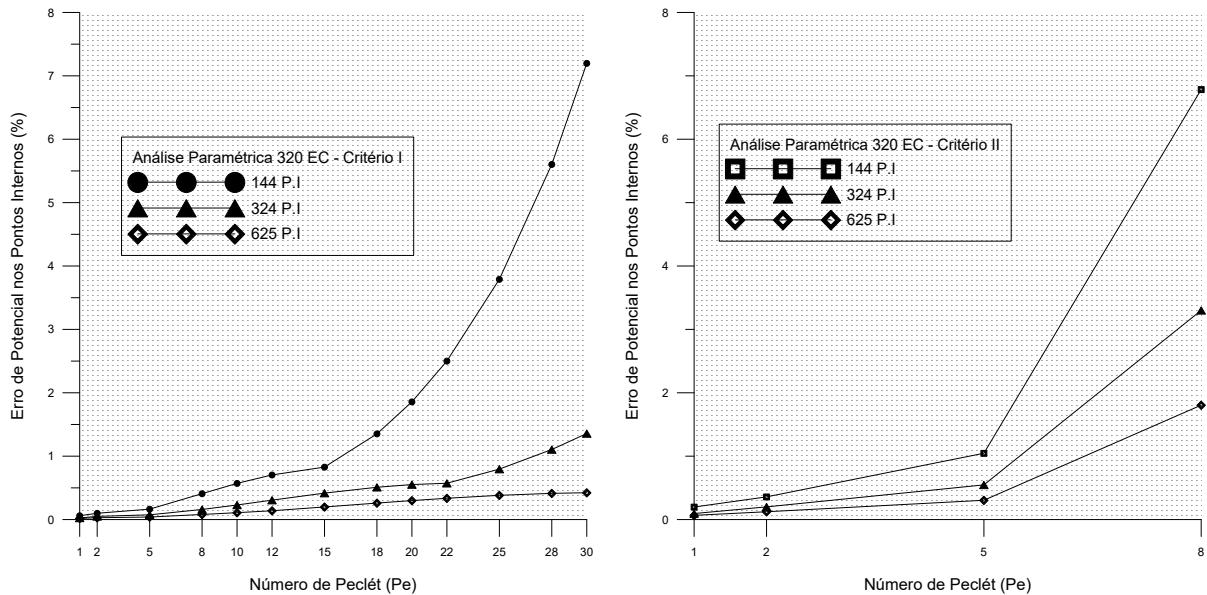


Figura 4 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial nos Pontos Internos- 320EC Fixado - Critério I e II

A Figura 4 deixa bem claro um comportamento bem distinto entre as duas métricas de erro adotadas, sendo necessária uma análise por partes. Primeiramente no gráfico da esquerda, o critério I, exibe erros em níveis muitos baixos, em especial para os conjuntos de nuvem interna de 324 P.I e 625 P.I, para números de Peclét até a magnitude de 30. Entretanto, ao observar-se o comportamento nó a nó dos pontos internos, percebeu-se um descolamento entre os valores analíticos e numéricos, que de certa forma, não se explicita pelo critério I. Já com o foco no gráfico da direita, por sua vez, que sintetiza a aplicação do critério II, esta característica fica mais evidente, indicando erros factíveis a nível de engenharia para os dois conjuntos mais refinados de pontos internos apenas até um número de Peclét equivalente a 8, que é muito inferior ao constatado pelo critério I. Em alinhamento, portanto, com o fixado pela metodologia adotada, determina-se a o intervalo de confiabilidade da formulação nesta análise com base no critério II.

Na sequência apresenta-se a segunda análise paramétrica correlata ao número de Peclét, na qual fixa-se um nuvem de pontos internos de 1156 P.I e varia-se o nível de refinamento de contorno em proporções de duplicação. Esta análise, em âmbito geral, apresenta malhas com nível de refinamento global superior a análise anterior e serve de referência para inferência do desempenho do método. Inicia-se portanto, na mesma sequência, mostrando os erros de

potencial numéricos nas arestas com valores significativos, na qual os critérios de erro I e II são uníssonos.

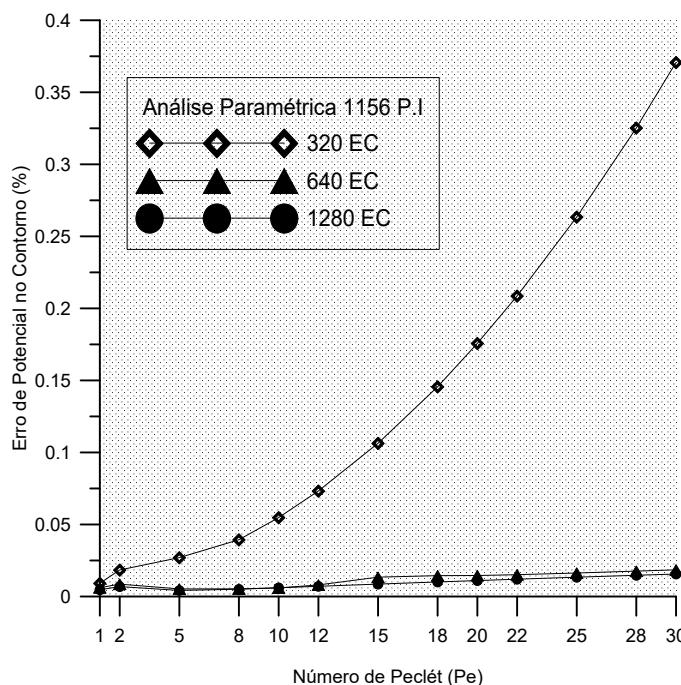


Figura 5 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial na Aresta Significativa - 1156 P.I Fixado

A Figura 5 mostra os resultados com níveis de erro de pequena ordem de magnitude para todas as três malhas testadas, e em todos os valores do intervalo de números de Peclét testados. Também segundo o esperado, os níveis de erro são decrescentes entre as malhas quando avaliados segundo o refinamento do contorno, e portanto, a malha de contorno mais refinada apresenta os menores níveis de erro. É também relevante observar que os resultados para as malhas de 640 EC e 1280 EC são muito semelhantes em quase todos o intervalo testado do adimensional de Peclét, o que aponta para uma certa saturação dos níveis de erro, quando em baixas magnitudes, tornando os refinamentos redundantes.

Por fim, foca-se na exibição dos erros de potenciais correlatos aos pontos internos para esta segunda análise paramétrica. Aqui, de forma recorrente ao feito na primeira análise, apresentam-se os resultados obtidos através dos critérios de erro I e II para permitir uma comparação pertinente.

A Figura 6, em seu gráfico da esquerda revela os erros nos potenciais calculados pelo critério I. É possível observar uma indicação de níveis muito baixos de erro para todas as malhas testadas para todo o intervalo de Peclét, até uma magnitude de mediana de 30. Em contrapartida, ao analisar-se o gráfico da direita referente ao critério II de erro, constata-se bons níveis de erro até um Peclét mais baixo equivalente a magnitude de 10, o que já é superior ao encontrado no gráfico da figura 4, na primeira análise, mostrando que o refinamento foi responsável por ampliar o intervalo no qual o erros permanecem baixos mesmo com presença mais intensa dos efeitos advectivos.

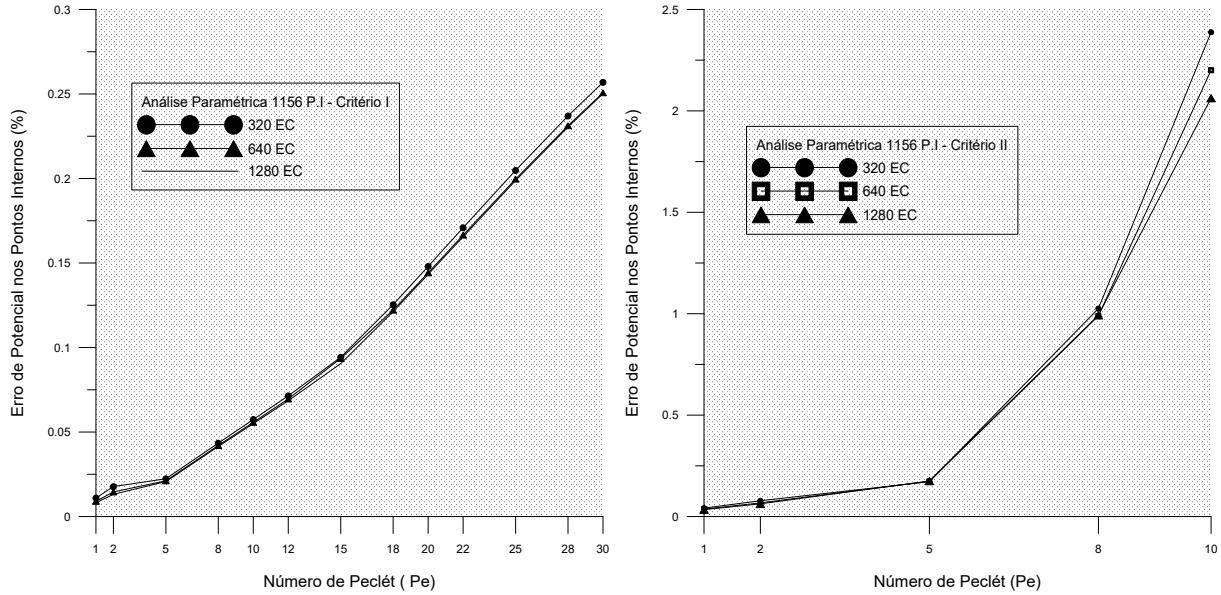


Figura 6 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial nos Pontos Internos- 1156 P.I Fixado - Critério I e II

5.3 Caso II - Problema Bidimensional com Condições de Contorno Variáveis

O segundo caso submetido a teste consiste em um problema bidimensional com condição de contorno de essencial variável aplicada em todas as arestas do domínio, tal como mostrado na Figura 7.

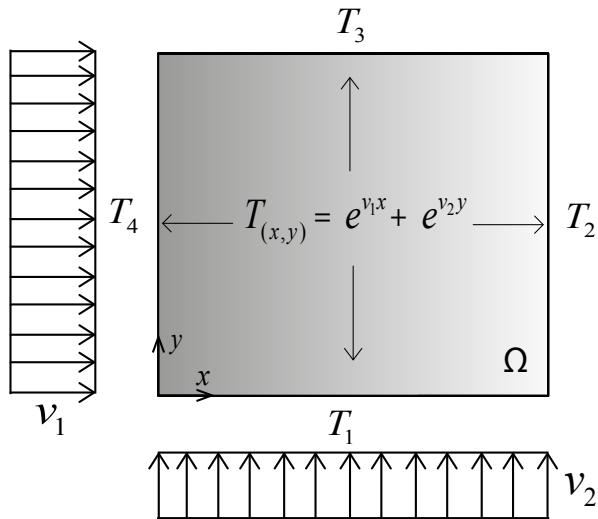


Figura 7 – Croqui Representativo do Caso II

As condições de contorno são impostas por uma função de duas variáveis com natureza exponencial, o que por sua vez, torna o problema teste em questão numericamente desafiante. A equação de governo pautada no balanço de energia, e simplificada para este caso toma a

forma abaixo.

$$v_1 \frac{dT}{dx} + v_2 \frac{dT}{dy} = \alpha \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} \right) \quad (5.6)$$

A solução da equação 5.6, torna-se imediata, uma vez que, dada a imposição de uma mesma função como condição de contorno em todas as aresta, deve também a solução analítica acompanhar o mesmo formato. A seguir, na equação 5.7 são expostas a solução analítica para potencial e fluxos nas duas direções ortogonais. Neste caso, assim como no caso pregresso as soluções analíticas servem como referência comparativa que permite inferir sobre o nível de desempenho do formulário MECIDR proposta.

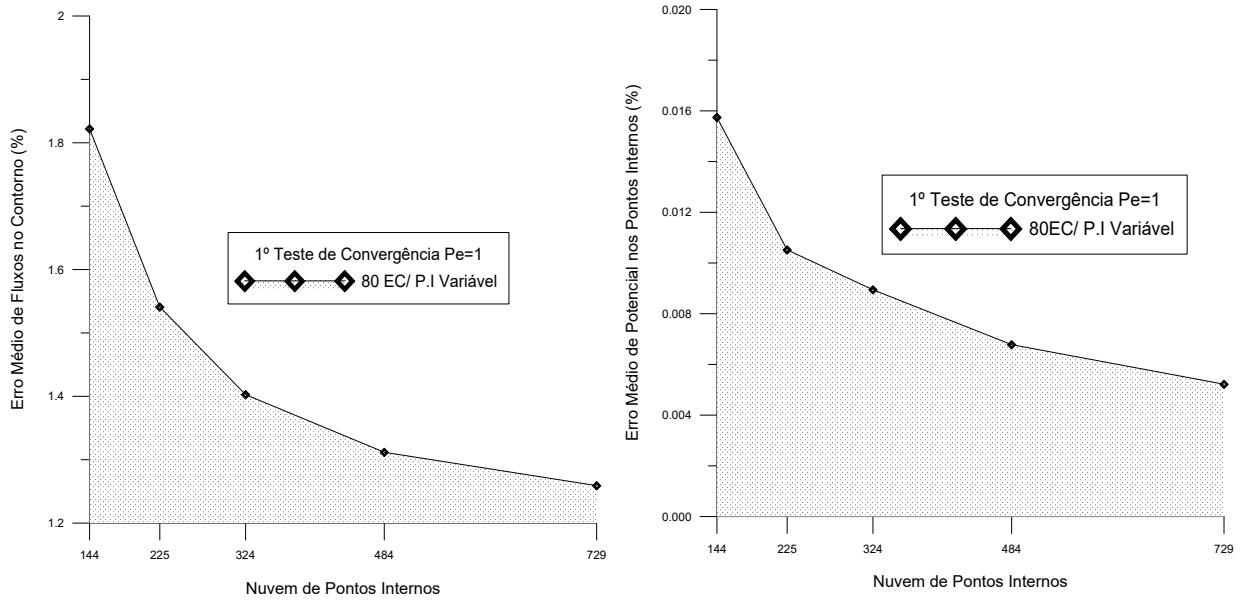
$$T(x, y) = e^{v_1 x} + e^{v_2 y} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = v_1 e^{v_1 x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = v_2 e^{v_2 y} \quad (5.7)$$

A geometria do problema em conjunto com a condição de contorno impõe revelam que o problema possui simetria. O par de arestas 2 e 3 é simétrico, tal como o par de arestas 1 e 4, de acordo com a numeração proposta no croqui na Figura 7. Ainda neste tocante, apenas as arestas 2 e 3 são significativas e todos os cálculos de fluxo no contorno serão realizados apenas em relação a estas arestas. A fundamentação para a restrição é análoga à apresentada no caso I, onde a natureza exponencial da solução analítica gera valores nas arestas 1 e 4, cujas interpolações via funções de bases radiais não se apresentam boa precisão [50]. Desta forma, há grande oscilações numéricas nestas arestas, que não traduzem de forma fidedigna o comportamento do método, e por isso, são devidamente excluídas da análise.

