http://www.labtel.ele.ufes.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Elétrica

Princípios de Comunicações I

Capítulo 2

Prof.: Jair A. Lima Silva

UFES, 2012/2

Índice

I. Série Trigonométrica de Fourier

- 1822 – " *Theorie Analytique de la Chaleur* "
- Grenoble - França
- O Matemático e Físico Francês **Jean-Baptiste Joseph-Fourier**

- Modelagem da Evolução da Temperatura através de

Séries Trigonométricas

I. Série Trigonométrica de Fourier

• Fourier demonstrou que uma função periódica $f(t)$ qualquer pode ser representada por uma série **infinita** de somas de funções senoidais e cossenoidais.

• A 1ª parcela da soma possui frequência $f_0 = 1/T_0$ (**frequência fundamental**), para T_o o periodo de repetição da função.

• As outras parcelas são múltiplos inteiros desta frequência fundamental, ou seja, $f_n = n/T_0$ (**frequências harmônicas**), com $n = 1,2,3,\infty$.

I. Série Trigonométrica de Fourier

- Portanto, *f(t)* pode ser expandida na **série infinita**:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\cos(2\pi\cdot f_n\cdot t)+b_n\cdot\sin(2\pi\cdot f_n\cdot t)\right],\quad (0<t<T_0)$$

$$T_0=\frac{1}{f_0},\quad f_n=n\times f_0,\quad 2\pi\cdot f_n=w_n$$

$$a_0=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t)\cdot dt \rightarrow \text{valor médio (componente CC)}$$

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t)\cdot\cos(2\pi\cdot f_n\cdot t)\cdot dt \rightarrow \text{Coeficientes}$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t)\cdot\sin(2\pi\cdot f_n\cdot t)\cdot dt \rightarrow \text{Coeficientes}$$

http://www.labtel.ele.ufes.br

I. Série Trigonométrica de Fourier

• Porém, a expansão só é possível se as condições de **Dirichlet** forem satisfeitas:

1 – $f(t)$ tem que ter um número finito de máximo e mínimos em um periodo

2 – $f(t)$ tem que ter um número finito de descontinuidades em um periodo

3 – a integral $\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)| \cdot dt$ deve ser finita

(Johann Peter Gustav Lejeune **Dirichlet**, Matemático Alemão, 1805-1859)

Ia. Condições de Simetria

I. Séries Trigonométrica de Fourier

   a. **Condições de Simetria - TPC**

II. Séries Harmônica e Exponencial de Fourier

III. Transformada de Fourier

   a. Definição

   b. Pares de Transformada

   c. Propriedades

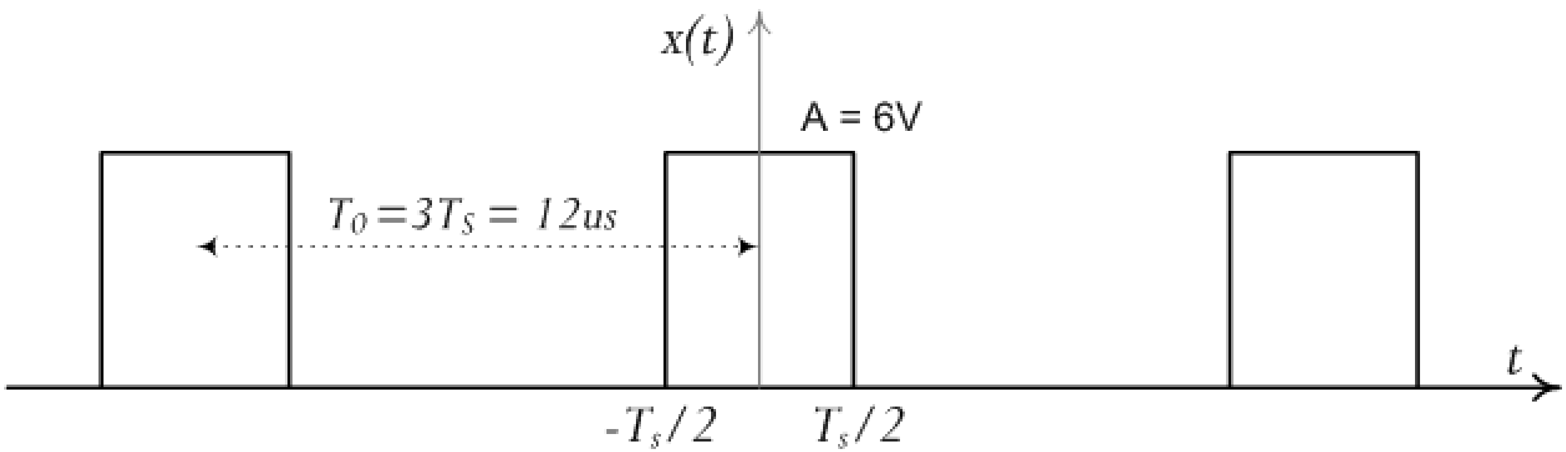
IV. Densidade Espectral de Energia e de Potência

