UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Elétrica

Princípios de Comunicações I

Capítulo 4
Modulação Analógica

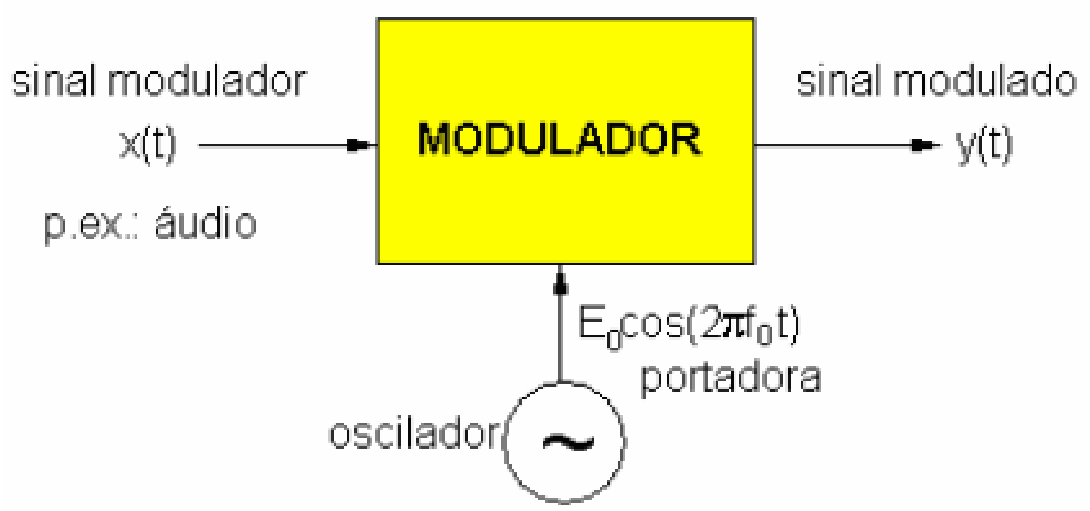
Prof.: Jair A. Lima Silva

UFES, 2012/2

Índice

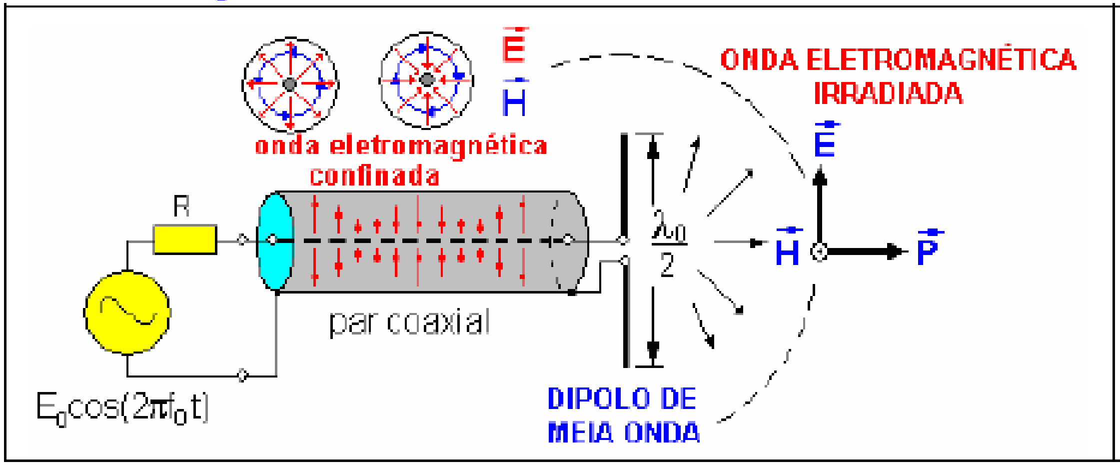
I. Modulação

ALTERAÇÃO de um dos PARÂMETROS de um ***sinal senoidal*** $E_0 \cos(2\pi f_0 t)$ – a ***"ONDA PORTADORA"*** (ou, simplesmente ***"PORTADORA"***) – ***acompanhando*** a variação do ***sinal de informação***



I. Modular para Quê?

IRRADIAÇÃO DE ONDA ELETROMAGNÉTICA



Comprimento de onda:

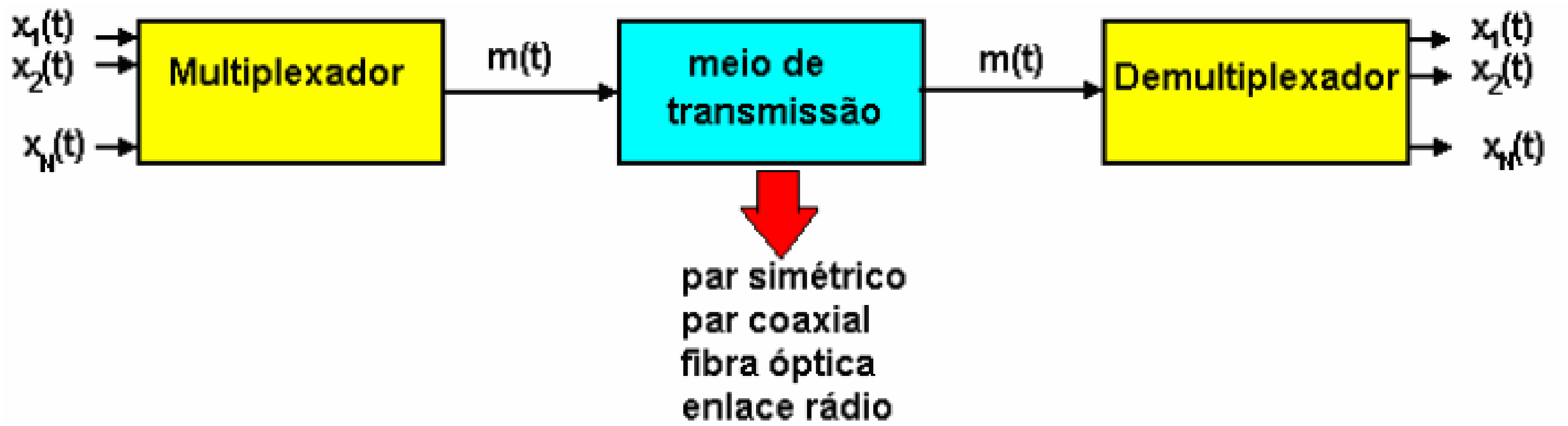
$$\lambda_0 = vT_0 \cong \frac{c}{f_0}$$

(na atmosfera terrestre)

Para ***irradiação eficiente***, o comprimento da antena deve ser da ordem de grandeza de λ_0

I. Modular para Quê?

Multiplexação	**Demultiplexação**
combinação de ***N*** sinais $x_1(t)$, $x_2(t)$,... $x_N(t)$ em um sinal ***único*** $m(t)$, de uma forma que permita sua posterior separação.	separação dos ***N*** sinais $x_1(t)$, $x_2(t)$,... $x_N(t)$ que compõem o sinal multiplexado $m(t)$



I. Modular para Quê?

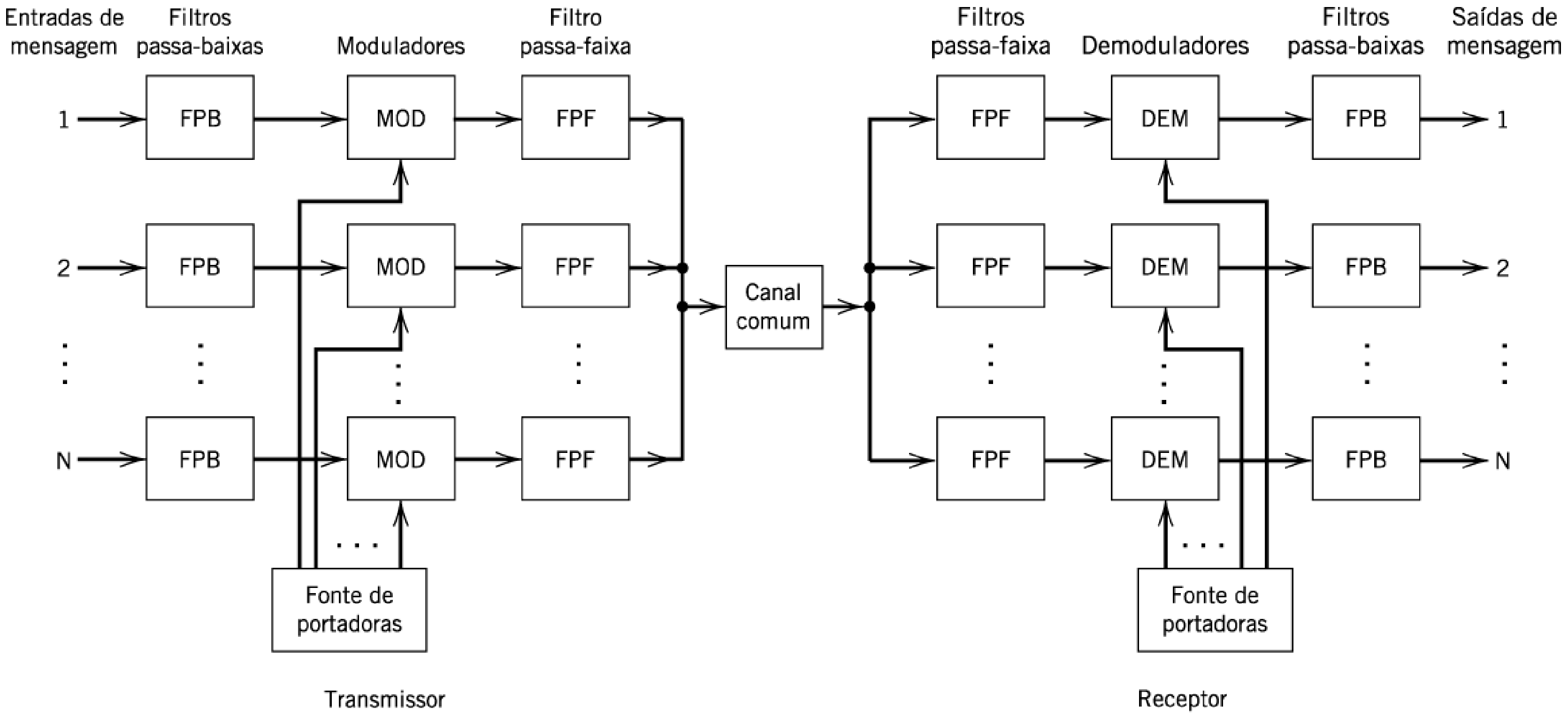


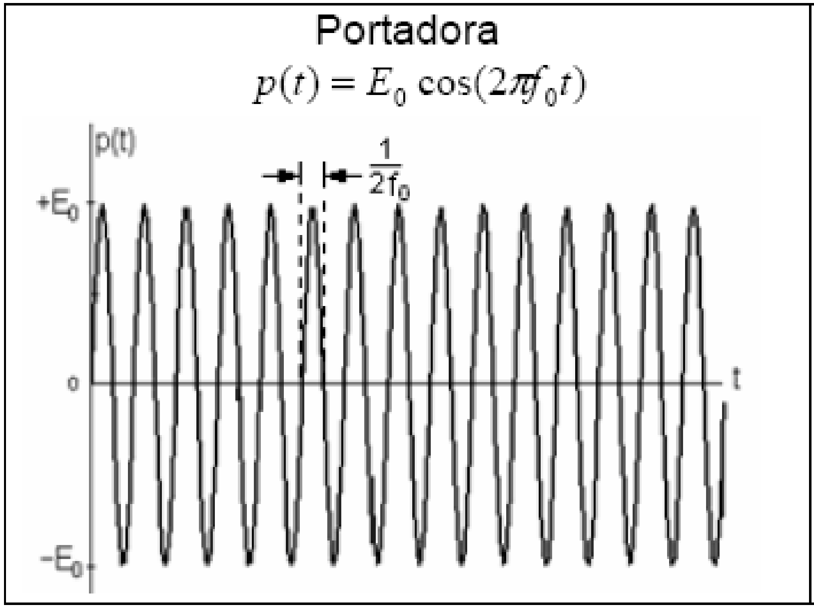
Figura 3.23 Diagrama de blocos do sistema FDM.

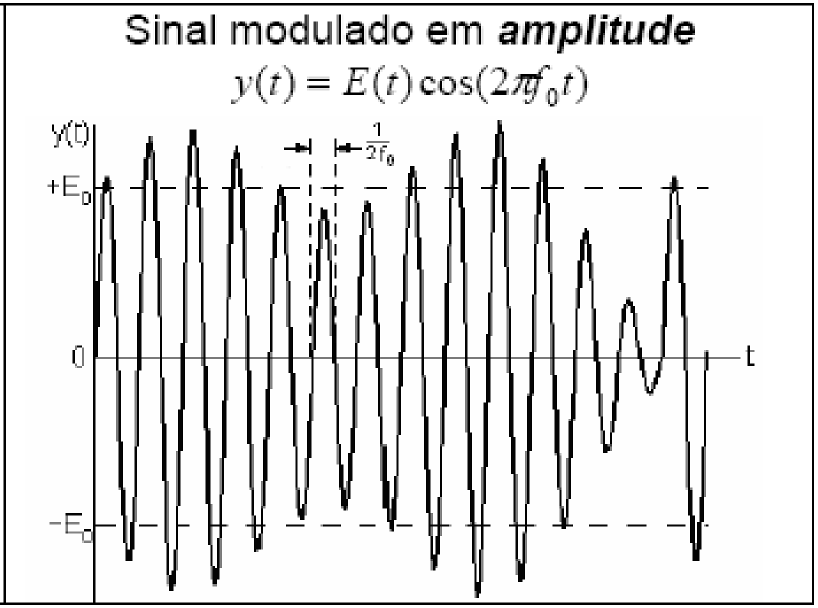
II. Modulação de Amplitude (AM)

MODULAÇÂO DE AMPLITUDE

AMPLITUDE acompanha $x(t) \rightarrow y(t) = E(t)\cos(2\pi f_0 t)$

amplitude **alterada** — ângulo inalterado





II. Modulação de Amplitude

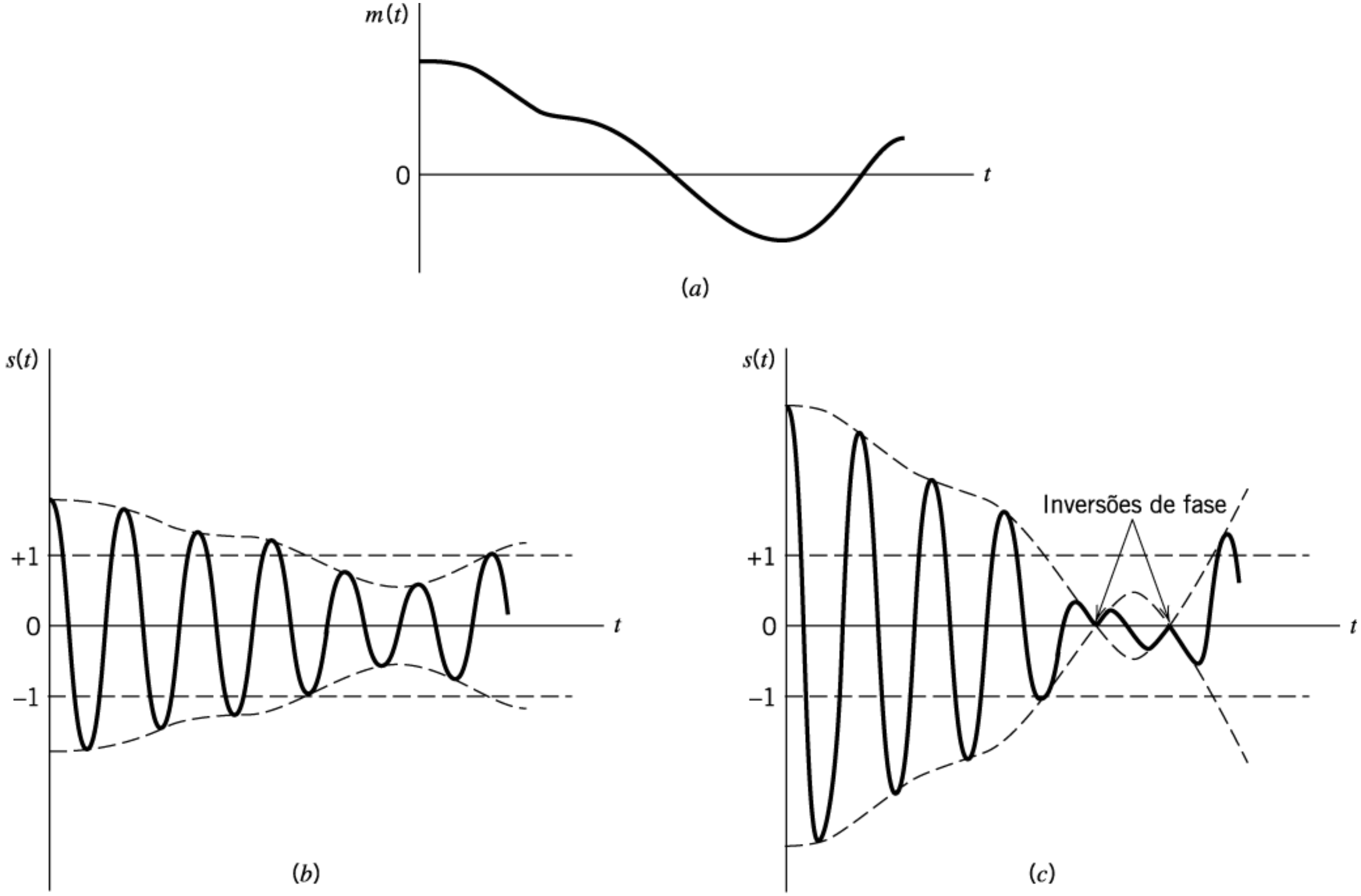


Figura 3.1 Ilustração do processo de modulação em amplitude. (*a*) Sinal de Banda base $m(t)$. (*b*) Onda AM para $|k_a m(t)|<1$ para todo t. (*c*) Onda AM para $|k_a m(t)|>1$ para algum t.

II. Modulação de Amplitude

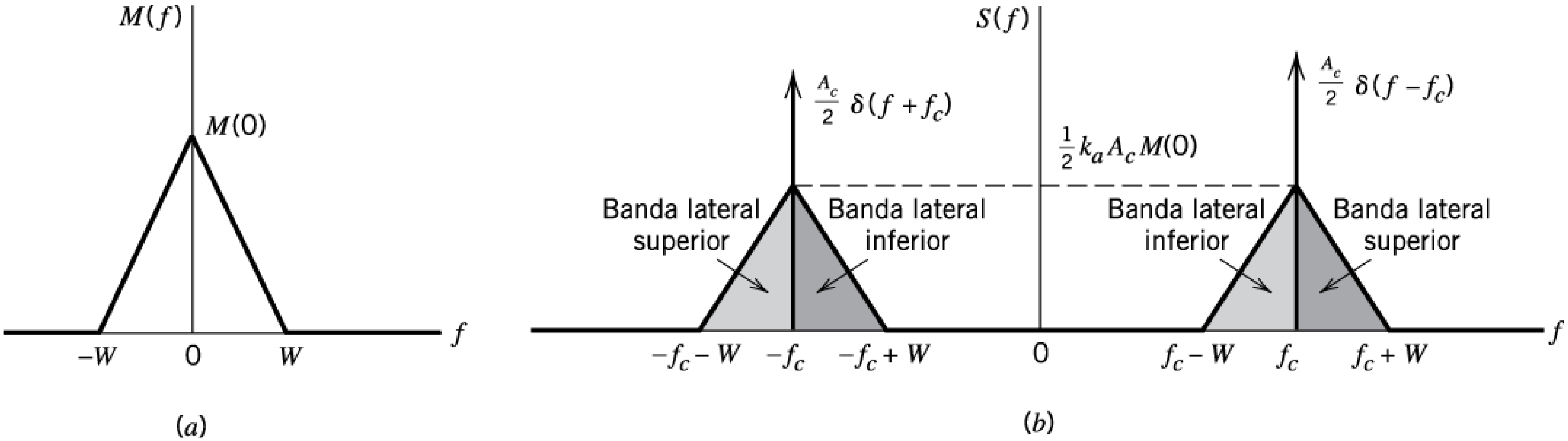


Figura 3.2 (*a*) Espectro do sinal de banda base. (*b*) Espectro da onda AM.

II. Modulação de Amplitude

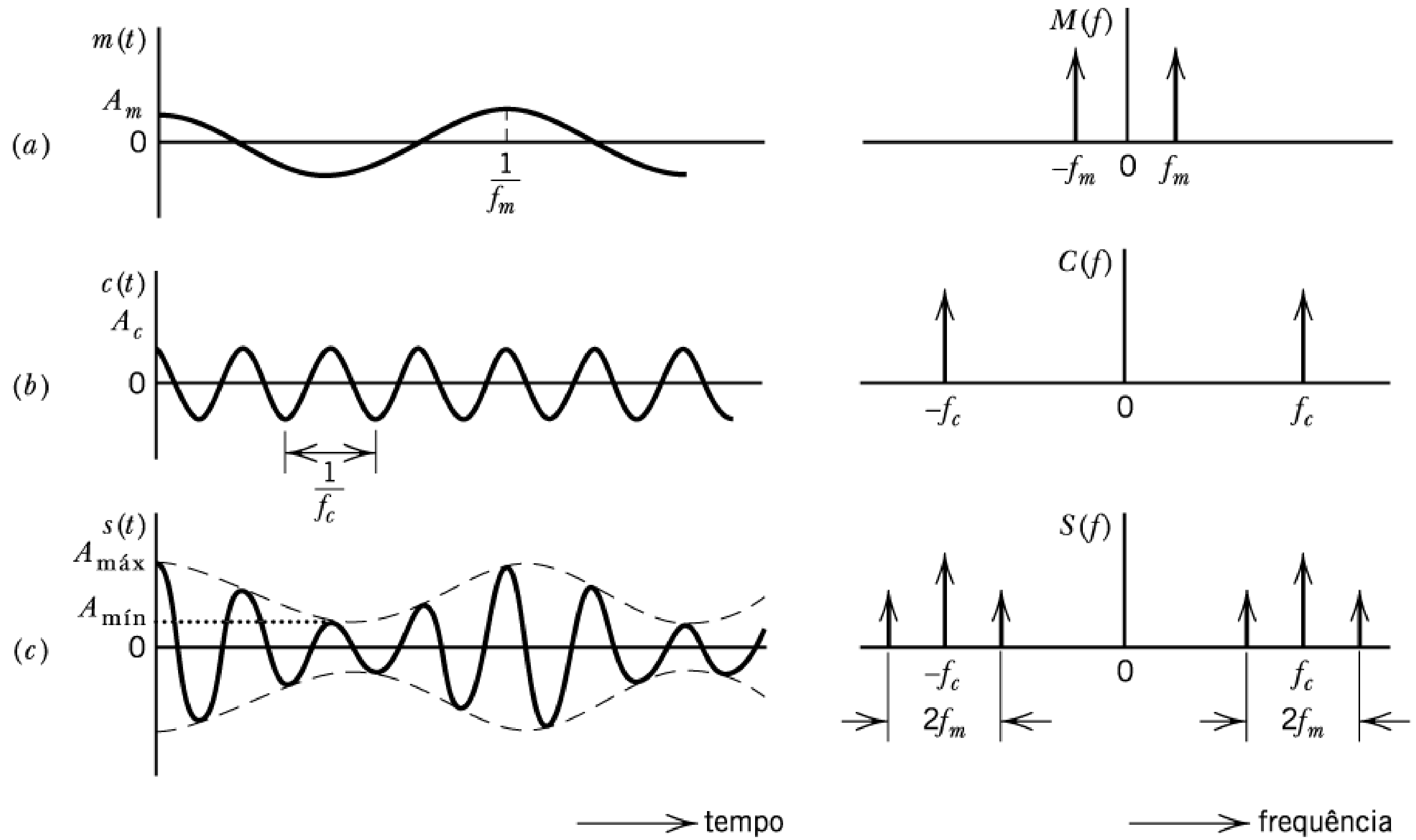


Figura 3.3 Ilustração das características do domínio do tempo (à esquerda) e do domínio da frequência (à direita) para modulações em amplitude padrão produzidas por um tom único. (*a*) Onda modulante. (*b*) Onda portadora. (*c*) Onda AM.

II. Modulação de Amplitude

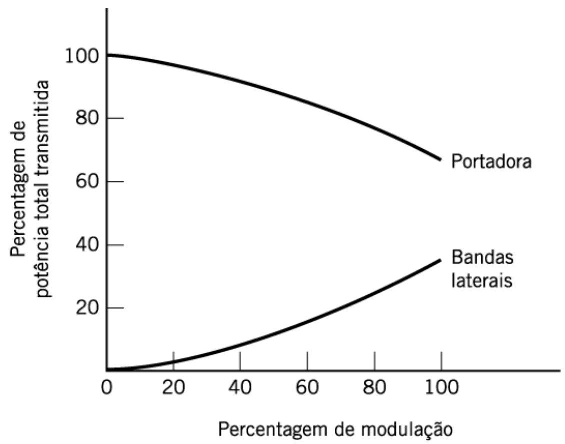


Figura 3.4 Variações na potência da portadora e na potência de banda lateral total em relação à percentagem de modulação.

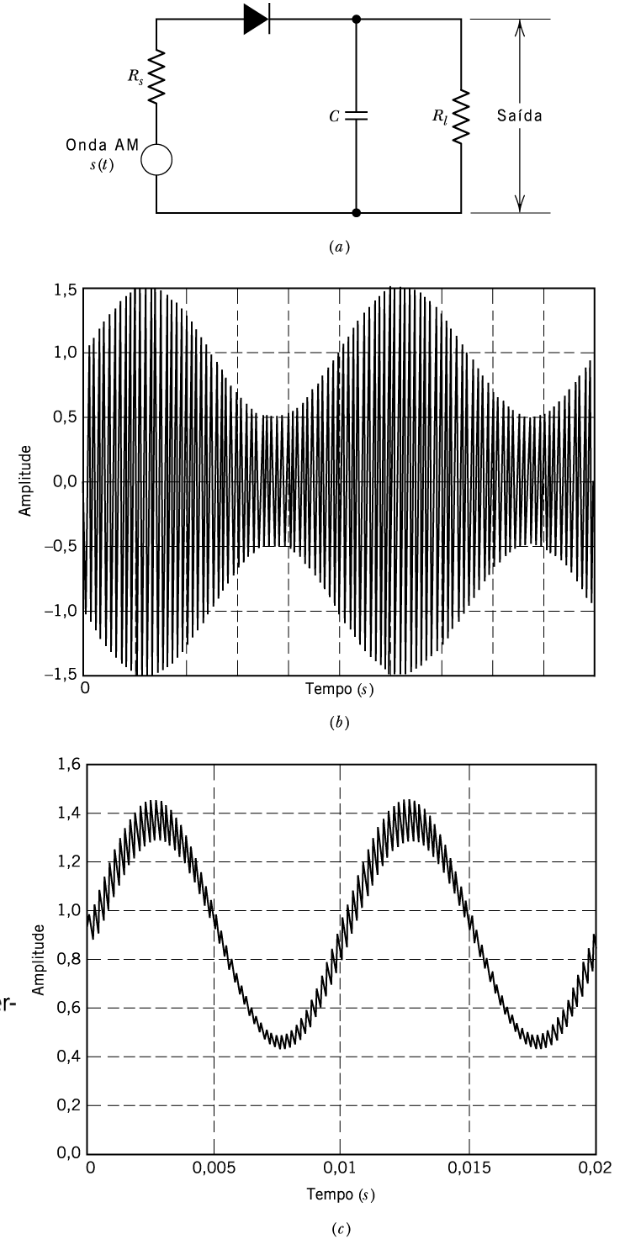


Figura 3.7 Detector de envoltória. (*a*) Diagrama do circuito. (*b*) Onda AM de entrada. (*c*) Saída do detector de envoltória.

II. Modulação de Amplitude

Muitos Sistemas de Comunicação baseiam-se no conceito de modulação em amplitude senoidal, em que um sinal ***c(t)*** tem sua amplitude alterada (modulada) pelo sinal contendo informação ***x(t)***. O sinal ***x(t)*** é tipicamente conhecido como *sinal* ***modulador*** ou ***modulante***, e o sinal ***c(t)*** como ***portadora***. O *sinal modulado* ***y(t)*** é, então, o produto desses dois sinais:

$$y(t) = x(t) \cdot c(t)$$

II. Modulação de Amplitude

O objetivo essencial da modulação em amplitude é deslocar ***x(t)*** para uma faixa de frequência adequada para transmissão pelo canal de comunicação a ser usado. Em sistemas de comunicação, a frequência do sinal ***c(t)*** é muito maior do que a máxima frequência do sinal ***x(t)*** (cerca de 100 vezes maior). Para entendermos o que ocorre no processo de modulação devemos recorrer às propriedades da transformada de Fourier, que conduzem ao ***Teorema da Modulação***.

$$y(t) = x(t) \cdot c(t)$$

a. Teorema da Modulação

A transformada de Fourier de um sinal qualquer ***x(t)*** é obtida por:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

A transformada de Fourier do sinal modulado ***y(t) = x(t)c(t)*** é obtido por:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)c(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

a. Teorema da Modulação

Existem duas formas comuns de modulação de amplitude senoidal:

Uma em que o sinal da portadora ***c(t)*** é uma exponencial complexa

$$c(t) = e^{j\omega_c t}$$

$$c(t) = \cos\omega_c t + jsen\omega_c t$$

E uma em que o sinal da portadora **c(t)** é uma senoidal

$$c(t) = \cos\omega_c t$$

onde $\boldsymbol{\omega_c} = 2\pi f_c$ é a frequência da portadora.

