UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Elétrica

Princípios de Comunicações

Analise de Sinais: Da revisão ao Teorema de Modulação

Semestre Letivo 2020/1

Prof.: Jair A. Lima Silva

PPGEE/DEL/UFES

Índice

I. Transformada de Fourier

a. Definição

b. Propriedades

I. Transformada de Fourier

- A série de Fourier se aplica a sinais Periódicos que são **sinais de potencia**.

- A necessidade de analisarmos tanto sinais de potência quanto sinais de energia requer a adoção de uma ferramenta mais poderosa.

✓ Esta ferramenta é a Transformada de Fourier

I. Transformada de Fourier

a. Definição

- Da série de Fourier de um sinal Periódico de frequência fundamental $\Delta_f = f_0 = 1/T_0$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jnwt}, \qquad C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-jnwt} dt$$

- Substituindo C_n em $x(t)$ teremos:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau) e^{-jnw\tau} d\tau \right] \cdot e^{jnwt}$$

I. Transformada de Fourier

a. Definição

- Sabendo que $w = 2\pi f_0 = 2\pi\Delta_f$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\Delta_f \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau)e^{-j2\pi n\Delta_f \tau}\, d\tau\right]\cdot e^{j2\pi n\Delta_f t}$$

- Se aproximarmos T_0 para infinito, o sinal periódico transforma-se em um **sinal aperiódico**.

- Δ_f transforma-se no diferencial d_f e $n\Delta_f$ uma variável contínua em f.

I. Transformada de Fourier

a. Definição

- Logo,

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Delta_f \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi n \Delta_f \tau} d\tau \right] \cdot e^{j2\pi n \Delta_f t} \right\}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right] e^{j2\pi f t} df$$

$$\boxed{F\{x(t)\}}$$

I. Transformada de Fourier

a. Definição

- **Relação Biunívoca**

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt$$

Transformada de Fourier

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[X(f)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft}\, df$$

Transformada Inversa de Fourier

I. Transformada de Fourier

- Considerações,…

✓ O sinal original está no domínio do tempo (argumento tempo)

✓ A representação da transformada de Fourier está no domínio da frequência (argumento frequência)

✓ A transformada de Fourier é chamada de **equação de análise** de $x(t)$ já que extrai as componentes de $X(f)$ em cada valor de f

✓ A transformada inversa é chamada de **equação de síntese** já que recombinas as componentes de $X(f)$ para obter $x(t)$.