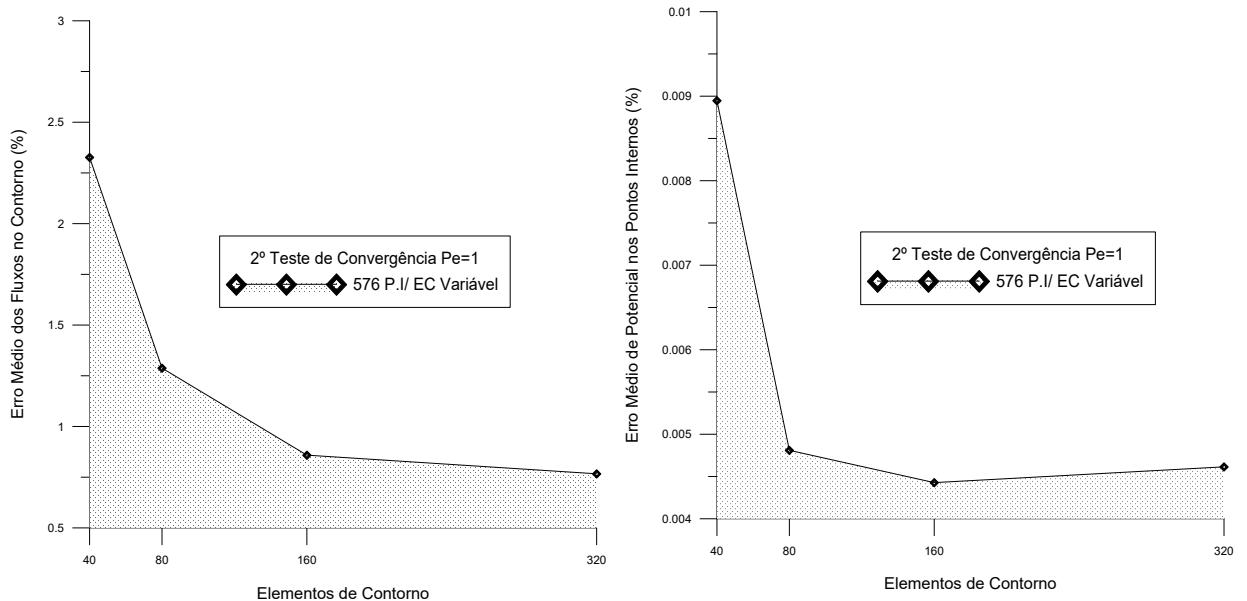
Inicia-se pela análise de convergência parametrizada no primeiro teste pela nuvem de pontos utilizada. Para tanto uma malha de 80 EC é fixada e o tamanho da nuvem de pontos internos é expandida para a observação deste parâmetro sobre os erros numéricos gerados. No tocante aos erros, a imposição de condições de potencial em todas as arestas, exige o cálculo dos fluxos em todas as arestas do contorno. Em contrapartida a isto, nos pontos internos, analisa-se apenas valores de potencial, e portanto a exibição dos resultados no fluxo no contorno e potencial nos pontos internos deve ser feito de maneira bipartida, tal como segue nos gráficos na Figura 8.

A observância dos resultados trazidos pela Figura 8, mostra uma queda consistente com o aumento dos número de pontos internos tanto para erros médios de fluxo no contorno, no gráfico à esquerda, quanto para os potenciais calculados no pontos internos, no gráfico a direita. Tal comportamento consolida a quantidade de polos internos como sendo um parâmetro de grande influência no refinamento de malha, em consonância com o observado no caso I.

Na sequência, executa-se uma segunda análise de convergência, baseada no refinamento da malha de contorno. Para tanto fixa-se uma malha com 576 P.I pontos internos e varia-se a quantidade de elementos de contorno em uma razão de duplicação. Aqui, novamente, os



resultados para fluxos no contorno nas arestas significativas e potenciais no pontos internos são mostrados separadamente por se tratarem de grandezas com ordens de erro completamente distintas, tal como segue graficamente na Figura 9.



Uma olhar mais apurado sobre a Figura 9 revela em ambos os gráficos uma queda sistemática de erros de fluxo e de potencial, com o aumento do refinamento da malha de contorno. A nível de completude, o gráfico a direita, apresenta uma leve subida entre as malhas com 160EC e 320 EC, não condizente com a expectativa de refinamento, mas perfeitamente normal quando observa-se a ordem de grandeza muita diminuta no qual os erros nos potenciais dos pontos internos encontram-se nesta análise.

Na sequência, inicia-se a primeira análise paramétrica em relação a efeitos crescentes da advecção, via número de Peclét. Fixa-se aqui portanto, uma quantidade uma malha de 320 EC, e varia-se três nuvens de pontos internos. A priori, exibe-se abaixo a análise inerente ao fluxo calculado na aresta significativa direita. Aqui, dada a natureza da solução analítica da equação 5.7, os fluxos exatos na aresta direita são constantes, e portanto, apenas um gráfico, mostrado na Figura 10 abaixo, se faz necessário para expor os resultados, uma vez que os critérios I e II de erro são equivalentes.

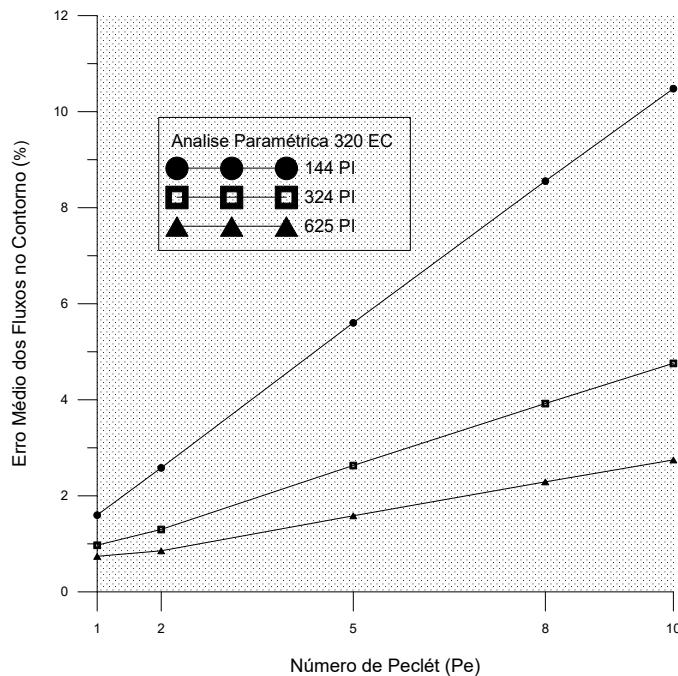


Figura 10 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Fluxo na Aresta Significativa - 320 EC Fixado

A Figura 10 mostra resultados de fluxo em níveis aceitáveis, num intervalos de números de Peclét que finda em 10. É importante aqui salientar que a magnitude de erros numéricos para grandezas de fluxo são maiores do que para potencial para todo método numérico, e constituem sempre um desafio no que tange a precisão. Portanto, o resultado mostrado é considerado satisfatório, e comporta-se conforme as previsões, onde os níveis de erro de fluxo decaem com o aumento da nuvem de pontos internos utilizada nas malhas.

Em continuação, exibe-se a seguir, na Figura 11, os resultados inerentes aos potenciais nos pontos internos, calculados pelos dois critérios de erro estabelecidos na metodologia. A conclusão sobre a performance da formulação aqui, é determinada por comparação entre as métricas I e II.

Na Figura 11, o gráfico na esquerda apresenta os resultados sob a ótica do critério I, e indica níveis de erro menores que 2%, para todo o intervalo testado de números de Peclét, até um valor de 28. Em contrapartida a esta constatação, o gráfico na direita, exibe os resultados sobre o prisma do critério II, onde conclui-se que a faixa de Peclét que gera erros também menores do que 2%, concentraria-se entre valores de 10 e 12 do adimensional. Portanto, para

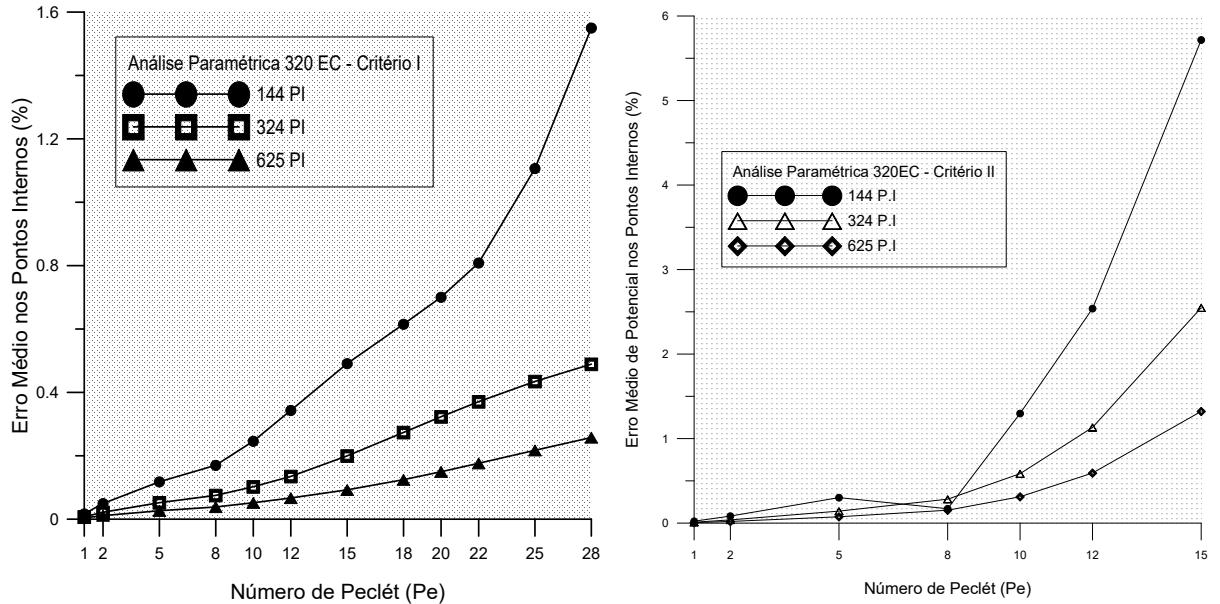


Figura 11 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial nos Pontos Internos- 320EC Fixado - Critério I e II

fins de aplicação, a interseção dos critérios, determina um intervalo do adimensional, onde a solução analítica e numérica continuam parelhas. Por fim, também é possível ressaltar, que de forma geral, nos dois gráficos na Figura 11, o aumento da nuvem de pontos internos trabalha no sentido da redução dos níveis de erro.

A segunda análise paramétrica, aqui realizada, é caracterizada pela fixação de uma nuvem com 1156 P.I. testes com três malhas de contorno com refinamento duplicados distintos e uma rampa do adimensional de Peclét. Para tanto, analogamente a primeira análise, divide-se a exibição dos resultados em erros inerentes a fluxos na aresta significativa e a potenciais calculados em pontos internos.

Os resultados correlatos aos fluxo no contorno são exibidos a priori, em gráfico única, na Figura 12, devido a equivalência de critérios no contorno, já citada na análise paramétrica anterior. De antemão, os resultados exibidos mostram um aumento nos níveis de erro, com o refinamento da malha de contorno. Tal fato, controverso ao esperado, justifica-se, provavelmente, pela proporção entre refinamento no contorno e nuvem de pontos internos que pode estar gerando um sistema linear final com mal condicionamento, fato esse que não será estudado em detalhes neste projeto.

Ainda sobre a Figura 12, é possível observar, em comparação com a figura 10, um aumento significativo no intervalo de Peclét onde os erros a nível de engenharia continuam aceitáveis. Isto indica que o refinamento através dos parâmetros de controle da malha, EC e P.I, são capazes de manter os níveis de erros satisfatórios mesmo para problemas com mais intensa dominância do efeito advectivo.

Por fim, os resultados para erros de potenciais nos pontos internos são exibidos abaixo na Figura 13 sob a observância dos dois critérios de erro propostos.

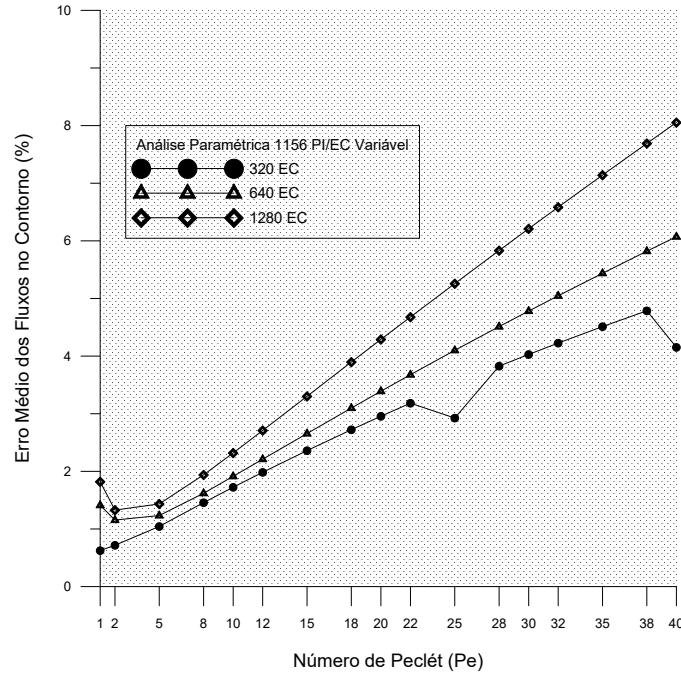


Figura 12 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Fluxo na Aresta Significativa - 1156 P.I Fixado

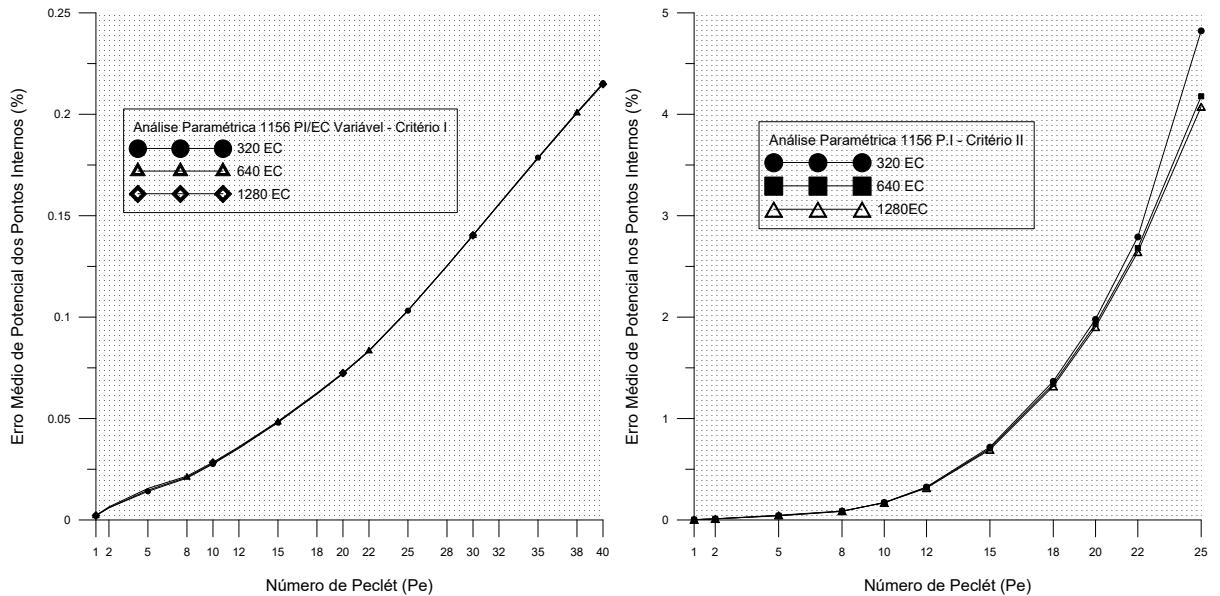


Figura 13 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Potencial nos Pontos Internos- 1156 P.I Fixado - Critério I e II

O comportamento exibido pelo gráfico da esquerda é inerente ao critério I, onde observam-se níveis de erro muito baixos para um intervalo de Peclét que finda em uma valor mediano de 40. Todavia, ao observar o gráfico da direita, ligado ao critério II, é possível observar erros menores que 2% para potencial até um valor de Peclét de aproximadamente 20. É também importante ressaltar que os resultados para ambos os gráficos das três malhas testadas são praticamente sobrepostas, indicando que o nível de refinamento no contorno, já não influencia de forma a reduzir os erros cometidos nos potenciais numéricos dos pontos internos. De certa

forma, este comportamento fora do padrão têm aderência com o comportamento inverso ao comum apresentado pelos fluxos aproximados no contorno no gráfico na Figura 12. Os comportamento desta última análise revelam uma demanda de estudo mais detalhados acerca da influência entre a proporção EC/I.P no desempenho da formulação MECIDR, em problemas clássicos como Poisson, Helmholtz e advectivos-difusivos, mas que por sua vez, exigiria uma análise mais extensa e sistêmica, e portanto foge ao escopo deste projeto.

5.4 Caso III - Problema Bidimensional com Condições e Contorno Variáveis

O terceiro caso a ser trabalho consiste em um problema bidimensional submetido a mesma condição de contorno essencial em todas as arestas, analogamente ao caso II. O croqui da domínio do problema, condições de contorno correlatas, e campo de velocidade seguem abaixo.