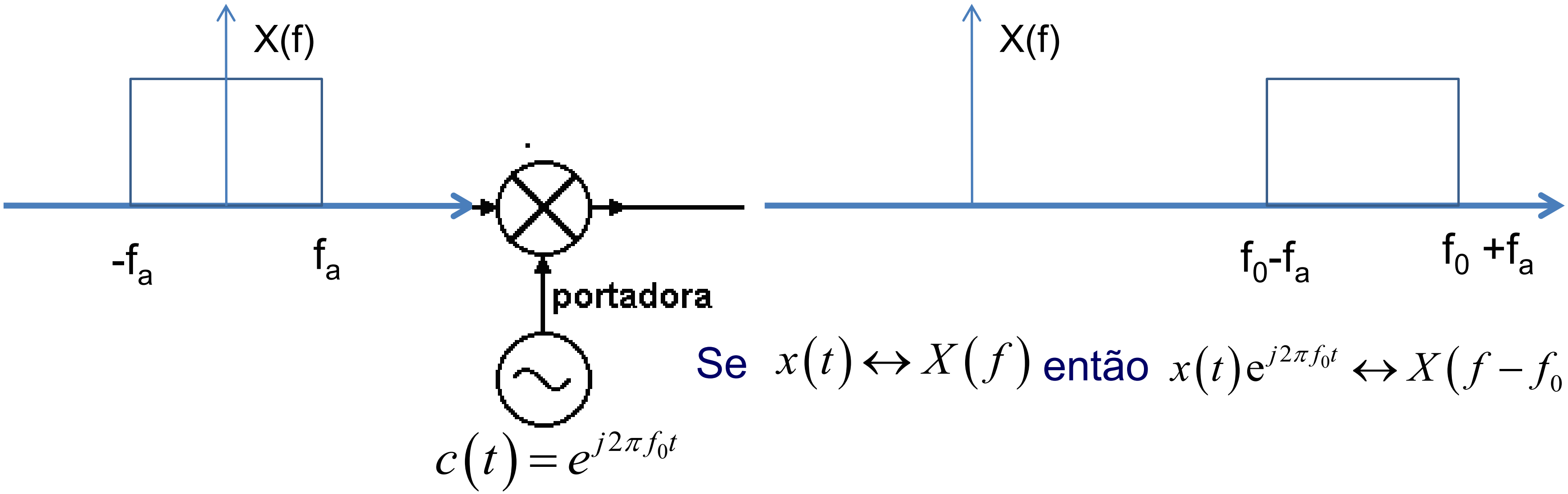
a. Teorema da Modulação

Para a portadora exponencial complexa

$$y(t) = x(t)e^{j\omega_c t}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi f_c t}e^{-j2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi t(f-f_c)}dt = X(f-f_0)$$

Esta é a propriedade do **deslocamento em frequência** em que *Y(f)* é o espectro do sinal *x(t)* deslocado na frequência da portadora $\mathbf{f_0}$.



Se $x(t) \leftrightarrow X(f)$ então $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f-f_0)$

a. Teorema da Modulação

Para uma portadora senoidal

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

Usando o teorema de Euler, podemos escrever *y(t)* por:

$$y(t) = \frac{1}{2}x(t)\exp(j2\pi f_0 t) + \frac{1}{2}x(t)\exp(-j2\pi f_0 t)$$

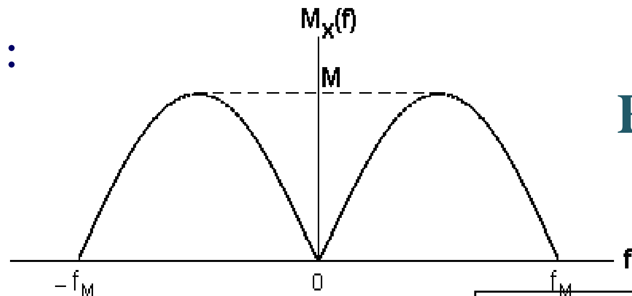
Aplicando a propriedade de deslocamento em frequência da transformada de Fourier ao sinal ***y(t)***, obtemos.

$$\boxed{Y(f) = \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)}$$

Nessa condição, o espectro de amplitude de **y(t)** corresponde ao espectro de amplitude de **x(t)** multiplicado por ½ e deslocado para a frequência positiva $+f_0$ e para a frequência negativa $-f_0$.

a. Teorema da Modulação

Considere :

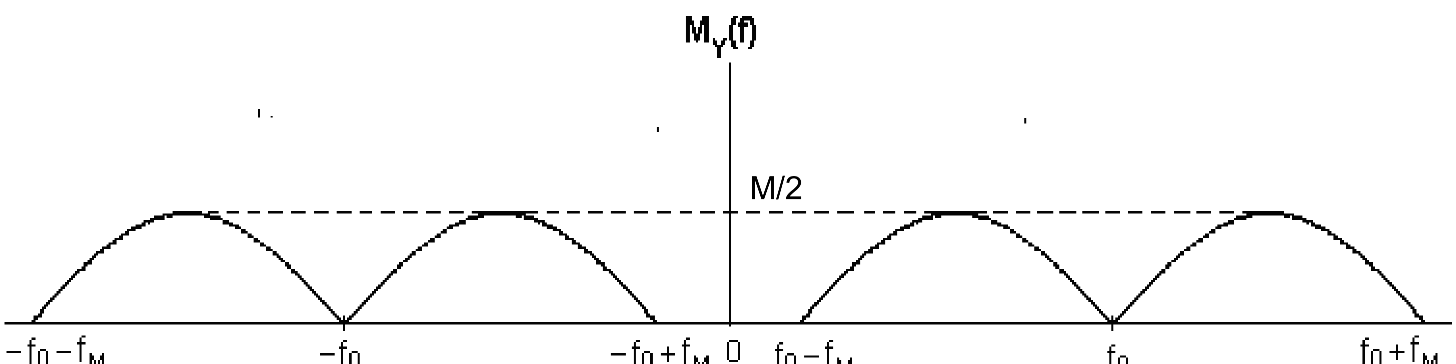


Espectro de amplitude de x(t)

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$|f_0| > |f_M|$ para que não ocorra sobreposição dos lóbulos.

O espectro de frequência do sinal y(t) é dado por:



Espectro de amplitude de y(t)

a. Teorema da Modulação

Portadora Complexa *versus* Portadora Senoidal

Portadora complexa

- f_0 pode ter qualquer valor;
- Não são gerados lóbulos extras;
- O bloco modulador é complexo e mais caro.

Portadora senoidal

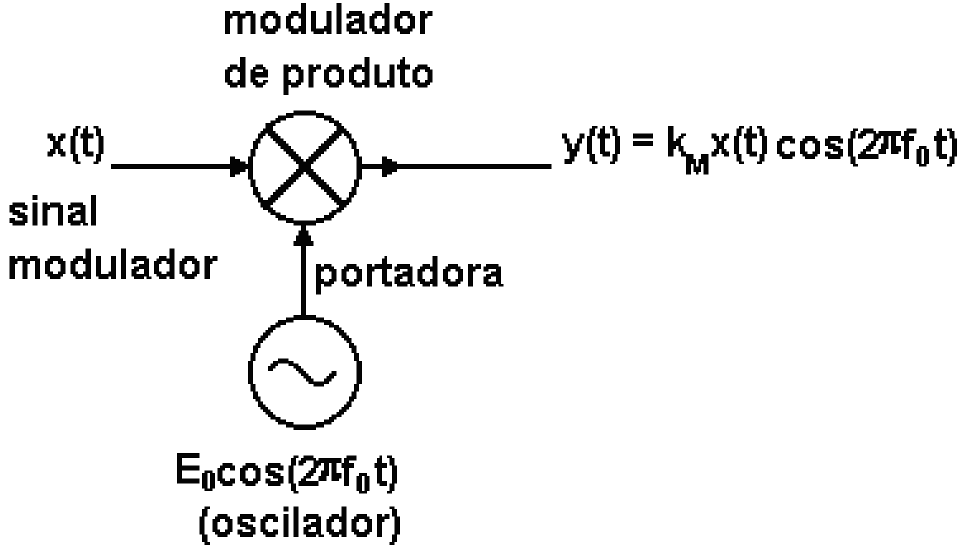
- f_0 deve ser maior do que a maior frequência de ***x(t)***, caso contrário ocorre sobreposição dos lóbulos e erro de demodulação;
- Há geração de um lóbulo extra – a banda ocupada é duplicada;
- O bloco modulador é mais simples de ser implementado.

b. Modulador de Produto

O modulador de produto é o circuito físico que recebendo como entradas a portadora e o sinal de informação, produz o sinal elétrico de saída:

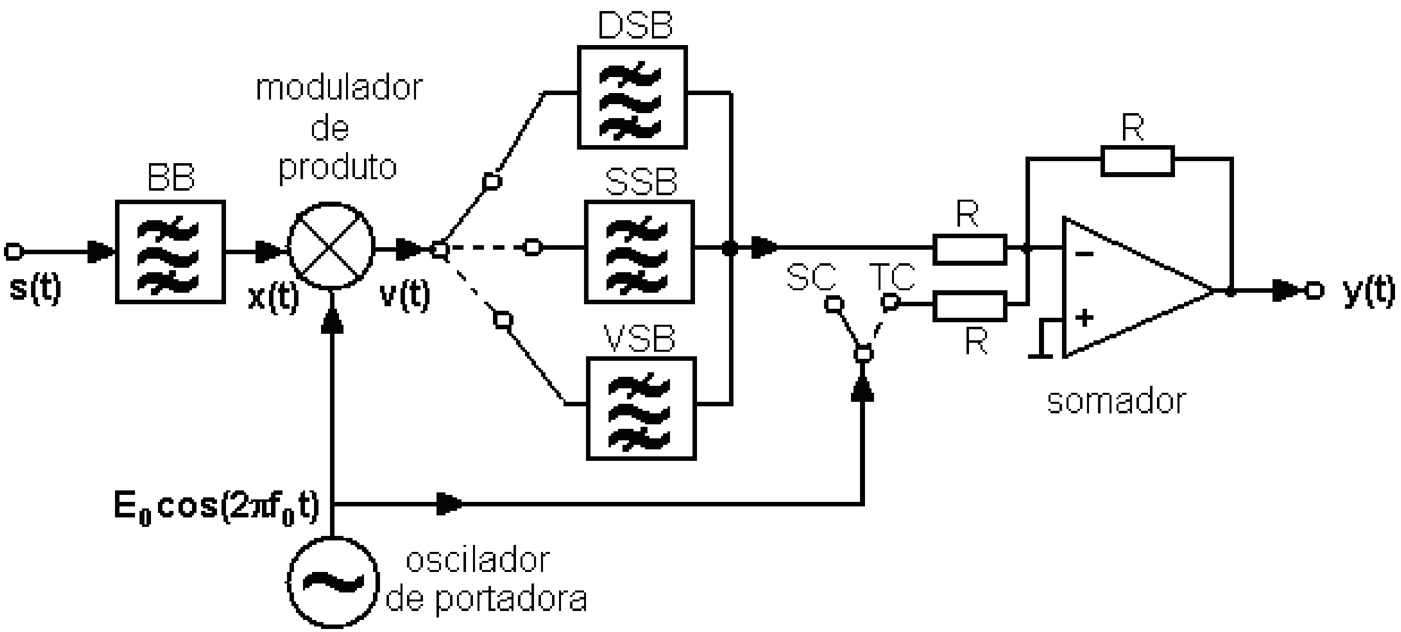
$$y(t) = k_M x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

Onde $\boldsymbol{k_M}$ é uma constante adimensional característica desse circuito chamada de **Constante de Modulação**.



b. Modulador de Produto

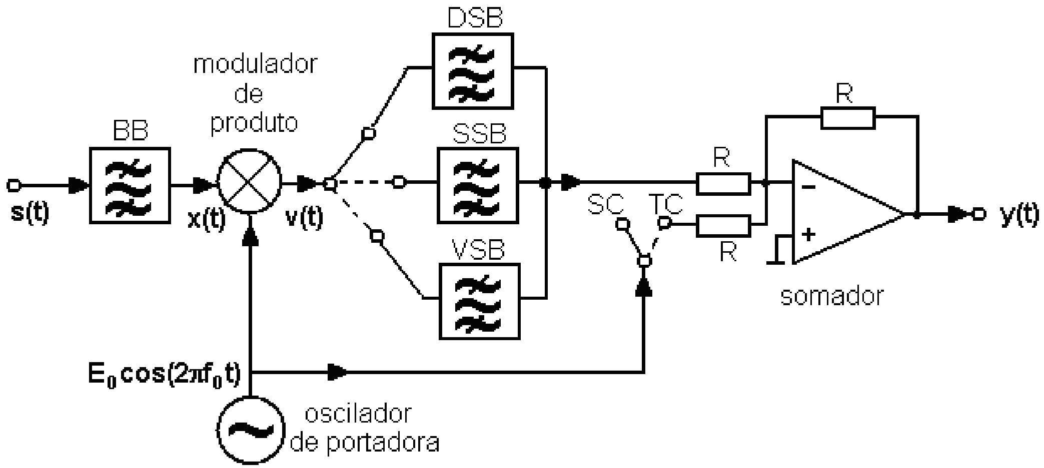
O bloco **modulador de amplitude** é formado pelo conjunto **filtro passa-faixa (BB) + modulador de produto + filtro passa-faixa (DSB, SSB ou VSB) + circuito somador**.



Circuito somador

TC : portadora transmitida **SC :** portadora suprimida

b. Modulador de Produto



Faixa de passagem dos filtros

BB (banda base) : f_a **a** f_b

DSB (Double Side Band = dupla faixa lateral): $(f_0 - f_b)$ ***a*** $(f_0 + f_b)$

SSB (Single Side Band = faixa lateral única): $(f_0 - f_b)$ ***a*** f_0 ***ou*** f_0 ***a*** $(f_0 + f_b)$

VSB (Vestigial Side Band = faixa lateral vestigial: $(f_0 - f_m)$ ***a*** $(f_0 + f_b)$ ***ou***

$(f_0 - f_b)$ ***a*** $(f_0 + f_m)$ ***com*** $f_a < f_m < f_b$

c. Modulação AM-DSB/TC

AM-DSB/TC é a sigla em inglês para **Modulação de Amplitude – Dupla faixa lateral/Portadora Transmitida**.

A amplitude da portadora é alterada pelo sinal modulador **x(t)**, obtendo-se o sinal modulado **y(t)** na forma:

$$y(t) = \underbrace{E_0 \cos\left(2\pi f_0 t\right)}_{\text{portadora}} + \underbrace{k_M x\left(t\right)\cos\left(2\pi f_0 t\right)}_{\text{Sinal na saída do filtro DSB}}$$

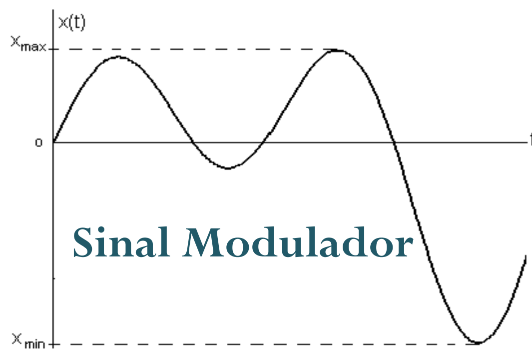
$$\boxed{y(t) = \left[E_0 + k_M x\left(t\right)\right]\cos\left(2\pi f_0 t\right)}$$

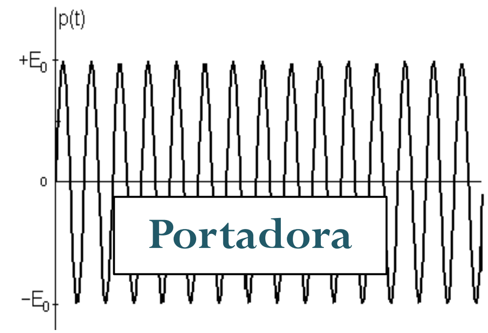
Sinal modulado em AM-DSB/TC

c. Modulação AM-DSB/TC

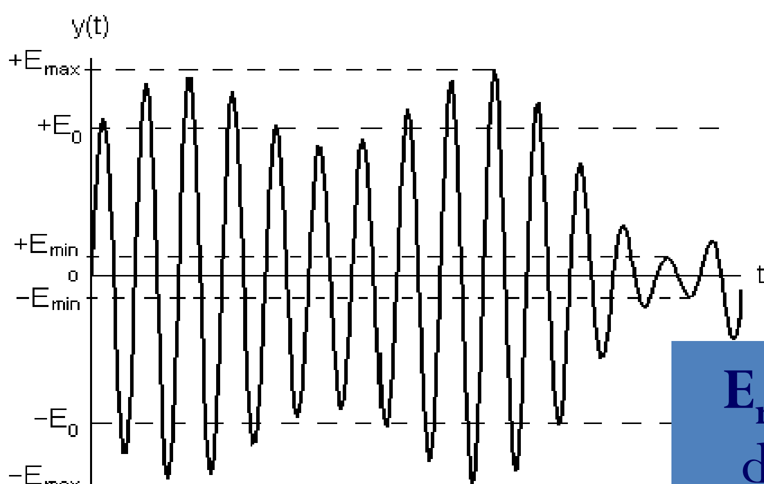
Modulação de amplitude AM-DSB/TC no domínio do tempo

$$y(t) = E_0 \cos(2\pi f_0 t) + k_M x(t) \cos(2\pi f_0 t) = \left[E_0 + k_M x(t)\right] \cos(2\pi f_0 t)$$





Sinal Modulado



$$E_{max} = E_0 + k_M x_{max}$$

$$E_{min} = E_0 + k_M x_{min}$$

$E_{min} \geq 0$, para que não ocorra distorção do sinal modulado.

c. Modulação AM-DSB/TC

É definido como **Índice de Modulação de Amplitude** a variação relativa de amplitude do sinal modulante em relação à amplitude da portadora não modulada E_0.

$$m_+ = \frac{k_M \left| x_{\max} \right|}{E_0}$$

Índice de modulação positiva (acima de E_0).

$$m_- = \frac{k_M \left| x_{\min} \right|}{E_0}$$

Índice de modulação negativa (abaixo de E_0).

K_m, é chamada de Constante de Modulação

c. Modulação AM-DSB/TC

Se $\boldsymbol{m_-}$ é $\leq 1 \longrightarrow$ $k_M |x_{\min}| \leq E_0$ então $E_0 + k_M x_{\min} \geq 0$

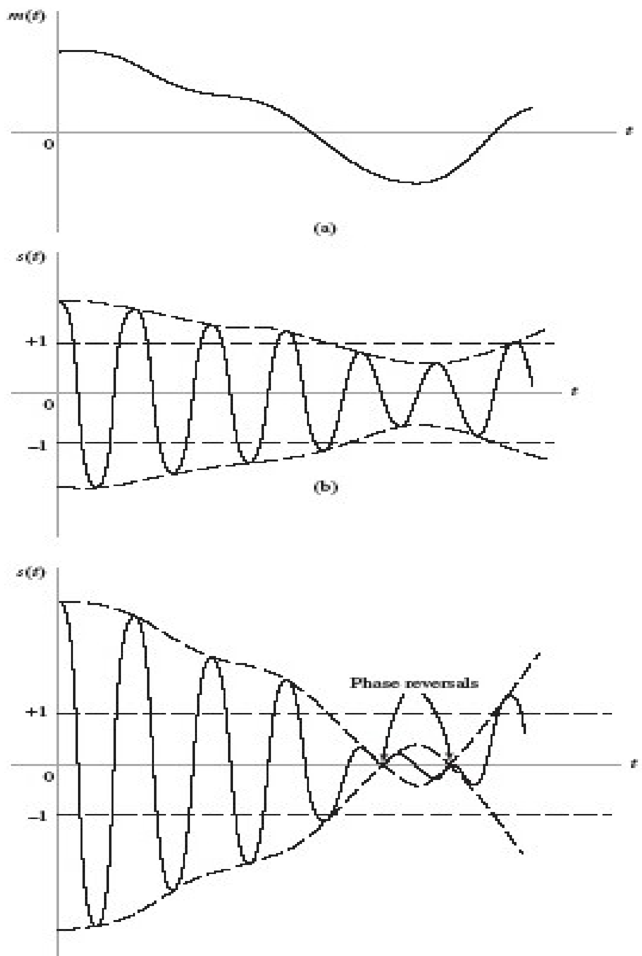
Isto significa que a envoltória superior do sinal modulado é a réplica do sinal modulador ***x(t)***, e a envoltória inferior do sinal modulado é a réplica invertida de ***x(t)***.

Se $|x_{min}| = |x_{max}| = P$:

$$\boxed{m_+ = m_- = m = \frac{k_M P}{E_0} = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}}$$

c. Modulação AM-DSB/TC

- Se $m_{\_} > 1 \rightarrow \quad k_M |x_{\min}| > E_0$ então $E_0 + k_M x_{\min} < 0$



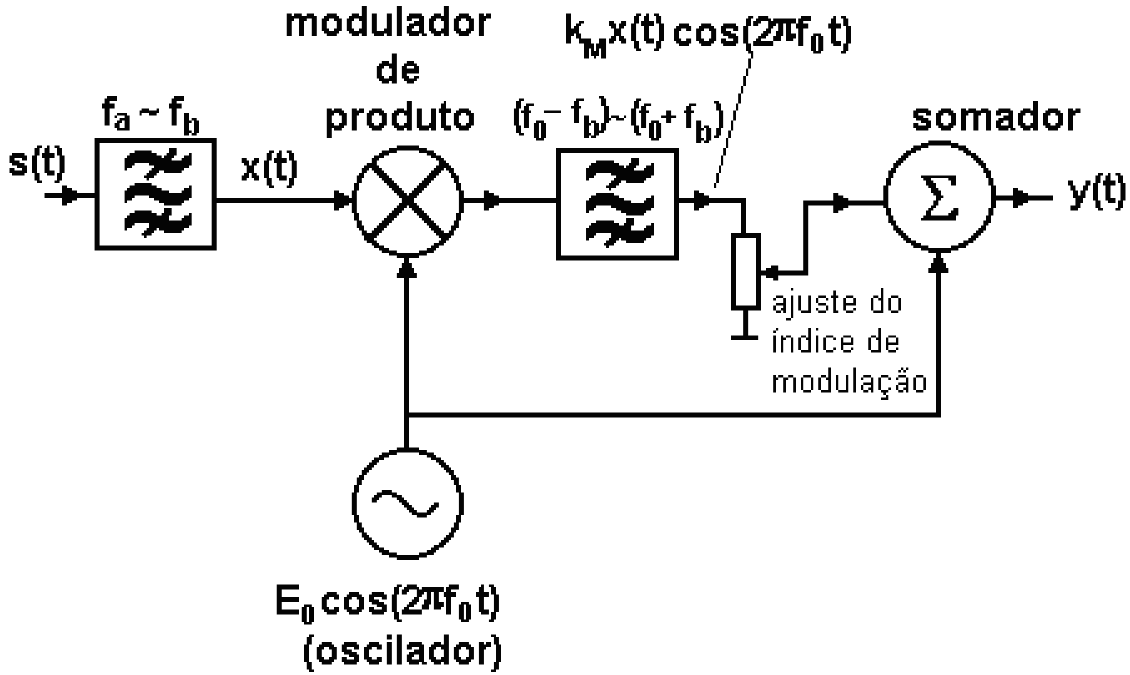
Ocorre **Sobremodulação** (distorção da envoltória), e as envoltórias superior e inferior deixam de ser réplicas do sinal modulador.

$m_{\_} < 1$

$m_{\_} > 1$

c. Modulação AM-DSB/TC

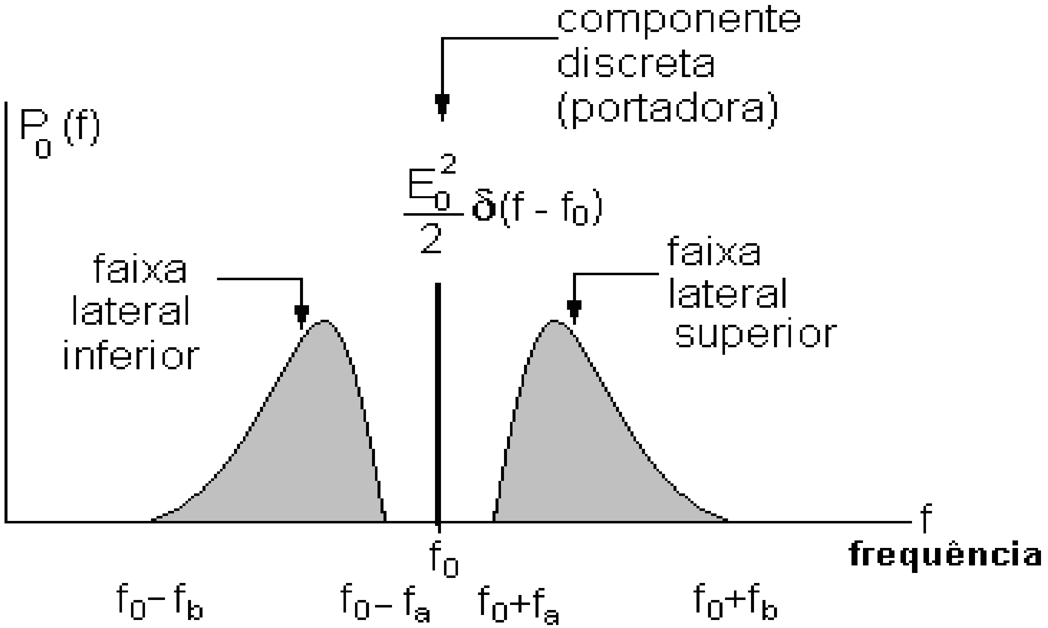
Quando a **Sobremodulação** ocorre é necessário fazer o ajuste do índice de modulação (ajustar $\mathbf{k_M}$).



c. Modulação AM-DSB/TC

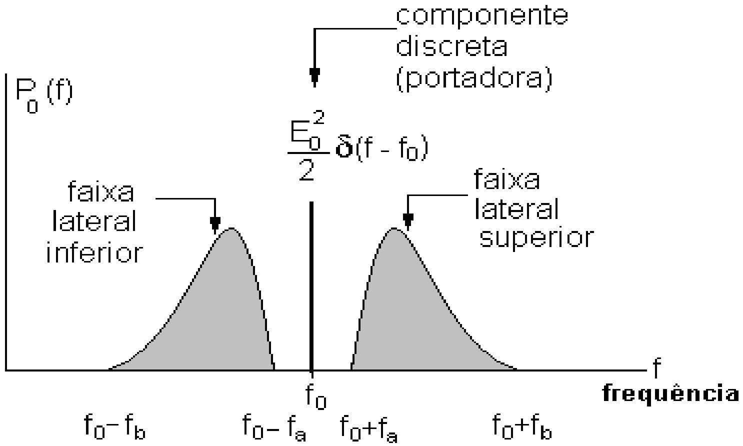
Espectro AM-DSB/TC

O espectro do sinal modulado AM-DSB/TC, y(t) corresponde a soma de uma componente espectral discreta – **a portadora** – e ao espectro contínuo composto pelas **duas faixas laterais**.



c. Modulação AM-DSB/TC

Espectro AM-DSB/TC



Considerações do sinal de banda base x(t):

- Sinal de potência;
- sem componente CC ($\overline{x(t)} = 0$);
- espectro limitado ao intervalo $(f_a \sim f_b)$

$$P_0(f) = \frac{k_M^2}{2} P_X(f - f_0) + \frac{E_0^2}{2}\delta(f - f_0)$$

O espectro do sinal modulado AM-DSB/TC ocupa o intervalo de frequências de $(f_0 - f_b)$ até $(f_0 + f_b)$, com largura de faixa $\boldsymbol{B} = 2f_b$.

c. Modulação AM-DSB/TC

Considere o sinal modulador: $x(t) = A\cos(2\pi f_m t)$

$$|x_{\max}| = |x_{\min}| = A \longrightarrow m = \frac{k_m A}{E_0} \quad \textbf{(índice de modulação)}$$

O sinal modulado é expresso em função do índice de modulação por:

$$y(t) = E_0\left[1 + m\cos(2\pi f_m t)\right]\cos(2\pi f_0 t)$$

A amplitude de **y(t)** varia entre os valores máximos $\boldsymbol{E_{max} = E_0(1+m)}$ e mínimo $\boldsymbol{E_{min} = E_0(1-m)}$ **,** lembrando que ***m*** tem que ser ≤ 1 para que não ocorra distorsão. Multiplicando os termos de y(t) e aplicando a identidade trigonométrica $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$ obtém-se

$$y(t) = E_0\cos(2\pi f_0 t) + \frac{mE_0}{2}\cos\left[2\pi(f_0 - f_m)t\right] + \frac{mE_0}{2}\cos\left[2\pi(f_0 + f_m)t\right]$$

c. Modulação AM-DSB/TC

A situação mais simples da modulação AM-DSB/TC ocorre quando o sinal modulante ***x(t)*** é uma harmônica simples.

Se o sinal modulante ***x(t)*** for composto por uma somatória de componentes senoidais com amplitudes e frequências distintas conforme,

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t) + \ldots + A_n \cos(2\pi f_n t)$$

O sinal modulado **y(t)** será composta da soma dos produtos de modulação de cada uma das componentes individuais (cada componente produzirá duas raias laterais). Isto mostra que a ***modulação de amplitude é um sistema linear*** (simplifica a análise) o que permite trabalhar com componentes espectrais individuas e seus respectivos produtos de modulação.

c. Modulação AM-DSB/TC

Vantagens:

- Simplicidade de implementação do modulador e do demodulador.

