UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Elétrica

Princípios de Comunicações I

Modulação Analógica
Semestre Letivo 2020/1

Prof.: Jair A. Lima Silva
DEL-UFES

Índice

I. **Modulação Angular**

II. **Tipos de Modulação Angular**

   a. Modulação PM

   b. Modulação FM

III. **Potência de Sinais Modulados em Ângulo**

IV. **Espectro de Sinais Modulados em Ângulo**

V. **Largura de Banda destes Sinais**

I. Modulação Angular

MODULAÇÃO ANGULAR

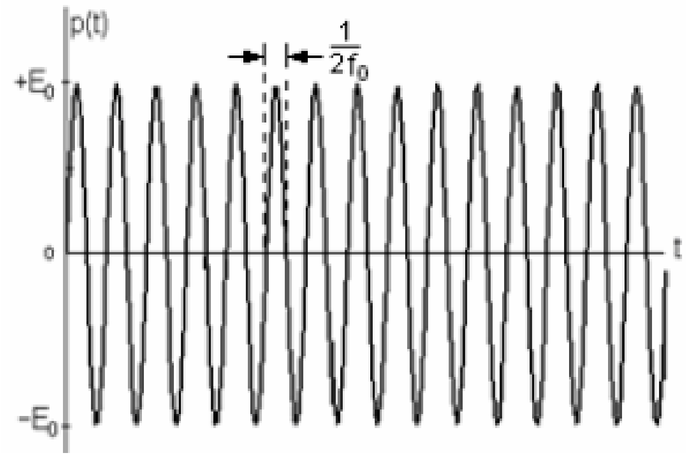
ÂNGULO acompanha x(t) $\rightarrow$ $y(t) = E_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$

$\uparrow$ amplitude inalterada

$\uparrow$ *ângulo* **alterado**

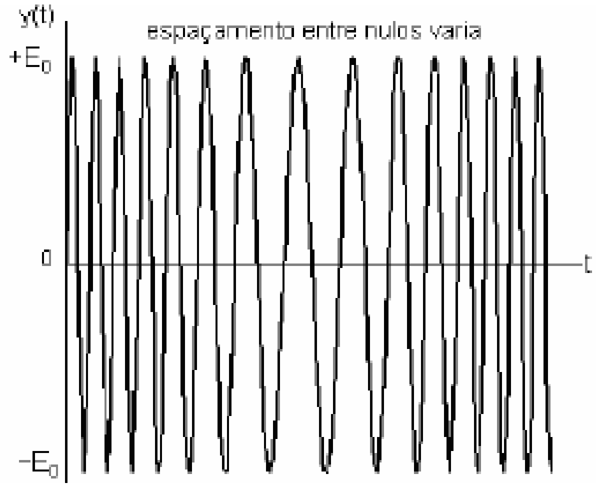
Portadora

$$p(t) = E_0 \cos(2\pi f_0 t)$$



Sinal modulado em ***ângulo***

$$y(t) = E_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$$



I. Modulação Angular

A modulação angular, assim como a modulação em amplitude, são chamadas de modulação de onda contínua pois o sinal a ser modulado é uma portadora senoidal.

$$p(t) = E_0 \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi(t)\right) = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right) \quad \textbf{portadora}$$

Onde ***φ(t)*** é a fase inicial da portadora, que assumiremos ser **nula** por simplificação.

Na **modulação angular** o sinal modulador **x(t)** irá alterar a fase – **Modulação em Fase (PM)**, ou a frequência da portadora – **Modulação em Frequência (FM)**.

Modulação em frequência e modulação em fase são inter-relacionadas, e por este motivo é que as duas são conhecidas como modulação angular.