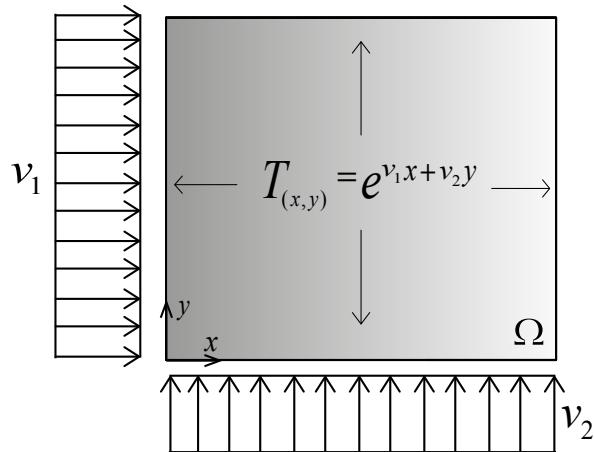


Figura 14 – Croqui Representativo do Caso III

A condição de contorno imposta consiste em uma função exponencial dependente das duas coordenadas espaciais. O princípio de conservação de energia simplificado para este caso, via hipóteses simplicadoras, condensa-se na equação de governo que segue.

$$v_1 \frac{dT}{dx} + v_2 \frac{dT}{dy} = \alpha \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} \right) \quad (5.8)$$

A solução analítica correlata a equação de governo 5.8 é de obtenção automática, uma vez que consiste na própria função imposta como condição de contorno, em todas as arestas da geometria. São exibidas a solução analítica para potenciais e fluxos correlatos ao caso. Tais soluções exatas servem como parâmetro comparativo para mensuração da precisão da

formulação numérica MECIDR testada.

$$T(x, y) = e^{v_1x + v_2y} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = v_1 e^{v_1x + v_2y} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = v_2 e^{v_1x + v_2y} \quad (5.9)$$

Este problema apresenta simetria, onde as arestas inferior e esquerda formam o primeiro par de simetria, sendo o segundo formando pelas arestas superior e direita restantes. Uma análise mais detalhada dos resultados do caso também permite inferir que apenas as arestas direita e superior são significativas, e portanto, compõe a base de análise de todos os resultados inerentes a fluxos calculados no contorno. Esta restrição, já fundamentada nos dois casos anteriores, decorre da dificuldade de interpolar valores de magnitudes grandes e pequenas simultaneamente, por parte das funções de bases radiais [50], que compõe a base da técnica MECID.

Inicia-se a exibição de resultados com uma primeira análise de convergência, onde fixa-se uma malha formada por 160 EC, e varia-se a densidade de pontos internos distribuídos pelo domínio. Os resultados para contorno e domínio são mostrados de forma separada, pois, no contorno determinam-se erros de fluxo, paralelamente ao interior do domínio, onde há determinação de potenciais. É relevante salientar que os teste de convergência abaixo são realizados utilizando o critério de erro I e para um valor unitário do adimensional de Peclét.

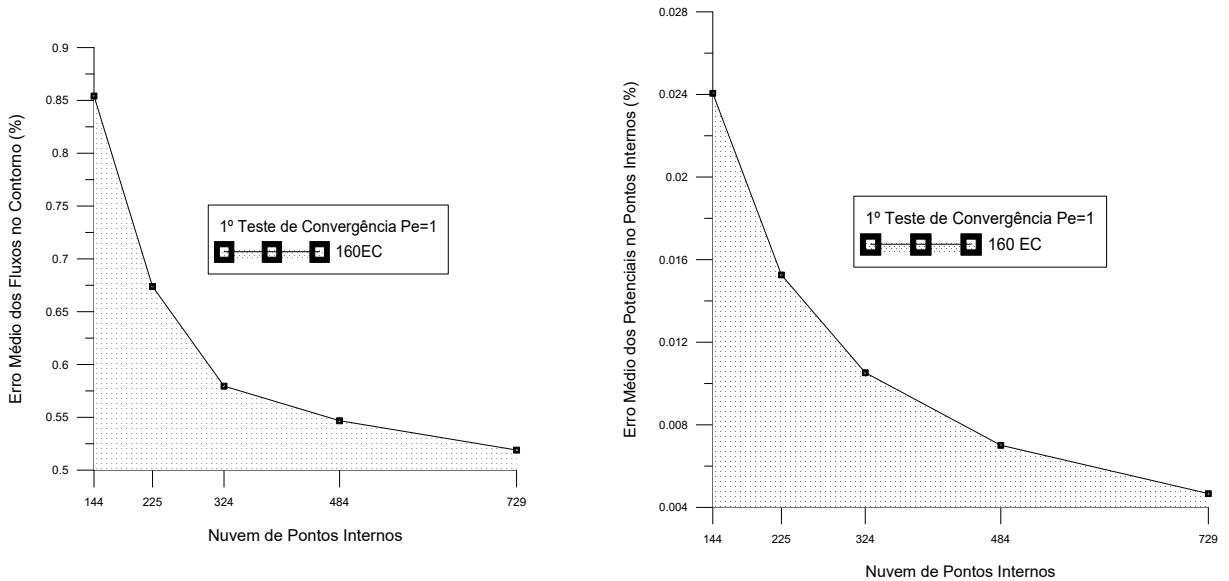


Figura 15 – Análise de Convergência em relação a P.I com Pe=1

A Figura 15 exibe uma queda consistente do erro, em ambos os gráficos, correlatos a fluxos nos contornos significativos e potenciais nos pontos internos, quando aumenta-se a densidade da nuvem de pontos internos. Tal resultado corrobora o comportamento convergente a formulação MECIDR em relação a este primeiro parâmetro de controle.

Na sequência, um segundo teste de convergência é realizado, fixando-se agora uma nuvem de 576 P.I em todas as malhas e variando em proporções de duplicação o nível de refinamento

da malha no contorno. Seguem os resultados para fluxos nos nós de contorno e potenciais para os nós internos.

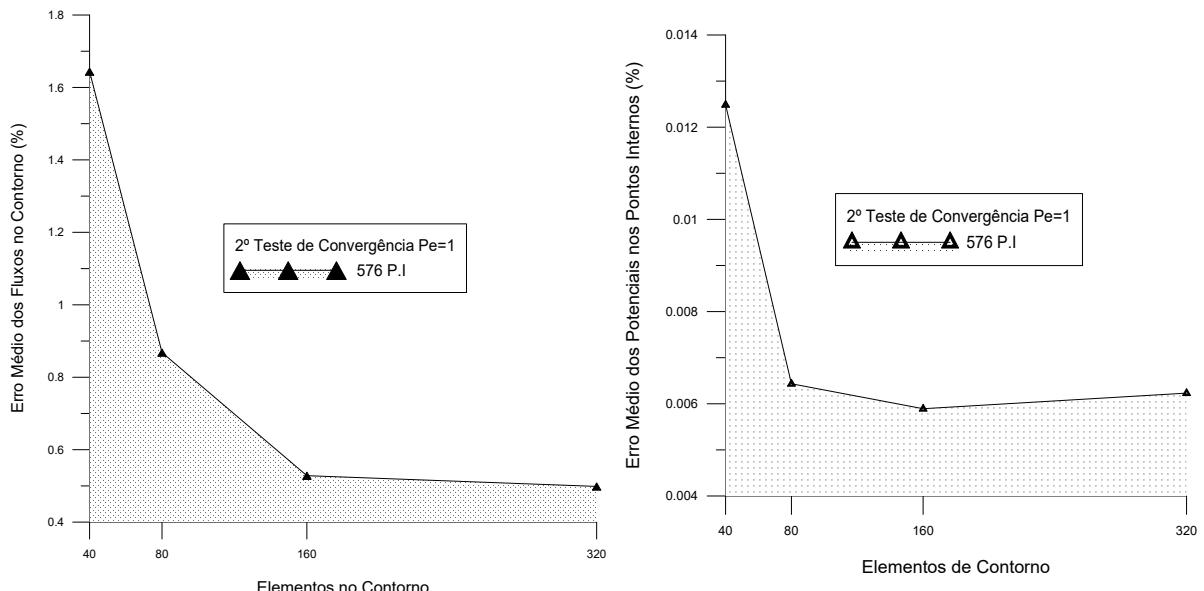


Figura 16 – Análise de Convergência em relação a EC com $Pe=1$

Ambos os gráficos da figura 16 mostram um comportamento convergente da formulação, que apresenta erros sistematicamente menores com aumento do nível de refinamento no contorno. Vale destacar, no gráfico da direita, um pequeno aumento do erro numérico cometido nos pontos internos, entre as últimas duas malhas testadas. Este comportamento, em contraposição a expectativa natural, deve-se muito provavelmente a ordem de grandeza muito diminuta na qual os erros se apresentam. Os resultados ratificam que a formulação ME-CIDR testada têm bom comportamento de convergência em relação também ao parâmetro de controle de refinamento da malha de contorno, findando as análises de convergência.

Uma vez executados os testes de convergência, inicia-se uma análise paramétrica com relação ao número de Peclét, para uma malha de contorno fixada em 320 EC, com três nuvens distintas de pontos internos. A priori exibem-se abaixo os resultados de fluxos nas arestas significativas para os dois critérios de erro apresentados, inicialmente na metodologia.

Os resultados na Figura 17, inicialmente, no gráfico da esquerda, sob a ótica do critério I, exibem níveis de erro baixos para variáveis de fluxo para um intervalo de Peclét que estende-se até 15. Em contrapartida, no gráfico da direita, que utiliza o critério II, vem-se que o intervalo de erros aceitáveis para aplicações em engenharia esta limitado a intervalo menor, depois do qual, a formulação gera erros de muito maior magnitude.

De forma complementar, analisa-se agora, a parametrização com o número de Peclét, no comportamento dos erros numéricos correlatos aos potenciais no pontos internos para as duas métricas de erro.

Uma observação mais atenta da Figura 18, a priori no gráfico da esquerda inerente ao critério I, revela um comportamento com baixos níveis de erro para um intervalo considerado mediano

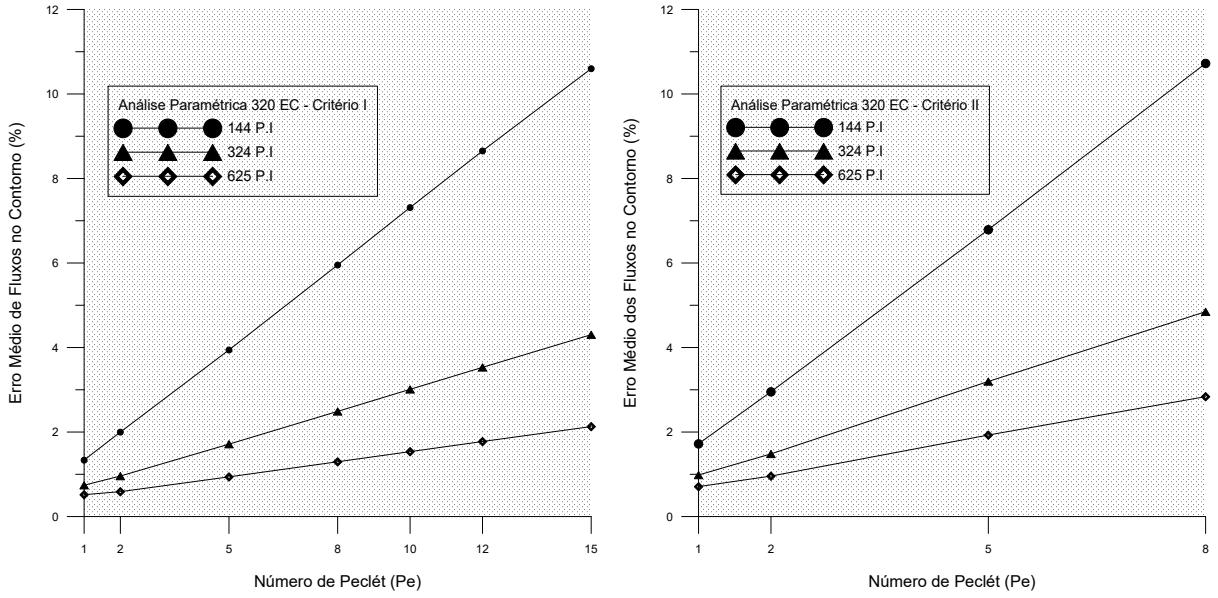


Figura 17 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Fluxo no Contorno- 320EC Fixado - Critério I e II

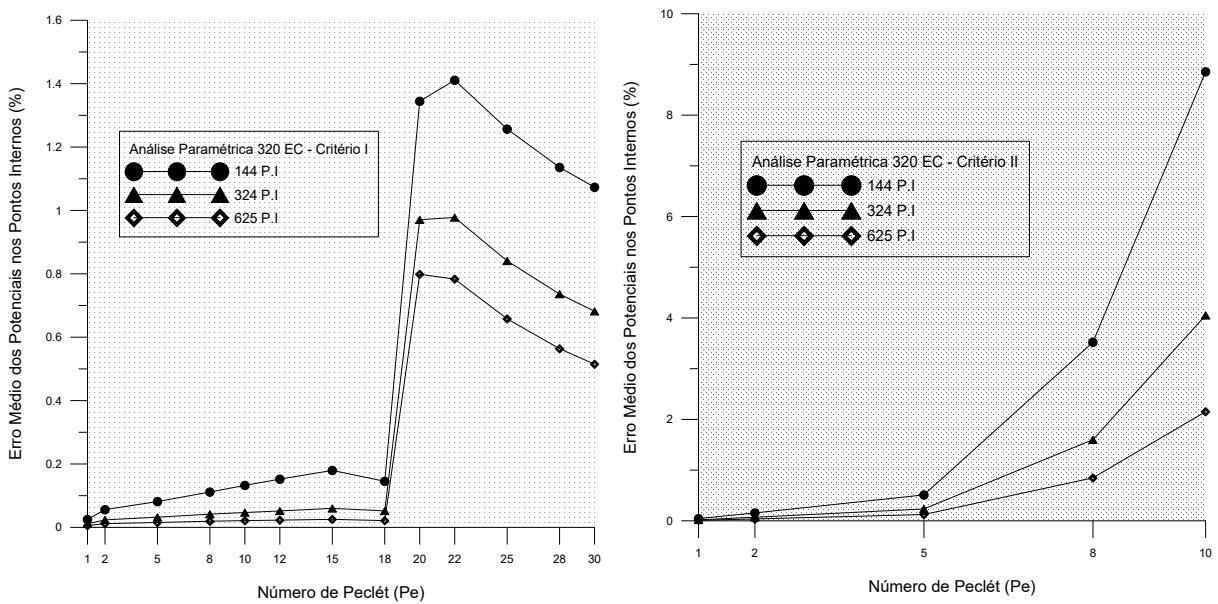


Figura 18 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Pontos Internos 320EC Fixado - Critério I e II

do número de Peclét, aproximadamente até o valor de 30. Observa-se ainda neste gráfico que, há um salto entre os valores de 18 e 20 do adimensional, depois do qual os erros voltam sistematicamente a cair. Este comportamento é um indicativo de que os resultados e analíticos e numéricos já não apresentam a mesma aderência e que a medida de erro não encontra-se ineficaz, mas para tanto é preciso uma conferência. Tal conclusão pode ser completada com a análise do gráfico da direita, onde utiliza-se o critério de erro II. Nesta linha observa-se que os erros crescem de forma monotônica com o aumento do número de Peclét, e mantém valores usuais em aplicações de engenharia apenas para as duas últimas malhas mais ricas, e com valor de aproximadamente 10 para o adimensional. Consolida-se então, com a intersecção dos dois critérios, que de fato é mais curto o intervalo de efeitos advectivos crescentes no qual a

formulação apresenta boa precisão.

Em caráter final, inicia-se uma outra análise paramétrica, desta vez, fixando-se a nuvem de pontos internos com 1156 P.I e variando o nível de refinamento da malha de contorno com proporções de duplicação. Exibe-se abaixo, a priori, os resultados relativos aos fluxos nas arestas significativas para as duas métricas de erro consideradas.