V. Função Impulso e suas Aplicações

VI. Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

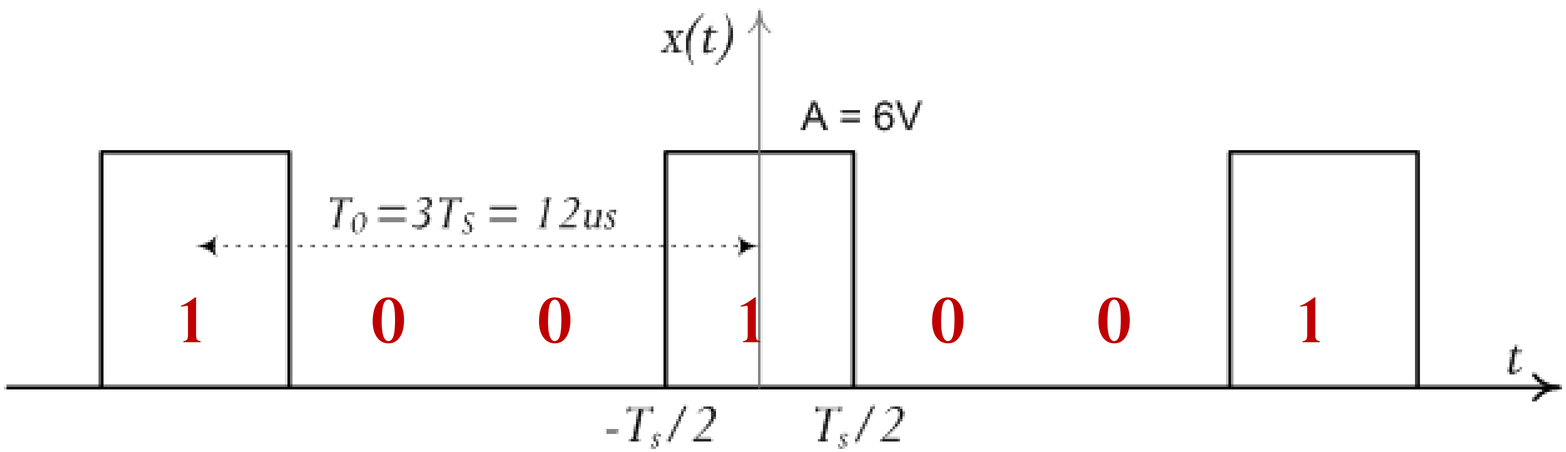
I. Série Trigonométrica de Fourier

• **Exercício Exemplo**: Encontre a equação da expansão em série Trigonométrica de Fourier da onda quadrada unipolar (trem de pulsos retangulares) mostrada na Figura abaixo.



I. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício Exemplo (cont)**: Aplicado ao Padrão Repetitivo de Bits



$$x(t) = \begin{cases} A \ldots\ldots\ldots |t| < \dfrac{T_s}{2} \\ 0 \ldots\ldots\ldots \dfrac{T_s}{2} < |t| < \dfrac{T_0}{2} \end{cases}$$

http://www.labtel.ele.ufes.br

I. Série Trigonométrica de Fourier

Onda Quadrada – Domínio do Tempo

$$x(t)=\begin{cases} A\text{..........}|t|<\dfrac{T_s}{2} \\ 0\text{..........}\dfrac{T_s}{2}<|t|<\dfrac{T_0}{2} \end{cases}$$

Expandindo a função em uma série trigonométrica de Fourier escolhendo-se o eixo de simetria para função **par** teremos que:

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\cos\left(2\pi\cdot f_n\cdot t\right)\right]$$

$$onde\begin{cases} 0<t<T_0 \\ T_0=\dfrac{1}{f_0},\quad f_n=n\cdot f_0 \end{cases}$$

LAbTel

http://www.labtel.ele.ufes.br

I. Série Trigonométrica de Fourier

Onda Quadrada – Domínio do Tempo

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cdot dt = \frac{2A\cdot T_s}{T_0}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cdot \cos(2\pi f_n t)\cdot dt = \frac{2}{T_0}\cdot\left[\frac{A\cdot\sin(2\pi f_n t)}{2\pi f_n}\right]_{-T_s/2}^{T_s/2}$$

$$a_n = \frac{2A}{T_0}\cdot\frac{\sin(\pi\cdot f_n\cdot T_s)}{\pi\cdot f_n} = \frac{2A\cdot T_s}{T_0}\cdot\frac{\sin(\pi\cdot f_n\cdot T_s)}{\pi\cdot f_n\cdot T_s}$$

$$a_n = \frac{2A\cdot T_s}{T_0}\cdot \mathrm{sinc}(\pi\cdot f_n\cdot T_s)$$

I. Série Trigonométrica de Fourier

Onda Quadrada – Domínio do Tempo

$$a_0 = \frac{2A \cdot T_s}{T_0}$$

$$a_n = \frac{2A \cdot T_s}{T_0} \cdot \mathrm{sinc}(\pi \cdot f_n \cdot T_s)$$

$$x(t) = \frac{AT_s}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AT_s}{T_0} \cdot \mathrm{sinc}(\pi \cdot f_n \cdot T_s) \cdot \cos(2\pi \cdot f_n \cdot t)$$