Para entendermos melhor este inter-relacionamento vamos definir a portadora como:

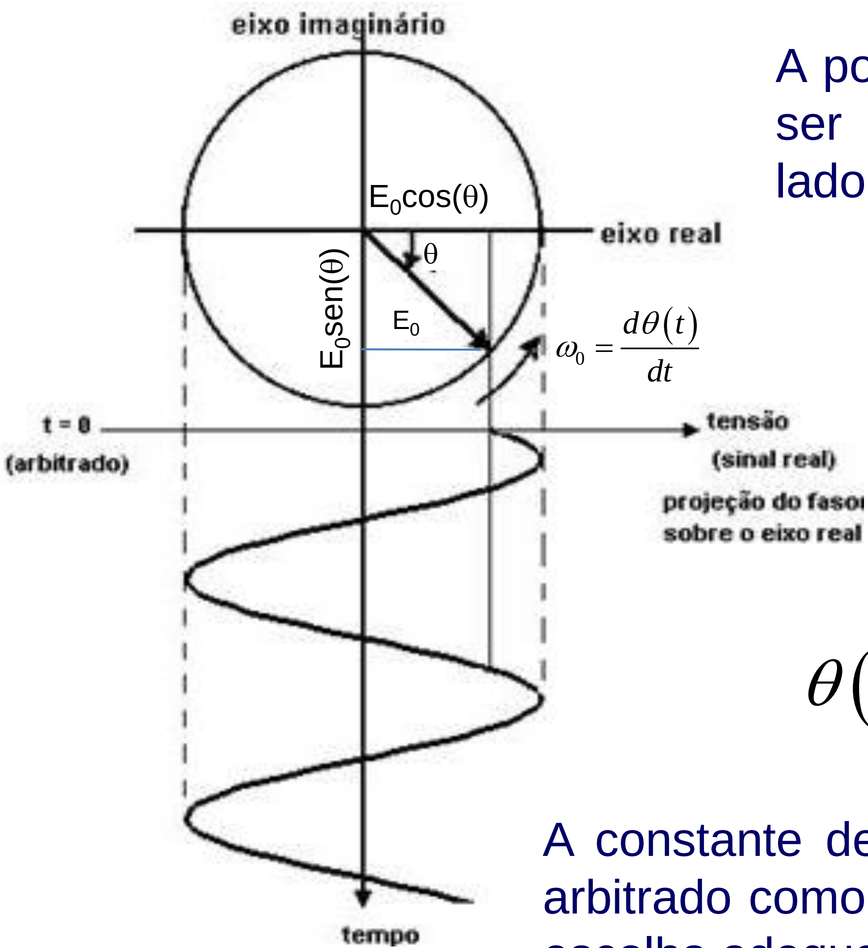
$$p(t) = E_0 \cos\theta(t)$$

Onde

$$\theta(t) = \omega_0(t)$$

é a ***fase instantânea*** da portadora que, como pode ser observado, é uma função linear da ***frequência angular***.

I. Modulação Angular



A portadora não modulada $p(t) = E_0 \cos\theta(t)$ pode ser representada através do diagrama fasorial ao lado, onde

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0$$

é a frequência angular da portadora, que é um valor constante indicando que a rotação é uniforme.

$$\theta(t) = \int \omega_0 dt = \omega_0 t + \phi_0$$ ***fase instantânea***

A constante de integração ***ϕ_0 = θ(0)*** é o ângulo no instante arbitrado como origem ***t* = *0***. Pode-se fazer ***ϕ_0*** **= 0** através da escolha adequada da origem.

Fica evidente que há uma relação direta entre frequência e fase.

I. Modulação Angular

Quando a portadora é modulada em ângulo, o sinal na saída do modulador é:

$$y(t) = E_0 \cos\left[\theta(t)\right] = E_0 \cos\left[\omega_0 t + \phi(t)\right]$$ **Sinal modulado**

Onde $\theta(t) = \omega_0 t + \phi(t)$ é a fase instantânea de ***y(t)*** e ***ϕ(t)*** é o **desvio instantâneo de fase.**

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_i(t)$$

Onde ***ω_i(t)*** é a **frequência angular instantânea** do sinal modulado ***y(t)***. Observe que a frequência angular do sinal modulado é uma função do tempo indicando rotação fasorial não uniforme.