✓ Se a unidade de $x(t)$ for Volts, a de $X(f)$ é Volts/Hz

I. Transformada de Fourier

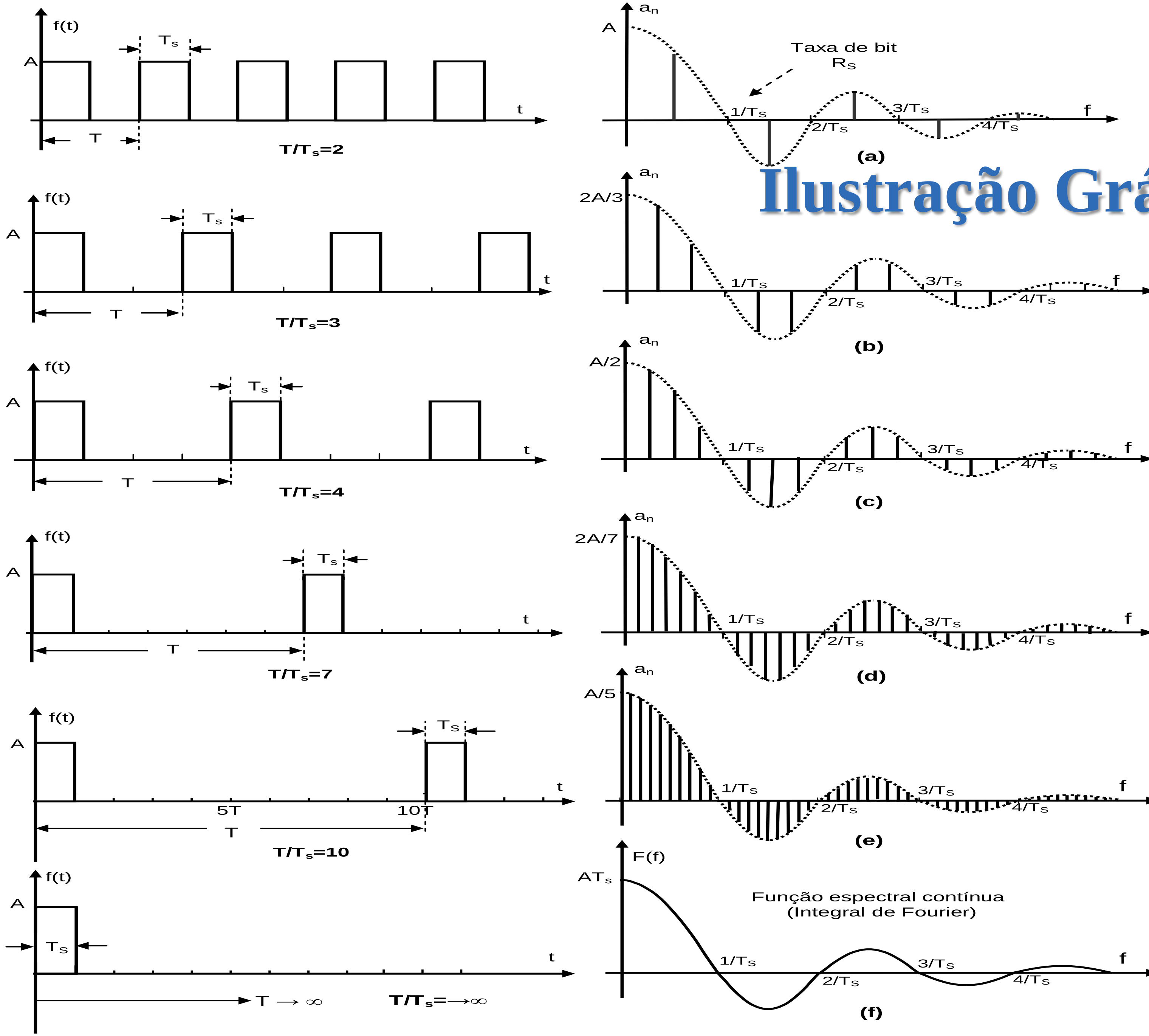
- **Exercícios**

1. Encontre a expressão da transformada de Fourier das funções:

$$x_1(t) = rect\left(\frac{t}{T_0}\right) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = u(t) \cdot e^{-at} = \begin{cases} e^{-at}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

2. Faça gráficos ilustrativos das formas de onda no tempo e da característica de amplitude.

Ilustração Gráfica



LAbTel

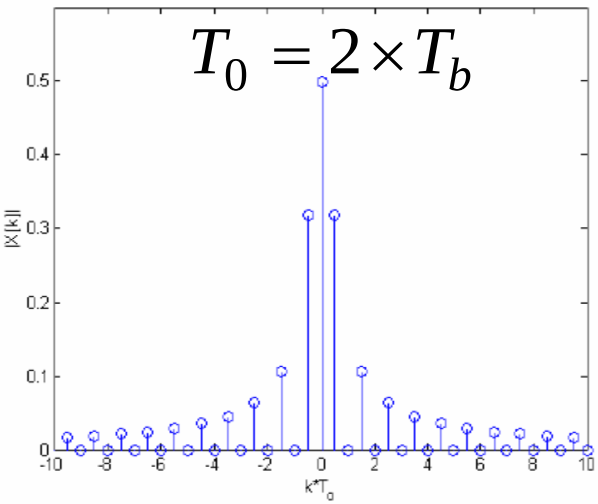
I. Transformada de Fourier

Definição Gráfica – Matlab (TPC)

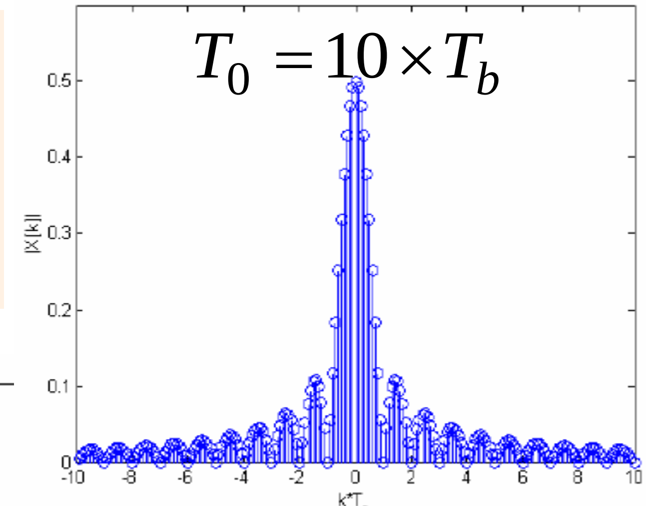
$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