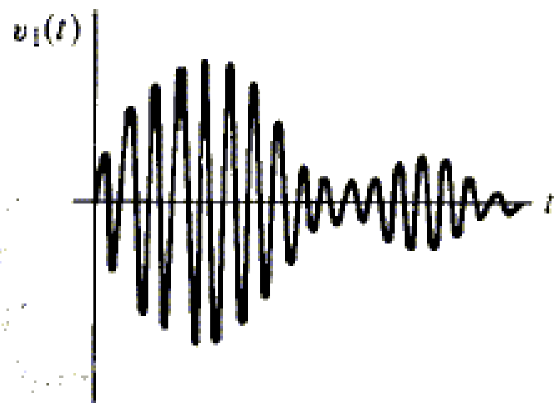
Desvantagens:

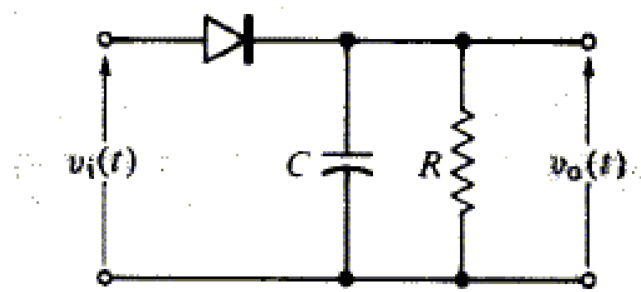
- Desperdício de potência, devido ao fato de que a portadora é completamente independente do sinal modulador, assim, gasta-se potência para transmitir a portadora.

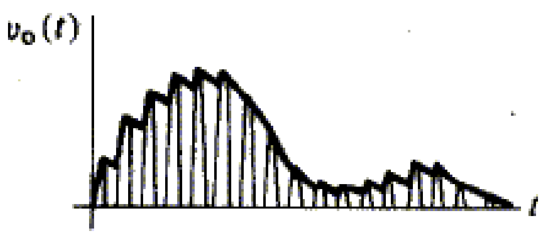
- Desperdício em largura de faixa devido ao fato de que não há a necessidade de transmitir ambas as bandas a fim de obtermos o sinal.

c. Modulação AM-DSB/TC

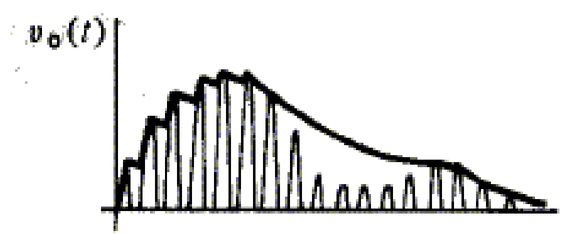
Desde que m_ ≤ 1 o sinal de banda base **x(t)** pode ser recuperado com um detector de envoltória



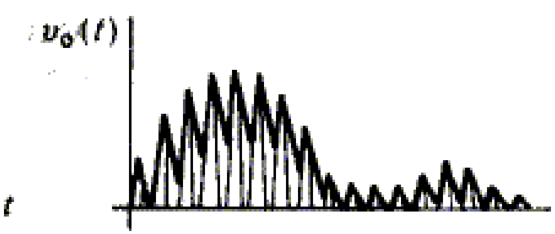




RC correto



RC muito grande



RC muito pequeno

c. Modulação AM-DSB/TC – Aplicações

Devido à facilidade e a simplicidade dos moduladores e demoduladores AM-DSB/TC o Serviço de Radiodifusão Sonora AM em ondas médias adotou este modelo de modulação.

Modulação **AM-DSB/TC**, com m ≤ 100%

Sinal de **áudio** com componentes espectrais até **5 kHz**

As emissoras de rádio em AM utilizam um espaço no espectro de freqüência que vai desde **530 KHz** até **1.600 KHz**.

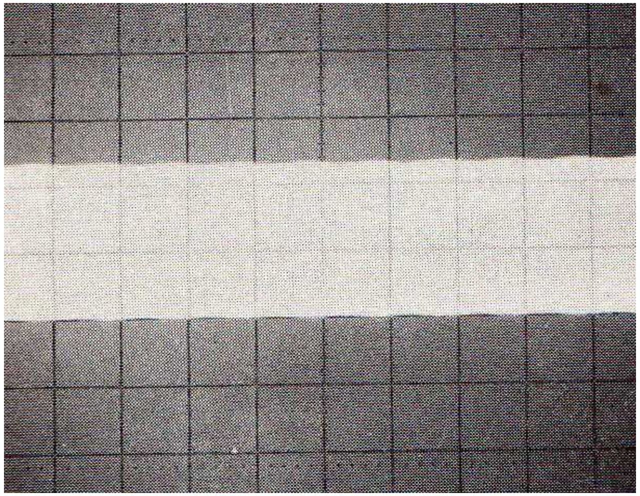
Frequência Portadora: f_n = 540 kHz + N x 10 kHz, com N = 0 a 106 (107).

c. Modulação AM-DSB/TC – Laboratório

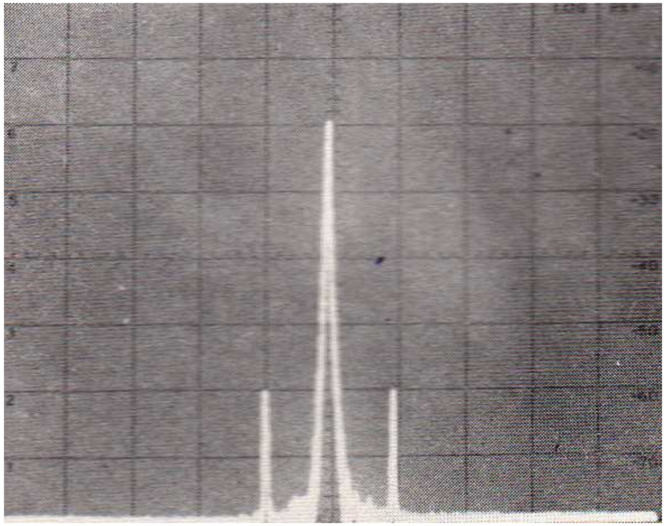
Tarefa de Laboratório

Observar os gráficos no domínio do tempo e da frequência de sinais modulados em AM-DSB/TC

Espectro de um sinal modulado AM-DSB/TC com m = 2%



osciloscópio



Analisador de espectro

c. Modulação AM-DSB/TC - Exercícios

5.1) O transmissor de uma emissora de radiodifusão sonora (AM-DSB/TC) irradia uma potência média normalizada de 10KW com portadora não modulada e 11,25KW quando modulado por um sinal senoidal.

a) Determine o índice de modulação de amplitude produzido pelo sinal senoidal.

b) Se um segundo sinal senoidal de mesma frequência com amplitude correspondente a um índice de modulação de 40% é adicionado ao primeiro, qual será a potência total irradiada com os dois sinais moduladores senoidais somados?

5.7) Uma onda quadrada bipolar de 2,5kHz com 200mV de amplitude, modula em AM-DSB/TC uma portadora de 500kHz e amplitude de 5V com índice de modulação de 80%.

a) Qual a constante de modulação do modulador AM-DSB/TC?

b) Represente graficamente o sinal modulado obtido no domínio do tempo, indicando valores de tensão e tempo.

c) Represente o espectro de amplitude do sinal modulado no intervalo de 490 a 510kHz.

d) Qual é a potência do sinal modulado contida no intervalo de frequência acima dissipada em uma resistência de 50Ω?

Modulação de Amplitude

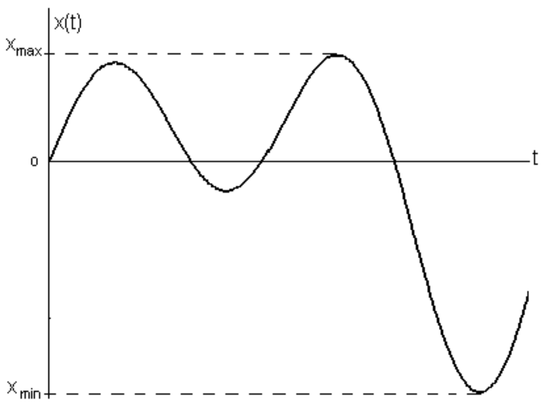
Modulação AM-DSB/SC

AM-DSB/SC é a sigla em inglês para **Modulação de Amplitude – Dupla Faixa lateral/ Portadora Suprimida**.

O sinal **y(t)** na saída do bloco modulador é: $y(t) = k_M x(t)\cos(2\pi f_o t)$

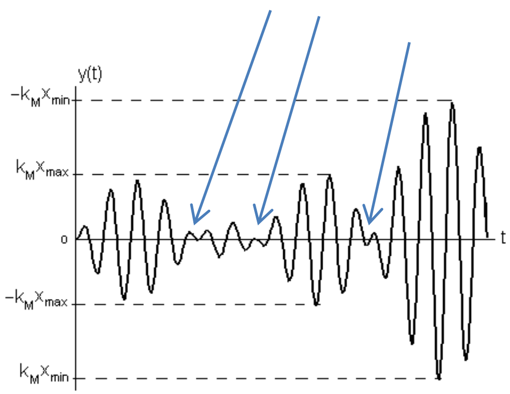
Se $x(t) = A\cos(2\pi f_m t)$ $\longrightarrow$ $y(t) = E_0 \cos(2\pi f_0 t)\, m\cos(2\pi f_m t)$

$$y(t) = \frac{mE_0}{2}\cos\left[2\pi(f_0 - f_m)t\right] + \frac{mE_0}{2}\cos\left[2\pi(f_0 + f_m)t\right]$$



Sinal modulador

Inversões das envoltórias

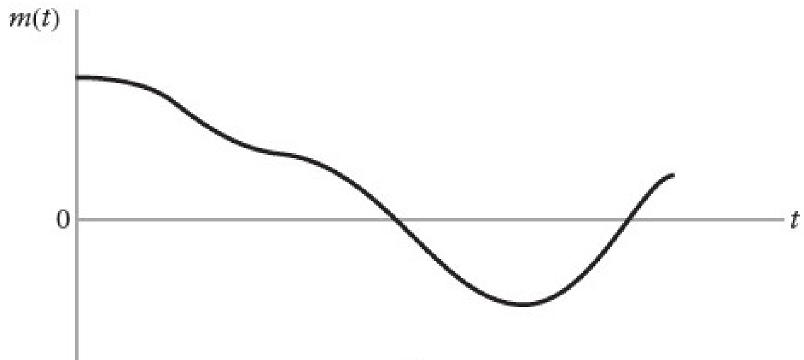


Sinal modulado

Observe que quando o sinal banda base **x(t)** inverte a polaridade, as envoltórias superior e inferior se invertem.

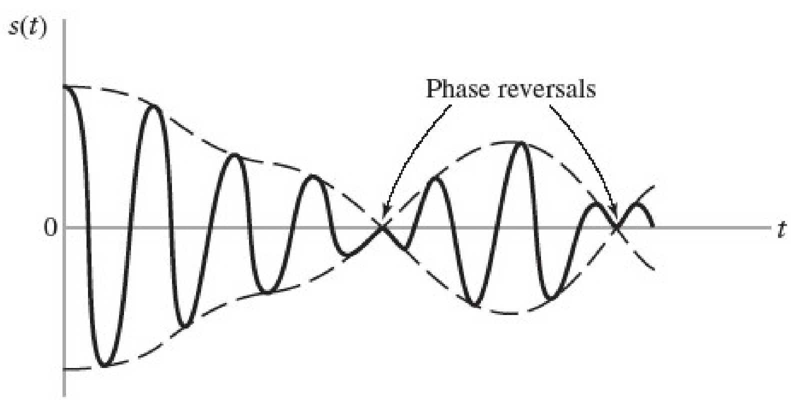
Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC



(a)

Sinal modulador



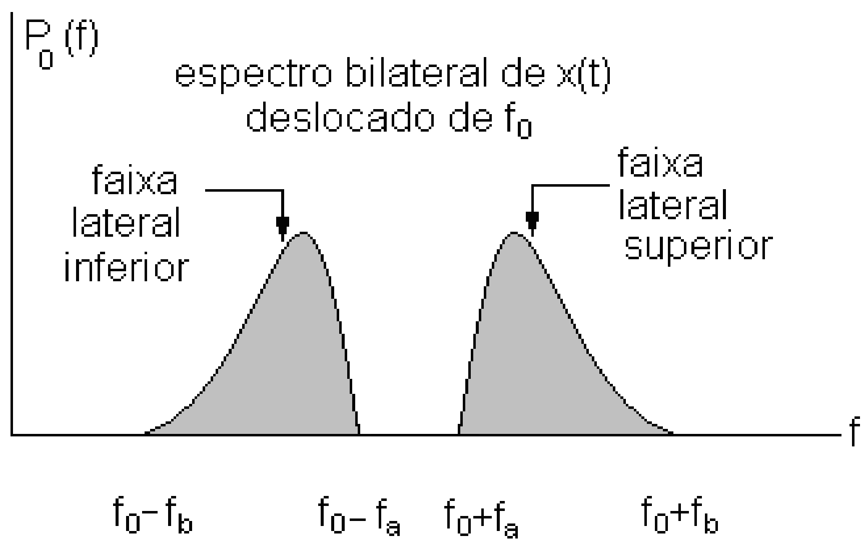
Sinal modulado

Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC

Espectro AM-DSB/SC

Assim como a modulação **AM-DSB/TC**, o espectro do sinal modulado na **AM-DSB/SC** é **B = 2f$_b$**. Porém, a vantagem que esta última modulação apresenta em relação a primeira é que não precisa desperdiçar potência transmitindo a portadora.

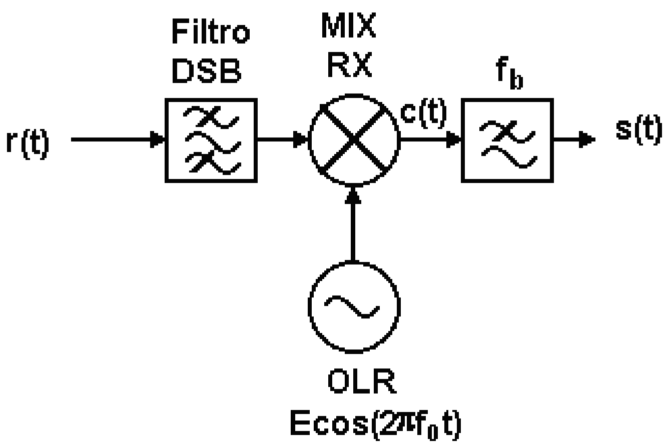


Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC

Demodulador AM-DSB/SC

Na modulação **AM-DSB/SC** a envoltória não é uma réplica do sinal modulador, logo não é possível demodular esse sinal usando um detector de envoltória. Neste caso é utilizado no bloco demodulador um processo de **detecção síncrona**, também chamada de **detecção coerente**.



$$r(t) = kx(t)\cos(2\pi f_0 t) \quad \text{com} \quad k = {k_M}/{a}$$

a representa as perdas sofridas na propagação

OLR = Oscilador Local de Recepção: gera uma portadora

MIX RX = Misturador de Recepção: multiplica o sinal recebido com a portadora do OLR

Se a portadora da ORL for síncrona com a portadora da transmissão (mesma frequência e mesma fase), o sinal c(t) na saída do **MIX RX** é:

$$c(t) = k_R k x(t)\cos^2(2\pi f_0 t)$$

Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC

Demodulador AM-DSB/SC

$$c(t) = k_R k x(t) \cos^2(2\pi f_0 t)$$

Onde $\boldsymbol{k_R}$ é a constante do **MIX RX**. Aplicando a identidade trigonométrica

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a),$$

$$c(t) = k_d x(t) + k_d x(t)\cos(2\pi 2 f_0 t) \quad \text{onde} \quad k_d = {}^{k_R k}\!/_{2}$$

Passando o sinal **c(t)** por um filtro passa-baixa com freq. de corte $\boldsymbol{f_b}$ (maior frequência do sinal modulador **x(t)**), temos na saída:

$$s(t) = k_d x(t)$$

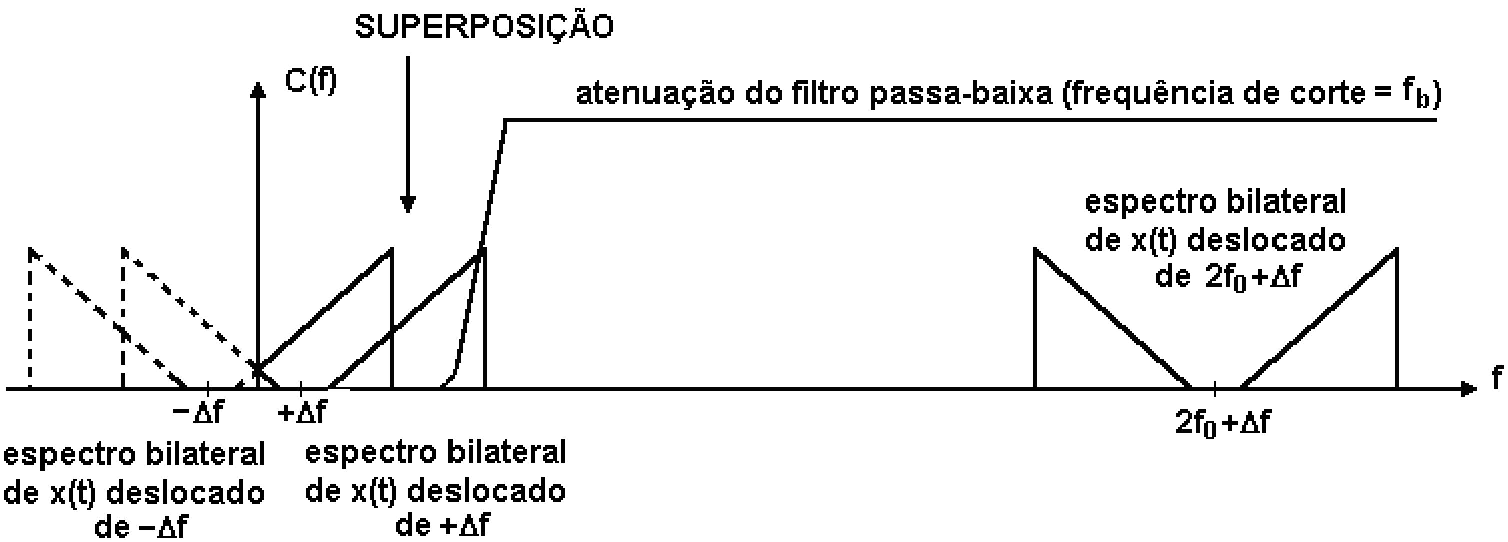
Se houver sincronismo entre as portadoras de transmissão e de recepção o formato do sinal na saída do demodulador é idêntico ao formato do sinal modulador x(t).

Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC

Demodulador AM-DSB/SC

Se a portadora gerada pelo OLR possuir uma diferença de frequência **Δf** e/ou uma defasagem ϕ em relação à portadora transmitida, o sinal na saída do filtro será distorcido.



Ocorre superposição dos espectros deslocados de ± Δf dentro da banda de passagem do filtro.

Modulação de Amplitude

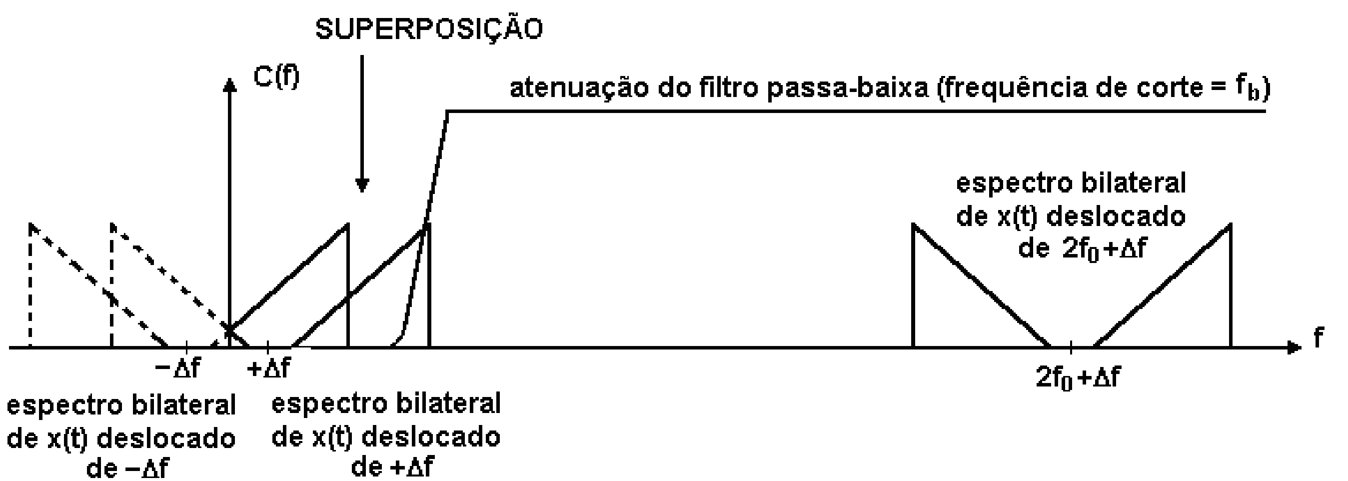
Modulação AM-DSB/SC

Demodulador AM-DSB/SC

Seja a portadora da OLR $E\cos\left[2\pi\left(f_0+\Delta f\right)t\right]$

O sinal **c(t)** na saída do **MIX RX** é dado por:

$$c(t)=\underbrace{k_d x(t)\cos\left(2\pi\Delta f t\right)}_{\text{Sinal } x(t) \text{ centrado nas frequências } \pm\Delta f}+k_d x(t)\cos\left[2\pi\left(2f_0+\Delta f\right)t\right]$$



Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC

Demodulador AM-DSB/SC

Seja agora a portadora da OLR com uma defasagem em relação à portadora transmitida

$$E\cos\left(2\pi f_0 t + \phi\right)$$

O sinal na saída do MIX RX é dado por: $c\left(t\right) = k_d x\left(t\right)\cos\left(\phi\right) + k_d x\left(t\right)\cos\left(2\pi 2 f_0 t + \phi\right)$

O sinal na saída do filtro passa-baixa é: $s\left(t\right) = k_d x\left(t\right)\cos\left(\phi\right)$

Se $\boldsymbol{\phi}$ é constante o sinal é atenuado, podendo até se anulado, pois $|\cos(\phi)| \leq 1$

Se $\boldsymbol{\phi = \phi(t)}$, o sinal na saída é distorcido .

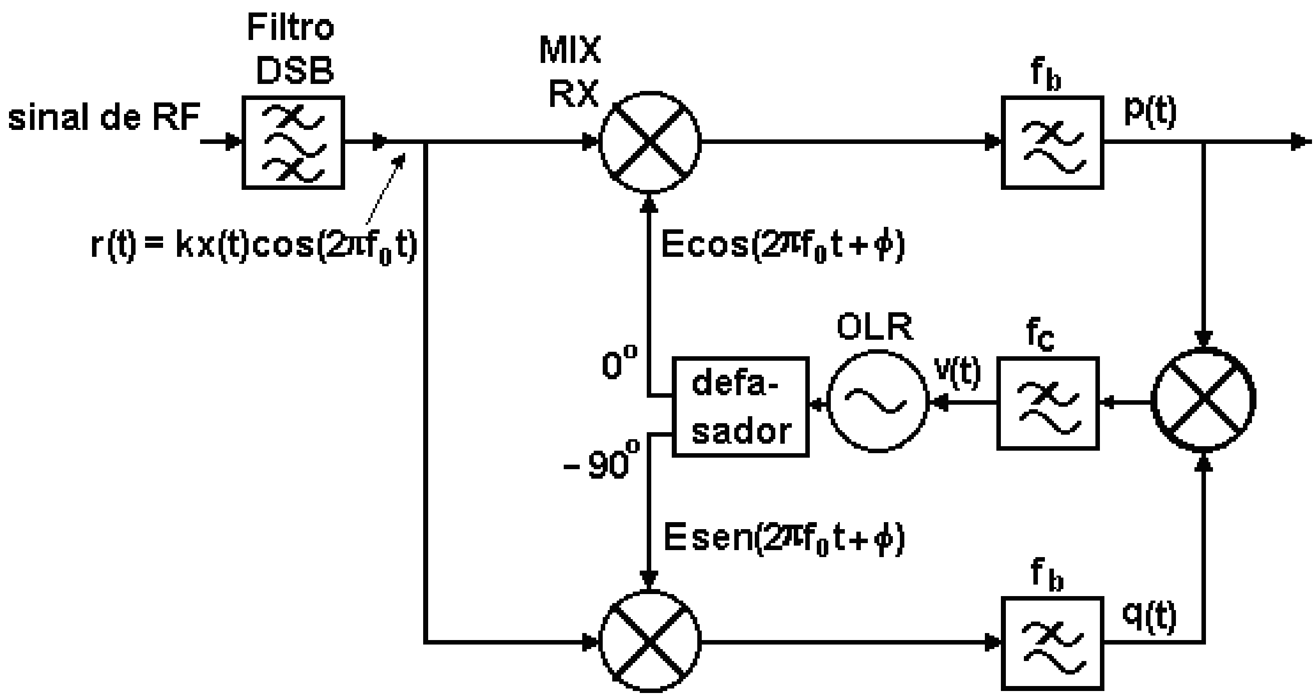
A solução é garantir o sincronismo entre as portadoras de transmissão e de recepção através de métodos de sincronização

Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC

Método de Sincronização Costas Loop

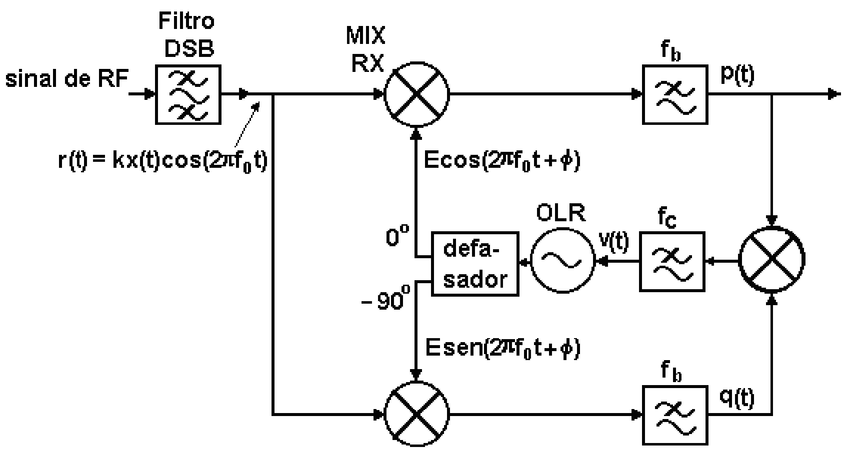
PLL – Phase Locked Loop



Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC

Método de Sincronização Loop de Costas

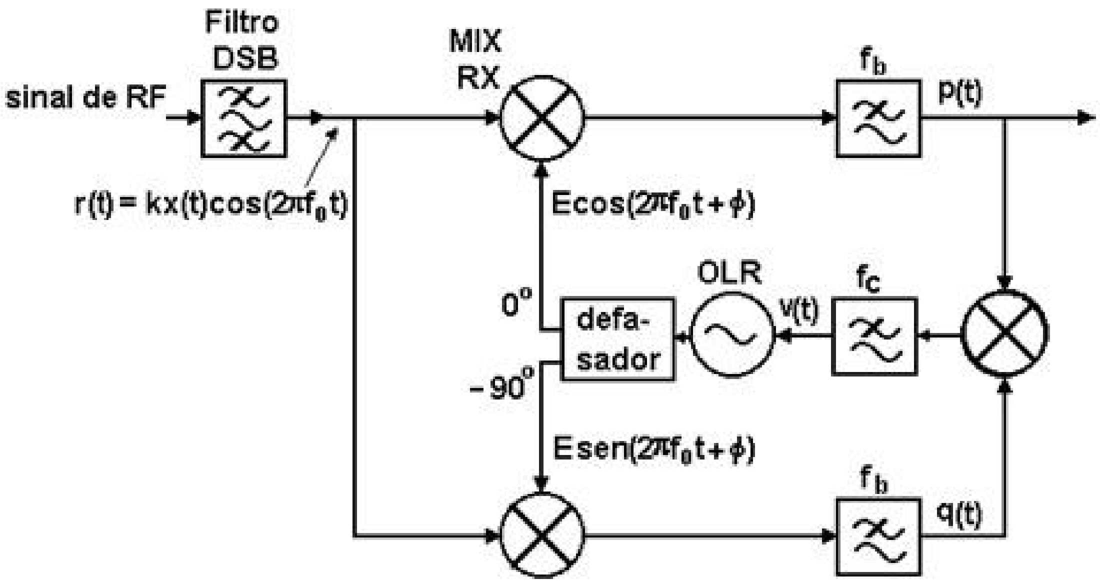


- Consiste de dois detectores coerentes alimentados com o mesmo sinal **r(t)**, mas com sinais individuais do oscilador local que estão em quadratura de fase.
- A frequência do oscilador local é ajustada para ter a mesma frequência da portadora transmitida $\boldsymbol{f_0}$.
- Esses dois detectores são acoplados para formar um sistema de realimentação negativa projetado de forma a manter o oscilador local síncrono com a portadora.

Para entender o funcionamento vamos chamar o detector superior de I e o inferior de Q , e definir as funções na saída de cada bloco.

Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC
Sincronização Loop de Costas



$$r(t) = kx(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$E\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

ϕ é a defasagem entre as portadoras do modulador e do demodulador

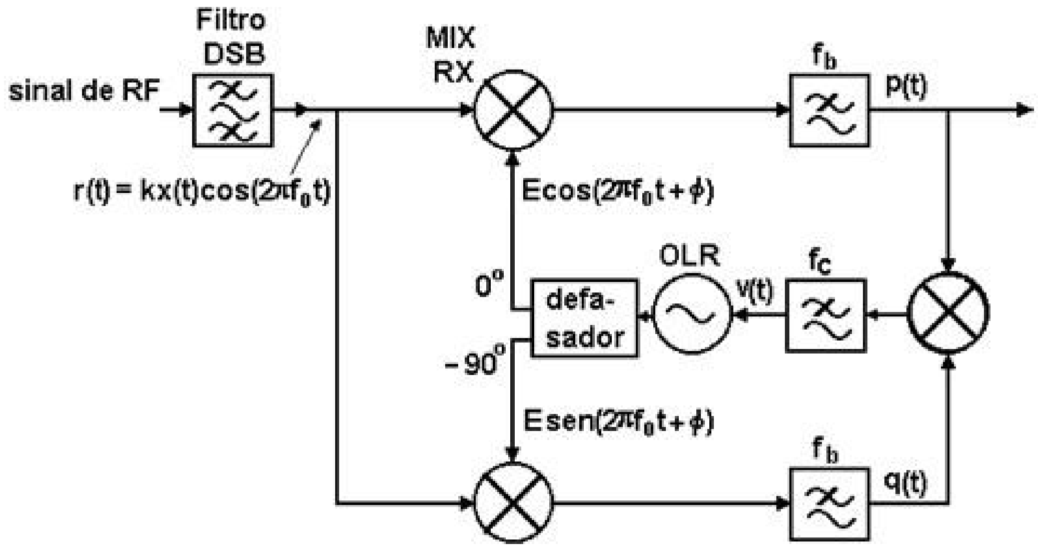
$$p(t) = k_d x(t)\cos(\phi) + k_d x(t)\cos(2\pi 2 f_0 t + \phi)$$ **Sinal na saída do MIX RX do detector I**

$$q(t) = k_d x(t)sen(\phi) + k_d x(t)sen(2\pi 2 f_0 t + \phi)$$ **Sinal na saída do MIX RX do detector Q**

Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC

Método de Sincronização Loop de Costas



$$p(t) = k_d x(t)\cos(\phi) + k_d x(t)\cos(2\pi 2 f_0 t + \phi) \qquad q(t) = k_d x(t)sen(\phi) + k_d x(t)sen(2\pi 2 f_0 t + \phi)$$

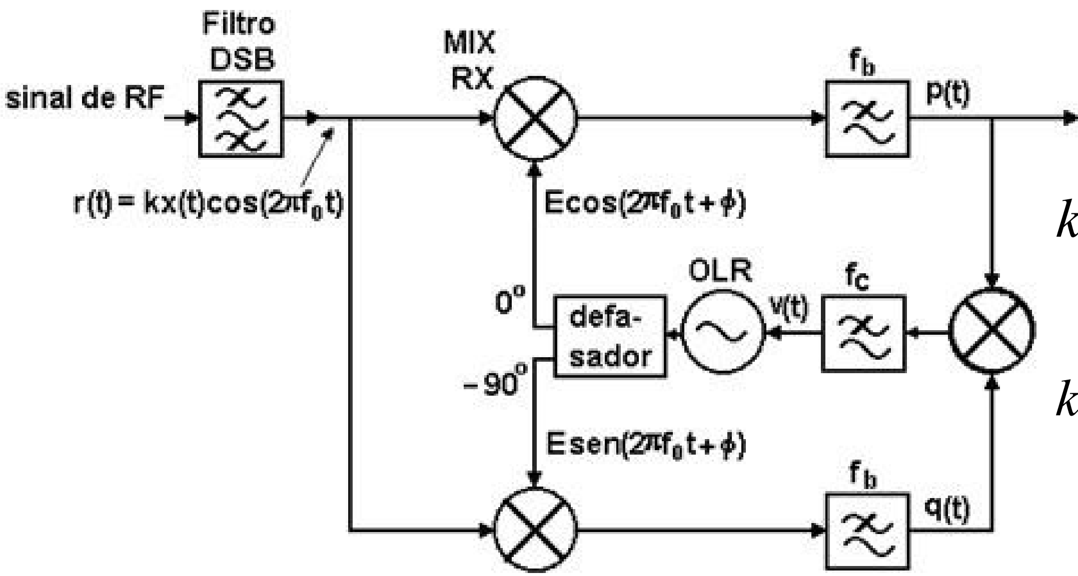
Os sinais nas saídas dos filtros **I** e **Q** são, respectivamente,

$$k_d x(t)\cos(\phi) \quad \text{e} \quad k_d x(t)sen(\phi)$$

Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC

Método de Sincronização Loop de Costas



$k_d x(t)\cos(\phi)$

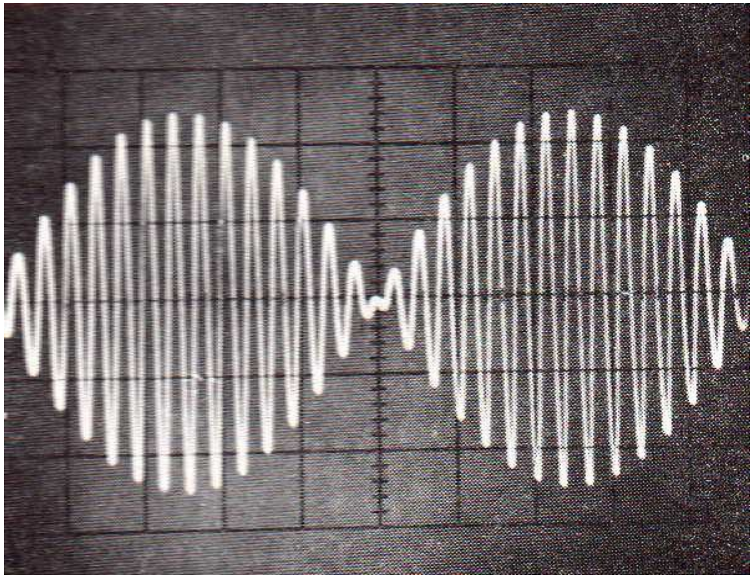
$k_d x(t) sen(\phi)$

Se ϕ = 0, a saída do detector I é k_dx(t) (sinal desejado), e a saída de do detector Q é nula.

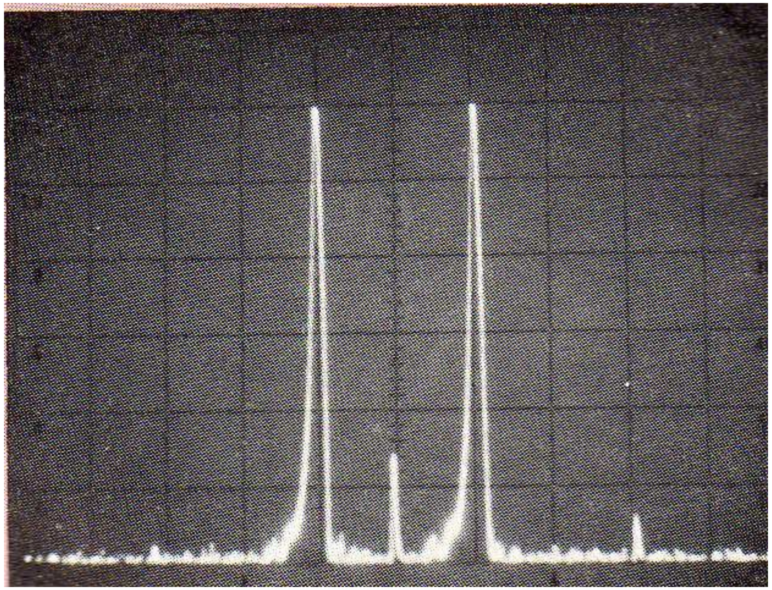
Se ϕ é ligeiramente maior que zero, os sinais nas saídas dos detectores I e Q serão multiplicados e passados por um filtro, resultando em uma tensão de controle v(t) que irá controlar o oscilador controlado por tensão (VCO). <u>A fase da portadora gerado no VCO é uma função da tensão de alimentação v(t)</u>.

Modulação de Amplitude

Modulação AM-DSB/SC



Osciloscópio



Analisador de Espectro

Modulação de Amplitude

Modulação AM-SSB/SC

AM-SSB/SC é a sigla em inglês para Modulação de Amplitude – **Faixa lateral única/ Portadora Suprimida**. Neste método somente a banda lateral superior ou inferior é transmitida.

Para o sinal modulador **x(t) = Acos(2πf_mt)**, o sinal modulado **y(t)** na saída do modulador é:

$$y(t) = \frac{k_M A}{2} \cos\left[2\pi\left(f_0 + f_m\right)t\right]$$

Faixa lateral superior selecionada

$$y(t) = \frac{k_M A}{2} \cos\left[2\pi\left(f_0 - f_m\right)t\right]$$

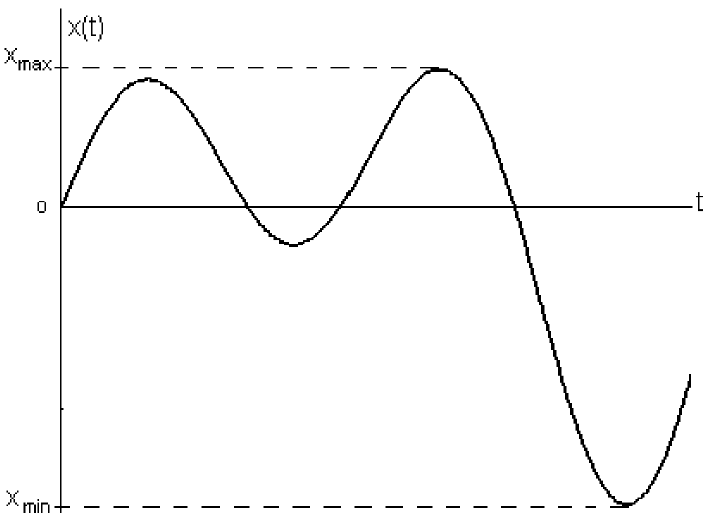
Faixa lateral inferior selecionada

Note que ao contrário das modulações anteriores, o sinal modulado em AM-SSB/SC considerando x(t) cossenoidal é uma cossenoide com amplitude constante.

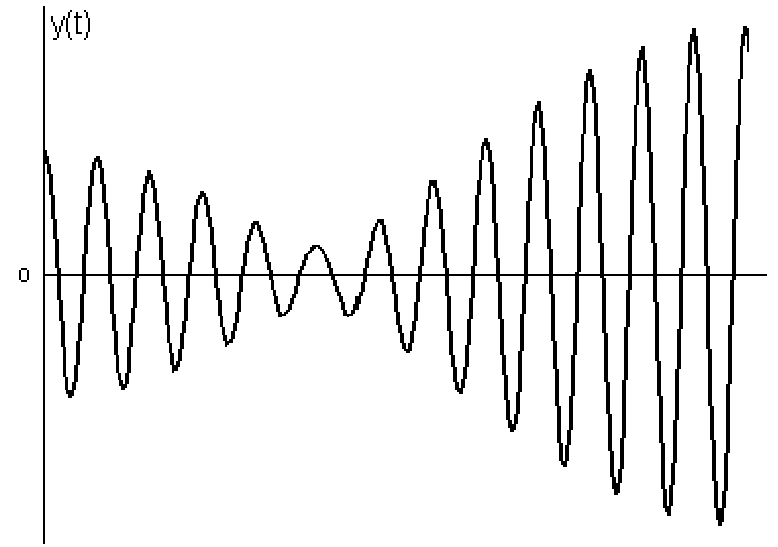
Modulação de Amplitude

Modulação AM-SSB/SC

A envoltória do sinal modulado AM-SSB/SC **não** guarda **semelhança** com o sinal modulador **x(t)**



Sinal modulador



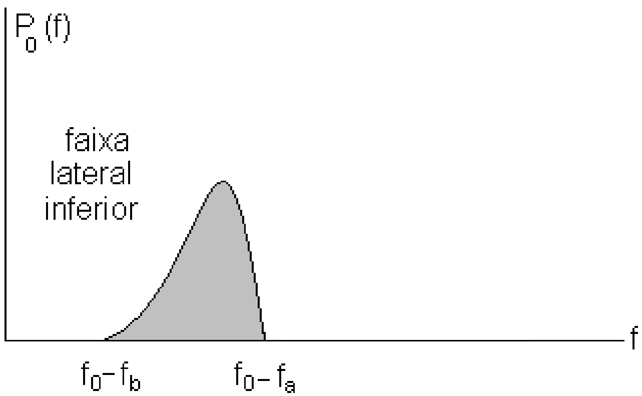
Sinal modulado AM-SSB/SC com faixa lateral superior transmitida

Modulação de Amplitude

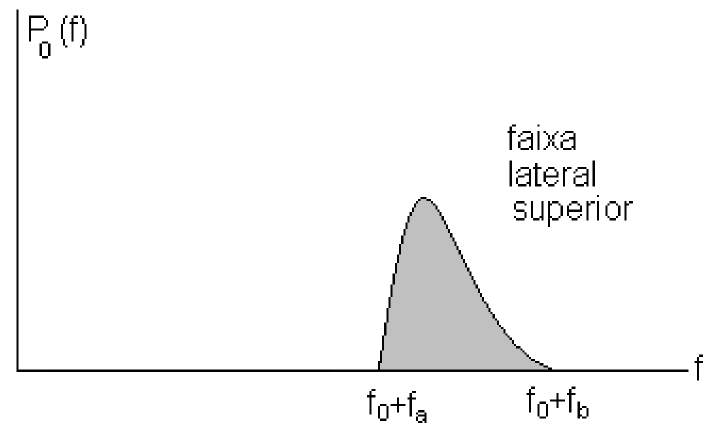
Modulação AM-SSB/SC

O espectro do sinal modulado em AM-SSB/SC equivale a somente uma das bandas resultantes do processo de modulação (inferior ou superior). A banda do sinal modulado é igual a banda do sinal modulador.

$$\boldsymbol{B = f_b - f_a}$$

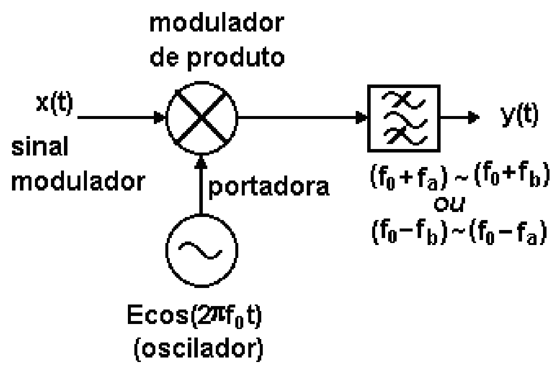


Faixa lateral inferior transmitida



Faixa lateral superior transmitida

Modulação de Amplitude



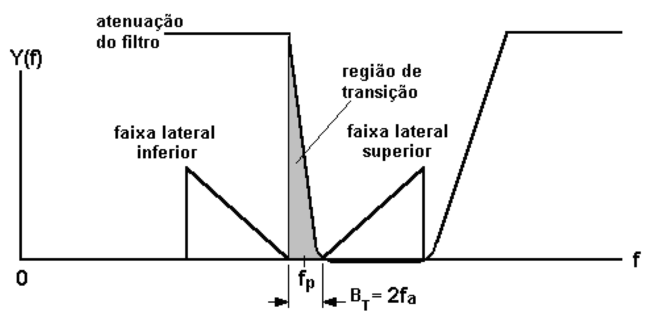
Modulação AM-SSB/SC

Modulador AM-SSB/SC por filtragem

É a forma mais simples de implementação de um modulador.
A energia do sinal na saída do modulador é a energia contida em uma das bandas laterais.

O desafio neste modulador é implementar o filtro SSB. O **fator de qualidade** nestes filtros **Q,** é a relação entre a frequência central da região de transição – frequência da portadora, e a largura da faixa de transição – $\mathbf{2f_a}$, onde $\mathbf{f_a}$ é a menor frequência do sinal **x(t)**

$$Q = \frac{f_p}{2f_a}$$



Como f_a é geralmente muito menor do que f_p (portadora), o limite de viabilidade econômica do filtro $\mathbf{Q_{max}}$ fica difícil de ser atendido.

$$Q_{\max} \geq \frac{f_p}{2f_a} \longrightarrow f_p \geq f_b \quad \text{(evitar superposição)} \longrightarrow f_b \leq f_p \leq 2f_a Q_{\max}$$

Modulação de Amplitude

Modulação AM-SSB/SC

Modulador AM-SSB/SC por filtragem

Quando a condição de $\mathbf{Q_{max}}$ do filtro não pode ser atendida a solução é utilizar um processo de **dupla conversão,** composto de dois estágios.

Exemplo: Deseja-se transmitir o sinal **x(t)** com espectro de f_a = 0,3 kHz a f_b = 3,4 kHz, modulado em **AM-SSB/SC** com portadora com frequência f_p = 2 MHz. A viabilidade técnica/econômica do filtro é $\mathbf{Q_{max}}$ = 50.

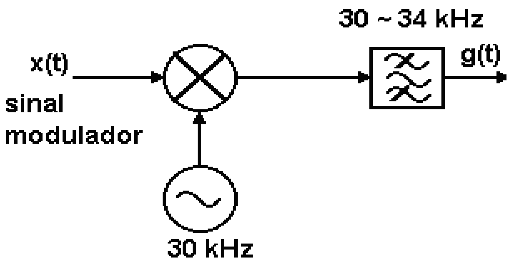
$$2 \times 0,3kHz \times 50 = 30kHz$$

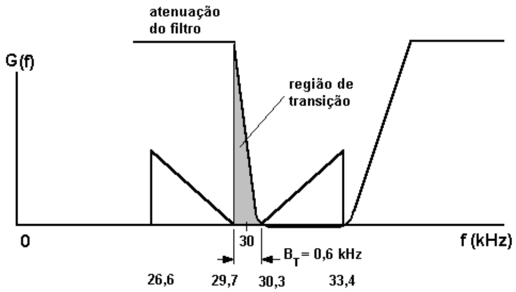
A condição de $f_p \leq 2f_aQ_{max}$ não é atendida, mas a condição de $f_b \leq f_p$ é atendida.

No Primeiro estágio deverá ser construído um produto modulador com portadora que atenda a condição de $f_b \leq f_p \leq 2f_aQ_{\max}$ em série com um filtro SSB

$$3,4kHz \leq f_p \leq 30kHz$$

$$Q_1 = \frac{30kHz}{0,6kHz} = 50$$





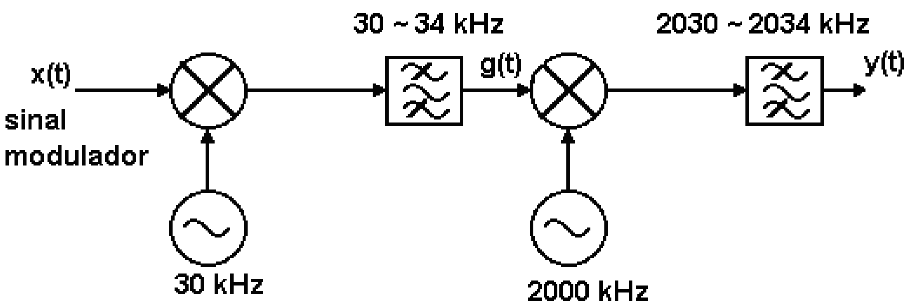
Modulação de Amplitude

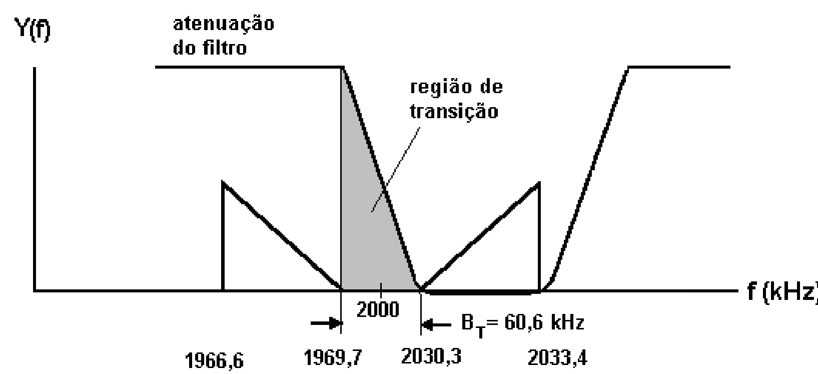
Modulação AM-SSB/SC

Modulador AM-SSB/SC por filtragem *Continuação do exemplo*

No segundo estágio é montado um outro modulador de produto com a portadora desejada, em série com outro filtro SSB. O fator de qualidade do filtro neste estágio deve atender a condição:

$$Q \leq Q_{\max}$$





$$Q_2 = \frac{2000kHz}{60,6kHz} = 33 < Q_{\max}$$

A condição de Qmax é atendida.

Modulação de Amplitude

Modulação AM-SSB/SC

Modulador AM-SSB/SC por desvio de fase

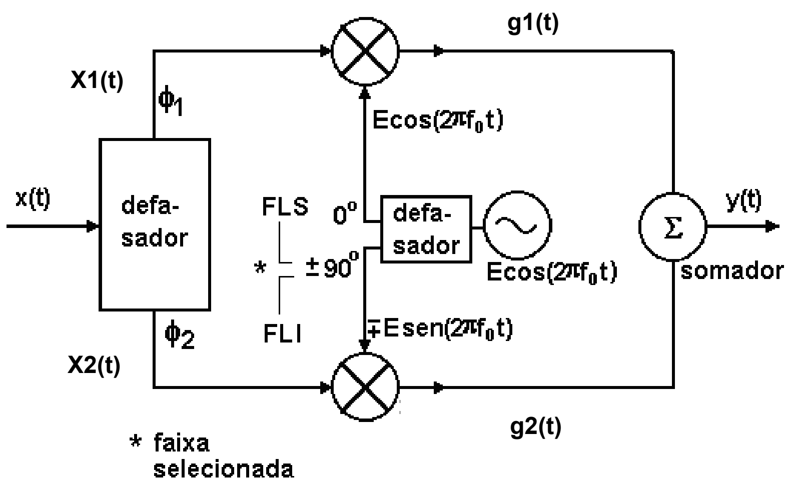
É possível se evitar as dificuldades da filtragem na produção do sinal AM-SSB/SC. Para tanto foi idealizado o processo de **deslocamento de fase**. Funciona da seguinte forma:

Suponha o sinal **$x(t) = A\cos(2\pi f_m t)$**

Se a condição de ***$\phi 1 - \phi 2 = 90^o$*** for atendida, temos:

$$x_1(t) = A\cos(2\pi f_m t)$$

$$x_2(t) = Asen(2\pi f_m t)$$



Na saída dos multiplicadores são gerados dois sinais **AM-DSB/SC**

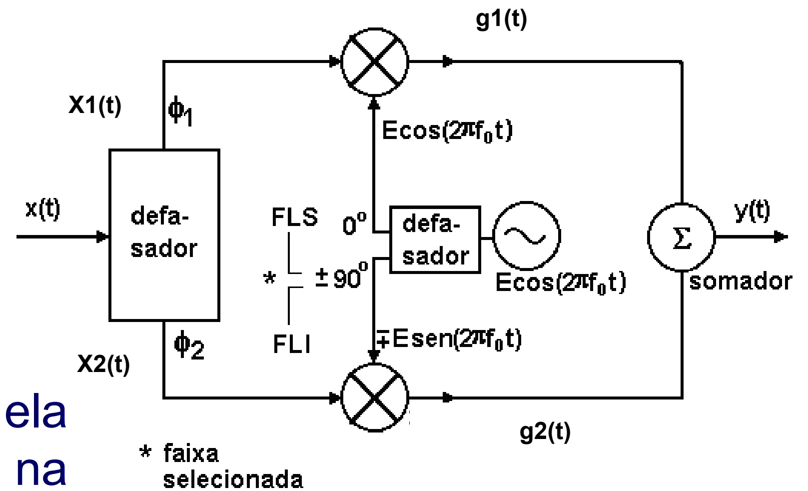
$$g_1(t) = k_m A\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$g_2(t) = \pm k_m Asen(2\pi f_m t)sen(2\pi f_0 t)$$

Modulação de Amplitude

Modulação AM-SSB/SC

Modulador AM-SSB/SC por desvio de fase



$$g_1(t) = k_m A\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$g_2(t) = \pm k_m A sen(2\pi f_m t) sen(2\pi f_0 t)$$

• Se a portadora sofrer uma defasagem de **+90º** ela será $-E_0 sen(2\pi f_0 t)$ e **g_2(t)** será negativo. O sinal na saída do somador será:

$$y(t) = g_1(t) - g_2(t) =$$

$$k_m A\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_0 t) - k_m A sen(2\pi f_m t) sen(2\pi f_0 t) = k_m A\cos(2\pi(f_0 + f_m)t)$$

Somente a faixa lateral superior irá passar

• Se a portadora sofrer uma defasagem de **-90º** ela será $E_0 sen(2\pi f_0 t)$ e **g_2(t)** será positivo. O sinal na saída do somador será:

$$y(t) = k_m A\cos(2\pi(f_0 - f_m)t)$$

Somente a faixa lateral inferior irá passar

Modulação de Amplitude

Modulação AM-SSB/SC

Demodulador AM-SSB/SC

A demodulação **AM-SSB/SC**, da mesma forma que na demodulação **AM-DSB/SC**, só pode ser feita **por detecção síncrona**. Isto significa que deve haver sincronismo (mesma frequência e mesma fase) entre as portadoras da transmissão e da recepção. Porém, as técnicas empregadas na detecção síncrona do sinal **AM-DSB/SC** (por exemplo o Loop de Costas) não podem ser aplicadas na demodulação do sinal **AM-SSB/SC**.

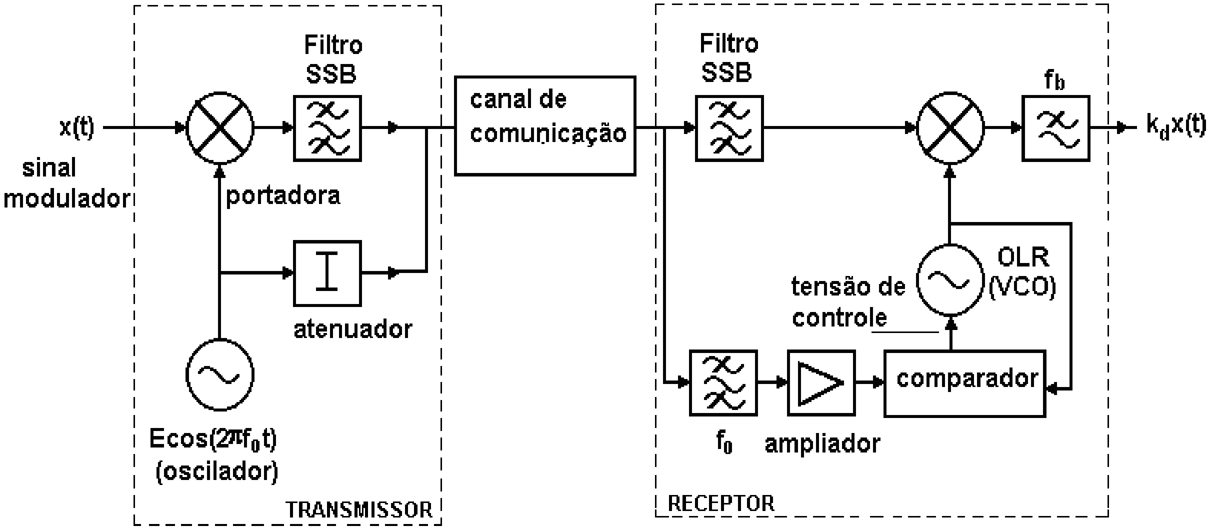
Para detecção síncrona de sinal com modulação AM-SSB/SC são utilizadas as técnicas de Portadora Piloto e Oscilador de Alta Estabilidade:

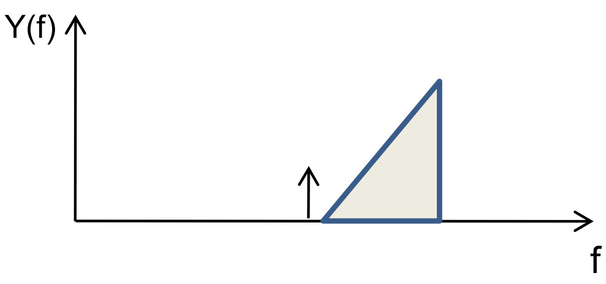
Modulação de Amplitude

Modulação AM-SSB/SC

Demodulador AM-SSB/SC – Portadora Piloto

Neste método insere-se , junto com a faixa lateral desejada, uma amostra atenuada da portadora. No receptor essa portadora piloto é separada por filtragem e utilizada para sincronizar o oscilador local de recepção





A modulação que utiliza esta técnica é chamada de **AM-SSB/RC** – onde o ***RC*** significa portadora reduzida.

Modulação de Amplitude

Modulação AM-SSB/SC

Demodulador AM-SSB/SC

Oscilador de Alta Estabilidade

O uso de uma portadora piloto para cada sinal se torna inviável quando se tem multiplexação FDM (Multiplexação por divisão de frequência), pois aumentaria a potência total transmitida além de propiciar a interferência com outros sinais do sistema. Nestes sistemas a solução é utilizar um **oscilador mestre** (oscilador a cristal de quartzo com alta estabilidade em frequência) no circuito modulador. Todas as portadoras de transmissão são geradas pelo **oscilador mestre**, que também gera uma única **portadora piloto de sincronismo** que será transmitida junto com o sinal FDM.

Na recepção a portadora piloto é utilizada para sincronizar o **oscilador mestre de recepção,** para garantir que este reproduza portadoras em sincronismo com as portadoras geradas no **oscilador mestre de transmissão**.

Modulação de Amplitude

Modulação AM-SSB/TC

AM-SSB/TC é a sigla em inglês para **Modulação de Amplitude-Faixa Lateral Única/Portadora transmitida**.

Esta modulação une as vantagens de se ter banda de transmissão reduzida e detecção/demodulação simplificada utilizando um detector de envoltória.

O sinal modulado na saída do modulador **AM-SSB/TC** é dado por:

$$y(t) = \frac{mE_0}{2}\cos\left(2\pi\left(f_0 + f_m\right)t\right) + E_0\cos\left(2\pi f_0 t\right)$$

Sinal AM-SSB/TC na saída de um MOD por filtragem.