A ***frequência instantânea*** em Hertz do sinal modulado é:

$$f_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{2\pi} = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

I. Modulação Angular

$$f_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{2\pi} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Frequência da portadora}}}{f_0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}}$$

Frequência da portadora

Frequência variante no tempo imposta pelo sinal x(t) em torno da frequência da portadora

É chamado de **índice de modulação angular** o valor absoluto máximo do desvio instantâneo de fase

$$\beta = \left|\phi(t)\right|_{\max}$$

$\boldsymbol{\beta}$ é medido em radianos.

É definido como **desvio de frequência** o valor absoluto máximo do afastamento da frequência instantânea em relação à frequência central ***(f₀)***.

$$\Delta f = \left|f_i(t) - f_0\right|_{\max} = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\phi(t)}{dt}\right|_{\max}$$

II. Tipos de Modulação Angular

a. Modulação de Fase – PM (*Phase Modulation*)

Ocorre quando a informação do sinal **x(t)** é impressa no ***desvio instantâneo de fase***.

$$\phi(t) = k_P x(t)$$

k_P (rad/V) é a **constante de modulação de fase** ou **sensibilidade** do modulador PM.

O sinal na saída do modulador PM é descrito por:

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + k_P x(t)\right]$$

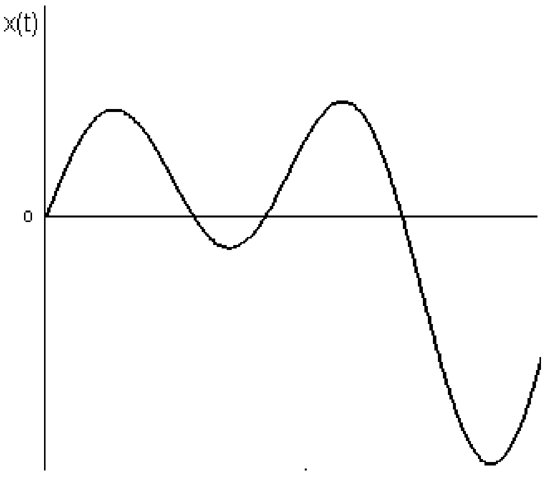
A frequência instantânea do sinal modulado em fase é:

$$f_i(t) = f_0 + \frac{k_P}{2\pi}\frac{d}{dt}x(t)$$

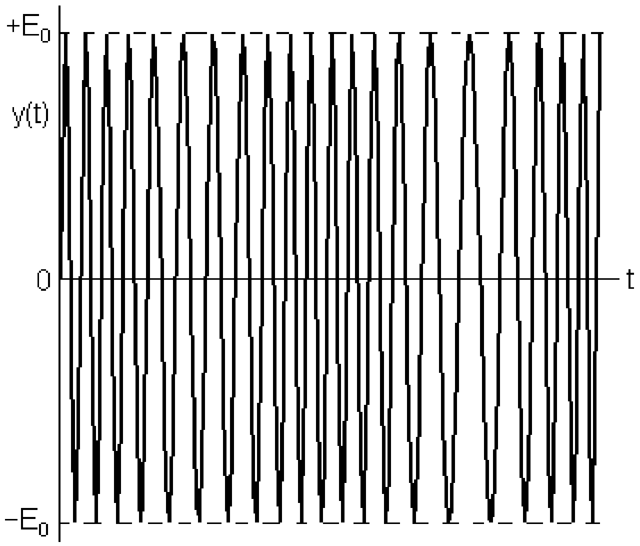
Ao se modular em fase se está também modulando a frequência com a derivada do sinal modulador

II. Tipos de Modulação Angular

a. Modulação de Fase – PM (*Phase Modulation*)



sinal modulador



sinal PM
frequência instantânea proporcional à derivada de x(t)

Desvio instantâneo de fase $\phi(t) = k_P x(t)$

Frequência instantânea: $f_i(t) = f_0 + \frac{k_P}{2\pi}\frac{d}{dt}x(t)$

II. Tipos de Modulação Angular

b. Modulação de Frequência – FM (*Frequency Modulation*)

Ocorre quando a informação do sinal **x(t)** é impressa na ***frequência instantânea***.

$$f_i(t) = f_0 + k_F x(t)$$

k_F (Hz/V) é a **constante de modulação de frequência** ou **sensibilidade** do modulador FM.