$$X(f) = T_0 \cdot \mathrm{sinc}(ft)$$

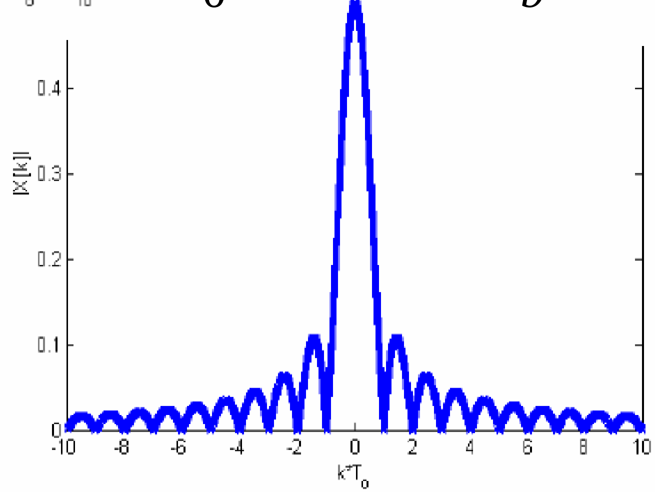
$T_0 = 2 \times T_b$



$T_0 = 10 \times T_b$



$T_0 = 1000 \times T_b$



I. Transformada de Fourier

- A Transformada de Fourier é uma função complexa da frequência:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\sin(2\pi ft)dt = A(f)\cdot e^{j\theta(f)}$$

- O módulo representa o espectro de amplitude do sinal
- A fase representa o espectro de fase do sinal
- Tais <u>Espectros são Contínuos</u> para <u>sinais não-Periódicos</u>.

I. Transformada de Fourier

- Da equação abaixo conclui-se que:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\sin(2\pi ft)dt = A(f)\cdot e^{j\theta(f)}$$

- O complexo conjugado de $X(f)$ é $X^{*}(f) = X(-f)$
- O módulo $A(f)$ é uma função **par** da frequência e a fase $\theta(f)$ é uma função **ímpar** da frequência

I. Transformada de Fourier

- **Exemplo: Considere um pulso retangular com tensão $A = 1V$ e largura $T_s = 10\mu s$. Considere esta função básica das comunicações digitais com sendo uma função par no tempo.**

  a) Desenhe a forma de onda no tempo

  b) Determine a transformada de Fourier do sinal

  c) Esboce os espectros de amplitude do resultado obtido em b).

b. Propriedades

Property	
Conjugation	$x^*(t) \rightleftharpoons X^*(-f)$
Linearity	$\alpha x(t)+\beta y(t) \rightleftharpoons \alpha X(f)+\beta Y(f)$
Time-shifting	$x(t-t_o) \rightleftharpoons e^{-j2\pi f t_o} X(f)$
Frequency-shifting	$e^{j2\pi f_o t} x(t) \rightleftharpoons X(f-f_o)$
Time reversal	$x(-t) \rightleftharpoons X(-f)$
Time-differentiation	$\frac{d}{dt}\{x(t)\} \rightleftharpoons (j2\pi f) X(f)$
Time-integration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{*}{\rightleftharpoons} \frac{1}{j2\pi f} X(f)$ *If X(0) = 0
Time/freq-scaling	$x(at) \rightleftharpoons \frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
Multiplication	$x(t)y(t) \rightleftharpoons X(f) * Y(f)$
Convolution	$x(t) * y(t) \rightleftharpoons X(f)Y(f)$

Especial Interesse

b. Propriedades - *Linearidade*

Se $z(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t)$

$$\Rightarrow Z(f) = \mathscr{F}[z(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\Rightarrow Z(f) = \alpha \cdot X(f) + \beta \cdot Y(f)$$

$$\alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t) \leftrightarrow \alpha \cdot X(f) + \beta \cdot Y(f)$$

b. Propriedades – *Escalonamento no tempo*

Se $z(t) = x(at)$

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\cdot e^{-j2\pi ft}dt$$

Fazendo $\lambda = at$

$$\Rightarrow Z(f) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\cdot e^{-j2\pi f(\lambda/a)}d\lambda$$

$$\Rightarrow Z(f) = \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$$ ***Compressão na Frequencia***

b. Propriedades – *Diferenciação no tempo*

$$\frac{d}{dt}\{x(t)\} = \frac{d}{dt}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot e^{+j2\pi ft}\,df\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi f\cdot X(f)\cdot e^{+j2\pi ft}\,df$$

$$\frac{d}{dt}\{x(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{j2\pi f\cdot x(t)\}$$

b. Propriedades – *Deslocamento no tempo*

Se $z(t) = x(t - t_0)$

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Fazendo $\tau = t - t_0$

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f(\tau + t_0)} d\tau$$

$$\Rightarrow Z(f) = e^{-j2\pi f \cdot t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$\Rightarrow Z(f) = e^{-j2\pi f \cdot t_0} X(f)$$

Desvio na fase de $-2\pi f t_0$

b. Propriedades – *Deslocamento na Frequência*

$$\text{Se } z(t) = x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi (f - f_0)t} dt$$

$$Z(f) = X(f - f_0)$$

Teorema da Modulação