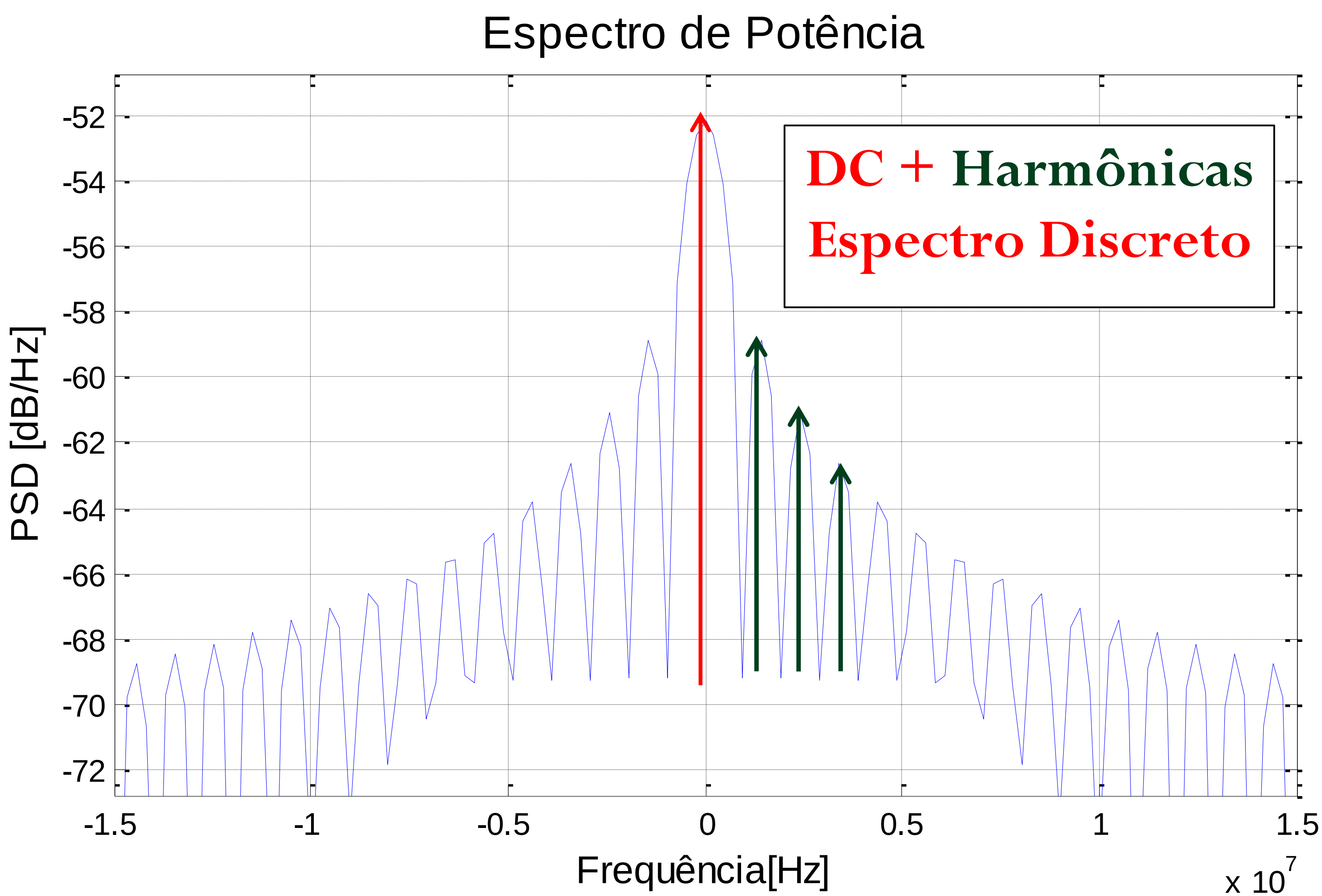
DC

Coeficientes

Harmonicas

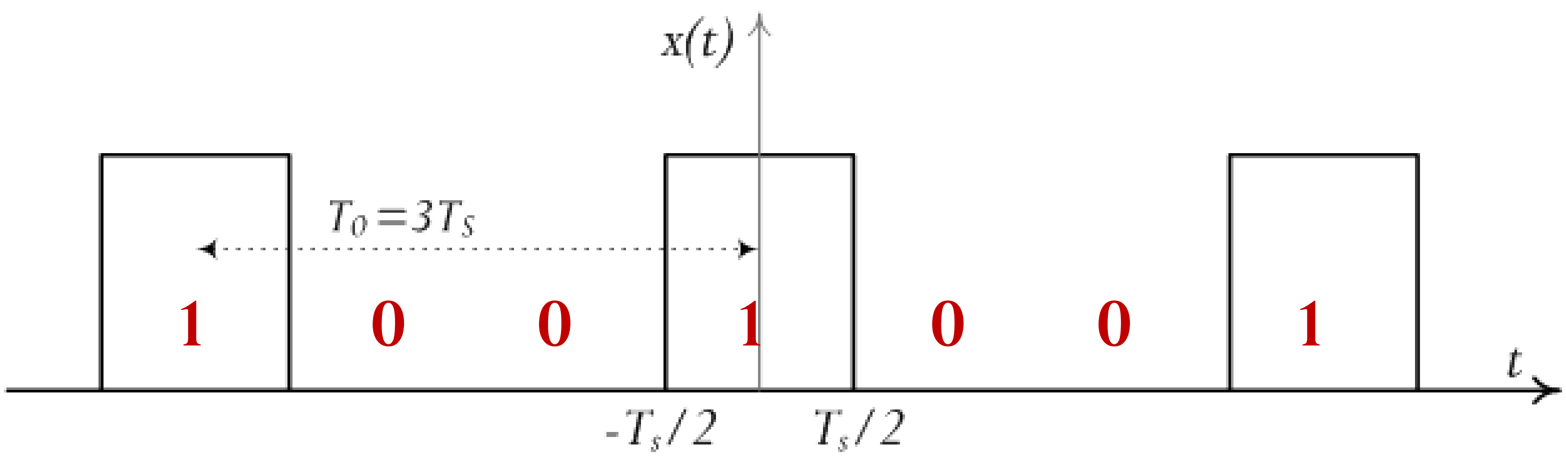
I. Série Trigonométrica de Fourier

Espectro da onda Quadrada no Matlab (usando a função FFT_pot2)



I. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício Exemplo**: Calcule as 6 primeiras raias da expansão da forma de onda quadrada anterior considerando que $A = 0.5$ V, $T_0=3xT_s=1$ ms. Escreva a equação da expansão para este caso.



I. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício Exemplo (cont)**:

$$a_0 = \frac{2AT_s}{T} = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

$$a_n = \frac{sen(n\pi/3)}{n\pi}$$

$$a_1 = \frac{sen(\pi/3)}{\pi} = 0{,}275 \qquad a_2 = \frac{sen(2\pi/3)}{2\pi} = 0{,}137$$

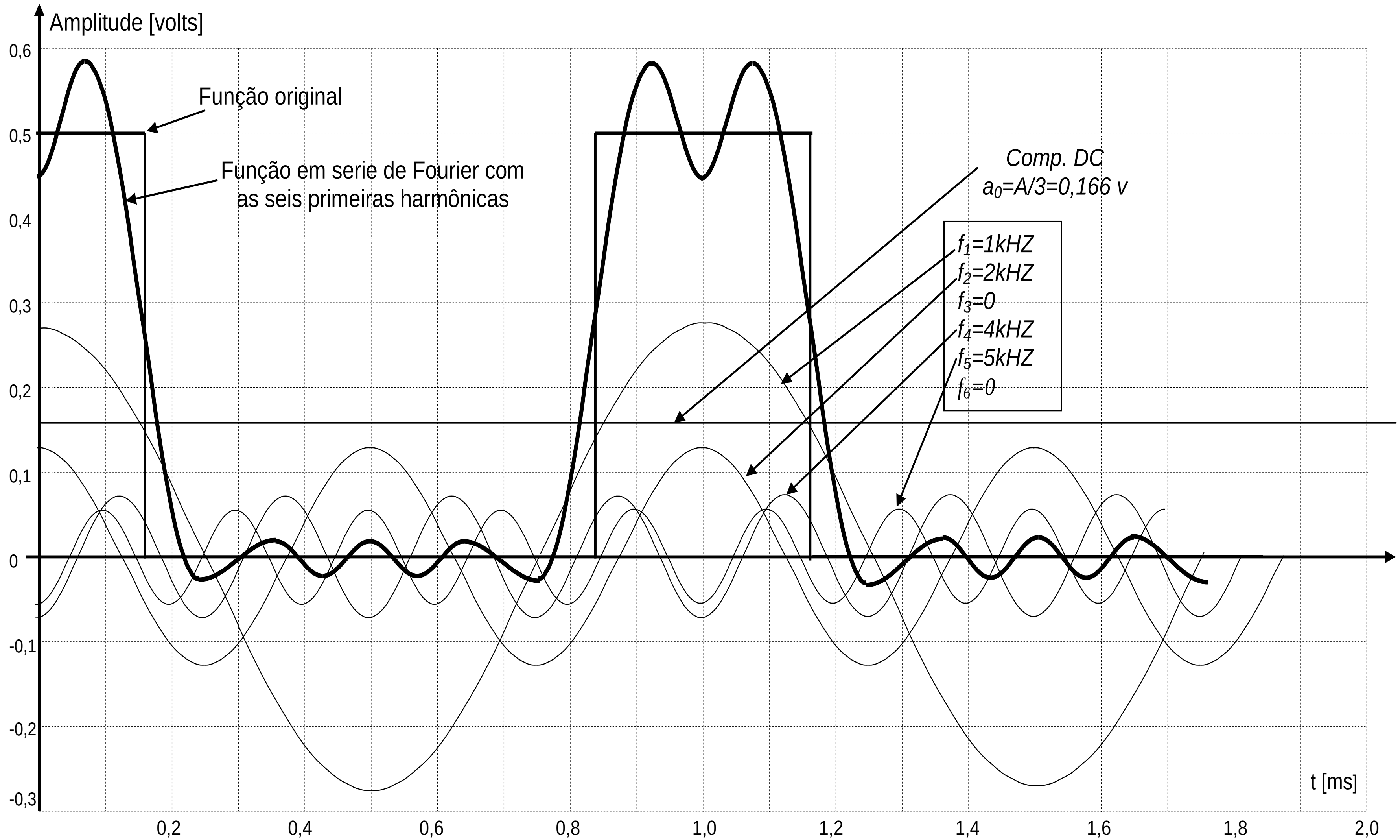
$$a_3 = \frac{sen(\pi)}{3\pi} = 0 \qquad a_4 = \frac{sen(4\pi/3)}{4\pi} = -0{,}068$$