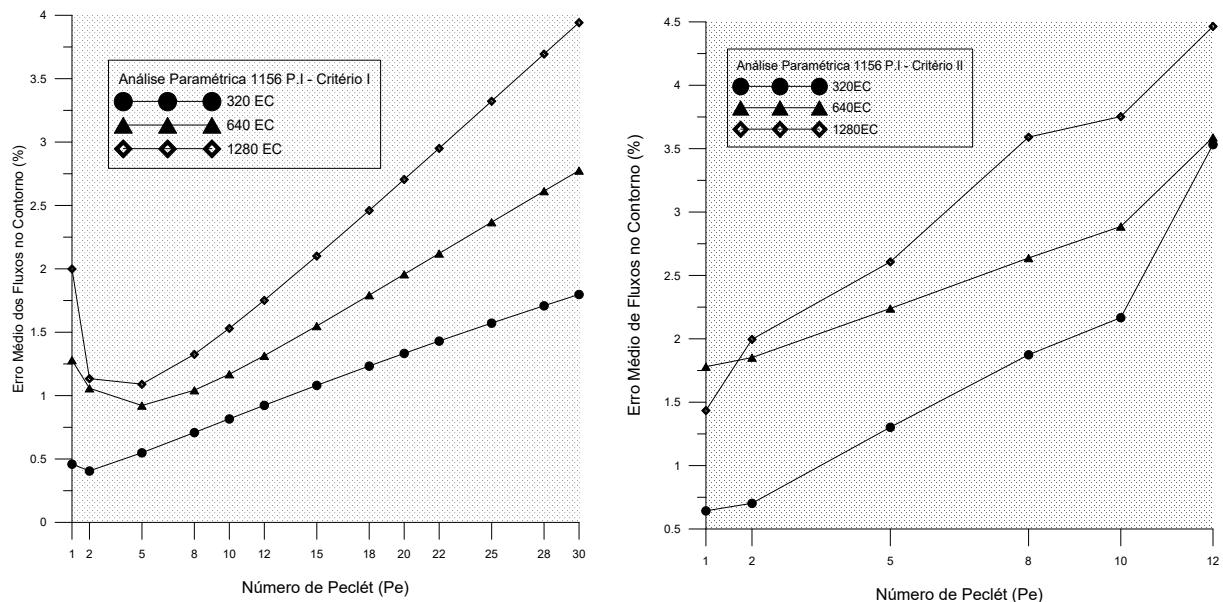


Figura 19 – Análise Paramétrica do Número de Peclét – Fluxos no Contorno - 1156 P.I Fixado - Critério I e II

Os resultados trazidos pela Figura 19, no gráfico da esquerda, relativo ao critério I, revelam um comportamento inverso ao teórico esperado, onde há um aumento do nível de erro com o refinamento do contorno. Tal comportamento, provavelmente está relacionado a erros de integração numérica causados por uma distância muito pequena entre os nós de contorno e os primeiros nós adjacentes na nuvem de pontos internos. Este valor de distanciamento é ajustado como parâmetro de controle no algoritmo computacional e não houve tempo hábil para uma análise de sensibilidade mais aprimorada no sentido de obter resultados com comportamento mais coerente. O gráfico, da direita que relaciona-se ao critério II também exibe o mesmo comportamento anômalo, porém, com um intervalo de Peclét mais restrito no tocante ao nível dos erros. Tal apontamento alinha-se com o visto, anteriormente, nos casos I e II.

Por fim analisa-se os resultados referentes aos potenciais associados ao pontos internos da malha. Os resultados dos erros são bipartidos para os dois critérios de erro, analogamente ao resultado pregresso.

A Figura 20 exibe, de forma geral curva muito próximas para os três níveis de refinamento do contorno, para ambos os critérios, com pouca sensibilidade do erro em relação ao refinamento nas malhas testadas. Aqui, analogamente aos resultados de fluxo, ocorre também um aumento dos níveis de erro a medida que a malha de contorno é refinada, para ambos os critérios, cuja explicação hipotética continua pautada no ajuste do distanciamento mínimo entre os pontos da malha de contorno e seus pontos internos imediatamente adjacentes. Por fim, é possível

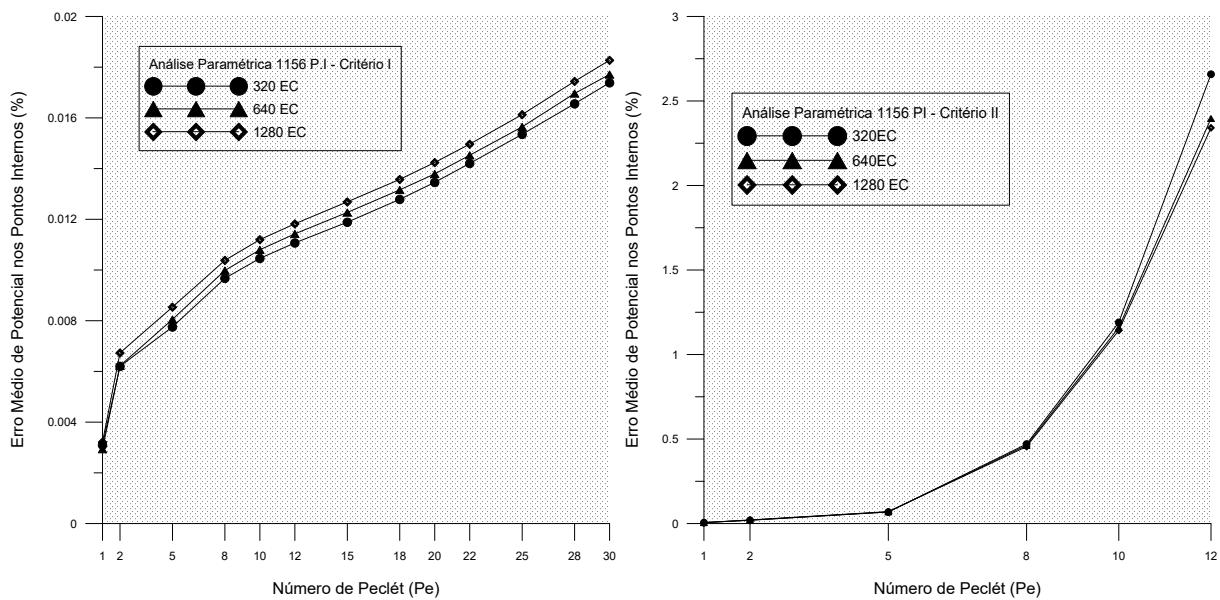


Figura 20 – Análise Paramétrica do Número de Peclét -Pontos Internos - 1156 P.I Fixado - Critério I e II

observar de forma reiterada aqui uma restrição do tamanho do intervalo de número de Peclét, proposta pelo critério II, que supõe uma falta de concordância entre resultados numéricos e analíticos com valores maiores que 12 para este adimensional.

5.5 Caso IV - Problema Bidimensional com Condições de Contorno não-homogêneas

O quarto e último caso a ser trabalhado consiste em problema com campo bidimensional de velocidade e duas condições de contorno não homonômenas, uma essencial na aresta esquerda e uma natural na aresta direita. O croqui da geometria e das condições de contorno aplicadas ao domínio computacional é posto a seguir na Figura 21.

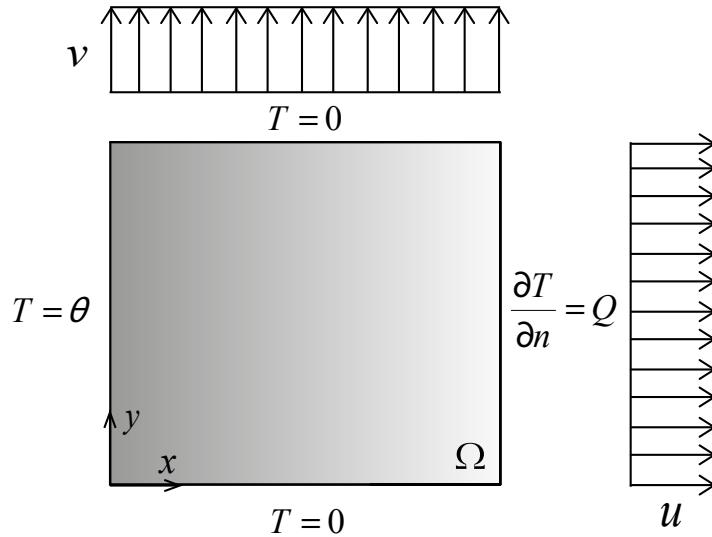


Figura 21 – Croqui Representativo do Caso IV

A equação de governo de energia para um problema advectivo-difusivo como este é dada abaixo, segundo as hipóteses simplificadoras já expostas em capítulo dedicado.

$$v_x \frac{dT}{dx} + v_y \frac{dT}{dy} = \alpha \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} \right) \quad (5.10)$$

A dedução da solução analítica da equação 5.10 para as condições de contorno impostas não é tarefa trivial e mostra-se abaixo na expressão 5.11, apenas a solução em série para os valores de potenciais. A solução é mostrada em versão completa no apêndice B deste texto, onde todas as constantes e variáveis que aparecem na equação 5.11 são cuidadosamente definidas.

$$T(x, y) = \left\{ \left[\frac{e^{ux} - 1}{u} \right] + 1 \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} G_i e^{\frac{u}{2}x} \operatorname{sen}(q_i x) \left\{ \left[\frac{1 - e^{\lambda_i^2}}{e^{\lambda_i^1} - 1} \right] e^{\lambda_i^1 y} + e^{\lambda_i^2 y} \right\} \quad (5.11)$$

A equação 5.11 serve de referencial para o levantamento dos erros numéricos tal como nos casos antecedentes. É relevante também destacar que a maioria das arestas da geometria é submetida a condições essenciais, e portanto, seria natural a determinação dos fluxos nestas arestas e sua exposição. Todavia, tais resultados não serão apresentados devido a constatação de uma dificuldade na obtenção de precisão adequada em função de limitações computacionais.

Portanto, em caráter de exceção, no caso IV, as análises restringem-se aos valores de potenciais na aresta direita, caracterizando o contorno, e potenciais nos pontos internos.

É também importante destacar, que devido as condições de contorno impostas ao problema, há neste caso IV altos níveis de erros artificiais nas quinas, induzidos por mudanças abruptas de valores homogêneos e não-homogêneos de potencial nas mesmas a depender do critério de erro. Portanto, como diretriz metodológica adicional, retiram-se os dois pontos extremos das arestas analisadas, para então efetuar a contabilização do erro segundo os critérios I e II. Com esta medida, evita-se que os erros de quina distorçam o real desempenho da formulação proposta.

Inicia-se então a exposição de resultados com uma análise de convergência onde fixa-se uma malha com 160EC e varia-se o tamanho da nuvem de pontos internos utilizada. Os resultados de erros numéricos correlatos aos potenciais no contorno são exibidos no gráfico da esquerda, enquanto os erros ligados aos pontos internos são avaliados no gráfico da direita da Figura 22.

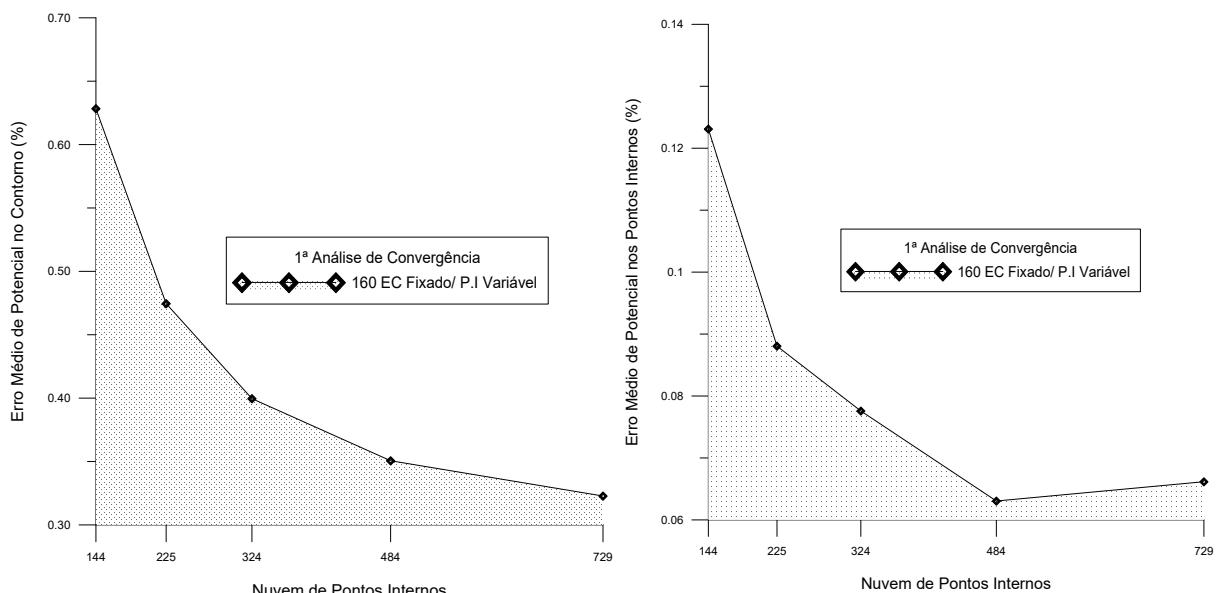


Figura 22 – Análise de Convergência em relação a P.I com $Pe=1$

Observa-se nos resultados na Figura 22 uma tendência consistente de queda dos valores dos erros numéricos com paralela expansão do número de pontos internos utilizados para interpolações. Ressalta-se por fim um leve crescimento do erro entre as últimas duas nuvens de pontos internos no gráfico da direita. Esta subida, por sua vez, fundamenta-se solidamente na ordem de grandeza muito baixa dos valores em questão, que pode ser observada na ordenada do referido gráfico, e que provavelmente leva a um mal condicionamento do sistema linear proveniente da discretização para esta simulação.

Num segundo momento, testa-se a convergência da formulação proposta em malhas com número fixado de pontos internos em 576P.I e variando-se, por sua vez, o nível de refinamento do contorno.

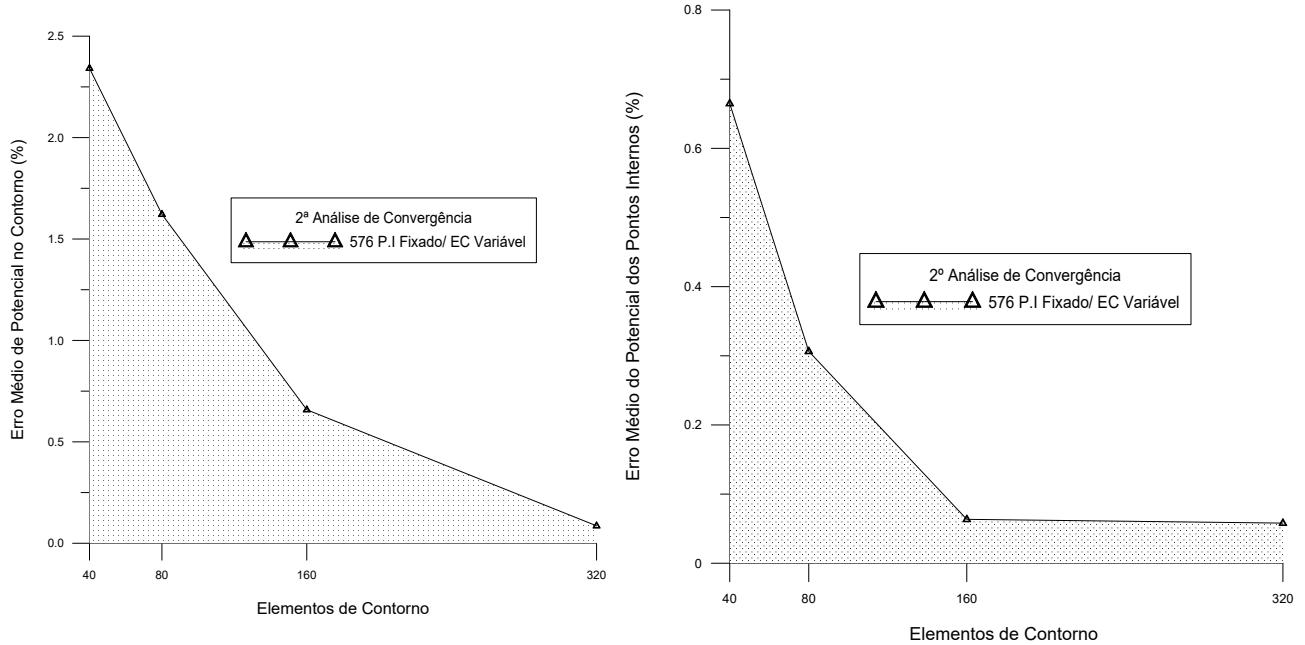


Figura 23 – Análise de Convergência em relação a EC com $Pe=1$

Os resultados são condensados na Figura 23, onde-se expõe-se os erros de potenciais no contorno no gráfico à esquerda e os erros dos potenciais no pontos internos no gráfico da direita, analogamente à análise anterior. Percebe-se em ambos os gráficos uma queda monotonica dos níveis de erro a medida que a malha de contorno torna-se mais refinada, o que corrobora para a convergência da formulação segundo este parâmetro de malha.