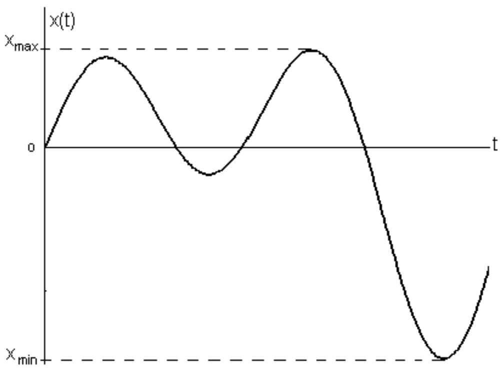
$$y(t) = k_m A\cos\left(2\pi\left(f_0 \pm f_m\right)t\right) + E_0\cos\left(2\pi f_m t\right)$$

Sinal AM-SSB/TC na saída de um modulador por desvio de fase

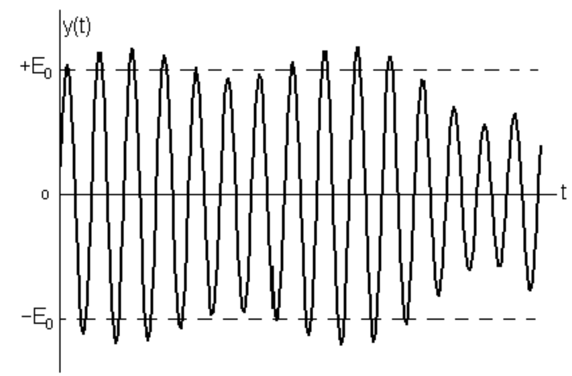
Modulação de Amplitude

Modulação AM-SSB/TC

Comparando o sinal na saída do modulador **AM-SSB/TC**, com o sinal na saída do modulador **AM-DSB/TC**, observamos que a envoltória do sinal **AM-SSB/TC** corresponde à de um sinal **AM-DSB/TC** com metade do índice de modulação. Isto permite a demodulação do sinal **AM-SSB/TC** com um detector de envoltória.



Sinal modulador



Sinal AM-SSB/TC

Na modulação **AM-SSB/TC** a condição de índice de modulação $\mathbf{m_{-} \leq 1}$ também precisa ser atendida para que não ocorra sobremodulação.

Modulação de Amplitude

Modulação AM-VSB/SC

Uma das desvantagens da modulação **AM-SSB** é que necessita de filtros com alto fator de qualidade (modulação por filtragem), ou de circuitos mais complexos (modulação por desvio de fase). Para evitar este inconveniente foi idealizada uma técnica chamada de **AM-VSB** - Modulação de Amplitude – Faixa lateral Vestigial.

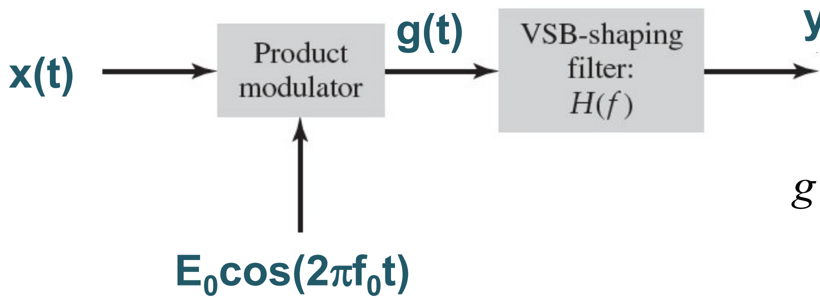
Neste processo, em vez de utilizar um filtro de corte agudo se utiliza um filtro de descida suave, gradual e simétrica em relação à portadora.

Dado **$x(t) = A\cos(2\pi f_m t)$,** limitado em $f_a \leq f_m \leq f_b$, a saída do modulador **AM-DSB/SC,** antes de passar pelo filtro VSB é:

$$g(t) = \frac{k_M A}{2}\cos\left[2\pi\left(f_0 - f_m\right)t\right] + \frac{k_M A}{2}\cos\left[2\pi\left(f_0 + f_m\right)t\right]$$

Modulação de Amplitude

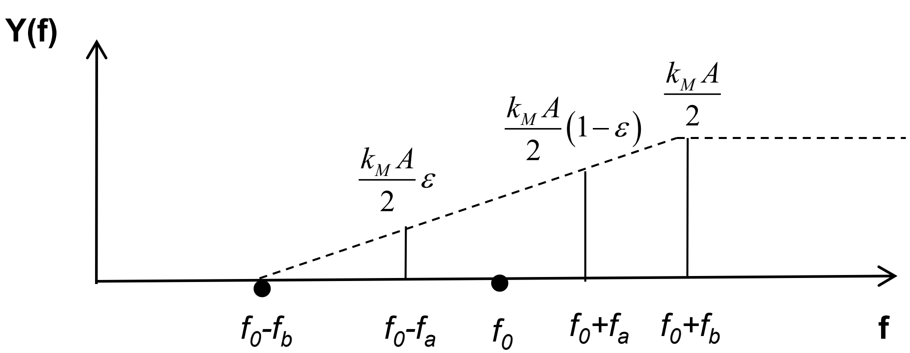
Modulação AM-VSB/SC



y(t) = sinal modulado AM-VSB/SC

$$g(t) = \frac{k_M A}{2}\cos\left[2\pi(f_0 - f_m)t\right] + \frac{k_M A}{2}\cos\left[2\pi(f_0 + f_m)t\right]$$

Ao passar pelo filtro VSB, ocorre o seguinte corte no espectro do sinal de saída Y(f).

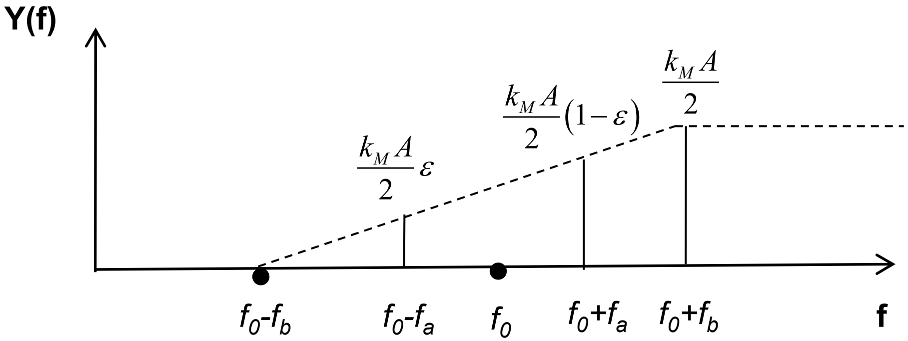


Observe que a faixa lateral inferior neste caso não é totalmente suprimida, e a faixa lateral superior também sofre um corte nas componentes de frequências mais baixas. Com um arranjo desta natureza, o conteúdo de energia não se perde, já que o espectro de amplitude das bandas laterais é originalmente simétrico em relação à portadora e o filtro VSB é construído simetricamente, de forma que

$$G(f_0 - f_m) + G(f_0 + f_m) = G_0$$

Modulação de Amplitude

Modulação AM-VSB/SC



$$G(f_0 - f_a) + G(f_0 + f_a) = G_0$$

Onde $\boldsymbol{G_0}$ é o ganho na faixa média de resposta do filtro.

Com esta técnica consegue se recuperar precisamente a energia do sinal. Porém, o vestígio de frequências da faixa a ser suprimida que não são eliminadas pelo filtro ficam distorcidas em amplitude o que implica em distorção do sinal modulado **y(t)**. Entretanto, esta faixa irregular é pequena e isto não traz grandes prejuízos à recuperação do sinal.

O sinal **y(t)** na saída do modulador **AM-VSB/SC,** considerando **$\varepsilon(f_m)$** como o fator de atenuação do filtro passa-faixa, é dado por:

$$y(t) = \frac{k_M A}{2}\varepsilon(f_m)\cos\left(2\pi(f_0 - f_m)t\right) + \frac{k_M A}{2}\left(1-\varepsilon(f_m)\right)\cos\left(2\pi(f_0 + f_m)t\right)$$ **Faixa lateral vestigial inferior**

$$y(t) = \frac{k_M A}{2}\varepsilon(f_m)\cos\left(2\pi(f_0 + f_m)t\right) + \frac{k_M A}{2}\left(1-\varepsilon(f_m)\right)\cos\left(2\pi(f_0 - f_m)t\right)$$ **Faixa lateral vestigial superior**

Modulação de Amplitude

Modulação AM-VSB/SC e AM-VSB/TC

A demodulação **AM-VSB/SC** necessita também de um processo de detecção síncrona.

A opção de transmitir junto ao sinal **AM-VSB** a portadora – **AM-VSB/TC**, simplifica o processo de demodulação. Este processo é correntemente empregado para a transmissão do **sinal público de televisão**. Os fatores que levam o formato de modulação **AM-VSB/TC** a ser o mais indicado para transmitir sinais de vídeo (TV) são:

• O sinal de vídeo exibe uma grande largura de banda – o que sugere uma modulação que só utiliza uma banda lateral;

• O sinal de vídeo possui significativo conteúdo de baixa frequência – o que sugere a modulação AM-VSB, pois não há risco das frequências baixas serem eliminadas na filtagem;

• Os circuitos utilizados para demodulação no receptor devem ser simples e, portanto, baratos. Isso sugere o uso de detecção de envoltória, o que requer a adição de uma portadora à onda modulada.

Modulação de Amplitude

Potência de Sinal Modulado em Amplitude

A potência média de um sinal modulado **y(t)** é dada por: $P_T = \dfrac{\overline{y^2(t)}}{R}$

É chamada de **potência média normalizada** a potência média dissipada em um resistor R=1Ω.

A **potência média da portadora** senoidal é: $P_0 = \dfrac{E_0^2}{2R}$

O **valor quadrático médio** do sinal modulador **x(t)** é: $\sigma^2 = \overline{x^2(t)}$

O **índice de modulação de amplitude** é: $m = \dfrac{k_M P}{E_0}$ onde **P = |x(t)|$_{max}$**

Denomina-se **fator de pico** a relação : $k = \dfrac{P}{\sigma}$

Modulação de Amplitude

Potência de Sinal Modulado em Amplitude

Para sinais moduladores com valor médio nulo (sinais periódicos e simétricos em relação ao eixo do tempo), as potências dissipadas nas diferentes modulações AM são:

AM-DSB/TC

A potência média do sinal modulado **AM-DSB/TC** sobre a resistência R é:

$$P_T = P_0\left[1+\frac{k_M^2}{E_0^2}\overline{x^2(t)}\right] = P_0\left[1+\left(\frac{k_M\sigma}{E_0}\right)^2\right] = P_0\left[1+\left(\frac{m}{k}\right)^2\right]$$

AM-DSB/SC

A potência média do sinal modulado **AM-DSB/SC** sobre a resistência R é:

$$P_T = \frac{k_M^2}{2R}\overline{x^2(t)} = \frac{(k_M\sigma)^2}{2R}$$

Essa potência se divide igualmente entre as faixas laterais inferior e superior

Modulação de Amplitude

Potência de Sinal Modulado em Amplitude

AM-SSB/SC

Na modulação **AM-SSB/SC** uma das faixas laterais é suprimida, logo, a potência do sinal modulado **AM-SSB/SC** sobre R é a metade do sinal **AM-DSB/SC**.

$$P_T = \frac{k_M^2}{4R}\overline{x^2(t)} = \frac{(k_M\sigma)^2}{4R}$$

AM-SSB/TC

A potência média do sinal modulado **AM-SSB/TC** sobre a resistência R é:

$$P_T = P_0\left[1+\frac{k_M^2}{2E_0^2}\overline{x^2(t)}\right] = P_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{k_M\sigma}{E_0}\right)^2\right]$$

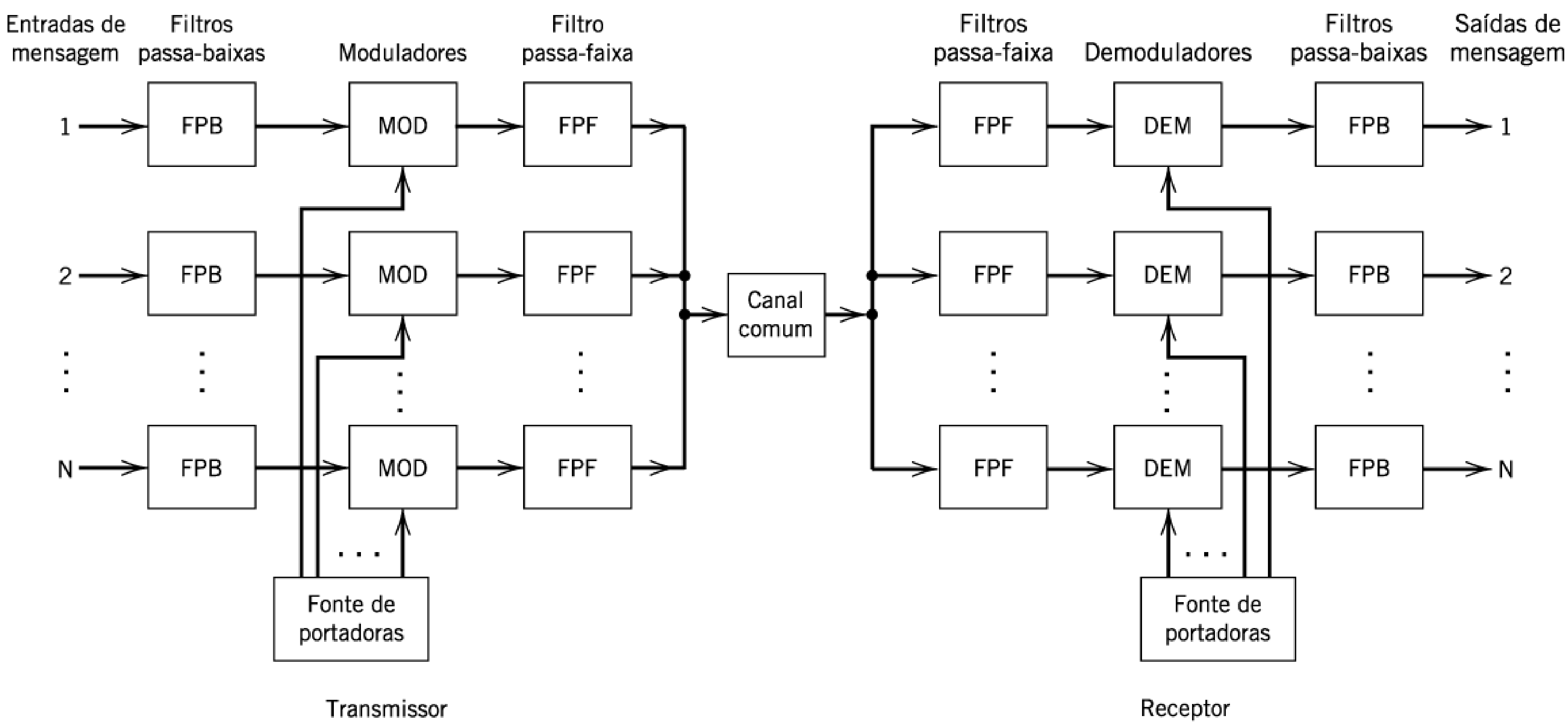
Aplicações da Modulação em Amplitude

Multiplexação FDM

- A Multiplexação por Divisão de Frequências **FDM** (***F**requency **D**ivision Multiplexing*) foi idealizada com o objetivo de aproveitar a largura de banda do meio de transmissão.
- Para obter máximo aproveitamento o FDM deve ser acompanhado da modulação **AM-SSB/SC**.
- Através de múltiplos processos de modulação, consegue-se colocar até <u>milhares de canais de voz</u> compartilhando simultaneamente o mesmo meio de comunicação.

Aplicações da Modulação em Amplitude

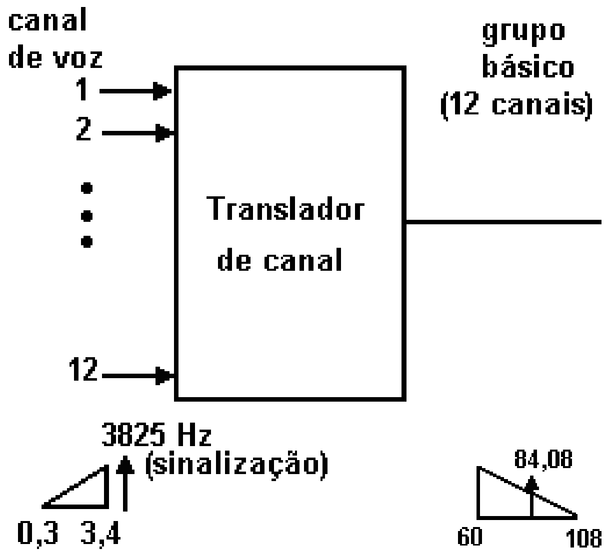
Multiplexação FDM



Aplicações da Modulação em Amplitude

Multiplexação FDM

• O escalonamento em frequência - chamado de ***hierarquia FDM*** é estabelecido em recomendação do ITU-T. Para isso utilizam-se **Transladores de canal** composto por um MODEM (**Mo**dulador e **Dem**odulador) para cada canal.

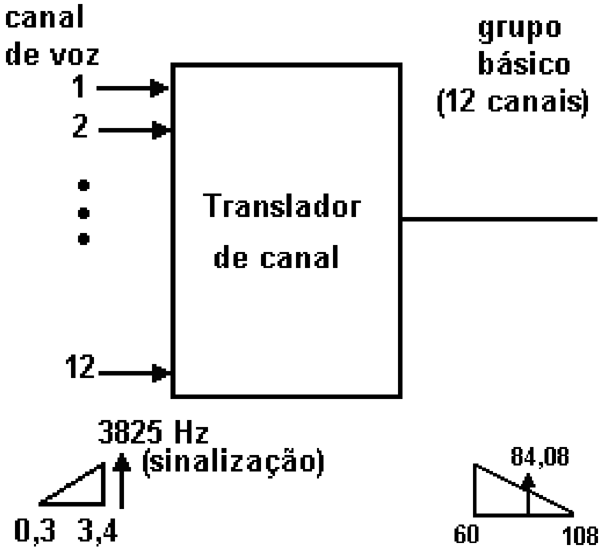


Translador de Canal

Aplicações da Modulação em Amplitude

Multiplexação FDM – Translador de Canal

Recebe em sua entrada até **12 canais**, sendo que cada canal contém além do espectro do sinal de voz (0.3 a 3.4 kHz), uma frequência de sinalização em **3825** Hz.

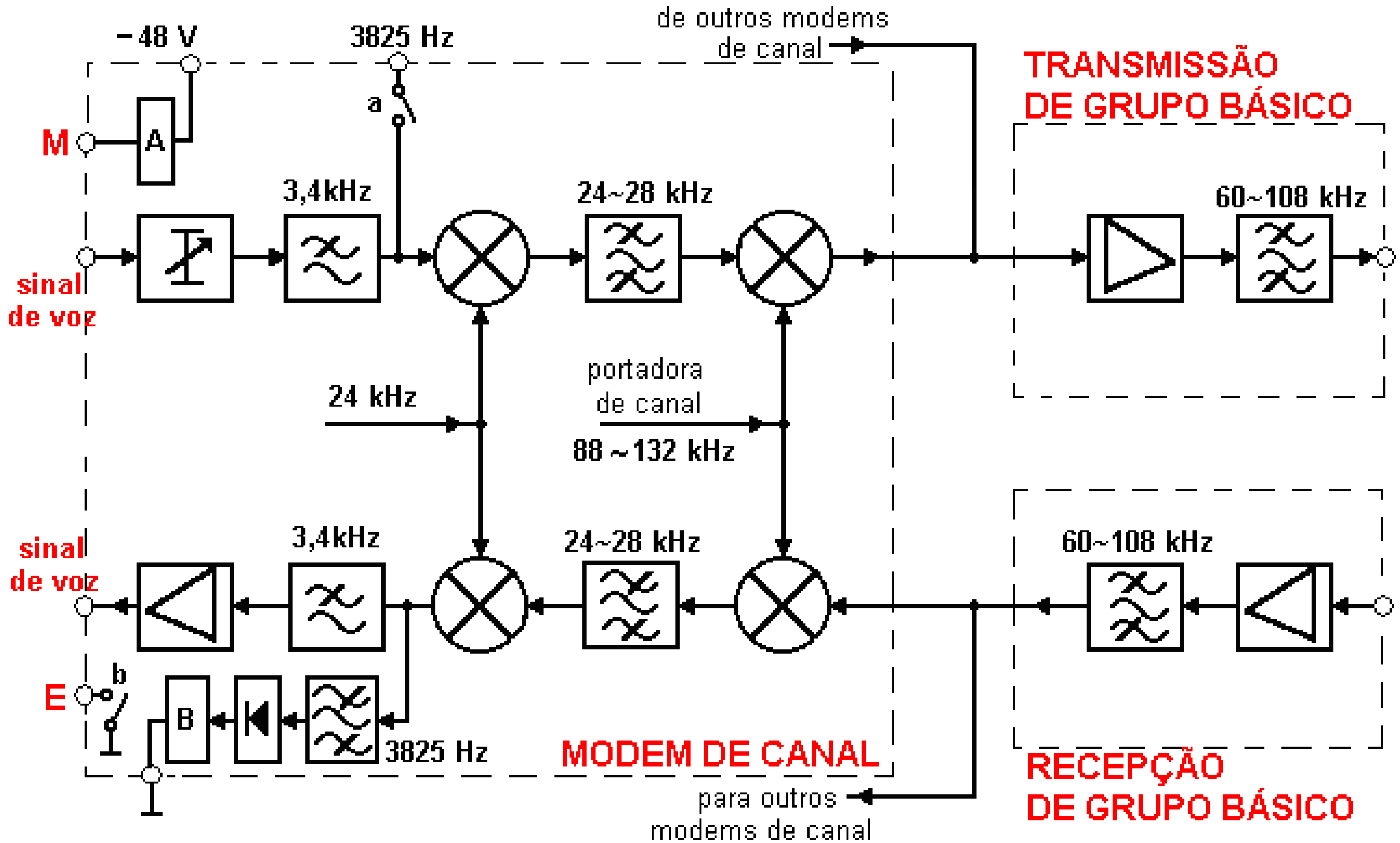


A saída do translador de canal é formado um **grupo básico** (12 canais ocupando a banda de 60kHz a 108kHz) e um sinal de monitoramento na frequência de 84,08kHz.

II. Modulação de Amplitude

Aplicações da Modulação em Amplitude

Multiplexação FDM – Modem de Canal (do Translador)



Aplicações da Modulação em Amplitude

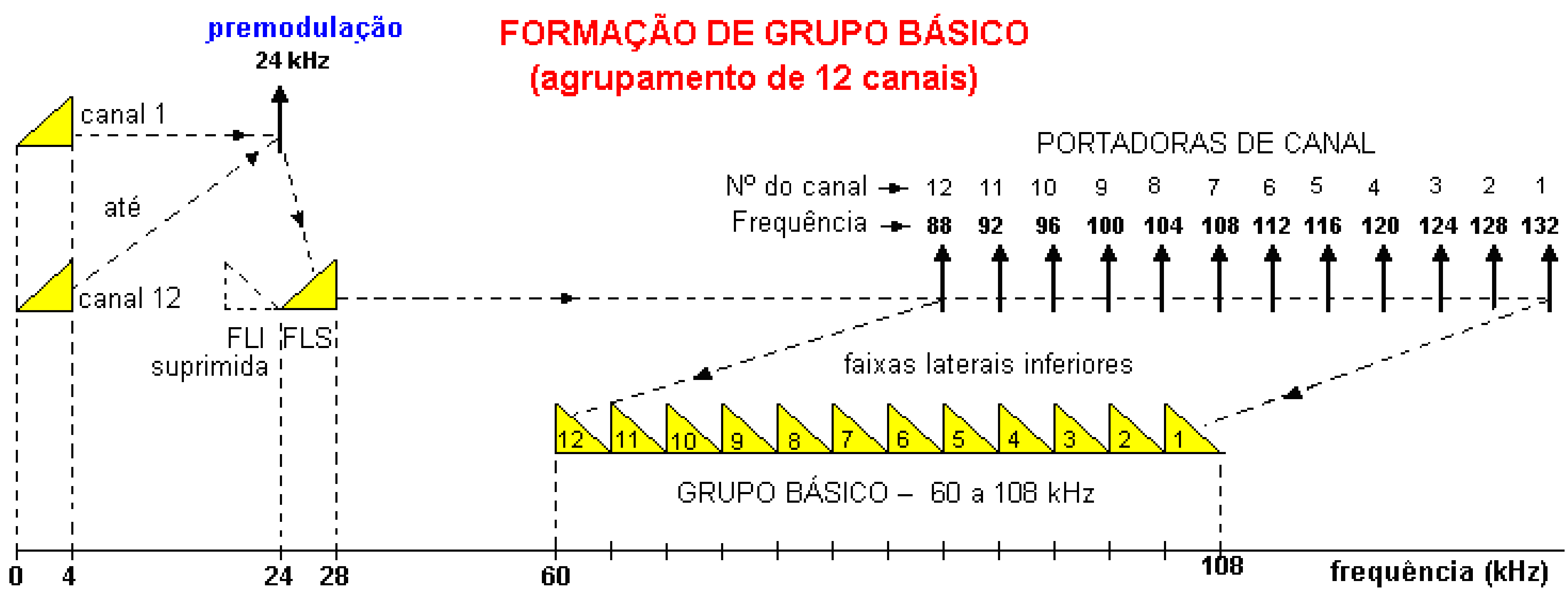
Multiplexação FDM – Modem de Canal (do Translador)

- Cada um dos **12 canais** é filtrado, somado à frequência de sinalização e modulado em amplitude a uma **portadora de 24 kHz**.
- O sinal gerado **AM-DSB/SC** passa por um filtro SSB que elimina a faixa lateral inferior.
- **Na sequência o sinal AM-SSB/SC modula novamente uma portadora. Esta portadora é individual para cada um dos 12 canais e vai de 88 kHz a 132 kHz, espaçadas de 4 kHz**.
- Um único filtro passa-faixa (60kHz a 108kHz), seleciona somente as faixas laterais inferiores dos 12 canais.

Aplicações da Modulação em Amplitude

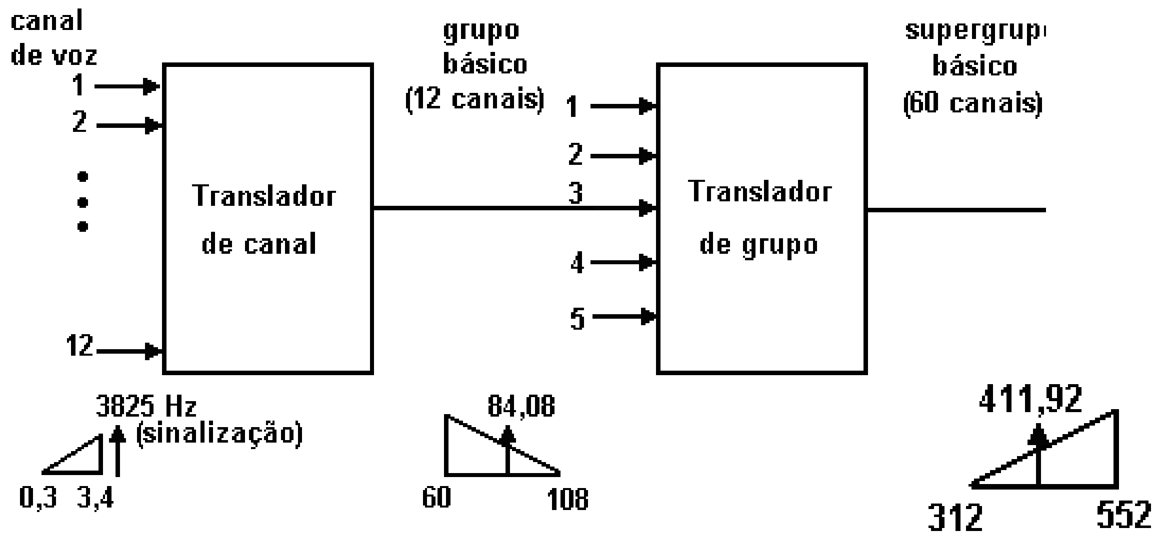
Multiplexação FDM – Modem de Canal (do Translador)

Olhando o Espectro do Grupo Básico



Aplicações da Modulação em Amplitude

Multiplexação FDM – Translador de Grupo



• Recebe 5 grupos básicos e entrega na saída **o supergrupo básico contendo 60 canais no intervalo de 312kHz a 552kHz**.

• Possui um **MODEM** para cada grupo básico de entrada.

• Cada grupo modula uma portadora individual espaçada de **48kHz**.

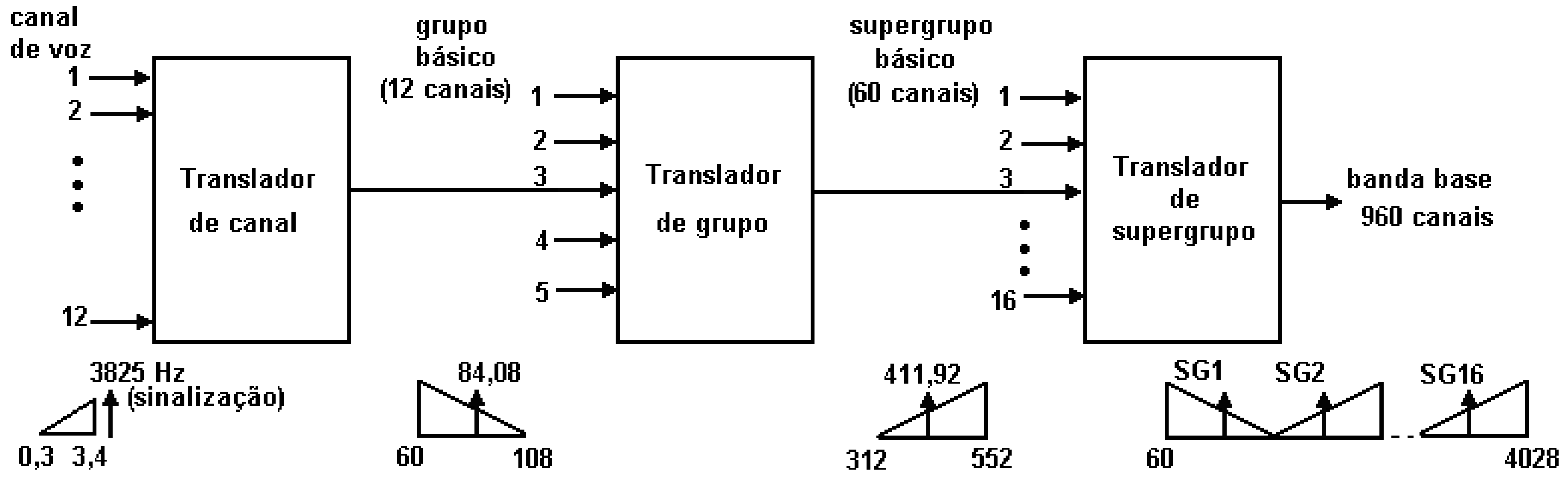
• É adicionado a cada supergrupo de saída um sinal de monitoramento em **411,92kHz**.