$$a_5 = \frac{sen(5\pi/3)}{5\pi} = -0{,}055 \qquad a_6 = \frac{sen(2\pi)}{6\pi} = 0$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{sen(n\pi/3)}{n\pi}\right)\cos(n\omega t)$$

$$f(t) \approx 0{,}166 + 0{,}275\cos(\omega t) + 0{,}137\cos(2\omega t) - 0{,}068\cos(4\omega t) - 0{,}055\cos(5\omega t)$$

I. Série Trigonométrica de Fourier

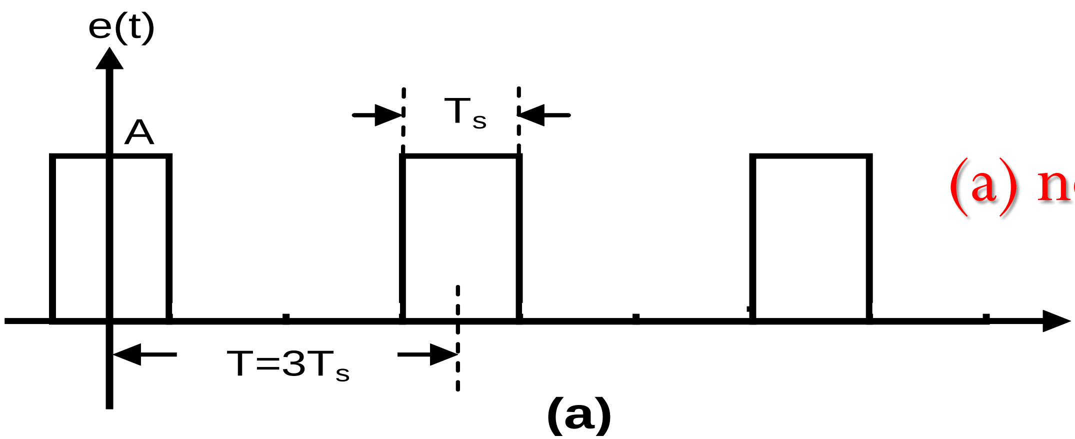


http://www.labtel.ele.ufes.br