Na sequência inicia-se uma análise paramétrica baseada no adimensional de Peclét, no intuito de determinar o comportamento de formulação em problemas dominados pelos efeitos advectivos. Para tanto, inicia-se a análise com um conjunto de malhas de refinamento intermediário, fixando-se a malha de contorno com 320EC. A parametrização aqui, consiste em aumentar gradativamente o número de Peclét para três conjuntos de malhas com distintas quantidades de pontos internos.

Uma observação mais sistemática dos resultados trazidos na Figura 24 mostram uma peculiaridade interessante. Embora a tendência esperada seja a de um aumento nos níveis de erros na medida que a advecção torna-se dominante, observa-se em ambos os gráficos uma queda nos níveis de erro até $Pe = 5$. Tal ponto, tem natureza de inflexão, uma vez que, a partir dele os níveis de erro iniciam tendência de crescimento com o gradual crescimento do adimensional, retornando ao comportamento normalmente esperado. A origem deste comportamento não foi encontrada, mas sua existência é confirmada, uma vez que os dois critérios de erro exibem-no da forma muito clara.

Por fim observando-se a disposição das curvas de refinamento de pontos internos nos dois gráficos acima da Figura 24 é possível constatar menores níveis de erros associados a nuvens mais ricas de pontos internos, o que já era esperado. Além disto, percebe-se que, pelo critério I, no gráfico da esquerda, os níveis de erro se mantém a nível menor que 1% até números de

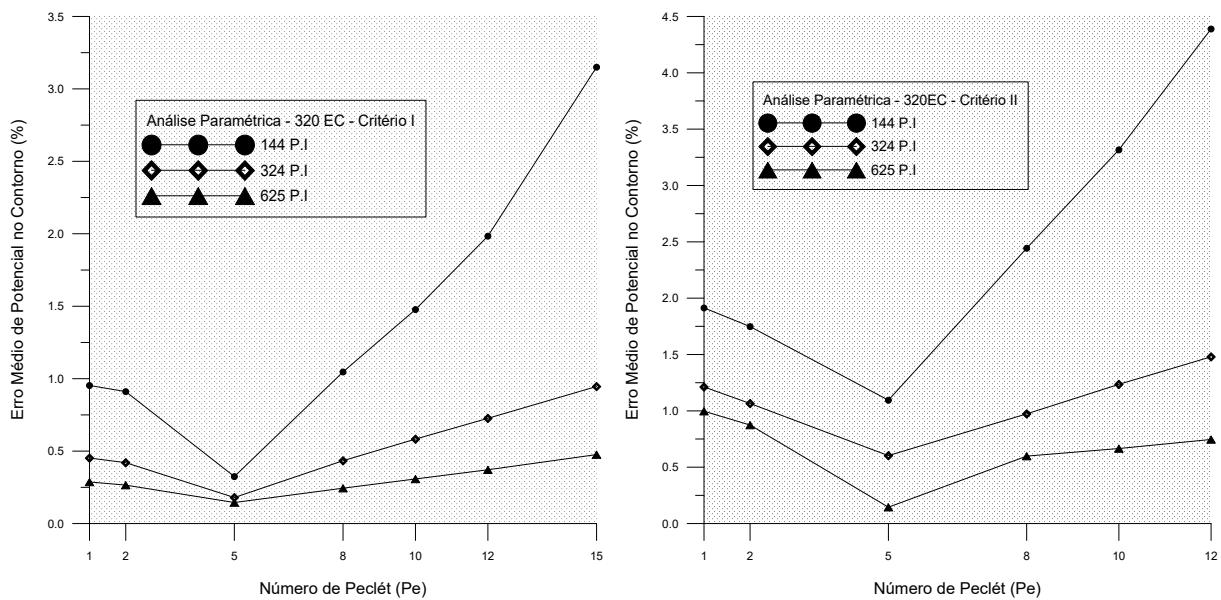


Figura 24 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Fluxo no Contorno- 320EC Fixado - Critério I e II

Peclét próximos de 15, para as melhores malhas. Em paralelo, a mesma análise sob o prisma do critério II, gráfico da direita, revela um intervalo mais conservador que extende-se só até valores do adimensional próximo a 12. Portanto, no intuito de atribuir um intervalo seguro de trabalho, pode-se dizer que a formulação gera resultados úteis para potenciais no contorno para valores medianos de Peclét, na casa de 12.

Para completar a análise paramétrica iniciada, analise-se agora os resultados associados a potenciais nos pontos internos da malha numérica. É importante salientar, que os resultados nos pontos internos são influenciados pelos valore de contorno de todas as arestas, mesmo aquelas cujos resultados não foram aqui expostos.

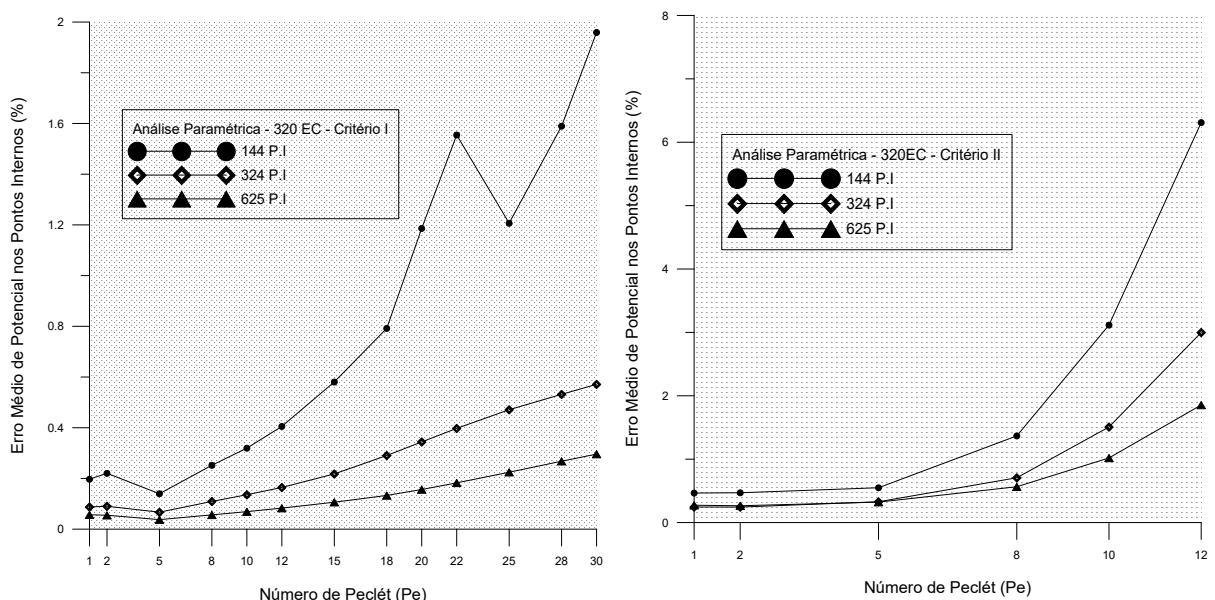


Figura 25 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Pontos Internos 320EC Fixado - Critério I e II

Primeiramente, avaliando-se os resultados para o critério I, à esquerda, tem-se uma manutenção de erros muitos baixos para as melhores malhas de pontos internos para todo o intervalo de número de Peclét testado, até um valor aproximado de 30. Entretanto, tal flexibilidade não se confirma, no intervalo mais restrito, mostrado a direita, quando muda-se a métrica para o critério II, onde a formulação apresenta valores úteis para aplicação em engenharia até valores de Peclét, próximo a 12. Tal diferença deve-se a presença de valores analíticos nodais de grande magnitude para altos valores do adimensional, que por sua vez, induzem a baixos valores de erro resultantes para a primeira métrica. Aqui, salienta-se novamente a importância de checar a todo tempo o alinhamento de valores numéricos e analíticos ponto a ponto, na etapas de preparação de resultados, de forma a compreender as vantagens de restrições de cada critério adotado.

Em sequência, inicia-se, por fim, a segunda análise paramétrica pautada em um número fixo de 1156 P.I e testes com níveis de refinamento de contorno. Exibe-se abaixo na figura 26 os resultados dos erros de potenciais no contorno para os dois critérios de erros fixados na metodologia, a priori.

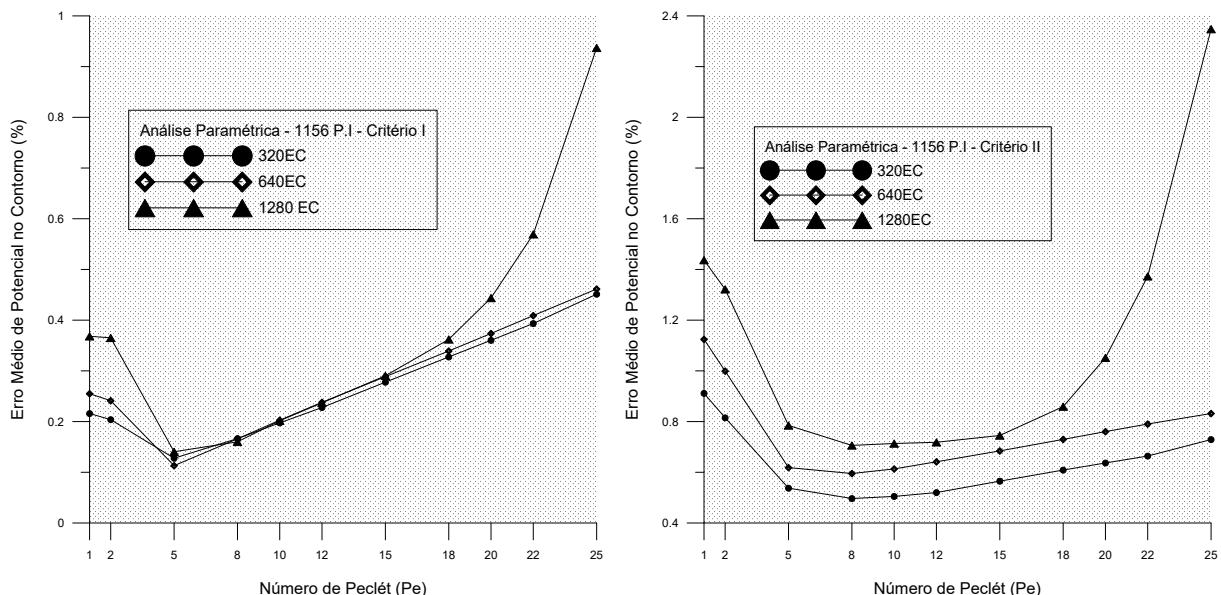


Figura 26 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Elementos de Contorno 1156 P.I Fixado - Critério I e II

No gráfico na esquerda da Figura 26, observa-se, analogamente ao que ocorre em casos anteriores, um aumento no nível de erro como consequência do refinamento. Este comportamento adverso ao esperado deve-se, provavelmente, a um distanciamento não ajustado entre os nós duplo nas quinas. Observa-se o mesmo comportamento para os critérios de erro I e II. Quanto ao intervalo de números de Peclét, é possível concluir que os níveis de erro para todo espectro testado permanecem baixos, que indica para um alinhamento entre os valores analíticos e numéricos apesar do aumento de magnitude da advecção.

Por fim exibe-se abaixo, na Figura 27 os resultados desta segunda análise paramétrica para

os erros correlatos a potenciais nos pontos internos. No gráfico da esquerda, seguindo o mesmo padrão de todas exibições anteriores, tem-se os resultados no critério I, enquanto o gráfico da direita traz os resultados do critério II.

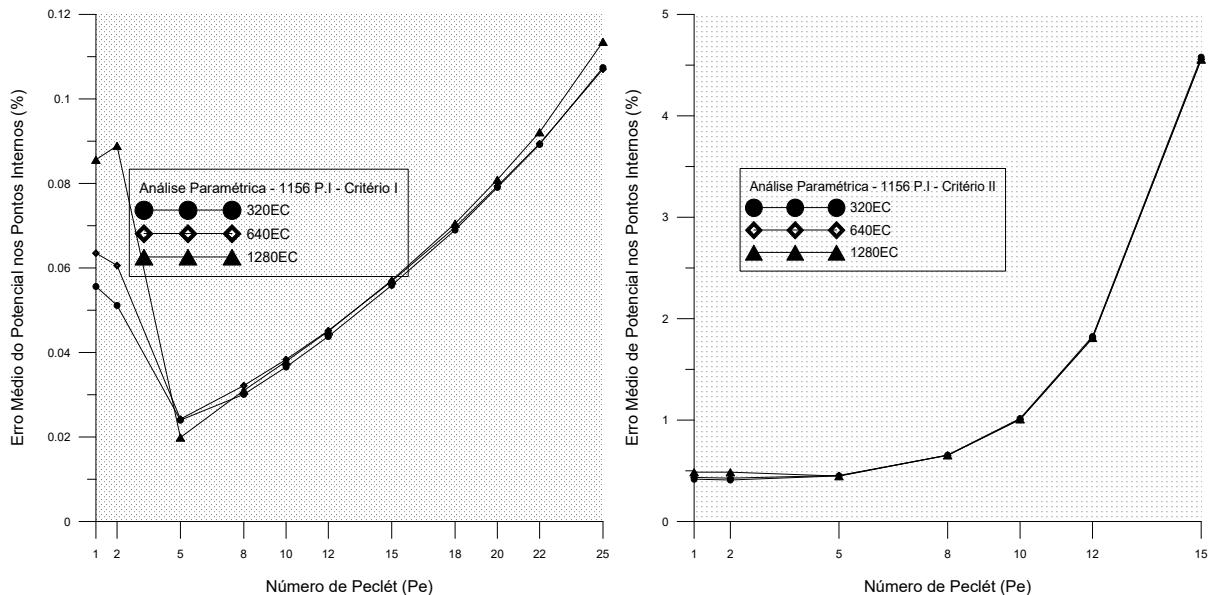


Figura 27 – Análise Paramétrica do Número de Peclét - Elementos de Contorno 1156 P.I Fixado - Critério I e II

Com o foco no gráfico do critério I, é possível perceber uma queda nos erros para um valor do adimensional de Peclét igual a 5, e um posterior crescimento do erro para o resto do intervalo. Este comportamento aqui, novamente é hipoteticamente atribuído aos distanciamentos dos nós duplos nas quinas, que não tiveram sua distância parametrizada neste projeto, via análise mais aprofundada. Paralelamente, os resultados para o critério II exibem um resultado fisicamente mais aderente com o esperado, onde erros de níveis cada vez maiores apresentam-se a medida que os efeitos advectivos são intensificados via incrementos no adimensional de Pe.

6 Considerações Finais

Há uma clara demanda de formulações do Método dos Elementos de Contorno que apresentem generalidade e competitividade nas aplicações em problemas difusivo-advectivos. A formulação clássica com solução fundamental difusiva-advectiva tem restrições quanto a variação do campo de velocidades [48] e as formulações alternativas baseadas em interpolações com funções radiais, como a Dupla Reciprocidade, que apesar de ter bom desempenho em diversos problemas de campo escalar [51], carecem de resultados satisfatórios em problemas com advecção dominante. Há, portanto, um demanda por uma formulação numérica no contexto do MEC que demonstre um melhor equilíbrio entre versatilidade no trato com campos variáveis de velocidade, em contraste a uma robustez frente à dominância dos efeitos advectivos, de forma a manter níveis de erros plausíveis em aplicações de engenharia. Propõe-se neste trabalho a extensão e desenvolvimento da técnica de integração direta (MECID) aos problemas difusivo-advectivos no intuito de preencher esta lacuna, uma vez que a citada técnica já apresentou resultados consistentes em outros tipos de fenômenos de campo escalar [8], [19].

A formulação de integração direta com processo de regularização (MECIDR) testada nesta dissertação apresentou um comportamento convergente para todos os quatro estudos de caso testados em relação aos dois principais parâmetros de controle de malha, a saber, o número de elementos de contorno e o número de polos internos. Verificou-se que os erros para grandezas de fluxos e potenciais exibem queda monotônica em grande parte dos resultados gráficos exibidos, o que versa a favor da consistência matemática da formulação proposta.

As análises paramétricas em dois formatos distintos exibidas para os casos trabalhados neste projeto mostram que a formulação mantém níveis de erros baixos para um intervalo que contempla números de Peclét médios, o que permite, de forma geral, o uso da mesma em diversas aplicações de interesse em engenharia. A primeira análise paramétrica, para todos os casos testados, demonstra a forte influência do número de pólos internos sobre a precisão da formulação MECIDR. Já a segunda análise paramétrica demonstra que o refinamento do contorno, para uma nuvem fixada de polos internos, nem sempre melhora a precisão do método, uma vez que há uma demanda por estudos mais sistêmicos sobre o balanço entre quantidade de elementos de contorno em comparação ao número e posicionamento dos pólos internos. Além disso, há necessidade de avaliar melhor o valor do afastamento entre os nós duplos nos cantos – os nós deslocados para evitar singularidade na matriz de interpolação de dimensão adequada. Esses fatores de alguma forma atuam desfavoravelmente no desempenho da formulação em casos bidimensionais, como pode ser apreciado resultados dos casos II, III e IV.