Aplicações da Modulação em Amplitude

Multiplexação FDM – Translador de Supergrupo

O translador de supergrupo pode ser implementado de duas formas:

Na primeira opção, **16 supergrupos básicos** entram no translador de grupo e na saída tem-se **960 (16 x 60) canais de voz** ocupando a **banda base FDM.**



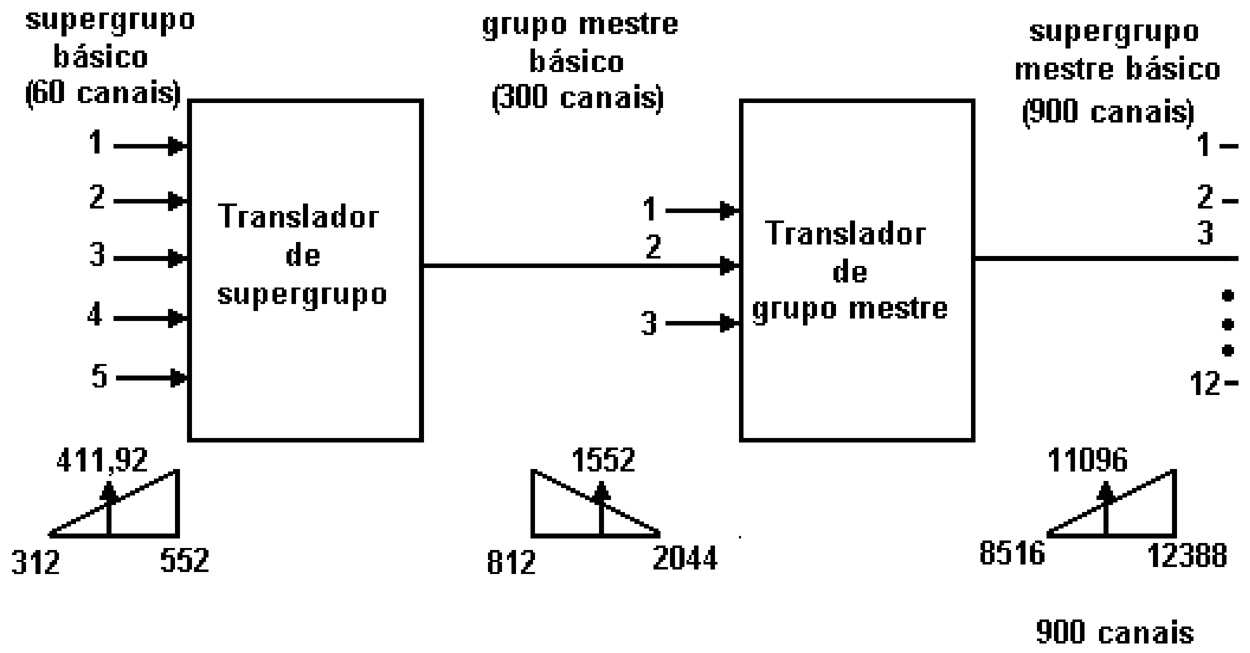
Aplicações da Modulação em Amplitude

Multiplexação FDM – Translador de Supergrupo

O translador de supergrupo pode ser implementado de duas formas:

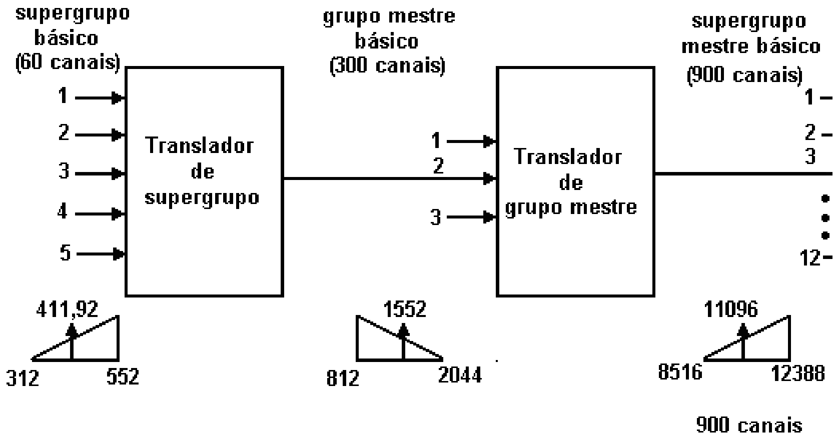
Na segunda opção, 5 supergrupos básicos entram no translador e na saída tem-se um **grupo mestre básico** (300 canais na faixa de 812kHz a 2044kHz).

Cada grupo mestre básico é acrescido de um sinal de monitoramento em 1552kHz.



Aplicações da Modulação em Amplitude

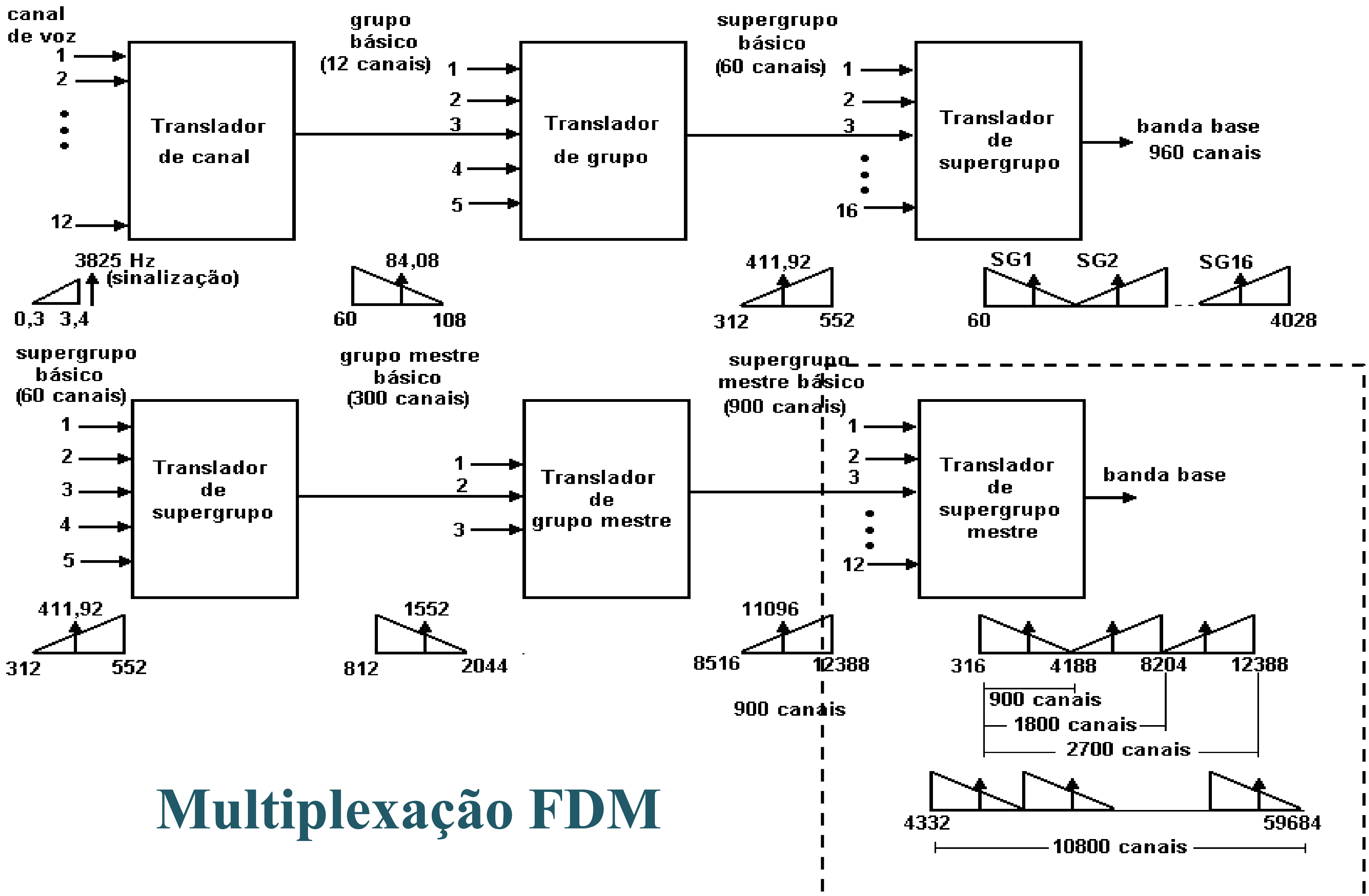
Multiplexação FDM – Translador de Grupo e Supergrupo Mestre



Translador de grupo mestre: entram 3 grupos mestre básicos, cada um modula uma portadora individual, e sai um supergrupo mestre básico com 900 canais de voz na faixa de 8516 a 12388kHz com um sinal de monitoramento em 11096kHz.

Translador de supergrupo mestre: Na entrada do translador de supergrupo mestre podem entrar de **1 até 12 grupos mestres** e na saída tem-se o sinal FDM banda base.

Aplicações da Modulação em Amplitude



Multiplexação FDM

Aplicações da Modulação em Amplitude

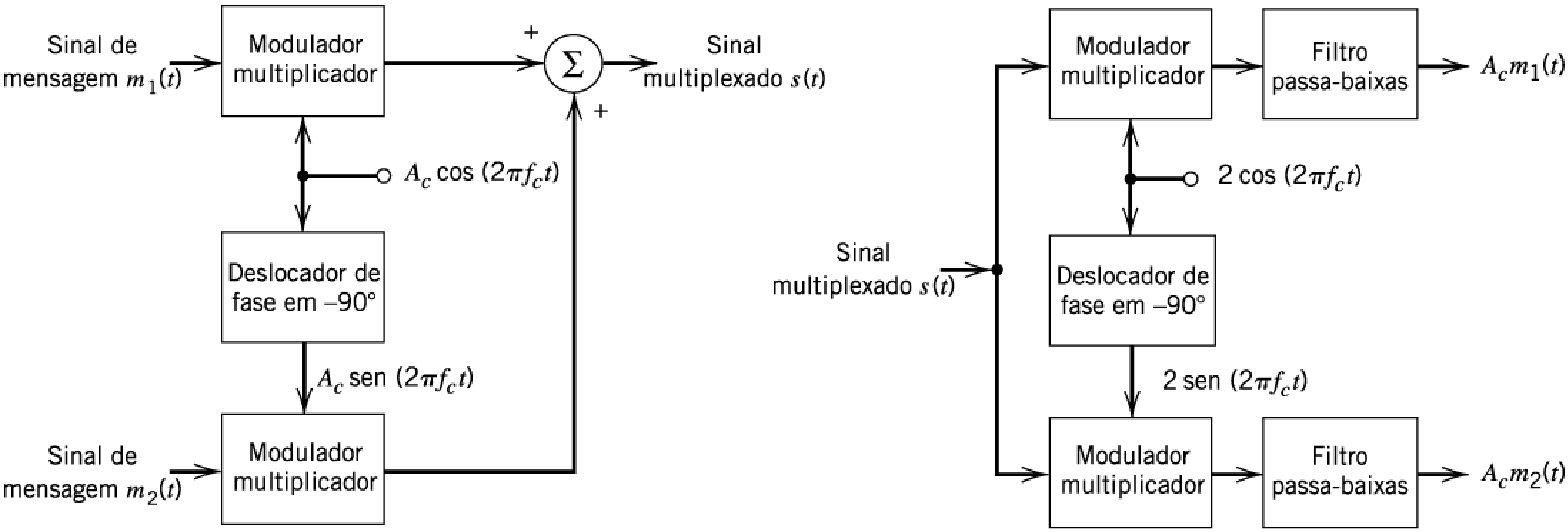
Multiplexação FDM – Meios de Comunicaçao

A banda base FDM depende do canal de comunicação:

- O par simétrico de fios metálicos suporta FDM de até 24 canais de voz;
- O enlace de rádio suportam sistemas FDM com até 2700 canais de voz;
- O cabo coaxial suporta FDM com até 10800 canais de voz.

Aplicações da Modulação em Amplitude

Multiplexação QAM



Prove matematicamente que consegues recuperar os sinais ***$m_1(t)$ e $m_2(t)$*** através do diagrama acima.

III. Modulação Angular

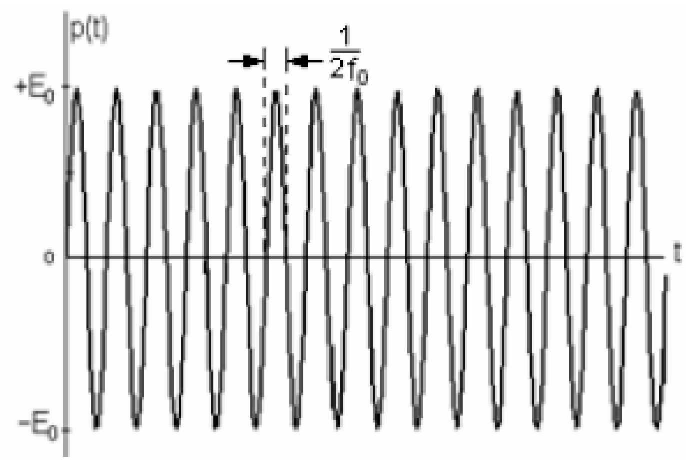
MODULAÇÃO ANGULAR

ÂNGULO acompanha x(t) $\rightarrow \quad y(t) = E_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$

amplitude inalterada — *ângulo* **alterado**

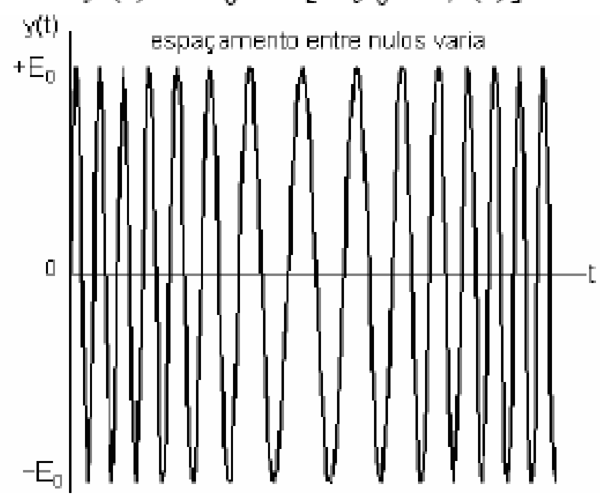
Portadora

$$p(t) = E_0 \cos(2\pi f_0 t)$$



Sinal modulado em ***ângulo***

$$y(t) = E_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$$



Modulação Angular

A modulação angular, assim como a modulação em amplitude, é chamada de modulação de onda contínua pois o sinal a ser modulado é uma portadora senoidal.

$$p(t) = E_0 \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi(t)\right) = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right) \quad \textbf{portadora}$$

Onde $\varphi(t)$ é a fase inicial da portadora, que assumiremos ser **nula** por simplificação.

Na **modulação angular** o sinal modulador **x(t)** irá alterar a fase – **Modulação em Fase (PM)**, ou a frequência da portadora – **Modulação em Frequência (FM)**.

Modulação em frequência e modulação em fase são inter-relacionadas, e por este motivo é que as duas são conhecidas como modulação angular.

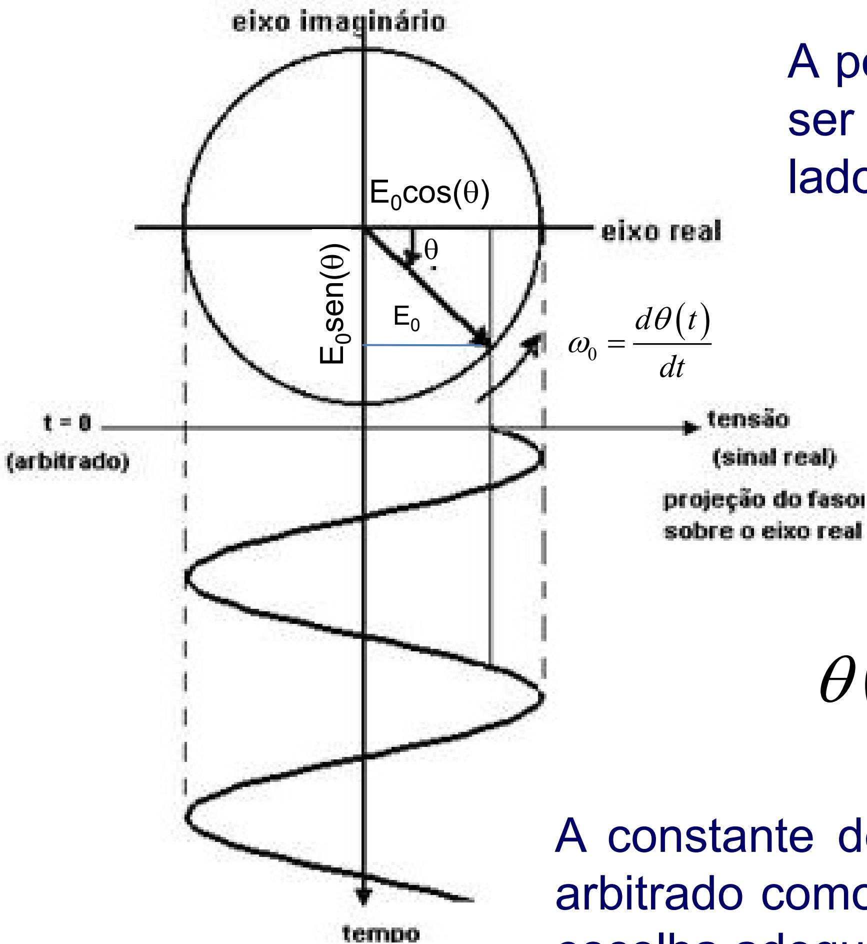
Para entendermos melhor este inter-relacionamento vamos definir a portadora como:

$$p(t) = E_0 \cos\theta(t)$$

Onde

$\theta(t) = \omega_0(t)$ é a ***fase instantânea*** da portadora que, como pode ser observado, é uma função linear da ***frequência angular***.

Modulação Angular



A portadora não modulada $p(t) = E_0 \cos\theta(t)$ pode ser representada através do diagrama fasorial ao lado, onde

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0$$

é a frequência angular da portadora, que é um valor constante indicando que a rotação é uniforme.

$$\theta(t) = \int \omega_0 dt = \omega_0 t + \phi_0$$ ***fase instantânea***

A constante de integração $\boldsymbol{\phi_0 = \theta(0)}$ é o ângulo no instante arbitrado como origem ***t* = *0***. Pode-se fazer $\boldsymbol{\phi_0}$**= 0** através da escolha adequada da origem.

Fica evidente que há uma relação direta entre frequência e fase.

Modulação Angular

Quando a portadora é modulada em ângulo, o sinal na saída do modulador é:

$$y(t) = E_0 \cos\left[\theta(t)\right] = E_0 \cos\left[\omega_0 t + \phi(t)\right]$$ **Sinal modulado**

Onde $\theta(t) = \omega_0 t + \phi(t)$ é a fase instantânea de ***y(t)*** e ***ϕ(t)*** é o **desvio instantâneo de fase.**

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_i(t)$$

Onde ***ω_i(t)*** é a **frequência angular instantânea** do sinal modulado ***y(t)***. Observe que a frequência angular do sinal modulado é uma função do tempo indicando rotação fasorial não uniforme.

A ***frequência instantânea*** em Hertz do sinal modulado é:

$$f_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{2\pi} = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Modulação Angular

$$f_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{2\pi} = f_0 + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}}$$

Frequência da portadora

Frequência variante no tempo imposta pelo sinal x(t) em torno da frequência da portadora

É chamado de **índice de modulação angular** o valor absoluto máximo do desvio instantâneo de fase

$$\beta = \left|\phi(t)\right|_{\max}$$

$\boldsymbol{\beta}$ é medido em radianos.

É definido como **desvio de frequência** o valor absoluto máximo do afastamento da frequência instantânea em relação à frequência central ***(f$_0$)***.

$$\Delta f = \left|f_i(t) - f_0\right|_{\max} = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{d\phi(t)}{dt}\right|_{\max}$$

Modulação Angular

Tipos de Modulação Angular

Modulação de Fase (PM):

Ocorre quando a informação do sinal **x(t)** é impressa no ***desvio instantâneo de fase***.

$$\phi(t) = k_P x(t)$$

k_P (rad/V) é a **constante de modulação de fase** ou **sensibilidade** do modulador PM.

O sinal na saída do modulador PM é descrito por:

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + k_P x(t)\right]$$

A frequência instantânea do sinal modulado em fase é:

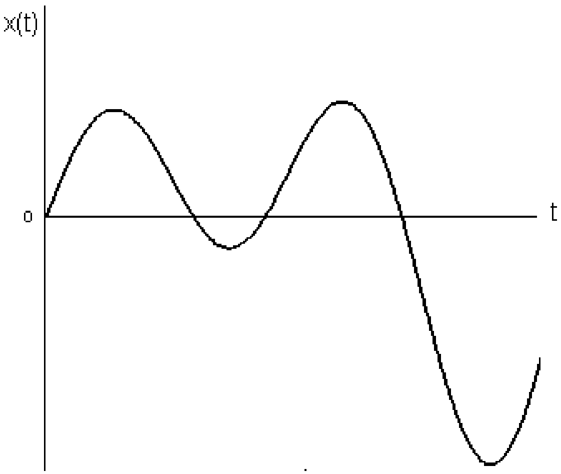
$$f_i(t) = f_0 + \frac{k_P}{2\pi}\frac{d}{dt}x(t)$$

Ao se modular em fase se está também modulando a frequência com a derivada do sinal modulador

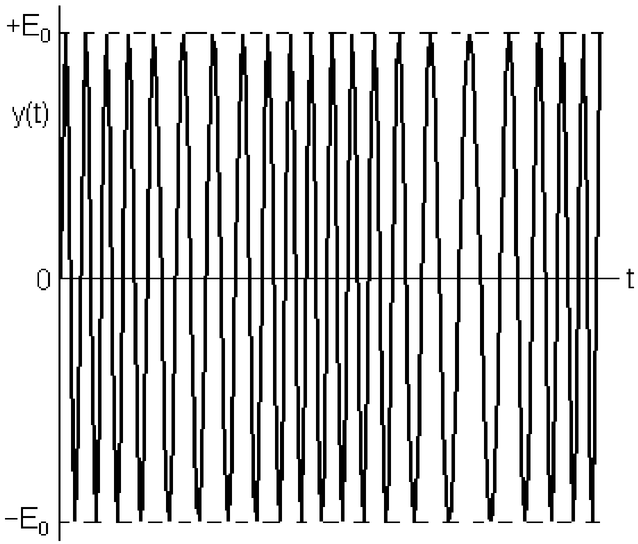
Modulação Angular

Tipos de Modulação Angular

Modulação de Fase (PM):



sinal modulador



sinal PM

frequência instantânea proporcional à derivada de x(t)

Desvio instantâneo de fase $\phi(t) = k_P x(t)$

Frequência instantânea: $f_i(t) = f_0 + \frac{k_P}{2\pi}\frac{d}{dt}x(t)$

Modulação Angular

Tipos de Modulação Angular

Modulação de Frequência (FM):

Ocorre quando a informação do sinal **x(t)** é impressa na ***frequência instantânea***.

$$f_i(t) = f_0 + k_F x(t)$$

k_F (Hz/V) é a **constante de modulação de frequência** ou **sensibilidade** do modulador FM.

A frequência instantânea é escrita na forma geral como:

$$f_i(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Comparando as duas equações temos:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt} = k_F x(t)$$

$$\phi(t) = 2\pi k_F \int x(t)$$

Modulação Angular

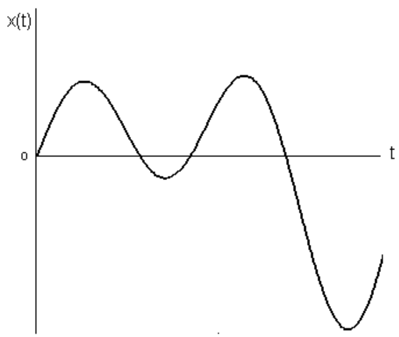
Tipos de Modulação Angular

Modulação de Frequência (FM):

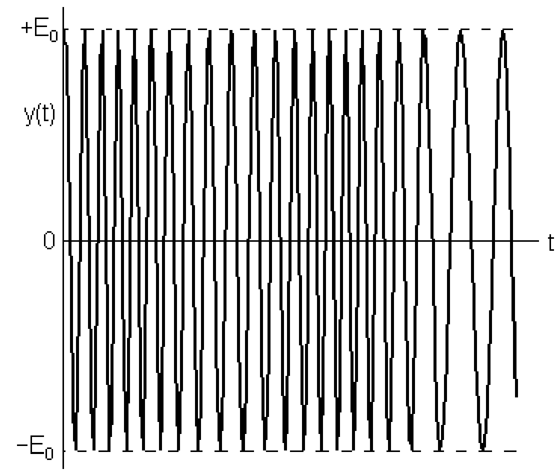
O sinal na saída do modulador FM é descrito por:

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi k_F \int x(t)\,dt\right]$$

Ao se modular em frequência se está também modulando a fase com a integral do sinal modulador.



sinal modulador



sinal FM
frequência instantânea proporcional a x(t)

Frequência instantânea: $f_i(t) = f_0 + k_F x(t)$

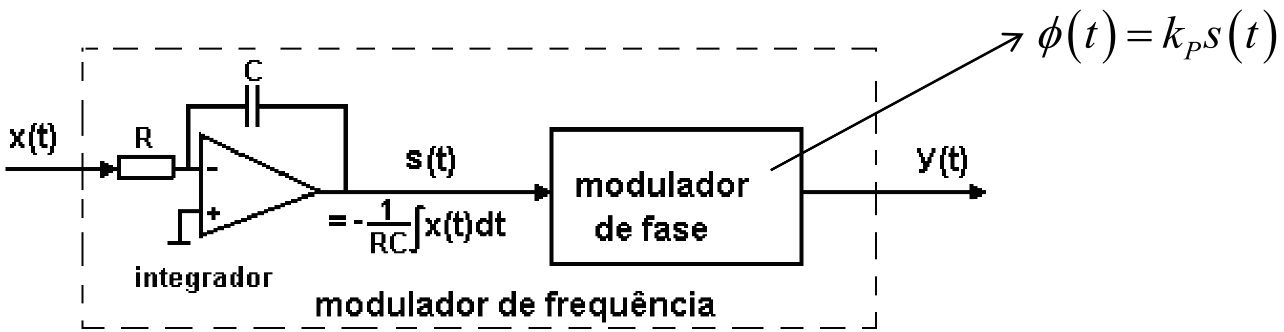
Desvio instantâneo de fase $\phi(t) = 2\pi k_F \int x(t)dt$

Modulação Angular

Conversão PM-FM e FM-PM

Tanto na modulação PM quanto na FM o **desvio de fase $\phi(t)$** e a **frequência instantânea** da portadora variam com o tempo acompanhando o sinal **x(t)**. Dessa forma pode-se construir um modulador PM através de um modulador FM e vice-versa.

Modulação FM utilizando PM



Se o sinal **x(t)** é integrado antes de ser aplicado a um modulador de fase, obtém-se na saída desse modulador a portadora modulada em frequência.

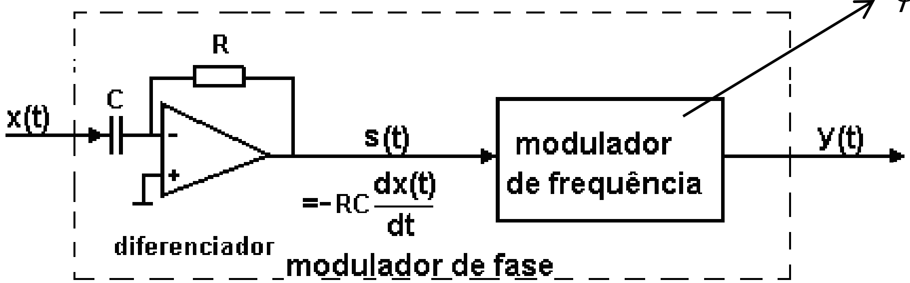
$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t - k_P \frac{1}{RC}\int x(t)\,dt\right]$$

Modulação Angular

Conversão PM-FM e FM-PM

Modulação PM utilizando FM

$$\phi(t) = 2\pi k_F \int s(t)$$



Se o sinal **x(t)** é derivado antes de ser aplicado a um modulador de frequência, obtém-se na saída desse modulador a portadora modulada em fase pelo sinal **x(t)**.