http://www.labtel.ele.ufes.br

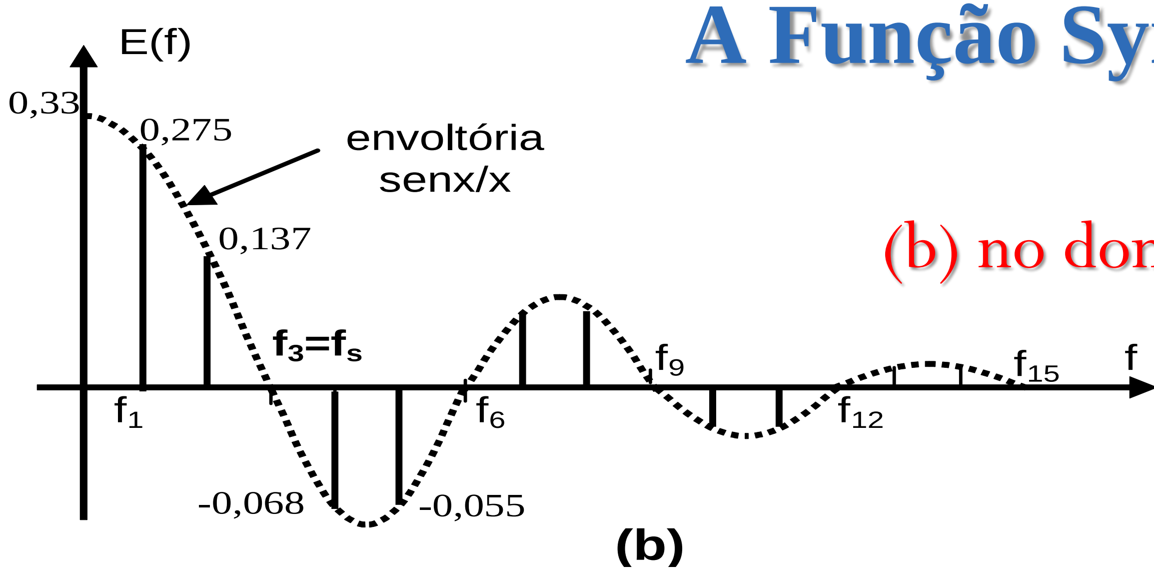
I. Série Trigonométrica de Fourier

No Padrão Repetitivo para T/TS=3



(a) no domínio tempo

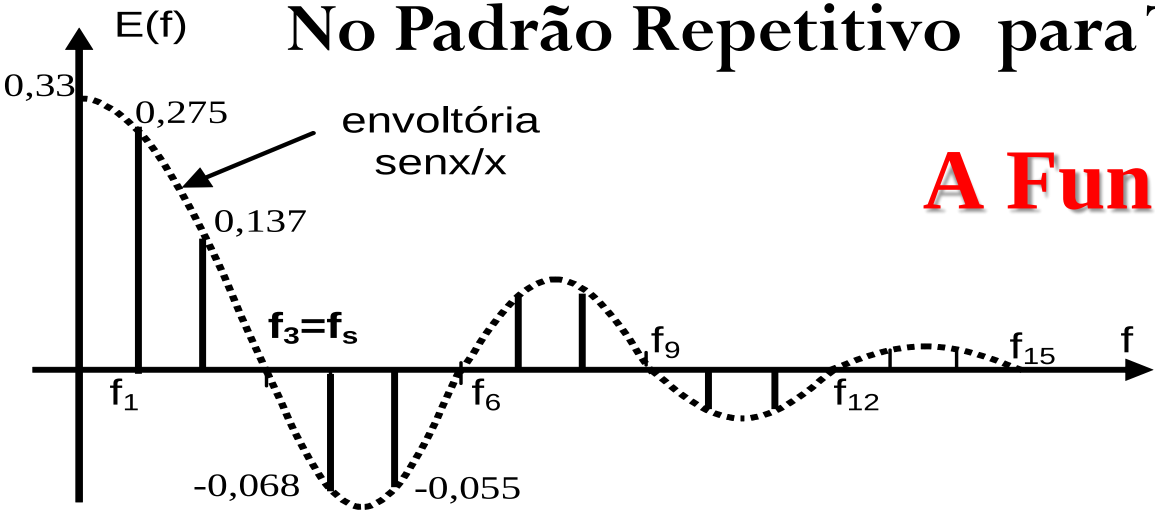
A Função Sync



(b) no domínio frequência

I. Série Trigonométrica de Fourier

No Padrão Repetitivo para T/TS=3



A Função Sync

✓ Todos os coeficientes, com índice **n** múltiplo inteiro de três, são nulos.