De forma mais global, é possível interpretar a primeira análise paramétrica como um conjunto de malhas mais grosseiras, em contraposto com a segunda análise, que utiliza um conjunto de malhas mais refinadas. Neste raciocínio, a observação dos resultados gráficos expostos para todos os casos revela um padrão uníssono de queda dos níveis de erro, e até

mesmo, em alguns dos casos, de postergação do intervalo de Peclét no qual a formulação se mantém com boa precisão. Tais fatos, aliados a demanda por estudos mais sistêmicos sobre equilíbrio de parâmetros de malha e tratamento de quina, citada a priori, corrobora para o fato de que é possível ampliar o intervalo de dominância da advecção no qual da formulação se mantém precisa, em termos de aplicações práticas.

A exibição dos resultados para os casos testados, por sua vez, foi feita sempre utilizando duas métricas de erro fixadas na metodologia adotada. A execução da análise via duas métricas de erro distintas, mostrou-se de vital importância, pois, cada critério tem vantagens de desvantagens matemática intrínsecas, ou seja, possuem falhas na tentativa de representar o erro absoluto entre solução numérica e exata, em situações específicas. Portanto, neste tocante a comparação a todo tempo dos dois critérios, em conjunto com a observação nodal indireta dos resultados tabulares levantados, permitiu uma aderência com o comportamento do erro absoluto, o que por sua vez, garante uma inferência coerente quanto ao comportamento da formulação.

É também importante salientar que os bons resultados apresentados pela formulação numérica aqui proposta estão estruturados sobre uma forma particular de aproximar integrais de domínio via funções de base radial, aliada a um tratamento de singularidade via processo de regularização, caracterizando assim, em conjunto a filosofia MECIDR. Ainda nesta linha de raciocínio ressalta-se que o MECIDR não conceitua-se como procedimento estabilizador nem mesmo como formulação estabilizada, como é o caso de diversas propostas clássicas existentes na literatura de diferenças finitas [1], [52] e elementos finitos [53], [54]. A exibição de resultados satisfatórios para Peclét medianos sem procedimentos estabilizadores corrobora na direção do potencial a explorar do método de elementos de contorno frente a problemas advectivos dominantes.

Por fim, a formulação baseada em integração direta regularizada já havia resultados superiores a formulação com dupla reciprocidade em problemas de Poisson e Helmholtz, demandando, portanto, uma comparação sistêmica afim de quantificar seu desempenho frente a dupla reciprocidade. A apresentação dos resultados da formulação proposta para os casos testados nesta dissertação constatou um nível de desempenho substancialmente superior frente a técnica da dupla reciprocidade também para os problemas advectivo-difusivos por comparação indireta com [15], o que já era esperado como sequência natural do desenvolvimento desta linha de pesquisa.

Referências Bibliográficas

- 1 OZISIK, N. *Finite difference methods in heat transfer.* [S.I.]: CRC press, 1994.
- 2 REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method.* [S.I.]: McGraw-Hill New York, 1993. v. 2.
- 3 BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering.* [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- 4 VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method.* [S.I.]: Pearson Education, 2007.
- 5 WROBEL, L. C. *The boundary element method, applications in thermo-fluids and acoustics.* [S.I.]: John Wiley & Sons, 2002. v. 1.
- 6 WROBEL, L.; FIGUEIREDO, D. D. Numerical analysis of convection-diffusion problems using the boundary element method. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, MCB UP Ltd, v. 1, n. 1, p. 3–18, 1991.
- 7 LOEFFLER, C. F.; CRUZ, Á. L.; BULCÃO, A. Direct use of radial basis interpolation functions for modelling source terms with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 50, p. 97–108, 2015.
- 8 LOEFFLER, C. F. et al. Solving helmholtz problems with the boundary element method using direct radial basis function interpolation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 61, p. 218–225, 2015.
- 9 IKEUCHI, M.; ONISHI, K. Boundary element solutions to steady convective diffusion equations. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 7, n. 2, p. 115–118, 1983.
- 10 IKEUCHI, M.; SAKAKIHARA, M. Boundary elements in steady convective diffusion problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 12, p. 381–389, 1985.
- 11 PARTRIDGE, P.; BREBBIA, C. Computer implementation of the bem dual reciprocity method for the solution of general field equations. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, Wiley Online Library, v. 6, n. 2, p. 83–92, 1990.
- 12 WROBEL, L.; DEFIGUEIREDO, D. A dual reciprocity boundary element formulation for convection-diffusion problems with variable velocity fields. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 8, n. 6, p. 312–319, 1991.
- 13 QIU, Z.; WROBEL, L.; POWER, H. An evaluation of boundary element schemes for convection-diffusion problems. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, WIT Press, v. 1, 1991.
- 14 YOUNG, D.; WANG, Y.; ELDHO, T. Solution of the advection–diffusion equation using the eulerian–lagrangian boundary element method. *Engineering analysis with boundary elements*, Elsevier, v. 24, n. 6, p. 449–457, 2000.

- 15 MASSARO, C. *O Método dos Elementos de Contorno Aplicado na Solução de Problemas de Transferência de Calor Difusivos-Advectivos*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de mestrado, UFES, 2001.
- 16 BOZTOSUN, I.; CHARAFI, A. An analysis of the linear advection-diffusion equation using mesh-free and mesh-dependent methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 26, n. 10, p. 889–895, 2002.
- 17 LOEFFLER, C.; MANSUR, W. Quasi-dual reciprocity boundary-element method for incompressible flow: Application to the diffusive-advective equation. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 58, n. 8, p. 1167–1186, 2003.
- 18 CUNHA, C. et al. A study concerning the solution of advection-diffusion problems by boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 65, p. 79–94, 2016.
- 19 LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. A regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 74, p. 14–18, 2017.
- 20 REDDY, J. *Principles of continuum mechanics*. [S.I.]: Cambridge University Press Cambridge, 2010.
- 21 BURMEISTER, L. C. *Convective heat transfer*. [S.I.]: John Wiley & Sons, 1993.
- 22 FUNG, Y.-c. A first course in continuum mechanics. *Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, Inc., 1977. 351 p.*, 1977.
- 23 SLATTERY, J. C. *Advanced transport phenomena*. [S.I.]: Cambridge University Press, 1999.
- 24 BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Transport Phenomena* John Wiley & Sons. [S.I.: s.n.], 1960. 413 p.
- 25 MACOSKO, C. W. *Rheology: principles, measurements, and applications*. [S.I.]: Wiley-vch, 1994.
- 26 SCHLICHTING, H. et al. *Boundary-layer theory*. [S.I.]: Springer, 1955. v. 7.
- 27 HAHN, D. W.; OZISIK, M. N. *Heat conduction*. [S.I.]: John Wiley & Sons, 2012.
- 28 CARSLAW, H.; JAEGER, J. *Conduction of heat transfer in solids*. [S.I.]: Oxford University Press London, 1959.
- 29 ARIS, R. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. [S.I.]: Courier Corporation, 2012.
- 30 KAKAÇ, S.; SHAH, R. K.; AUNG, W. *Handbook of single-phase convective heat transfer*. [S.I.]: John Wiley and Sons Inc., New York, NY, 1987.
- 31 KAYS, W. M.; CRAWFORD, M. E.; WEIGAND, B. *Convective heat and mass transfer*. [S.I.: s.n.], 2005.
- 32 KREYSZIG, E. *Advanced engineering mathematics*. [S.I.]: John Wiley & Sons, 2010.

- 33 ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Matemática Avançada para Engenharia*. [S.I.]: Bookman Editora, 2009. v. 1.
- 34 MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas*. [S.I.]: Livros Técnicos e Científicos, 1994.
- 35 CHHABRA, R. P.; RICHARDSON, J. F. *Non-Newtonian flow and applied rheology: engineering applications*. [S.I.]: Butterworth-Heinemann, 2011.
- 36 BERGMAN, T. L.; INCROPERA, F. P. *Fundamentals of heat and mass transfer*. [S.I.]: John Wiley & Sons, 2011.
- 37 RAMACHANDRAN, P. *Boundary element methods in transport phenomena*. [S.I.]: Pergamon, 1994.
- 38 KAPLAN, W. *Advanced calculus*. [S.I.]: Cambridge, Mass., Addison-Wesley Press, 1952.
- 39 BREBBIA, C. *Boundary element methods in engineering*. [S.I.]: Springer New York, NY, USA:, 1982.
- 40 BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary elements: an introductory course*. [S.I.]: WIT press, 1994.
- 41 KATSIKADELIS, J. T. *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists: Theory and Applications*. [S.I.]: Academic Press, 2016.
- 42 BUTKOV, E. *Física matemática*. [S.I.]: Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- 43 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. [S.I.]: Courier Corporation, 1964. v. 55.
- 44 SINGH, K.; TANAKA, M. On accurate evaluation of boundary element integrals for advection-diffusion and helmholtz equations. In: *Proceedings of the 15th JASCOME Symposium on BEM, JASCOME, Tokyo, Japan*. [S.I.: s.n.], 1998. p. 1–6.
- 45 PARTRIDGE, P.; BREBBIA, C.; WROBEL, L. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, (1992). [S.I.: s.n.], 1992.
- 46 LOEFFLER, C.; MANSUR, W. Dual reciprocity boundary element formulation for potential problems in infinite domains. *Boundary Elements X*, p. 155–163, 1988.
- 47 LOEFFLER, C.; MANSUR, W. Dual reciprocity boundary element formulation for transient elastic wave propagation analysis in infinite domains. *Advances in Boundary Elements*, Comp. Mech. Pub., Springer-Verlag, v. 2, p. 231–240, 1989.
- 48 BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. *Boundary element techniques: theory and applications in engineering*. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- 49 SOUZA, L. Z. d. *Utilização de funções de base radial de suporte compacto na modelagem direta de integrais de domínio com o método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2013.
- 50 BUHMANN, M. D. *Radial basis functions: theory and implementations*. [S.I.]: Cambridge university press, 2003. v. 12.

- 51 BULCÃO, A. *Formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade Usando Elementos de Ordem Superior Aplicação a Problemas de Campo Escalar Generalizado*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 1999.
- 52 PLETCHER, R. H.; TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. [S.I.]: CRC Press, 2012.
- 53 HUGHES, T. J. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. [S.I.]: Courier Corporation, 2012.
- 54 REDDY, J. N. *An introduction to continuum mechanics*. [S.I.]: Cambridge university press, 2013.
- 55 LOEFFLER, C. F.; SANTOS, J. C. dos. Solução analítica de um problema difusivo-advectivo bidimensional através do método de separação de variáveis.

Apêndice A

Malhador do Problema Advectivo-Difusivo

Neste apêndice apresenta-se o malhador desenvolvido em linguagem Octave e feito sob medida para a solução de problemas advectivo-difusivos bidimensionais estacionários. Como os algoritmos do método de elementos de contorno foram desenvolvidos em linguagem Fortran, o malhador elaborado tem por objetivo, através de uma entarda de dados do usuário, produzir uma malha em formato .txt que serve como entrada de dados no compilador de Fortran. Este malhador pode ser facilmente adaptado para outra equações governantes, porém, ficando restrito em requisitos de geometria retangular e malha com espaçamentos uniformes.

```
1      %%%%%%%%%%%%%%%%MALHADOR%%%%%%%%%%%%%%%
2
3      clear, clc          %Comandos para Limpeza de Tela e Memória
4      for Vx=[1,2,5,8,10,12,15,18,20,22,25,28,30]
5      %%%%INPUT%%%%%
6
7      L=1;                %Tamanho da aresta (deixa 1 para usar com o ...
8      % programa feito com FORTRAN) % n=320;           %Entrada do ...
9      %Número de Elementos de Contorno em cada aresta
10     Ni=34;              %Quantidade de nós da aresta interna (NixNi)
11     %Vx=100;             %Componente do Vetor Velocidade - Termo ...
12     %Advectivo - X%
13     Vy=0;               %Componente do Vetor Velocidade - Termo ...
14     %Advectivo - Y%
15
16
17
18      %%%%INICIALIZAÇÃO DE VALORES%%%%%
19
20      dl=L/n;            %Cálculo do Tamanho de cada Elemento Linear
21      Ne=n*4;             %Número Total de Elementos de Contorno
22      dli=L/(Ni+1);       %Distância entre nós internos
23
24
25      %%%%INICIALIZAÇÃO DE MATRIZES %%%%
26
27      Ai=zeros(Ni,2,'double');
28      Ae=zeros(Ne+4,2,'double');
29      S1=zeros(Ni^2+Ne+4,5,'double');
30      S2=zeros(Ne+4,3,'double');
31      S3=zeros(Ne,2,'double');
32
33
34      %%%%COORDENADAS DOS NÓS INTERNOS%%%%%
```

```
27
28     for i=1:Ni
29         for k=i:Ni:(Ni^2)
30             Ai(k,1)=i*dli;
31         end
32         for j=(i*Ni)-(Ni-1):(i*Ni)
33             Ai(j,2)=i*dli;
34         end
35     end
36
37         %%%%NÓS EXTERNOS%%%
38
39     cont=1;
40
41     for j=dl:dl:(1+dl)
42         Ae(cont,1)=j-dl;
43         Ae(cont,2)=0;
44         cont=cont+1;
45     end
46
47     for j=dl:dl:(1+dl)
48         Ae(cont,1)=1;
49         Ae(cont,2)=j-dl;
50         cont=cont+1;
51     end
52
53     for j=(1-dl):-dl:-dl
54         Ae(cont,1)=j+dl;
55         Ae(cont,2)=1;
56         cont=cont+1;
57     end
58
59     for j=(1-dl):-dl:0
60         Ae(cont,1)=0;
61         Ae(cont,2)=j+dl;
62         cont=cont+1;
63     end
64
65         %%%%TODOS OS NÓS (SEÇÃO 1)%%%
66
67     cont=1;
68
69     for i=1:(Ni^2+Ne+4)
70         S1(i,1)=cont;
71         S1(i,4)=Vx;
72         S1(i,5)=Vy;
73         cont=cont+1;
```

```
74      end
75
76      for i=1:Ne+4
77          S1(i,2:3)=Ae(i,:);
78      end
79
80      for i=Ne+5:Ni^2+Ne+4
81          S1(i,2:3)=Ai(i-Ne-4,:);
82      end
83
84      S1=S1';
85
86      %%%%%%IDENTIFICAÇÃO DOS NÓS DUPLOS (SEÇÃO 2)%%%%%
87
88      %ARESTA INFERIOR
89
90      for i=1:n+1
91          if i==1
92              S2(i,1)=1;  % KODE
93              S2(i,2)=4*(n+1);
94              S2(i,3)=0;  % Valor de Condição de Contorno
95          else
96              if i==n+1
97                  S2(i,1)=1;
98                  S2(i,2)=1*(n+1)+1;
99                  S2(i,3)=0;
100             else
101                 S2(i,1)=1;
102                 S2(i,2)=0;
103                 S2(i,3)=0;
104             end
105         end
106     end
107
108     % ARESTA DIREITA
109
110     for i=n+2:2*n+2
111         if i==n+2
112             S2(i,1)=1;
113             S2(i,2)=1*(n+1);
114             S2(i,3)=1;
115         else
116             if i==2*n+2
117                 S2(i,1)=1;
118                 S2(i,2)=2*(n+1)+1;
119                 S2(i,3)=1;
120             else
```

```
121      S2(i,1)=1;
122      S2(i,2)=0;
123      S2(i,3)=1;
124      end
125      end
126      end
127
128      % ARESTA SUPERIOR
129
130      for i=2*n+3:3*n+3
131      if i==2*n+3
132          S2(i,1)=1;
133          S2(i,2)=2*(n+1);
134          S2(i,3)=0;
135      else
136          if i==3*n+3
137              S2(i,1)=1;
138              S2(i,2)=3*(n+1)+1;
139              S2(i,3)=0;
140          else
141              S2(i,1)=1;
142              S2(i,2)=0;
143              S2(i,3)=0;
144          end
145      end
146      end
147
148      % ARESTA ESQUERDA
149
150      for i=3*n+4:4*n+4
151      if i==3*n+4
152          S2(i,1)=0;
153          S2(i,2)=3*(n+1);
154          S2(i,3)=0;
155      else
156          if i==4*n+4
157              S2(i,1)=0;
158              S2(i,2)=1;
159              S2(i,3)=0;
160          else
161              S2(i,1)=0;
162              S2(i,2)=0;
163              S2(i,3)=0;
164          end
165      end
166      end
167
```

```
168     S2=S2';
169
170     %%%%LIGAÇÃO DOS NÓS EXTERNOS (SEÇÃO 3) %%%%
171
172     for i=1:n
173         S3(i,1)=i;
174         S3(i,2)=i+1;
175     end
176
177     for i=n+1:2*n
178         S3(i,1)=i+1;
179         S3(i,2)=i+2;
180     end
181
182     for i=2*n+1:3*n
183         S3(i,1)=i+2;
184         S3(i,2)=i+3;
185     end
186
187     for i=3*n+1:4*n
188         S3(i,1)=i+3;
189         S3(i,2)=i+4;
190     end
191
192     S3=S3';
193
194     %%%%GERADOR DO ARQUIVO .TXT %%%%
195
196     nome=input('Insira o nome do arquivo de saída (entre aspas ...
197             simples): ');
198     nome=[nome,'.txt']; %ADICIONA .TXT SOZINHO - MELHOR ASSIM
199
200     fileID = fopen(nome,'w');
201     fprintf(fileID,'Malha numérica\r');
202     fprintf(fileID,['\n %0.0f\r',Ne]);
203     fprintf(fileID,['\n %0.0f\r',Ne+4]);
204     fprintf(fileID,['\n %0.0f\r',Ni^2]);
205     fprintf(fileID,[ '\n%6.0f', '%12.4f', '%12.4f', '%12.4f', '%12.4f\r'],S1);
206     fprintf(fileID,[ '\n%6.0f', '%6.0f', '%25.4f\r'],S2);
207     fprintf(fileID,[ '\n%6.0f', '%5.0f\r'],S3);
208     fclose(fileID);
209 end
```

Apêndice B

Solução Analítica do Caso IV

Este apêndice apresenta de forma sintética a solução analítica detalhada do caso IV, que já foi publicada conforme referência [55]. A motivação da exposição da solução recai sobre sua natureza não-trivial correlata a um problema advectivo-difusivo bidimensional com condições de contorno não homogêneas conforme mostrado no croqui abaixo da figura 28, reapresentada aqui por conveniência.