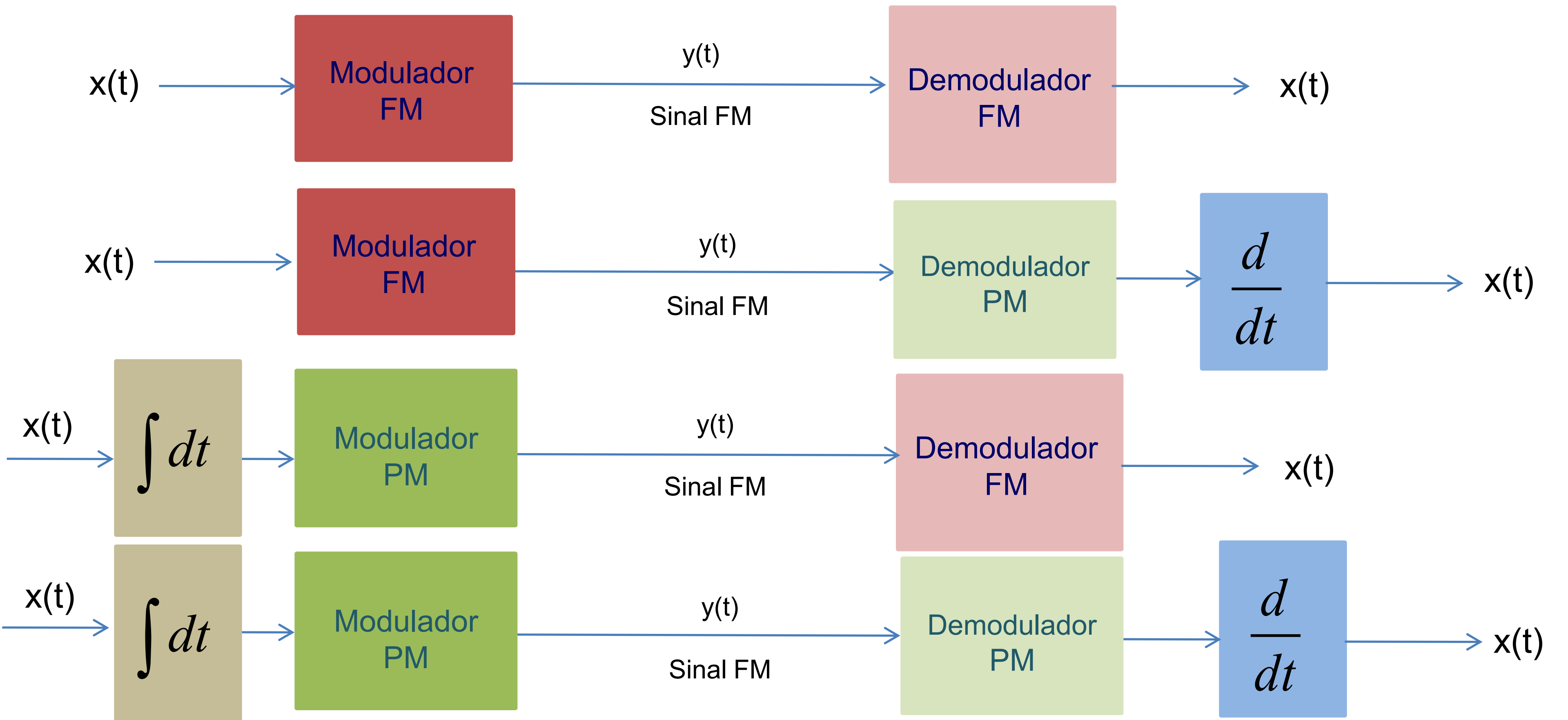
$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t - 2\pi k_F RC \cdot x(t)\right]$$

Modulação Angular

Realização de Sistemas de Modulação Angular

A montagem dos sistemas de modulação angular pode ser realizada através de diferentes arranjos de moduladores e demoduladores PM e FM.

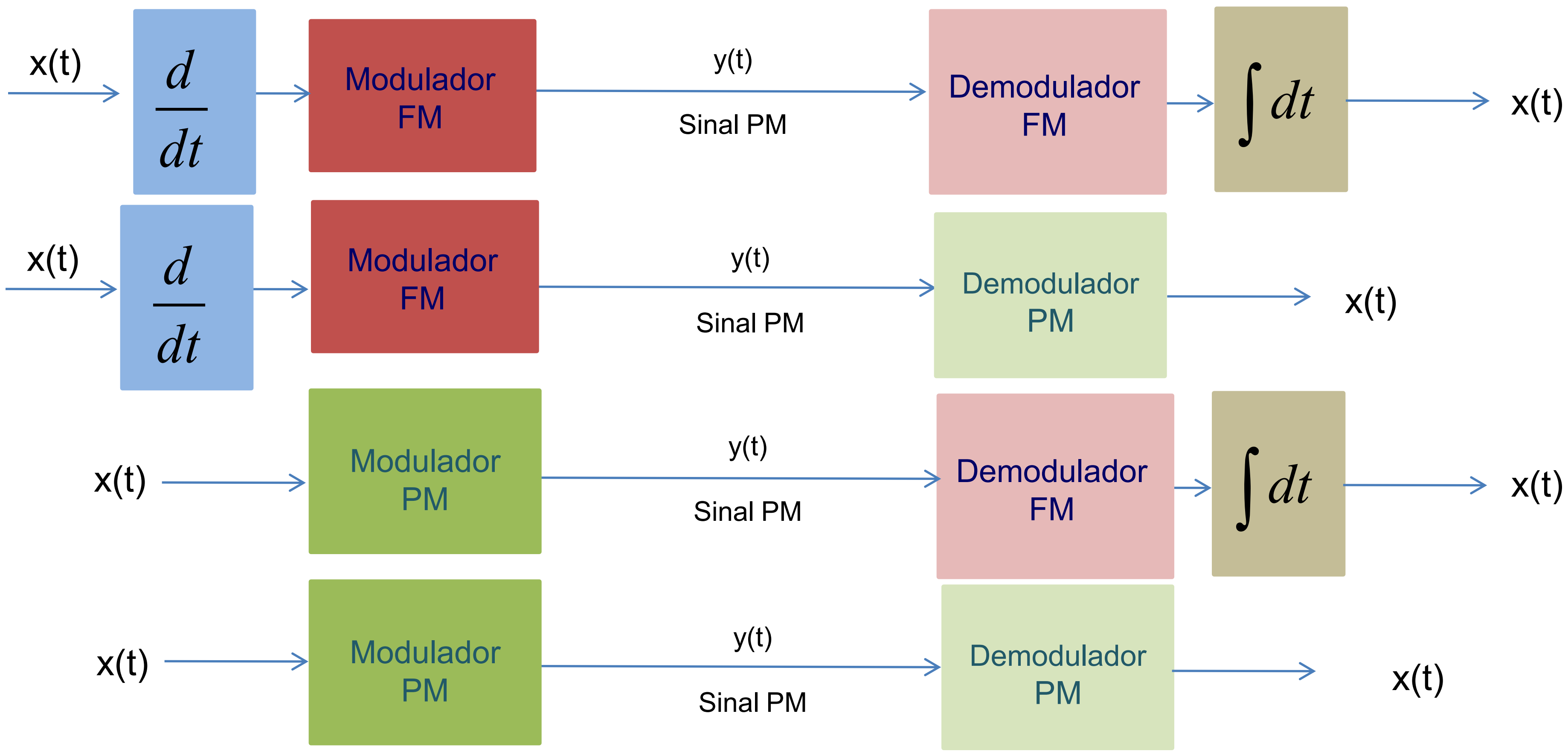
Transmissão de sinais FM



Modulação Angular

Realização de Sistemas de Modulação Angular

Transmissão de sinais PM



Modulação Angular

Comparação entre FM e PM

Considerando um sinal modulador senoidal **x(t) = Acos(2πf$_m$t)**, tem-se os seguintes parâmetros das modulações PM e FM.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	PM	FM
Desvio instantâneo de fase	$\phi(t)$	rad	$k_P A\cos(2\pi f_m t)$	$\frac{k_F A}{f_m} sen(2\pi f_m t)$
Índice de modulação angular	β	rad	$k_P A$	$\frac{k_F A}{f_m}$
Frequência instantânea	$f_i(t)$	Hz	$f_0 - k_P A f_m sen(2\pi f_m t)$	$f_0 + k_F A\cos(2\pi f_m t)$
Desvio de frequência	Δf	Hz	$k_P A f_m$	$k_F A$
Sinal modulado	y(t)	V	$E_0\cos\left[2\pi f_0 t + \beta\cos(2\pi f_m t)\right]$	$E_0\cos\left[2\pi f_0 t + \beta sen(2\pi f_m t)\right]$

Tanto para PM quanto para FM vale a relação: $\Delta f = \beta f_m$

Modulação Angular

Desvios e Excursões

Em ambas as modulações angulares a informação a ser transmitida é impressa através de desvios em torno do valor nominal dos parâmetros de frequência e fase da portadora não modulada.

Os **desvios instantâneos** de **fase** e **frequência** são conhecidos no domínio do tempo e é conveniente entendermos o seu significado no domínio da frequência.

$$\left.\begin{aligned} f_i(t) &= f_0 + k_F x(t) \\ \phi(t) &= 2\pi k_F \int x(t)dt \end{aligned}\right\} \text{Modulação FM}$$

$$\left.\begin{aligned} \phi(t) &= k_P x(t) \\ f_i(t) &= f_0 + \frac{k_P}{2\pi}\frac{d}{dt}x(t) \end{aligned}\right\} \text{Modulação PM}$$

Modulação Angular

Desvios e Excursões

Os desvios em frequência e em fase deformam a portadora senoidal e em consequência o sinal modulado não pode ser representado por uma simples raia no domínio da frequência.

Tomemos como exemplo um sinal modulado em **FM** por um sinal senoidal.

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

$$\beta = \frac{k_F A}{f_m} \qquad \Delta f = k_F A \qquad f_i(t) = f_0 + k_F x(t)$$

Um aumento de **amplitude** do sinal modulador aumenta a frequência instantânea, o que **"comprime"** o sinal modulado – aumenta a largura de banda. Uma diminuição de amplitude do sinal modulador diminui o desvio de frequência, o que "expande" o sinal modulado – diminui a largura de banda

Modulação Angular

Porcentagem de Modulação

Na modulação angular tanto o índice de modulação angular β como o desvio de frequência **Δf** variam como uma função do sinal modulador. Considerando que a intensidade do sinal modulador pode variar dentro de uma faixa extensa de valores, seria necessário uma largura de banda bem larga para transmitir o sinal modulado.

Na modulação angular é arbitrado um desvio de frequência máximo para cada tipo de aplicação específica. Este desvio máximo é arbitrado considerando que desvios acima dele não irão prejudicar de forma significativa a recuperação da informação. Este desvio serve para limitar o espectro do sinal modulado e baseado nele se define a Porcentagem de Modulação Angular.

Por exemplo, em transmissões de radiodifusão sonora em FM o desvio de frequência máximo, definido com 100% de modulação é arbitrado em Δf_{max} = 75kHz, ou 150 kHz de excursão máxima. Para o som (FM) em televisão fixou-se Δf_{max} = 25kHz. Então, se um sinal modulador produz desvio de frequência de ± 15kHz, a percentagem de modulação será.

$$M_{ang} = \frac{15}{75} = 20\%$$

Radiodifusora FM

$$M_{ang} = \frac{15}{25} = 60\%$$

Som de TV

Modulação Angular

Potência do sinal modulado

Na modulação angular a amplitude é mantida constante e, como a potência é função da amplitude, a mesma é constante o tempo todo.

A potência média normalizada do sinal modulado em ângulo **y(t) = E_0cos[θ(t)]** é:

$$P_{mn} = \overline{y^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E_0^2 \cos^2\left[\theta(t)\right] dt$$

Aplicando a identidade trigonométrica,

$$E_0^2 \cos^2\left[\theta(t)\right] = \frac{E_0^2 + E_0^2 \cos\left[2\theta(t)\right]}{2}$$

$$P_{mn} = \frac{E_0{}^2}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt + \frac{E_0{}^2}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos[2\theta(t)]\, dt$$

Este limite é nulo

Modulação Angular

Potência do sinal modulado

$$P_{mn} = \frac{E_0^2}{2}$$ **Potência total dissipada**

A potência total do sinal modulado em ângulo **NÃO** depende do sinal modulador e é igual à potência da portadora não modulada.

***Na modulação angular a potência total permanece inalterada. Então, ao se produzirem raias espectrais, a potência associada às mesmas só pode ser produzida às custas da potência associada à portadora*.**

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Diferentemente da modulação **AM**, a modulação em ângulo é um processo não linear (dão origem a outras frequências), o que complica a análise espectral do sinal modulado. Porém, conseguimos entender bem o comportamento espectral do sinal modulado em ângulo se considerarmos que o sinal modulador é um único tom senoidal.

Como já foi demonstrado **FM** e **PM** se relacionam estreitamente entre si, se conhecermos as propriedades de uma, poderemos determinar as da outra. Mas, devido ao fato da modulação **FM** ser a modulação utilizada em sistemas de radiodifusão **FM** e na modulação do som dos sistemas públicos de TV ela foi escolhida para a análise do comportamento espectral. O sinal modulado **FM** por uma onda senoidal **$x(t) = A\cos(2\pi f_m t)$,** é:

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

Onde: $\beta = \dfrac{k_F A}{f_m}$ é o índice de modulação angular **FM**

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

A composição do espectro do sinal modulado depende do índice de modulação angular podendo-se distinguir duas situações: **Sistema de Faixa Estreita** e **Sistema de Faixa Larga**.

Sistema de Faixa Estreita

Desenvolvendo o cosseno da soma de dois ângulos temos:

$$y(t) = E_0 \cos\left(2\pi f_0 t\right)\cos\left[\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right] - E_0 sen\left(2\pi f_0 t\right) sen\left[\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

Para β suficientemente pequeno ($\beta \leq$ 0,2 rad) são válidas as aproximações:

$$\cos\left[\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right] \cong 1$$

$$sen\left[\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right] \cong \beta sen\left(2\pi f_m t\right)$$

Modulação Angular

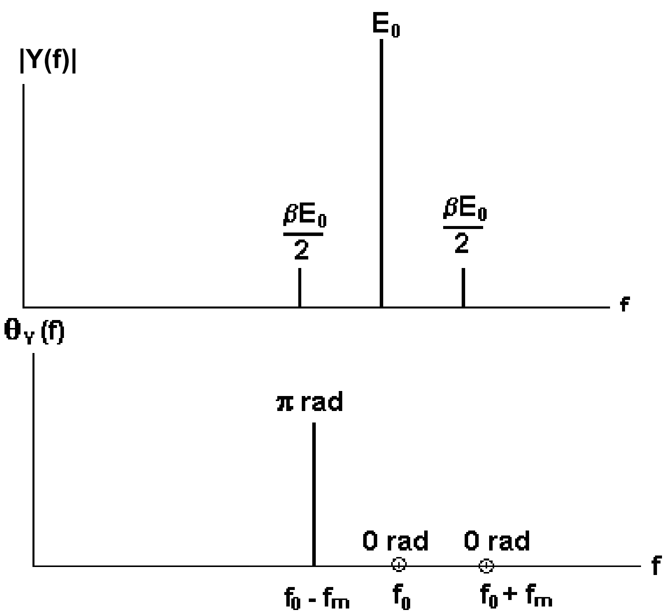
Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Estreita

Incorporando as aproximações de β no sinal **y(t)** têm-se:

$$y(t) \cong E_0 \cos(2\pi f_0 t) - \frac{\beta E_0}{2}\cos[2\pi(f_0 - f_m)t] + \frac{\beta E_0}{2}\cos[2\pi(f_0 + f_m)t]$$

Podemos observar três raias espectrais no sinal modulado com baixo índice de modulação angular ($\beta \leq 0{,}2$): a portadora (***f_0***), uma raia lateral inferior (***$f_0 - f_m$***) e uma raia lateral superior (***$f_0 + f_m$***).



O espectro de amplitude do sinal modulado em ângulo de faixa estreita é semelhante ao do sinal modulado **AM-DSB/TC**. Porém o espectro de fase é diferente, pois:

$$-\frac{\beta E_0}{2}\cos\left[2\pi\left(f_0 - f_m\right)t\right] = \frac{\beta E_0}{2}\cos\left[2\pi\left(f_0 - f_m\right)t + \pi\right]$$

A banda ocupada pelo sinal modulado é *B = 2f* $\boldsymbol{B = 2f_m}$

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Larga

Para β **> 0,2** rad as aproximações anteriores não são válidas. A determinação do espectro depende de um desenvolvimento matemático mais elaborado.

O sinal modulado na saída de um modulador **FM** é:

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

$$y(t) = E_0 \cos\left(2\pi f_0 t\right)\cos\left[\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right] - E_0 sen\left(2\pi f_0 t\right) sen\left[\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

Podemos reescrever **y(t)** da seguinte forma:

$$y(t) = \Re\left\{E_0 \exp\left(j2\pi f_0 t\right)\exp\left[j\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]\right\}$$

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Larga

$$y(t) = \Re\left\{E_0 \exp\left(j2\pi f_0 t\right)\exp\left[j\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]\right\}$$

A função $\exp\left[j\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right]$ é uma função determinística e periódica, com período de repetição de 2π rad, que pode ser representada por uma série exponencial de Fourier ***(Ver seção 2.3 do livro do Rogério)***.

$$\exp\left[j\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp\left(jn2\pi f_m t\right)$$

Com $$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left\{j\left[\beta sen\left(2\pi f_m t\right) - n2\pi f_m t\right]\right\} dx$$

A integral do termo $\boldsymbol{A_n}$ (A índice n) pode ser obtida expandindo a função a ser integrada em uma série de potências do tipo,

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$$

que depois de expandida pode ser integrada termo a termo.

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Larga

Substituindo *z* e integrando termo a termo da série, o resultado pode ser representado por uma série de Taylor para ***n*** um inteiro.

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left\{ j\left[\beta sen\left(2\pi f_m t\right) - n2\pi f_m t \right] \right\} dx$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!} = J_n\left(\beta\right)$$

Onde o termo ***$J_n(\beta)$*** é chamada de ***Função de Bessel[1] de 1º espécie***.

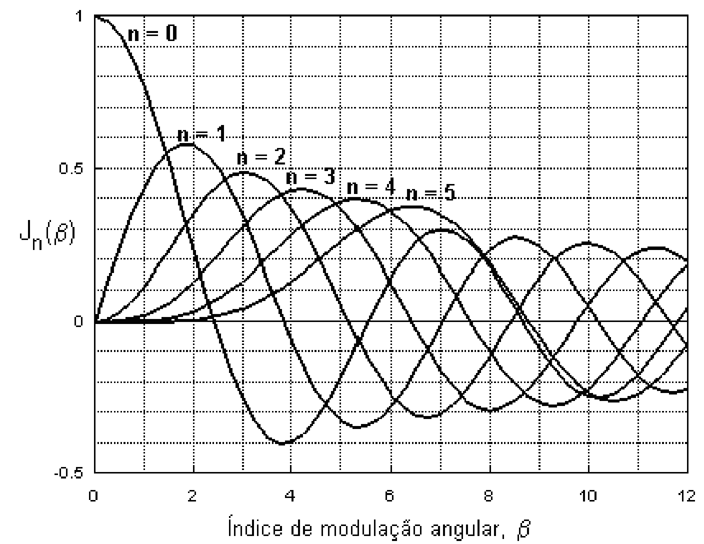
1 - FRIEDRICH WILHELM BESSEL, astrônomo alemão, famoso por seus trabalhos na área de medição astronômica, descobriu as funções que levam seu nome em 1817, ao estudar o movimento de 3 corpos sob condição de gravitação mútua e as perturbações planetárias. O desenvolvimento da Física, da Matemática e da Engenharia mostrou a grande versatilidade da aplicação destas funções.

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Larga

$$A_n = J_n(\beta)$$



Logo, o termo $\boldsymbol{A_n}$ é representado por uma função de Bessel de primeira espécie, de ordem **n**, da variável $\boldsymbol{\beta}$ (índice de modulação angular). Portanto,

$$\exp\left[j\beta sen\left(2\pi f_m t\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\beta\right)\exp\left(jn2\pi f_m t\right)$$

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Larga

O sinal modulado **y(t)**, é então representado por:

$$y(t) = \Re\left\{ E_0 \exp\left(j2\pi f_0 t \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\beta\right) \exp\left(jn2\pi f_m t \right) \right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_0 J_n\left(\beta\right) \cos\left[2\pi\left(f_0 + nf_m \right) t \right]$$

Como resolver o somatório acima?

Observem que o somatório envolve todas as ordens ***n*** de ***-∞*** até **+ *∞***!

Uma propriedade das funções de Bessel determina que: $J_{-n}\left(\beta\right) = \left(-1\right)^n J_n\left(\beta\right)$

Logo:

$$y(t) = \underbrace{E_0 J_0(\beta)\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{raia central}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} E_0 J_n(\beta)\cos\left[2\pi(f_0 + nf_m)t\right]}_{\text{raias laterais superiores}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} E_0 (-1)^n J_n(\beta)\cos\left[2\pi(f_0 - nf_m)t\right]}_{\text{raias laterais inferiores}}$$

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Larga

$$y(t) = E_0 J_0(\beta)\cos(2\pi f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} E_0 J_n(\beta)\cos\left[2\pi(f_0 + nf_m)t\right] + \sum_{n=1}^{\infty} E_0 (-1)^n J_n(\beta)\cos\left[2\pi(f_0 - nf_m)t\right]$$

Explicitando alguns termos desse somatório temos:

$$\begin{aligned}
y(t) = {} & E_0 J_0(\beta)\cos(2\pi f_0 t) + \\
& + E_0 J_1(\beta)\left\{\cos\left[2\pi(f_0 + f_m)t\right] - \cos\left[2\pi(f_0 - f_m)t\right]\right\} + \\
& + E_0 J_2(\beta)\left\{\cos\left[2\pi(f_0 + 2f_m)t\right] + \cos\left[2\pi(f_0 - 2f_m)t\right]\right\} + \\
& + E_0 J_3(\beta)\left\{\cos\left[2\pi(f_0 + 3f_m)t\right] - \cos\left[2\pi(f_0 - 3f_m)t\right]\right\} + \\
& + E_0 J_4(\beta)\left\{\cos\left[2\pi(f_0 + 4f_m)t\right] + \cos\left[2\pi(f_0 - 4f_m)t\right]\right\} + \ldots
\end{aligned}$$

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Larga

Algumas observações sobre o sinal modulado em ângulo por um sinal senoidal:

- Apresenta componentes espectrais discretas, espaçadas da frequência do sinal modulador $\mathbf{f_m}$;

- Possui uma raia central e infinitas raias inferiores e superiores;

- A raia central está na frequência da portadora, e sua amplitude $\mathbf{E_0|J_0(\beta)|}$ varia com o índice de modulação angular (diferente da modulação AM onde a raia central possui amplitude constante E_0).

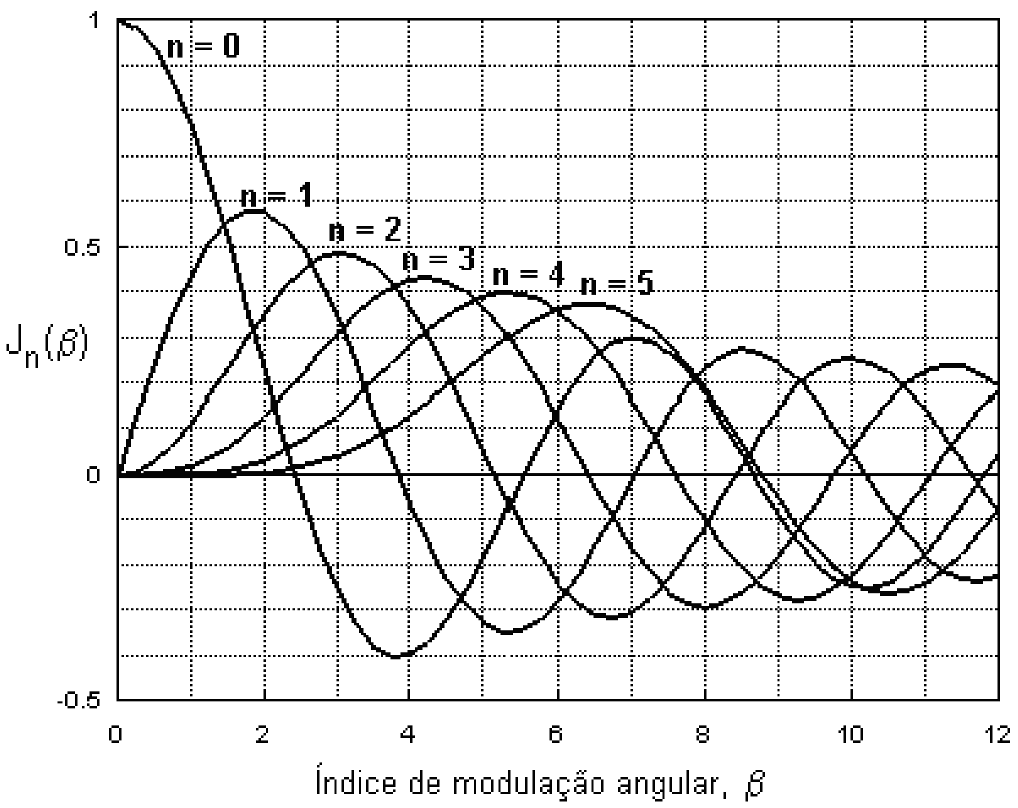
- As fases das raias central, inferior e superior, podem ser 0 rad ou π rad dependendo da ordem **n**. Por exemplo, a raia central tem fase 0 rad se $\mathbf{J_0(\beta)} > 0$ e fase π rad se $\mathbf{J_0(\beta)} < 0$.

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Larga

A figura abaixo ilustra as funções de Bessel da variável β – $J_n(\beta)$, com **n** de 0 a 5 e ***m >> n***.



$$J_n(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!}$$

A função de ordem zero $\mathbf{J_0(\beta)}$ se comporta como um cosseno amortecido, e as de ordem $\boldsymbol{n > 0}$ se assemelham a senos amortecidos.

Observe que para um dado valor de $\boldsymbol{\beta}$ as funções de ordem maiores se tornam desprezíveis.

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Larga

A tabela abaixo contém valores da função de Bessel $\mathbf{J_n(\beta)}$, para valores inteiros de β, entre 1 e 10 até uma ordem M tal que: $\mathbf{J_M(\beta) \geq 0{,}001}$ **e** $\mathbf{J_n(\beta) \leq 0{,}001}$ para qualquer **n > M**.

β→ n↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,7652	0,2239	–0,2601	–0,3971	–0,1776	0,1506	0,3001	0,1717	–0,0903	–0,2459
1	0,4401	0,5767	0,3391	–0,0660	–0,3276	–0,2767	–0,0047	0,2346	0,2453	0,04347
2	0,1149	0,3528	0,4861	0,3641	0,04657	–0,2429	–0,3014	–0,1130	0,1448	0,2546
3	0,01956	0,1289	0,3091	0,4302	0,3648	0,1148	–0,1676	–0,2911	–0,1809	0,0584
4	0,00248	0,0340	0,1320	0,2811	0,3912	0,3576	0,1578	–0,1054	–0,2655	–0,2196
5		0,00704	0,04303	0,1321	0,2611	0,3621	0,3479	0,1858	–0,0550	–0,2341
6		0,00120	0,01139	0,04909	0,1310	0,2458	0,3392	0,3376	0,2043	–0,0145
7			0,00255	0,01518	0,05338	0,1296	0,2336	0,3206	0,3275	0,2167
8				0,00403	0,01841	0,05653	0,1280	0,2235	0,3051	0,3179
9					0,00552	0,02117	0,05892	0,1263	0,2149	0,2919
10					0,00147	0,00696	0,02354	0,06077	0,1247	0,2075
11						0,00205	0,00834	0,02560	0,06222	0,1231
12							0,00266	0,00962	0,02739	0,06337
13								0,00328	0,01083	0,02897
14								0,00102	0,00390	0,01196
15									0,00129	0,00451
16										0,00157

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Sistema de Faixa Larga

Exemplo: Considere-se um modulador FM com sensibilidade k_F = 1,5kHz/V onde uma portadora de frequência f_0 = 100kHz com amplitude E_0 = 10V é modulada por um sinal senoidal de frequência f_m = 1kHz com amplitude A = 2V. Deseja-se determinar:

a) A variação da frequência instantânea do sinal FM com o tempo;

b) O espectro do sinal FM;

Solução: a) modulação senoidal FM $f_i(t) = f_0 + \underbrace{k_F A}_{\Delta f} \cos(2\pi f_m t)$

$$\Delta f = k_F A = 1,5(kHz/V) \cdot 2V = 3kHz$$

Δf é o máximo desvio de frequência que o sinal modulado terá em relação à frequência da portadora, ou seja, a frequência do sinal modulado excursionará **continuamente** com o tempo, de forma senoidal, entre $f_0 + \Delta f$ = 103kHz e $f_0 - \Delta f$ = 97kHz.

$$f_i(t) = 100 + 3\cos(2\pi 10^3 t)$$

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

b) Para determinar o espectro de amplitude e fase, antes vamos determinar a equação no tempo do sinal modulado FM.

$$\beta = \frac{k_F A}{f_m} = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{3kHz}{1kHz} = 3\ rad$$

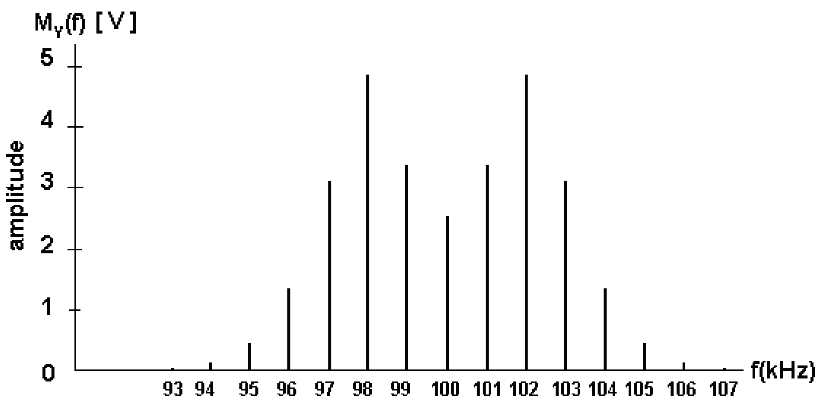
Através da tabela de $J_n(\beta)$, verificamos que para $\boldsymbol{\beta}$ = 3 rad a função apresenta valores significativos até a ordem 7.