A frequência instantânea é escrita na forma geral como:

$$f_i(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Comparando as duas equações temos:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt} = k_F x(t)$$

$$\phi(t) = 2\pi k_F \int x(t)$$

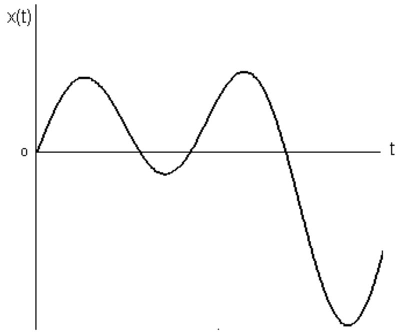
II. Tipos de Modulação Angular

b. Modulação de Frequência – FM (*Frequency Modulation*)

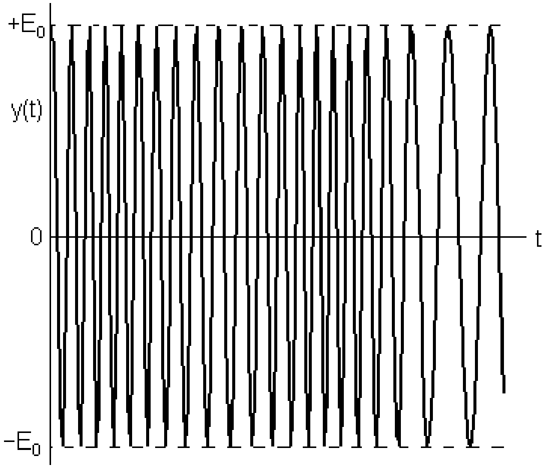
O sinal na saída do modulador FM é descrito por:

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi k_F \int x(t)\,dt\right]$$

Ao se modular em frequência se está também modulando a fase com a integral do sinal modulador.



sinal modulador



sinal FM
frequência instantânea proporcional a x(t)

Frequência instantânea: $f_i(t) = f_0 + k_F x(t)$

Desvio instantâneo de fase $\phi(t) = 2\pi k_F \int x(t)dt$

II. Tipos de Modulação Angular

Comparação entre PM e FM – Atividade Extra Classe

Considerando um sinal modulador senoidal **x(t) = Acos(2πf$_m$t)**, tem-se os seguintes parâmetros das modulações PM e FM.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	PM	FM
Desvio instantâneo de fase	$\phi(t)$	rad	$k_P A\cos\left(2\pi f_m t\right)$	$\dfrac{k_F A}{f_m} sen\left(2\pi f_m t\right)$
Índice de modulação angular	β	rad	$k_P A$	$\dfrac{k_F A}{f_m}$
Frequência instantânea	$f_i(t)$	Hz	$f_0 - k_P A f_m sen\left(2\pi f_m t\right)$	$f_0 + k_F A\cos\left(2\pi f_m t\right)$
Desvio de frequência	Δf	Hz	$k_P A f_m$	$k_F A$
Sinal modulado	y(t)	V	$E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta\cos\left(2\pi f_m t\right)\right]$	$E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$

Tanto para PM quanto para FM vale a relação: $\Delta f = \beta f_m$

II. Tipos de Modulação Angular

Desvios e Excursões – Atividade Síncrono com Matlab

Em ambas as modulações angulares a informação a ser transmitida é impressa através de desvios em torno do valor nominal dos parâmetros de frequência e fase da portadora não modulada.

Os **desvios instantâneos** de **fase** e **frequência** são conhecidos no domínio do tempo e é conveniente entendermos o seu significado no domínio da frequência.

$$\left.\begin{aligned} f_i(t) &= f_0 + k_F x(t) \\ \phi(t) &= 2\pi k_F \int x(t)\,dt \end{aligned}\right\} \text{Modulação FM}$$

$$\left.\begin{aligned} \phi(t) &= k_P x(t) \\ f_i(t) &= f_0 + \frac{k_P}{2\pi}\frac{d}{dt}x(t) \end{aligned}\right\} \text{Modulação PM}$$

II. Tipos de Modulação Angular

Desvios e Excursões – Atividade Síncrono com Matlab

Os desvios em frequência e em fase deformam a portadora senoidal e em consequência o sinal modulado não pode ser representado por uma simples raia no domínio da frequência.