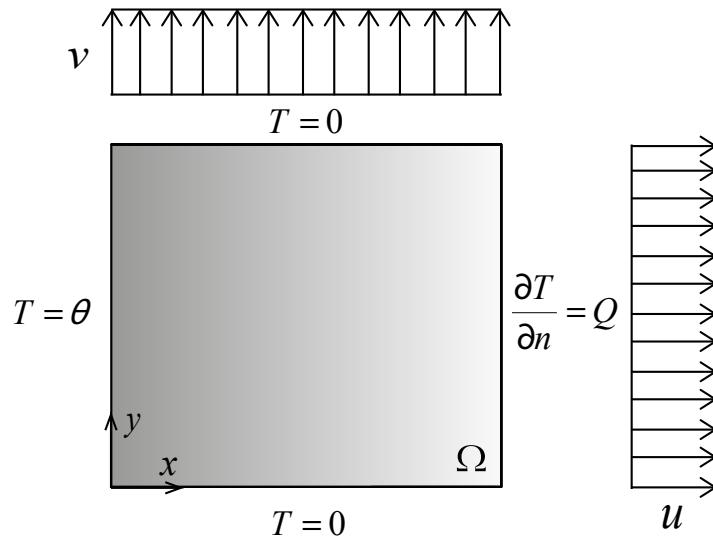


Figura 28 – Croqui Representativo do Caso IV

A expressão que governa a física do problema é dada pela equação diferencial parcial linear B.1, exibida a seguir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{B.1})$$

A solução analítica utiliza-se do método de separação de variáveis (MSV) encontrado em detalhes em literaturas como [33], [32], [42] para solucionar a equação diferencial parcial proposta. É importante destacar que o método demanda a linearidade da equação diferencial, tal como condições de contorno homogêneas como pré-requisitos para sua aplicação. Todavia, felizmente, esta última condição pode ser relaxada, inserindo uma função auxiliar que cumpra a função de satisfazer as condições não-homogêneas impostas, tornando assim possível a aplicação da técnica.

A aplicação do MSV inicia-se por propor uma estrutura de solução para o campo de temperatura da equação governante B.1 baseada em um produto entre uma função exclusiva de

cada direção ordenada. A este produto é adicionada a função auxiliar anteriormente citada para condições não-homogêneas, o que por ser sintetizado na proposta que segue na equação B.2.

$$T(x, y) = \gamma(x) + X_i(x)Y_i(y) \quad (\text{B.2})$$

É possível então substituir a proposta de solução do MSV, dada pela equação B.2, na equação B.1 que modela o fenômeno em questão. Tal substituição resulta em outra equação diferencial que pode ser convenientemente arranjada tal como segue na equação B.3.

$$\left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - u \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} Y_i(y) - u \frac{\partial X_i}{\partial x} Y_i(y) \right] = - \left[\frac{\partial^2 Y_i}{\partial y^2} X_i(x) - v \frac{\partial Y_i}{\partial y} X_i(x) \right] \quad (\text{B.3})$$

Uma observação atenta da equação B.3 e uma comparação indireta de sua estrutura com a aplicação clássica do MSV para problemas com condições homogêneas de contorno [28], revelam que o primeiro termo, que constitui uma equação diferencial ordinária cuja variável primal é a função auxiliar $\gamma(x)$, deve ser nulo para garantir que o método funcione conforme seu mecanismo tradicional. Portanto, é possível consolidar que:

$$\gamma'' - u\gamma' = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{X_i''}{X_i} - u \frac{X_i'}{X_i} = v \frac{Y_i'}{Y_i} - \frac{Y_i''}{Y_i} = -K_i^2 \quad (\text{B.5})$$

A equação B.5, por sua vez, correlaciona das equações diferenciais ordinárias em função de x e y com uma constante que deve ser negativa por inspeção.

A solução das equações B.4 e B.5 são a prioridade deste desenvolvimento a partir de então. Inicia-se pela solução da equação B.4, reprezentada abaixo por comodidade.

$$\gamma'' - u\gamma' = 0 \quad (\text{B.6})$$

Uma inspeção rápida na equação B.6 revela que uma das possíveis soluções pode ser dada por:

$$\gamma(x) = e^{\lambda x} \quad (\text{B.7})$$

Substituindo a solução identificada pela equação B.7, na equação B.6, tem-se a formação de uma equação característica [32] que pode ser solucionada facilmente tal como segue abaixo na expressão B.8.

$$(\lambda^2 - u\lambda) e^{\lambda x} = 0 \quad \therefore \quad \lambda(\lambda - u) = 0 \quad \therefore \quad \lambda_1 = 0 \quad e \quad \lambda_2 = u \quad (\text{B.8})$$

Uma vez de posse das raízes da equação característica, é possível a escrita de uma solução geral da equação ordinária B.6, em função e constantes arbitrárias A e B , como mostrado abaixo pela equação B.9

$$\gamma(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \quad \therefore \quad \gamma(x) = A + Be^{ux} \quad (\text{B.9})$$

As constantes A e B , por sua vez, podem ser calculadas através das condições de contorno não-homogêneas impostas ao problema na direção x conforme o croqui da figura 28. Portanto, aplicando as condições de contorno, as seguintes estruturas para as constantes:

$$T(0, y) = \theta \quad \therefore \quad \gamma(0) = \theta \quad \therefore \quad A = \theta - B \quad (\text{B.10})$$

$$T'(a, y) = Q \quad \therefore \quad \gamma'(a) = Q \quad \therefore \quad B = \frac{Q}{ue^{ua}} \quad (\text{B.11})$$

Com as constantes A e B devidamente determinadas é possível escrever a função auxiliar que atende as demandas da vigente solução no seguinte formato:

$$\gamma(x) = \frac{Q}{ue^{ua}} [e^{ux} - 1] + \theta \quad (\text{B.12})$$

A seguir deve-se solucionar duas equações ordinárias restantes que são provenientes da equação B.5. Considerando apenas da equação diferencial dependente de x e a constante de proporcionalidade tem-se:

$$\frac{X_i''}{X_i} - u \frac{X_i'}{X_i} = -K_i^2 \quad \therefore \quad X_i'' - uX_i' + X_i K_i^2 = 0 \quad (\text{B.13})$$

Aqui novamente, por se tratar a equação B.13 de uma EDO linear de segunda ordem, a solução exponencial mostra-se viável no seguinte formato:

$$X_i(x) = e^{\lambda x} \quad (\text{B.14})$$

Substituindo a solução exponencial da equação B.14, na equação B.13, gera-se então a equação característica associada à EDO.

$$(\lambda^2 - u\lambda + K_i^2) e^{\lambda x} = 0 \quad \therefore \quad \lambda^2 - u\lambda + K_i^2 = 0 \quad (\text{B.15})$$

O determinante correlato a equação característica B.15 é dado conforme abaixo pela expressão B.16 e pode ser negativo ou positivo de acordo com a relação de magnitude entre a velocidade na direção x , u , e a constante de proporcionalidade do MSV, K_i , conforme mostrado pela expressão B.16 logo na sequência.

$$\Delta = u^2 - 4K_i^2 \quad (\text{B.16})$$

$$u < 2K_i \rightarrow \Delta < 0 \quad \therefore \quad u > 2K_i \rightarrow \Delta > 0 \quad (\text{B.17})$$

Toma-se aqui a hipótese de que o determinante seja negativo, obedecendo a premissa dada pela equação B.17, e portanto, a raiz da equação característica B.15 assume o formato complexo dado abaixo pela equação B.18.

$$\lambda = p \pm q_i i \quad p = \frac{u}{2} \quad q_i = \sqrt{K_i^2 - \frac{u^2}{4}} \quad (\text{B.18})$$

Uma solução geral para $X_i(x)$ pode ser dada então para duas raízes complexas em função de funções exponenciais e harmônicas tal como abaixo e em consonância com a melhor literatura em [33].

$$X_i(x) = e^{px} [C_i \cos(q_i x) + D_i \sin(q_i x)] \quad (\text{B.19})$$

A equação solução B.19 é dada em função de duas constantes desconhecidas C_i e D_i . É possível então aplicar as condições de contorno dadas na direção x para determinar pelo menos umas delas, de acordo com a sequência.

$$T(0, y) = \theta \quad \therefore \quad X_i(0)Y_i(y) + \gamma(0) = \theta \quad \therefore \quad X_i(0) = 0 \quad \therefore \quad C_i = 0 \quad (\text{B.20})$$

A outra condição de contorno, de fluxo, dada em $x = a$ é agora aplicada logo em seguida gerando as seguintes igualdades.

$$T'(a, y) = Q \quad \therefore \quad X'_i(a)Y_i(y) + \gamma(a) = Q \quad \therefore \quad X'_i(a) = 0 \quad (\text{B.21})$$

A última igualdade da equação B.21, se devidamente desenvolvida partindo-se da solução geral para $X_i(x)$, dada na equação B.19, gera a seguinte equação resultante:

$$0 = \frac{u}{2} \sin(q_i a) + q_i \cos(q_i a) \quad (\text{B.22})$$

A equação B.22 é de natureza transcendental, e não pode ser solucionada analiticamente. Além disto, como envolve funções harmônicas periódicas, esta equação possui infinitas raízes. A determinação destas raízes é feita numericamente através do algoritmo mostrado no Apêndice C.

Uma vez determinados os valores raízes q_i , é possível através das relações mostradas pelas equação B.18, determinar a constante de proporcionalidade da separação de variáveis.

$$q_i = \sqrt{K_i^2 - \frac{u^2}{4}} \quad \therefore \quad q_i^2 = K_i^2 - \frac{u^2}{4} \quad \therefore \quad K_i^2 = q_i^2 + \frac{u^2}{4} \quad (\text{B.23})$$

Por fim, é válido ressaltar que a rotina computacional exibida na íntegra no Apêndice C, permite o cálculo dos valores de todas as raízes e constantes de interesse de solução de forma simultânea.

Dando sequência ao desenvolvimento da solução apresenta-se agora a equação diferencial ordinária na direção y , também proveniente da equação B.5.

$$v \frac{Y'_i}{Y_i} - \frac{Y''_i}{Y_i} = -K_i^2 \quad \therefore \quad Y''_i - v Y'_i - K_i^2 Y_i = 0 \quad (\text{B.24})$$

Por inspeção, analogamente ao feito para a EDO em x , conclui-se que uma função exponencial simples tal como a dada abaixo na equação B.25 é solução da equação B.24.

$$Y_i = e^{\lambda_i y} \quad (\text{B.25})$$

Substituindo-se então a solução B.25 na equação B.24, tem-se a formação da seguinte equação característica.

$$(\lambda_i^2 - v\lambda_i - K_i^2) e^{\lambda_i y} = 0 \quad \therefore \quad \lambda_i^2 - v\lambda_i - K_i^2 = 0 \quad \therefore \quad \Delta = v^2 + 4K_i^2 > 0 \quad (\text{B.26})$$

É possível constatar via estrutura do determinante que tal equação só admite raízes reais e portanto que sua solução geral tem formato exponencial de acordo com posto abaixo pela expressão B.27 juntamente com seus respectivos expoentes calculados via equação B.26.

$$Y_i(y) = E_i e^{\lambda_i^1 y} + F_i e^{\lambda_i^2 y} \quad \therefore \quad \lambda_i^{1,2} = \frac{v}{2} \pm \frac{\sqrt{v^2 + 4K_i^2}}{2} \quad (\text{B.27})$$

Para melhor conhecer sobre os valores ou relações entre as constantes E_i e F_i , aplica-se então as condições de contorno impostas ao problema físico na direção y .

$$T(x, 0) = 0 \quad \therefore \quad \gamma(x) + X_i(x)Y_i(0) = 0 \quad \therefore \quad X_i(x)Y_i(0) = -\gamma(x) \quad (\text{B.28})$$

$$e^{px} D_i \operatorname{sen}(q_i x) [E_i + F_i] = \frac{Q}{ue^{ua}} [1 - e^{ux}] - \theta \quad (\text{B.29})$$

$$T(x, a) = 0 \quad \therefore \quad \gamma(x) + X_i(x)Y_i(a) = 0 \quad \therefore \quad X_i(x)Y_i(a) = -\gamma(x) \quad (\text{B.30})$$

$$e^{px} D_i \operatorname{sen}(q_i x) \left[E_i e^{\lambda_i^1 a} + F_i e^{\lambda_i^2 a} \right] = \frac{Q}{ue^{ua}} [1 - e^{ux}] - \theta \quad (\text{B.31})$$

Por comparação, os lados direitos da equações B.29 e B.30 devem ser iguais. Desta forma igualando este trechos tem-se que a relação entre as constantes é dada na forma a seguir.

$$E_i + F_i = E_i e^{\lambda_i^1 a} + F_i e^{\lambda_i^2 a} \quad \therefore \quad E_i = F_i \left\{ \frac{e^{\lambda_i^2 a} - 1}{1 - e^{\lambda_i^1 a}} \right\} \quad (\text{B.32})$$

Uma vez conhecida a relação entre E_i e F_i , é possível reescrever a solução geral dada pela equalão B.27, em função de apenas uma das constantes tal como mostrado a seguir pela expressão B.33.

$$Y_i(y) = F_i \left\{ \frac{e^{\lambda_i^2 a} - 1}{1 - e^{\lambda_i^1 a}} e^{\lambda_i^1 y} + e^{\lambda_i^2 y} \right\} \quad (\text{B.33})$$

Agora, substituindo a relação entre E_i e F_i dada pela equação B.32 na equação B.29, pode-se escrever a seguinte sentença matemática.

$$e^{px} D_i \operatorname{sen}(q_i x) F_i \left[\frac{e^{\lambda_i^1 a} - e^{\lambda_i^2 a}}{e^{\lambda_i^1 a} - 1} \right] = \frac{Q}{ue^{ua}} [1 - e^{ux}] - \theta \quad \therefore \quad M_i = \frac{e^{\lambda_i^1 a} - e^{\lambda_i^2 a}}{e^{\lambda_i^1 a} - 1} \quad (\text{B.34})$$