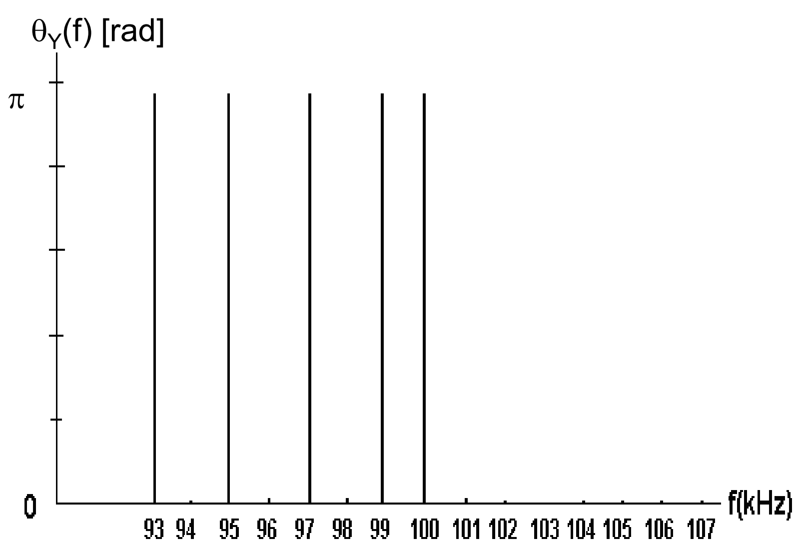
$$\begin{aligned}
y(t) = {} & 10J_0(3)\cos\left(2\pi 100\cdot 10^3 t\right) + \\
& +10J_1(3)\left\{\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3+10^3\right)t\right]-\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3-10^3\right)t\right]\right\}+ \\
& +10J_2(3)\left\{\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3+2\cdot 10^3\right)t\right]+\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3-2\cdot 10^3\right)t\right]\right\}+ \\
& +10J_3(3)\left\{\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3+3\cdot 10^3\right)t\right]-\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3-3\cdot 10^3\right)t\right]\right\}+ \\
& +10J_4(3)\left\{\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3+4\cdot 10^3\right)t\right]+\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3-4\cdot 10^3\right)t\right]\right\}+ \\
& +10J_5(3)\left\{\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3+5\cdot 10^3\right)t\right]-\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3-5\cdot 10^3\right)t\right]\right\}+ \\
& +10J_6(3)\left\{\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3+6\cdot 10^3\right)t\right]+\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3-6\cdot 10^3\right)t\right]\right\}+ \\
& +10J_7(3)\left\{\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3+7\cdot 10^3\right)t\right]-\cos\left[2\pi\left(100\cdot 10^3-7\cdot 10^3\right)t\right]\right\}
\end{aligned}$$

Modulação Angular

Espectro do sinal modulado em ângulo

Através da equação e da tabela de $J_n(\beta)$ consegue-se determinar o espectro de amplitude e fase do sinal modulado.





Observações importantes:

- apesar da frequência instantânea variar entre 97 e 103 kHz, surgem raias espectrais além desta faixa. Característica de sistema não linear.

- Porém, as raias que surgem fora da banda limitada por $2\Delta f$, caem rapidamente em direção a zero. Pode-se considerar que a maior parte da energia do sinal está dentro da banda limitada por $2\Delta f$.

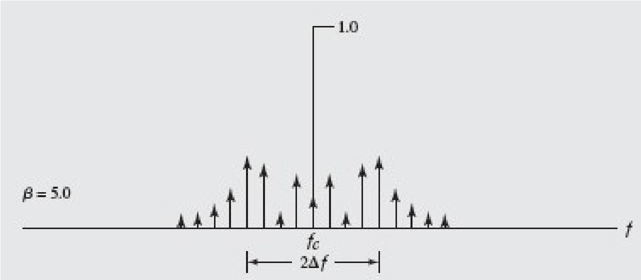
Modulação Angular

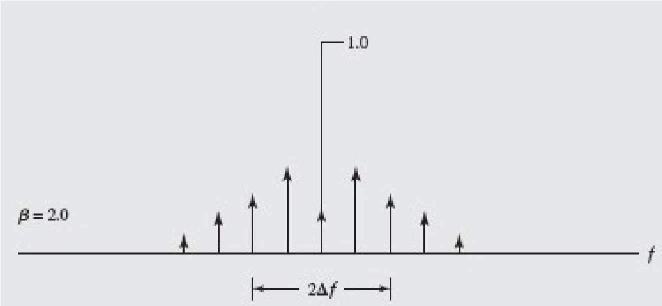
Largura de Banda da modulação angular

A largura de banda de um sistema de **banda estreita ($\beta \leq 0,2$)** modulado por um sinal senoidal com frequência **f_m** é aproximadamente **B = 2fm**.

Teoricamente, se o sistema for de **banda larga**, a largura de banda do espectro tende a "infinito". Na prática, entretanto, pode-se determinar um **espectro significativo,** onde as raias que se encontrarem fora deste espectro não provocarão distorção significativa da informação. A banda do espectro significativo pode ser determinada utilizando vários critérios, porém o mais utilizado é uma relação empírica conhecida como ***Critério de Carson***.

Se observarmos o espectro de um sinal modulado em **FM** por um sinal **modulador senoidal**, veremos que as raias laterais ocupam uma banda maior do que **$2\Delta f$** e decrescem rapidamente na direção de zero, de forma que a largura de banda sempre ultrapassa a excursão de frequência total. Especificamente, para valores elevados de β, pode-se afirmar que a largura de banda do espectro é ligeiramente maior do que **$2\Delta f$.**





Modulação Angular

Largura de Banda da modulação angular

Dessa forma, podemos definir uma regra **aproximada** para a **largura de banda significativa** de um sinal **FM** gerado por um sinal modulador senoidal de frequência f_m, da seguinte maneira:

$$B = 2\Delta f + 2f_m$$

Conhecido como **critério de Carson**. O critério de Carson pode ser extendido para modulação **FM** e **PM** com sinais moduladores não senoidais com amplitude máxima $\mathbf{A_{max}}$ e frequência máxima $\mathbf{f_{max}}$, como por exemplo, sinais de áudio.

$$B = 2\left(\Delta f_{\max} + f_{\max}\right) = \begin{cases} 2\left(k_F A_{\max} + f_{\max}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{\textit{para FM}} \\ 2 f_{\max}\left(k_P A_{\max} + 1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{\textit{para PM}} \end{cases}$$

A equação acima é chamada de **critério de Carson Extendido**:

Modulação Angular

Largura de Banda da modulação angular

Exemplo: O sistema de radiodifusão sonora FM tem portadoras com frequências na faixa de 87,9 a 107,9 MHz e sinal modulador de áudio com componentes espectrais de 50 Hz a 15 kHz. O desvio de frequência máximo arbitrado para este sistema é 75kHz. Utilizando o critério de Carson extendido tem-se:

$$B = 2\left(\Delta f + f_{\max}\right) = 2\left(75 + 15\right) kHz = 180 kHz$$

Na prática a largura de banda alocada para cada transmissor de FM é de 200kHz, pois é deixada uma margem de segurança para a transição dos filtros.

Modulação Angular

Não Linearidade do Processo de Modulação Angular

Considere um sinal **x(t)** composto

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

Na modulação FM o desvio de fase inserido na portadora é dado por:

$$\phi(t) = 2\pi k_F \int x(t)dt$$

No caso do sinal x(t) composto tem-se:

$$\phi(t) = \beta_1 sen(2\pi f_1 t) + \beta_2 sen(2\pi f_2 t)$$

O sinal na saída do modulador seria:

$$y(t) = E_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \beta_1 sen(2\pi f_1 t) + \beta_2 sen(2\pi f_2 t)\right]$$

Modulação Angular

Não Linearidade do Processo de Modulação Angular

O sinal **y(t)** pode ser escrito da seguinte forma:

$$y(t) = \Re\left\{E_0 \exp\left(j2\pi f_0 t\right) \exp\left[j\beta_1 sen\left(2\pi f_1 t\right)\right] \exp\left[j\beta_2 sen\left(2\pi f_2 t\right)\right]\right\}$$

Desenvolvendo as exponenciais complexas periódicas em série de Fourier e substituindo na função de y(t) acima tem-se:

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E_0 J_m(\beta_1) J_k(\beta_2) \cos\left[2\pi\left(f_0 + mf_1 + kf_2\right)t\right]$$

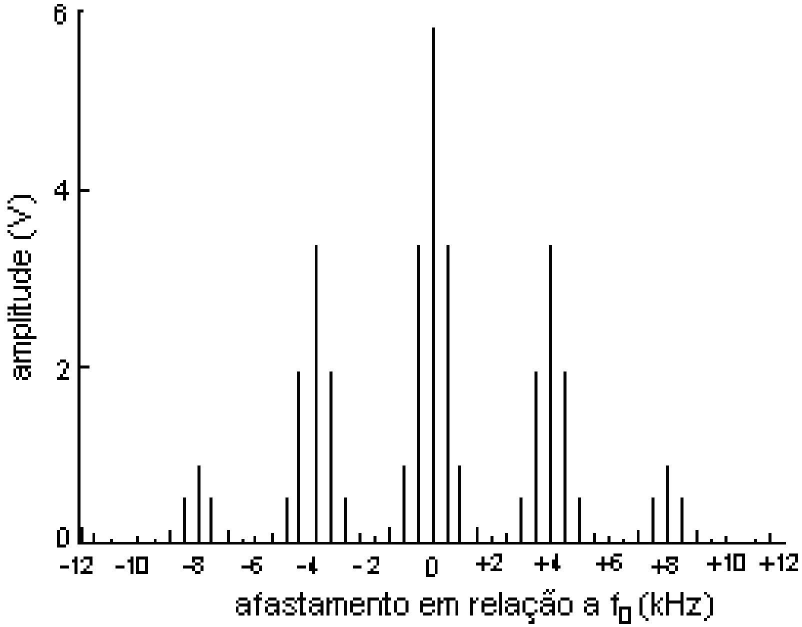
Observa-se na função acima 4 categorias de componentes espectrais:

a) Raia central na frequência da portadora (m = k =0)
b) Raias laterais múltiplas de f_1 (f_0+mf_1, $m\neq0$, k=0)
c) Raias laterais múltiplas de f_2 (f_0+kf_2, m=0, $k\neq0$)
d) Raias de **intermodulação** nas frequências $f_0+mf_1+kf_2$ ($m\neq0$ e $k\neq0$)

O surgimento de raias de intermodulação indica que a modulação angular (PM e FM) é um processo **não linear**, pois não atende ao **Princípio da Superposição**.

Modulação Angular

Não Linearidade do Processo de Modulação Angular



f_1 = 500Hz e f_2 = 4000Hz

Para f_1 = 500 Hz e f_2 = 4000Hz ficam evidentes as diversas categorias de componentes espectrais: múltiplas de 500Hz ao redor de f_0; múltiplas de 4000Hz ao redor de f_0; e as raias de intermodulação que se encontram afastadas de 500Hz ao redor dos múltiplos de 4000Hz.

O critério de Carson atende também a esta condição de sinais moduladores compostos, desde que este critério seja aplicado à componente de maior frequência f_m. No caso de sinais x(t) não periódicos (voz) o critério de Carson também é uma forma segura de determinação da largura de banda do espectro significativo do sinal modulado.

Modulação Angular

Exercício: Uma portadora $E_0\cos(2\pi f_0 t)$, com f_0= 10MHz e E_0=10V, é modulada em frequência por um sinal $x(t)=A\cos(2\pi f_m t)$, com f_m = 10KHz e o índice de modulação angular é β =2,0 rad.

a) Qual é o desvio de frequência do sinal modulado?
b) Quais são os valores máximo e mínimo da frequência instantânea do sinal FM?
c) Qual é a expressão matemática que representa o sinal FM?
d) Represente graficamente o espectro de amplitude do sinal FM, indicando valores.
e) Qual a potência total dissipada pelo sinal y(t) e qual porcentagem desta potência está contida dentro da banda limitada pelo critério de Carson?
f) Mantendo-se constante a amplitude do sinal modulador e a constante de modulação k_F, altera-se a sua frequência para 20kHz. Represente o espectro de amplitude do novo sinal FM, nessa condição. O que ocorre com o máximo desvio em frequência? Qual a potência contida dentro da banda limitada pelo critério de Carson?

Modulação Angular

Transmissão Estereofônica de sinais FM

Este tipo de transmissão usa a ***multiplexação estereofônica*** , que é a forma de se transmitir dois sinais (com a mesma banda) utilizando uma mesma portadora.

Na transmissão ***monofônica,*** um único sinal de áudio modula a portadora. Este tipo de transmissão era inicialmente utilizado pelo sistema de radiodifusão sonora **FM**. A banda ocupada por cada canal ***monofônico*** é de 200kHz (**Δf = 75kHz**).

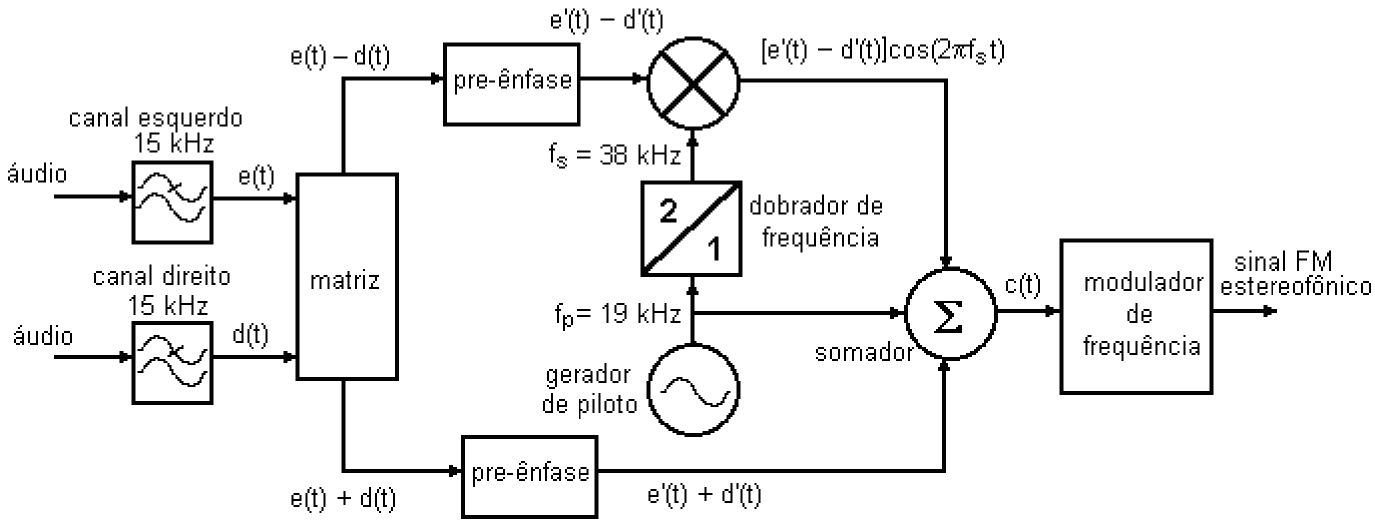
A transmissão ***estereofônica*** foi introduzida posteriormente, com dois sinais de áudio – direito e esquerdo – transmitidos juntos para dar sensação de profundidade de som. A transmissão ***estereofônica*** deve atender a dois fatores:

• ser compatível com a ***monofônica***, ocupando a mesma largura de faixa de 200kHz por canal FM;

• ser compatível com receptores de rádio ***monofônicos.***

Modulação Angular

Transmissão Estereofônica de sinais FM



Uma matriz recebe como entrada os sinais esquerdo **e(t)** e direito **d(t)**, e produz duas saídas separadas – o sinal soma, **e(t) + d(t)**, e o sinal diferença, **e(t) – d(t)**. Os sinais soma e diferença são ***preenfatizados***.

Pré-ênfase e de-ênfase. Para entendermos como funcionam os dispositivos de pré-ênfase e de-ênfase vamos relembrar como a banda do espectro do sinal FM varia com as variações do sinal modulador.

Modulação Angular

Transmissão Estereofônica de sinais FM

$$\beta = \frac{k_F A_m}{f_m}$$

• **A_m constante e f_m variando**: se **f_m** aumenta β diminui, diminuindo a quantidade de raias significativas, e aumentando a energia da portadora. Se β for muito baixo todas as raias são pequenas em comparação à portadora. Pode-se concluir com isto que as componentes de mais alta frequência do sinal modulador irão contribuir com raias de menor energia no sinal modulado. Raias com baixa energia tendem a ser mascaradas pelo ruído.

• **A_m variando e f_m constante**: se **f_m** é mantido constante, β varia diretamente com **A_m**. Se **A_m** é alto β é alto e, consequentemente, as raias terão energia mais proporcional à portadora.

O ideal em um sistema de transmissão é que β se mantenha mais ou menos constante, para que o sinal seja recebido em boas condições de relação sinal/ruído seja qual for a faixa de frequência do sinal modulador. Para que isto aconteça é conveniente aumentar a amplitude das componentes de mais alta frequências do sinal modulador.

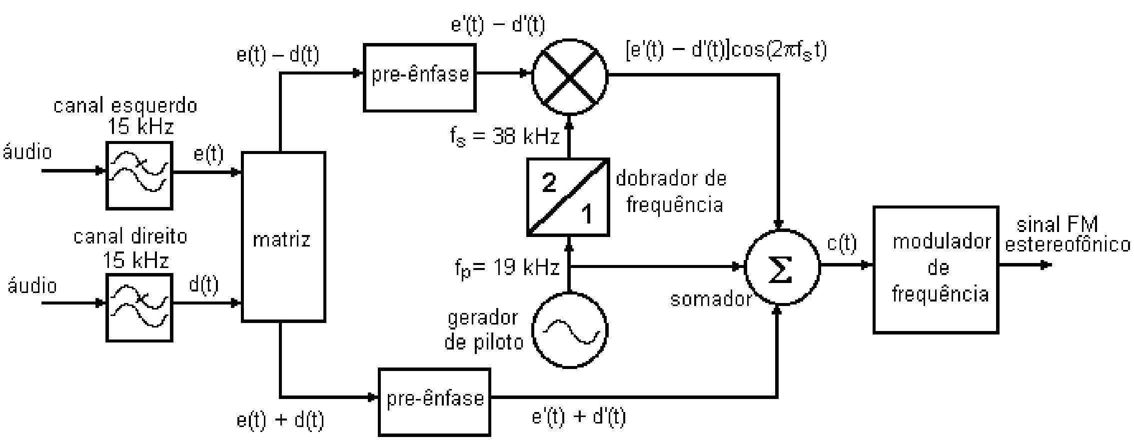
Modulação Angular

Transmissão Estereofônica de sinais FM

A **pré-ênfase** significa justamente este esquema de amplificação prévia do sinal antes de passar pelo modulador, em que as altas frequências são mais amplificadas que as baixas frequências.

A **de-ênfase** é constituída por um filtro passa-baixas de queda suave, que funciona contrabalançando a diferenciação sofrida anteriormente pela **pré-ênfase**.

Voltando agora ao transmissor estereofônico...

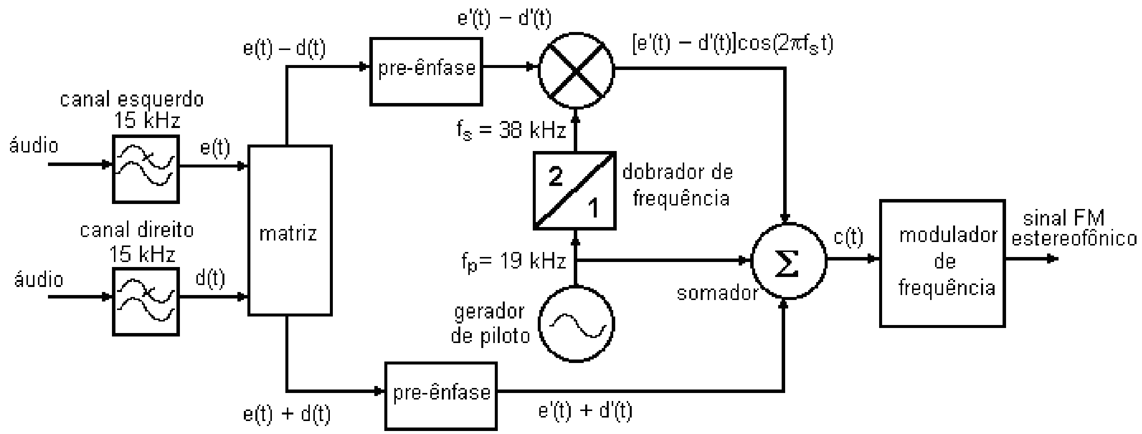


O sinal diferença preenfatizado e'(t) – d'(t), modula em AM-DSB/SC a portadora de 38kHz, resultando em:

$$\left[e'(t)-d'(t)\right]\cos\left(2\pi f_s t\right)$$

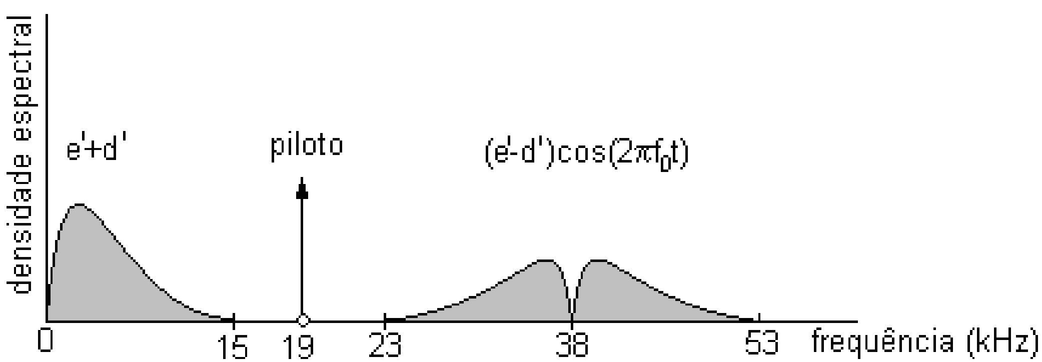
Modulação Angular

Transmissão Estereofônica de sinais FM



O sinal AM-DSB/SC é somado à portadora e ao sinal soma resultando no sinal multiplexado:

$$c(t) = \left[e'(t) + d'(t)\right] + \left[e'(t) - d'(t)\right]\cos\left(2\pi f_s t\right) + E_P \cos\left(2\pi f_P t\right)$$



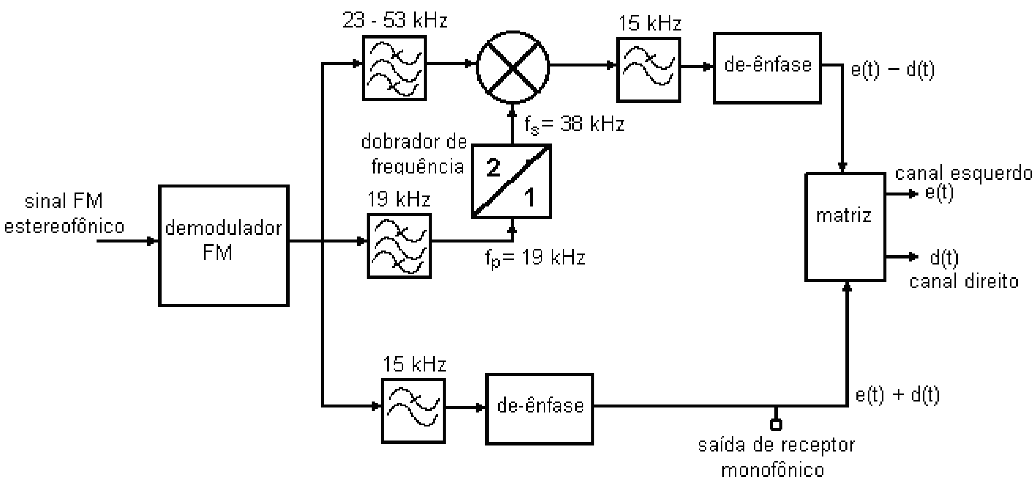
Modulação Angular

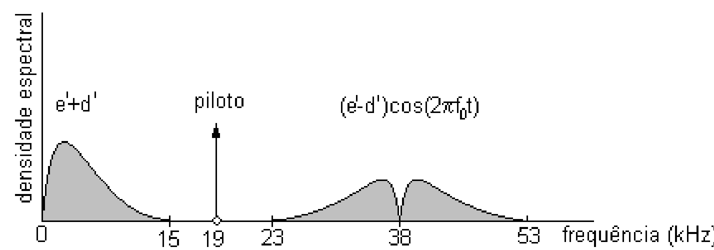
Transmissão Estereofônica de sinais FM

O sinal multiplexado **c(t)** entra no modulador FM e modula a portadora principal para produzir o sinal transmitido.

A portadora piloto de 19kHz é transmitida para fornecer uma referência para a detecção coerente do sinal diferença no receptor estereofônico.

O sinal estereofônico recebido passa por um demodulador, e o sinal **c(t)** é recuperado.





Recepção FM estereofônica

O sinal **c(t)** passa por um demultiplexador, onde as componentes do sinal são recuperadas através de três filtros apropriados.

Ruído em Sistemas Analógicos

Relação Sinal/Ruído

Em AM-DSB/TC

$$S = \frac{(k_d m)^2}{2R_L}$$ Potência do sinal demodulado

$$R = k_d^{\,2} \frac{FkTb}{R_L P_R}$$ Potência do ruído demodulado

$$\frac{S}{R} = \frac{m^2 . P_R}{2FkTb}$$

e

Onde $\boldsymbol{P_R}$ é a potência da portadora na entrada do receptor, e ***b*** é a largura de banda base.

Ruído em Sistemas Analógicos

Relação Sinal/Ruído

Em PM:

$$S = \frac{(k_d \beta)^2}{2R_L} \quad \text{e} \quad R = k_d{}^2 \frac{FkTb}{R_L P_R}$$

$$\frac{S}{R} = \frac{\beta^2 . P_R}{2FkTb}$$

Em FM:

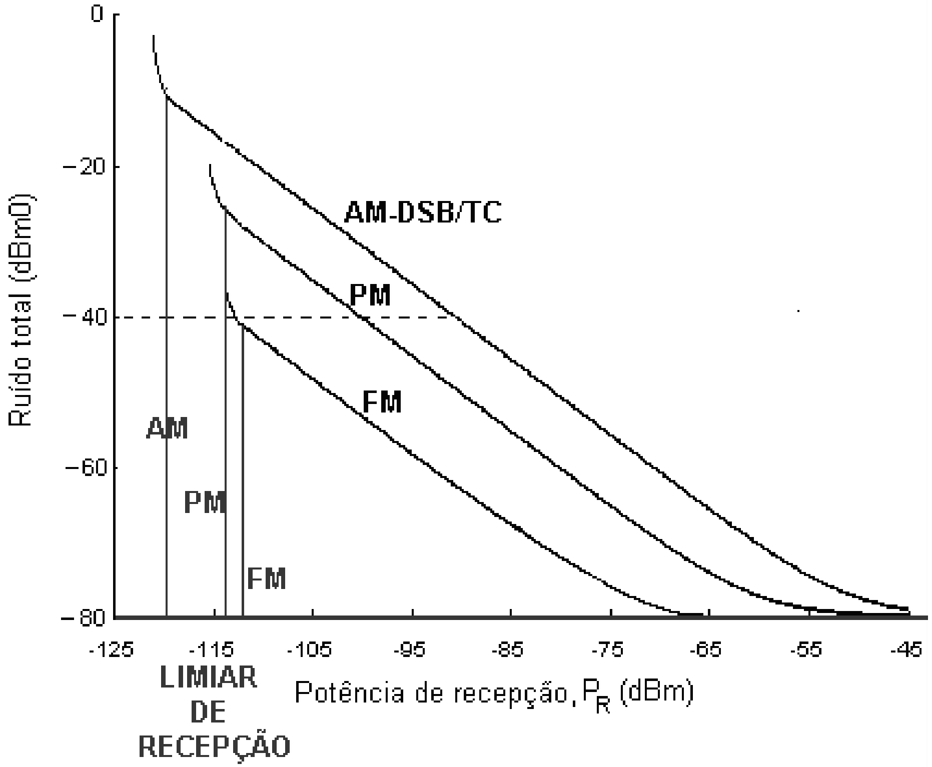
$$S = \frac{(k_d \Delta f)^2}{2R_L} \quad \text{e} \quad R = k_d{}^2 \frac{FkT(f_b{}^3 - f_a{}^3)}{3R_L P_R}$$

$$\frac{S}{R} = \frac{3\Delta f^2 . P_R}{2FkT(f_b{}^3 - f_a{}^3)}$$

Ruído em Sistemas Analógicos

Comparação entre Sistemas de Modulação Analógica

O ruído total é a soma do ruído térmico variável mais o ruído fixo e está representado na figura abaixo em função da potência da portadora.



- Para potências **abaixo** do limiar o ruído térmico **cresce** muito com o decréscimo da potência da portadora.

- Para uma faixa de potência **acima** da potência de limiar o ruído térmico variável é muito maior que o ruído fixo, e o ruído total varia linearmente com $\boldsymbol{P_R}$.

- Para valores altos de $\boldsymbol{P_R}$, o ruído fixo é muito **maior** do que o térmico variável e a curva satura no ruído fixo.

$$R_F\left(dBm\right)=10\log\left(\frac{10\times10^{-12}}{1mW}\right)=-80dBm$$

O aceitável nestes sistemas é que o ruído total deve ser inferior a -40dBm. Esta condição é atendida nos sistemas FM para qualquer potência acima do limiar – **o que representa uma vantagem do sistema FM em relação aos demais** (graças à rede de pré-enfase/de-ênfase) .