Tomemos como exemplo um sinal modulado em **FM** por um sinal senoidal.

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

$$\beta = \frac{k_F A}{f_m} \qquad \Delta f = k_F A \qquad f_i(t) = f_0 + k_F x(t)$$

Um aumento de **amplitude** do sinal modulador aumenta a frequência instantânea, o que **“comprime”** o sinal modulado – aumenta a largura de banda. Uma diminuição de amplitude do sinal modulador diminui o desvio de frequência, o que “expande” o sinal modulado – diminui a largura de banda

III. Potência de Sinais Modulados em Ângulo

Na modulação angular a amplitude é mantida constante e, como a potência é função da amplitude, a mesma é constante o tempo todo.

A potência média normalizada do sinal modulado em ângulo **y(t) = E_0cos[θ(t)]** é:

$$P_{mn} = \overline{y^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E_0^2 \cos^2\left[\theta(t)\right] dt$$

Aplicando a identidade trigonométrica,

$$E_0^2 \cos^2\left[\theta(t)\right] = \frac{E_0^2 + E_0^2 \cos\left[2\theta(t)\right]}{2}$$

$$P_{mn} = \frac{E_0^{\ 2}}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt + \frac{E_0^{\ 2}}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos\left[2\theta(t)\right] dt$$

Este limite é nulo

III. Potência de Sinais Modulados em Ângulo

$$P_{mn} = \frac{E_0^2}{2}$$ **Potência total dissipada**

A potência total do sinal modulado em ângulo **NÃO** depende do sinal modulador e é igual à potência da portadora não modulada.

***Na modulação angular a potência total permanece inalterada. Então, ao se produzirem raias espectrais, a potência associada às mesmas só pode ser produzida às custas da potência associada à portadora*.**

IV. Espectro de Sinais Modulados em Ângulo

Diferentemente da modulação **AM**, a modulação em ângulo é um processo não linear (dão origem a outras frequências), o que complica a análise espectral do sinal modulado. Porém, conseguimos entender bem o comportamento espectral do sinal modulado em ângulo se considerarmos que o sinal modulador é um único tom senoidal.

Como já foi demonstrado **FM** e **PM** se relacionam estreitamente entre si, se conhecermos as propriedades de uma, poderemos determinar as da outra. Mas, devido ao fato da modulação **FM** ser a modulação utilizada em sistemas de radiodifusão **FM** e na modulação do som dos sistemas públicos de TV ela foi escolhida para a análise do comportamento espectral. O sinal modulado **FM** por uma onda senoidal **$x(t) = A\cos(2\pi f_m t)$,** é:

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

Onde: $\beta = \dfrac{k_F A}{f_m}$ é o índice de modulação angular **FM**

IV. Espectro de Sinais Modulados em Ângulo

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta sen(2\pi f_m t)\right]$$

A composição do espectro do sinal modulado depende do índice de modulação angular podendo-se distinguir duas situações: **Sistema de Faixa Estreita** e **Sistema de Faixa Larga**.

Sistema de Faixa Estreita

Desenvolvendo o cosseno da soma de dois ângulos temos:

$$y(t) = E_0 \cos(2\pi f_0 t)\cos\left[\beta sen(2\pi f_m t)\right] - E_0 sen(2\pi f_0 t) sen\left[\beta sen(2\pi f_m t)\right]$$