Como λ_i^1 e λ_i^2 são constantes dependentes de q_i , então pode-se condensar todo o termo entre colchetes na parte esquerda da equação B.34 como uma nova constante denominada aqui de M_i . Desta forma é possível reescrever a expressão B.34, no formato da equação B.35 abaixo. Note na equação B.35 que D_i foi a família de constantes não determinada quando solucionou-se a EDO em função de x e que analogamente F_i é o conjunto de constantes não determinado na solução da EDO na direção y . Pode-se então, por simplicidade unir o produto destas duas constantes não conhecidas em apenas uma família de constantes denominada aqui de G_i .

$$e^{px} D_i \operatorname{sen}(q_i x) F_i M_i = \frac{Q}{ue^{ua}} [1 - e^{ux}] - \theta \quad \therefore \quad G_i = F_i D_i \quad (\text{B.35})$$

O uso da definição de G_i sintetiza a expressão B.35 em uma forma mais compacta, mostrada logo abaixo pela expressão B.36.

$$G_i M_i e^{px} \operatorname{sen}(q_i x) = \frac{Q}{ue^{ua}} [1 - e^{ux}] - \theta \quad (\text{B.36})$$

Com alguma manipulação algébrica, pode-se reescrever a sentença B.36 da sequinte forma, em função dos valores impostos em condições de contorno θ e Q .

$$G_i M_i \operatorname{sen}(q_i x) = e^{-px} \left[\frac{Q}{ue^{ua}} - \theta \right] - \frac{Q}{ue^{ua}} e^{px} \quad (\text{B.37})$$

Para utilizar do conceito de ortogonalidade entre funções [43], multiplica-se ambos os lados da equação B.37 por funções homônimas $\text{sen}(q_m x)$, e integrando-se ao longo de todo a extensão x domínio, tem-se:

$$\int_0^a G_i M_i \text{sen}(q_i x) \text{sen}(q_m x) dx = \int_0^a \left\{ e^{-px} \left[\frac{Q}{ue^{ua}} - \theta \right] - \frac{Q}{ue^{ua}} e^{px} \right\} \text{sen}(q_m x) dx \quad (\text{B.38})$$

O desenvolvimento analítico da equação B.38 não é trivial e para tanto vamos separa-la em lado esquerdo (LE) e lado direito (LD).

$$LE = \int_0^a G_i M_i \text{sen}(q_i x) \text{sen}(q_m x) dx \quad (\text{B.39})$$

$$LD = \int_0^a \left\{ e^{-px} \left[\frac{Q}{ue^{ua}} - \theta \right] - \frac{Q}{ue^{ua}} e^{px} \right\} \text{sen}(q_m x) dx \quad (\text{B.40})$$

O desenvolvimento do lado esquerdo passa pela expansão do somatório que existe no núcleo da integral da equação do LE B.39. É importante lembrar que os coeficientes G_i são desconhecidos. Desta forma para $m = 1$ a equação gera uma equação com n incógnitas, onde n é igual ao número de raízes calculadas da equação transcendental B.22 para representar a série infinita final.

$$LE = \int_0^a G_1 M_1 \text{sen}(q_1 x) \text{sen}(q_1 x) dx + \dots + \int_0^a G_n M_n \text{sen}(q_n x) \text{sen}(q_1 x) dx \quad (\text{B.41})$$

As integrais que porventura aparecem no interior das integrais podem ser calculadas com as entidades matemáticas conhecidas postas abaixo [43].

$$\int_0^a \text{sen}^2(q_m x) dx = \frac{a}{2} - \frac{\text{sen}(2q_m a)}{4q_m} \quad (\text{B.42})$$

$$\int_0^a \text{sen}(q_i x) \text{sen}(q_m x) dx = \frac{\text{sen}[(q_i - q_m) a]}{2(q_i - q_m)} - \frac{\text{sen}[(q_i + q_m) a]}{2(q_i + q_m)} \quad (\text{B.43})$$

Em paralelo, o lado direito (LD) dado pela equação B.40, pode ser desenvolvido de forma direta com outras entidades [32] mostradas a seguir nas equações B.44 e B.45. É importante observar que a expressão B.40 só possui índices m dados pelos senos homônimos que foram multiplicados em seus termos. Desta forma para cada valor de m o LD da equação retorna apenas um valor.

$$\int e^{cx} \text{sen}(bx) dx = \frac{e^{cx}}{c^2 + b^2} [c \cdot \text{sen}(bx) - b \cdot \cos(bx)] + C \quad (\text{B.44})$$

$$\int_0^a e^{\frac{u}{2}x} \text{sen}(q_i x) dx = \frac{1}{\frac{u^2}{4} + q_i^2} \left\{ e^{\frac{u}{2}a} \left[\frac{u}{2} \cdot \text{sen}(q_i a) - q_i \cos(q_i a) \right] + q_i \right\} \quad (\text{B.45})$$

O resultado final, depois de tratadas adequadamente as integrais pode ser sintetizado na expressão abaixo dada pela equação B.47.

$$LD = \frac{-Q}{ue^{ua}} \left\{ \frac{1}{\frac{u^2}{4} + q_m^2} \right\} \left\{ e^{\frac{u}{2}a} \left[\frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen}(q_m a) - q_m \cos(q_m a) \right] + q_m \right\} + \\ \left[\frac{Q}{ue^{ua}} - \theta \right] \left\{ \frac{1}{\frac{u^2}{4} + q_m^2} \right\} \left\{ e^{\frac{u}{2}a} \left[-\frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen}(q_m a) - q_m \cos(q_m a) \right] + q_m \right\} \quad (\text{B.46})$$

Como já comentado na expansão do lado esquerdo (LE), para cada valor de m compõe-se uma linha de um sistema linear, cujas incógnitas são os valores das constantes G_i . Por simplicidade, como o valor de cada M_i já é conhecido, acopla-se estas duas constantes em apenas uma denominada aqui de Z_i , que caracteriza por sua vez as incógnitas a serem calculadas em cada linhas do sistema linear do lado esquerdo.

$$Z_i = G_i M_i \quad (\text{B.47})$$

Em paralelo, já no lado direito (LD), para cada valor fixado de m , ou seja, para cada linha dos sistema linear, tem-se um valor para o vetor dos termos independentes que é dado pelo lado esquerdo, e denominado aqui de W_m , tal como segue na equação B.49.

$$W_m = \frac{-Q}{ue^{ua}} \left\{ \frac{1}{\frac{u^2}{4} + q_m^2} \right\} \left\{ e^{\frac{u}{2}a} \left[\frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen}(q_m a) - q_m \cos(q_m a) \right] + q_m \right\} + \\ \left[\frac{Q}{ue^{ua}} - \theta \right] \left\{ \frac{1}{\frac{u^2}{4} + q_m^2} \right\} \left\{ e^{\frac{u}{2}a} \left[-\frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen}(q_m a) - q_m \cos(q_m a) \right] + q_m \right\} \quad (\text{B.48})$$

Pode-se então para uma melhor visualização do sistema, representar uma loinha do sistema linear de acordo com o mostrado na sequência pela equação B.49, onde os coeficiente da matriz quadrada de ordem n são dados por integrais conhecidas analiticamente.

$$\left[\int_0^a \operatorname{sen}(q_1 x) \operatorname{sen}(q_m x) dx \quad \dots \quad \int_0^a \operatorname{sen}(q_n x) \operatorname{sen}(q_m x) dx \right] \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = W_m \quad (\text{B.49})$$

A expansão do sistema para ordem n , onde n é o número de raízes calculados na equação transcendental, pode ser ilustrada pela equação matricial B.50. O vetor de incógnitas $[Z]$ é

calculado no algoritmo mostrado na íntegra no Apêndice C.

$$\begin{bmatrix} \int_0^a \sin(q_m x) \sin(q_m x) dx & \int_0^a \sin(q_n x) \sin(q_m x) dx \\ \vdots & \vdots \\ \int_0^a \sin(q_m x) \sin(q_n x) dx & \int_0^a \sin(q_n x) \sin(q_n x) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.50})$$

Por fim, de posse dos valores das constantes G_i que restavam para serem conhecidas é possível sintetizar todos os resultados obtidos através das três famílias de funções determinadas partindo-se do procedimento de separação de variáveis (MSV).

$$\gamma(x) = \frac{Q}{ue^{ua}} [e^{ux} - 1] + \theta \quad X_i(x) = D_i \sin(q_i x) \quad Y_i(y) = F_i \left\{ \frac{e^{\lambda_i^2 a} - 1}{1 - e^{\lambda_i^1 a}} e^{\lambda_i^1 y} + e^{\lambda_i^2 y} \right\} \quad (\text{B.51})$$

A proposta original no MSV preconiza o somatório de funções exclusivas de x e y por meio de uma série teoricamente infinita. Em nossa proposta, a título de lembrança adiciona-se a função auxiliar $\gamma(x)$ para o trato das condições de contorno não-homogêneas, tal como posto novamente por conveniência abaixo na expressão B.52.

$$T(x, y) = \gamma(x) + \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) Y_i(y) \quad (\text{B.52})$$

A substituição das funções definidas na equação B.51, na proposta do MSV dada pela equação B.52, resulta no seguinte campo bidimensional de temperaturas.

$$T(x, y) = \left\{ \left[\frac{e^{ux} - 1}{u} \right] + 1 \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} G_i e^{\frac{u}{2} x} \sin(q_i x) \left\{ \frac{e^{\lambda_i^2 a} - 1}{1 - e^{\lambda_i^1 a}} e^{\lambda_i^1 y} + e^{\lambda_i^2 y} \right\} \quad (\text{B.53})$$

Se houver necessidade, os fluxos podem ser devidamente determinados via diferenciação parcial na equação B.53 em função das direções ordenadas.

Apêndice C

Algoritmo para Cálculo de Autovalores

O vigente apêndice apresenta um breve algoritmo em linguagem Octave que foi utilizado para calcular as raízes da equação transcendental correlata ao Caso IV do projeto, tal como para determinar as constantes G_i que são demandadas pela solução analítica do mesmo.

```
1
2 %%%%%%
3 %%%%%%
4 %% %%%
5 %% ALGORITMO PARA SOLUÇÃO ANALÍTICA DE %%%
6 %% UM PROBLEMA ADVECTIVO DIFUSIVO BIDIMENSIONAL %%%
7 %% %%%
8 %%%%%%
9 %%%%%%
10
11 % Esse programa foi desenvolvido para cálculo de temperaturas
12 % em um problema advectivo difusivo bidimensional com condições
13 % de contorno específicas. O algoritmo foi elaborado como parte
14 % da dissertação de mestrado de Vitor Pancieri Pinheiro,
15 % com foco na análise da performance do método dos elementos
16 % de contorno aplicado à solução de um problema de calor
17 % advectivo-difusivo.
18 %
19 % As especificações do problema aqui analisado bem como a solução
20 % analítica que figura como alicerce desse algoritmo consta no trabalho
21 % "Solução Analítica de um Problema Difusivo-Advectivo Bidimensional
22 % Através do Método de Separação de Variáveis" com autoria de
23 % Carlos Friedrich Loeffler e Jeovane Castro dos Santos.
24 % url: https://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxii.cnmac/pdf/66.pdf
25 %
26 % Programadores: Daniel Carvalho de Moura Candido
27 % Vitor Pancieri Pinheiro
28 % Contato: danielcandido89@gmail.com
29 % vitor.pinheiro1987@gmail.com
30 % %%%%%%
31 clear clc
32 % INICIO DO PROGRAMA
33
34 % DEFINIÇÃO DE DADOS DO PROBLEMA
35
```

```

36     a=1;      %Valor da aresta "a" do domínio bidimensional
37     m1=40;    %Número de constantes "GM" que se deseja extrair
38     i1=m1    %Número de linhas é igual ao número de colunas
39     teta=1;   %Potencial prescrito na aresta esquerda do domínio
40     Pe=30;    %Adimensional de Peclét
41     %u=1;     %Velocidade do Escoamento na Direção X
42     u=Pe/sqrt(2); % Velocidade Determinar em função de Pe
43     v=u;      % Simetria do Campo de Velocidades
44     Q=exp(u*a);%Fluxo prescrito na aresta direita do domínio
45     py=10;    %Número de pontos para análise de temperatura
46
47 %-----%
48 %
49 %  %ALOCAÇÃO DE TODAS AS MARIZES NECESSÁRIAS PARA O PROGRAMA
50
51 A=zeros(m1,i1);
52 B=zeros(m1,1);
53 q=zeros(m1,1);
54 K=zeros(m1,1);
55 K2=zeros(m1,1);
56 lambda1=zeros(m1,1);
57 lambda2=zeros(m1,1);
58 M=zeros(m1,1);
59 termo_som=zeros(m1,1);
60 temp=zeros(py,1);
61
62 %-----%
63 %
64 %  %DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES "q,K,lambda" e "M"
65
66 f = @(x) (u/2).*sin(a.*x)+(x.*cos(a.*x)); %Definição da função
67 palpite=0;                                     %Palpite inicial
68 cont=1;                                       %índice vetor raizes
69
70 for palpate=[pi:pi*pi*m1];
71
72 q(cont)=fzero(f,palpate);                   %Extração das raízes q
73 K(cont)=sqrt((q(cont)^2)+((u^2)/4));        %Cálculo de Ki
74 K2(cont)=(q(cont)^2)+((u^2)/4);              %Cálculo de Ki^2
75 lambda1(cont)=(v/2)+(sqrt((v^2)+(4*(K(cont)^2)))/2);
76 %Cálculo de Lambda1
77 lambda2(cont)=(v/2)-(sqrt((v^2)+(4*(K(cont)^2)))/2);
78 %Cálculo de Lambda1
79 M(cont)=(exp(lambda1(cont)*a)-exp(lambda2(cont)*a)) ...
80 %Cálculo de Mi (1/2)
81 /(exp(lambda1(cont)*a)-1);
82 %Cálculo de Mi (2/2)

```

```

83 cont=cont+1;
84 %Incremento de índice
85 end
86
87
88 %-----
89 %
90 %    %CRIAÇÃO E SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR DE EQUAÇÕES AX=B
91
92 for m=1:m1
93
94 B(m)=(-Q/(u*exp(u*a)))*(1/(((u^2)/4)+(q(m)^2)))*((exp(u*a/2)*(u/2) ...
95 %Atribuição de valores a B (1/4)
96 *sin(q(m)*a)-(q(m)*cos(q(m)*a))+q(m))+((Q/(u*exp(u*a)))-teta) ...
97 %Atribuição de valores a B (2/4)
98 *(1/(((u^2)/4)+(q(m)^2)))*((exp(-u*a/2)*(-u/2)*sin(q(m)*a) ...
99 %Atribuição de valores a B (3/4)
100 -(q(m)*cos(q(m)*a))+q(m)));
101 %Atribuição de valores a B (4/4)
102
103
104 for i=1:i1
105 if m==i
106 A(m,i)=(a/2)-(sin(2*q(m)*a)/(4*q(m)));      % Diagonal principal
107 else
108 A(m,i)=(sin((q(i)-q(m))*a)/(2*(q(i)-q(m))))... % Valores de A (1/2)
109 -(sin((q(i)+q(m))*a)/(2*(q(i)+q(m))));        %Valores de A (2/2)
110 end
111 end
112 end
113 %
114 GM=linsolve(A,B);      %Determinação dos coeficientes GM
115 -----
116 %
117 %CÁLCULO DA CONSTANTE G
118 G=GM./M;
119 -----
120 %
121 %CÁLCULO DAS TEMPERATURAS NA BORDA DIREITA
122 termo1=(1+((exp(u*a)-1)/u));      %Termo fora do somatório
123 y=[0+(a/py):a/py:a];            %Coordenadas na borda direita
124 y=y';                           %Adaptação para plotagem
125 for l=1:py
126 for k=1:m1
127 termo_som(k)=G(k)*exp(u*a/2)*sin(q(k)*a)*(((1-exp(lambda2(k)*a)) ...
128 %Termo dentro do somatório(1/2)
129 /(exp(lambda1(k)*a)-1))*exp(lambda1(k)*y(l))+exp(lambda2(k)*y(l)));
```

```
130 %Termo dentro do somatório(2/2)
131 end
132 temp(l)=sum(termo_som)+termo1;           %Equação completa
133 end
134 relatorio=[y,temp];
135
136 %Criação de tabela para comparação de dados
137 %-----
138 %PLOTAGEM
139
140 plot(y,temp),grid,title('Temperaturas na borda direita do ...',
    'domínio') ...
141 , xlabel('Coordenada y'), ylabel('Temperatura');
142
143 %FIM DO PROGRAMA-----
```