Para $\boldsymbol{\beta}$ suficientemente pequeno ($\beta \leq$ 0,2 rad) são válidas as aproximações:

$$\cos\left[\beta sen(2\pi f_m t)\right] \cong 1$$

$$sen\left[\beta sen(2\pi f_m t)\right] \cong \beta sen(2\pi f_m t)$$

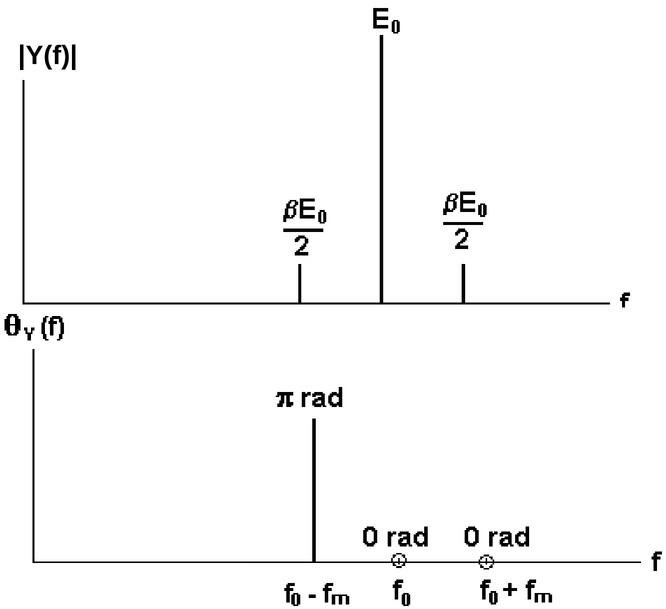
IV. Espectro de Sinais Modulados em Ângulo

Sistema de Faixa Estreita

Incorporando as aproximações de β no sinal **y(t)** têm-se:

$$y(t) \cong E_0 \cos(2\pi f_0 t) - \frac{\beta E_0}{2}\cos[2\pi(f_0 - f_m)t] + \frac{\beta E_0}{2}\cos[2\pi(f_0 + f_m)t]$$

Podemos observar três raias espectrais no sinal modulado com baixo índice de modulação angular ($\beta \leq 0{,}2$): a portadora (***f_0***), uma raia lateral inferior (***$f_0 - f_m$***) e uma raia lateral superior (***$f_0 + f_m$***).



O espectro de amplitude do sinal modulado em ângulo de faixa estreita é semelhante ao do sinal modulado **AM-DSB/TC**. Porém o espectro de fase é diferente, pois:

$$-\frac{\beta E_0}{2}\cos\left[2\pi\left(f_0 - f_m\right)t\right] = \frac{\beta E_0}{2}\cos\left[2\pi\left(f_0 - f_m\right)t + \pi\right]$$

A banda ocupada pelo sinal modulado é *B = 2f$_m$*

IV. Espectro de Sinais Modulados em Ângulo

Sistema de Faixa Larga

Para β **> 0,2** rad as aproximações anteriores não são válidas. A determinação do espectro depende de um desenvolvimento matemático mais elaborado.

O sinal modulado na saída de um modulador **FM** é:

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

$$y(t) = E_0 \cos\left(2\pi f_0 t\right)\cos\left[\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right] - E_0 sen\left(2\pi f_0 t\right) sen\left[\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

Podemos reescrever **y(t)** da seguinte forma:

$$y(t) = \Re\left\{E_0 \exp\left(j2\pi f_0 t\right)\exp\left[j\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]\right\}$$

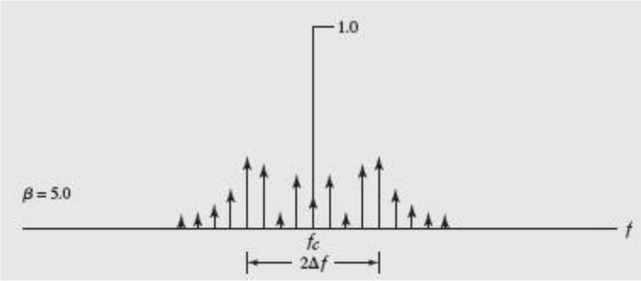
Análise matemática complexa baseada em função de Bessel...

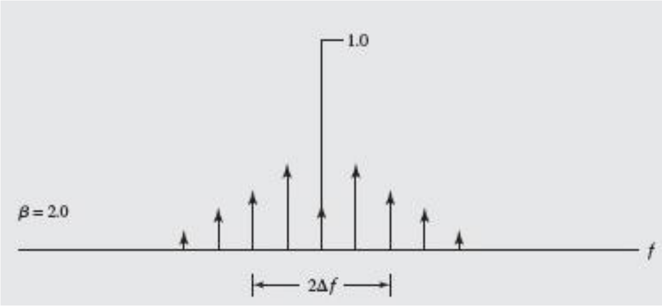
V. Largura de Banda de Sinais Modulados em Ângulo

A largura de banda de um sistema de **banda estreita ($\beta \leq 0,2$)** modulado por um sinal senoidal com frequência **f_m** é aproximadamente **B = 2fm**.

Teoricamente, se o sistema for de **banda larga**, a largura de banda do espectro tende a “infinito”. Na prática, entretanto, pode-se determinar um **espectro significativo,** onde as raias que se encontrarem fora deste espectro não provocarão distorção significativa da informação. A banda do espectro significativo pode ser determinada utilizando vários critérios, porém o mais utilizado é uma relação empírica conhecida como ***Critério de Carson***.

Se observarmos o espectro de um sinal modulado em **FM** por um sinal **modulador senoidal**, veremos que as raias laterais ocupam uma banda maior do que **$2\Delta f$** e decrescem rapidamente na direção de zero, de forma que a largura de banda sempre ultrapassa a excursão de frequência total. Especificamente, para valores elevados de β, pode-se afirmar que a largura de banda do espectro é ligeiramente maior do que **$2\Delta f$.**





V. Largura de Banda de Sinais Modulados em Ângulo

Dessa forma, podemos definir uma regra **aproximada** para a **largura de banda significativa** de um sinal **FM** gerado por um sinal modulador senoidal de frequência f_m, da seguinte maneira:

$$B = 2\Delta f + 2 f_m$$

Conhecido como **critério de Carson**. O critério de Carson pode ser extendido para modulação **FM** e **PM** com sinais moduladores não senoidais com amplitude máxima A_{max} e frequência máxima f_{max}, como por exemplo, sinais de áudio.

$$B = 2\left(\Delta f_{\max} + f_{\max}\right) = \begin{cases} 2\left(k_F A_{\max} + f_{\max}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{\textit{para FM}} \\ 2 f_{\max}\left(k_P A_{\max} + 1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{\textit{para PM}} \end{cases}$$

A equação acima é chamada de **critério de Carson Extendido**:

V. Largura de Banda de Sinais Modulados em Ângulo

Exemplo: O sistema de radiodifusão sonora FM tem portadoras com frequências na faixa de 87,9 a 107,9 MHz e sinal modulador de áudio com componentes espectrais de 50 Hz a 15 kHz. O desvio de frequência máximo arbitrado para este sistema é 75kHz. Utilizando o critério de Carson extendido tem-se:

$$B = 2\left(\Delta f + f_{\max}\right) = 2\left(75 + 15\right) kHz = 180 kHz$$

Na prática a largura de banda alocada para cada transmissor de FM é de 200kHz, pois é deixada uma margem de segurança para a transição dos filtros.

Exercícios – Atividade Assíncrona

Exercício: Uma portadora $E_0\cos(2\pi f_0 t)$, com f_0= 10MHz e E_0=10V, é modulada em frequência por um sinal $x(t)=A\cos(2\pi f_m t)$, com f_m = 10KHz e o índice de modulação angular é β =2,0 rad.

a) Qual é o desvio de frequência do sinal modulado?
b) Quais são os valores máximo e mínimo da frequência instantânea do sinal FM?
c) Qual é a expressão matemática que representa o sinal FM?
d) Represente graficamente o espectro de amplitude do sinal FM, indicando valores.
e) Qual a potência total dissipada pelo sinal y(t) e qual porcentagem desta potência está contida dentro da banda limitada pelo critério de Carson?
f) Mantendo-se constante a amplitude do sinal modulador e a constante de modulação k_F, altera-se a sua frequência para 20kHz. Represente o espectro de amplitude do novo sinal FM, nessa condição. O que ocorre com o máximo desvio em frequência? Qual a potência contida dentro da banda limitada pelo critério de Carson?