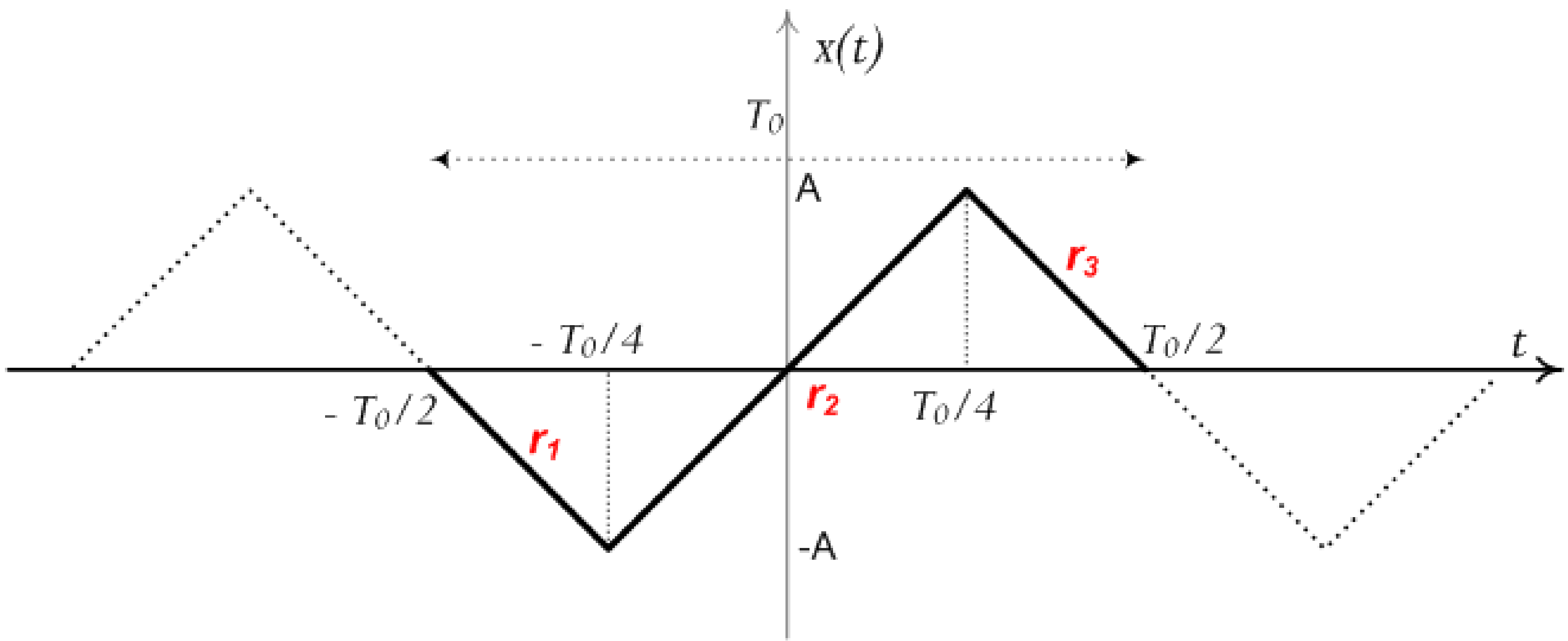
✓ A primeira frequência harmônica nula do espectro corresponde à frequência f_3=3kHz, e também à taxa de bits **Rs = 1/Ts =3kbit/s**.

✓ Os coeficientes seguem uma envoltória definida por **y = senx/x**.

✓ O coeficiente $a_0/2$ corresponde à componente DC (*Direct Current*)

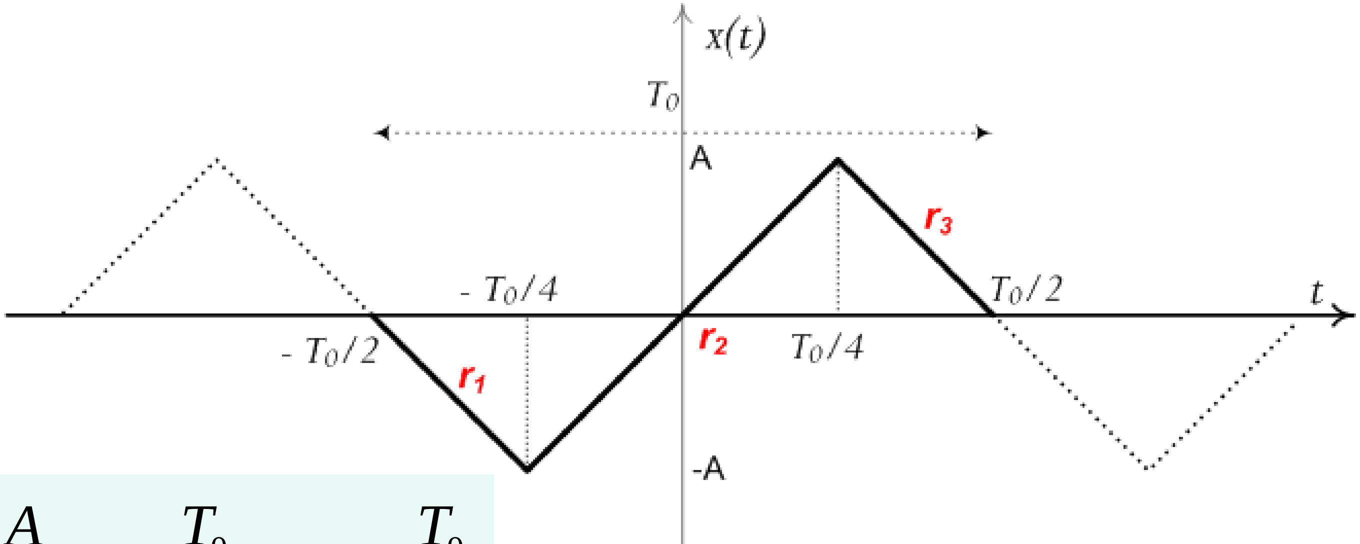
I. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício**: Encontre a expansão em série Trigonométrica de Fourier da onda triangular de amplitude ***A*** mostrada na Figura.



I. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício (cont)**: A partir das equações de $\boldsymbol{x(t)}$,…



$$x(t)=\begin{cases} -2A-\dfrac{4A}{T_0}t & ;\ -\dfrac{T_0}{2}\leq t\leq -\dfrac{T_0}{4} \\ \dfrac{4A}{T_0}t & ;\ -\dfrac{T_0}{4}\leq t\leq \dfrac{T_0}{4} \\ +2A-\dfrac{4A}{T_0}t & ;\ +\dfrac{T_0}{4}\leq t\leq +\dfrac{T_0}{2} \end{cases}$$

15 Integrais ???

I. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício (cont)**: Considerando condições de Simetria,…

Expandindo a função em uma série trigonométrica de Fourier escolhendo-se o eixo de simetria de forma a termos uma função **ímpar** e **semi-simétrica**:

$$\boxed{x(t)=\frac{4A}{T_0}t}$$

- Integral de 0 a $T_0/4$
- Somente Coeficientes ímpares
- Somente termos em seno
- Valor médio nulo

I. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício (cont)**: Considerando condições de Simetria,...

$$x(t)=\frac{4A}{T_0}t$$

Onda Triangular

$$b_{2k-1}=\frac{8}{T_0}\int_0^{T_0/4}\frac{4A}{T_0}t\cdot\sin\left[2\pi(2k-1)f_0t\right]\cdot dt$$

$$b_{2k-1}=\frac{32A}{T_0^{\,2}}\int_0^{T_0/4}t\cdot\sin\left[2\pi(2k-1)f_0t\right]\cdot dt$$

Da propriedade: $\int u\cdot dv=v\cdot u-\int v\cdot du$

$$u=t\Rightarrow du=dt$$

$$dv=\sin\left[2\pi(2k-1)f_0t\right]\Rightarrow v=-\frac{\cos\left[2\pi(2k-1)f_0t\right]}{2\pi(2k-1)f_0}$$

I. Série Trigonométrica de Fourier

Onda Triangular

$$b_{2k-1} = \frac{32A}{T_0^{\,2}}\left\{ -t \cdot \frac{\cos\left[2\pi(2k-1)f_0 t\right]}{2\pi(2k-1)f_0}\Bigg|_0^{T_0/4} + \int_0^{T_0/4} \cdot \frac{\cos\left[2\pi(2k-1)f_0 t\right]}{2\pi(2k-1)f_0}\,dt \right\}$$

$$b_{2k-1} = \frac{32A}{T_0^{\,2}}\left\{ -T_0 \cdot \frac{\cos\left[2\pi(2k-1)\dfrac{\cancel{T_0}}{4\cancel{T_0}}\right]}{8\pi(2k-1)\dfrac{1}{T_0}} + \frac{1}{\left[2\pi(2k-1)f_0\right]}\int_0^{T_0/4} \cos\left[2\pi(2k-1)f_0 t\right]dt \right\}$$

$$b_{2k-1} = \left\{ -\cancelto{0}{\frac{T_0^{\,2} \cdot \cos\left[(2k-1)\dfrac{\pi}{2}\right]}{8\pi(2k-1)}} + \frac{1}{\left[2\pi(2k-1)f_0\right]^2}\int_0^{T_0/4} \left[2\pi(2k-1)f_0 t\right]\cdot \cos\left[2\pi(2k-1)f_0 t\right]dt \right\}$$

I. Série Trigonométrica de Fourier

Onda Triangular

$$b_{2k-1} = \left\{ \cancelto{0}{-\frac{T_0^{\,2} \cdot \cos\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]}{8\pi(2k-1)}} + \frac{1}{\left[2\pi(2k-1)f_0\right]^2}\int_0^{T_0/4}\left[2\pi(2k-1)f_0 t\right]\cdot\cos\left[2\pi(2k-1)f_0 t\right]dt \right\}$$

$$b_{2k-1} = \frac{32A}{T_0^2}\cdot\left.\frac{\sin\left[2\pi(2k-1)f_0 t\right]}{\left[2\pi(2k-1)f_0\right]^2}\right|_0^{T_0/4} = \frac{32A}{T_0^2}\cdot\frac{\sin\left[2\pi(2k-1)\frac{T_0}{4T_0}\right]}{4\pi^2(2k-1)^2\frac{1}{T_0^{\,2}}}$$

$$b_{2k-1} = \frac{8A\cdot\sin\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]}{\pi^2(2k-1)^2}$$

I. Série Trigonométrica de Fourier

Onda Triangular

Sabendo que:

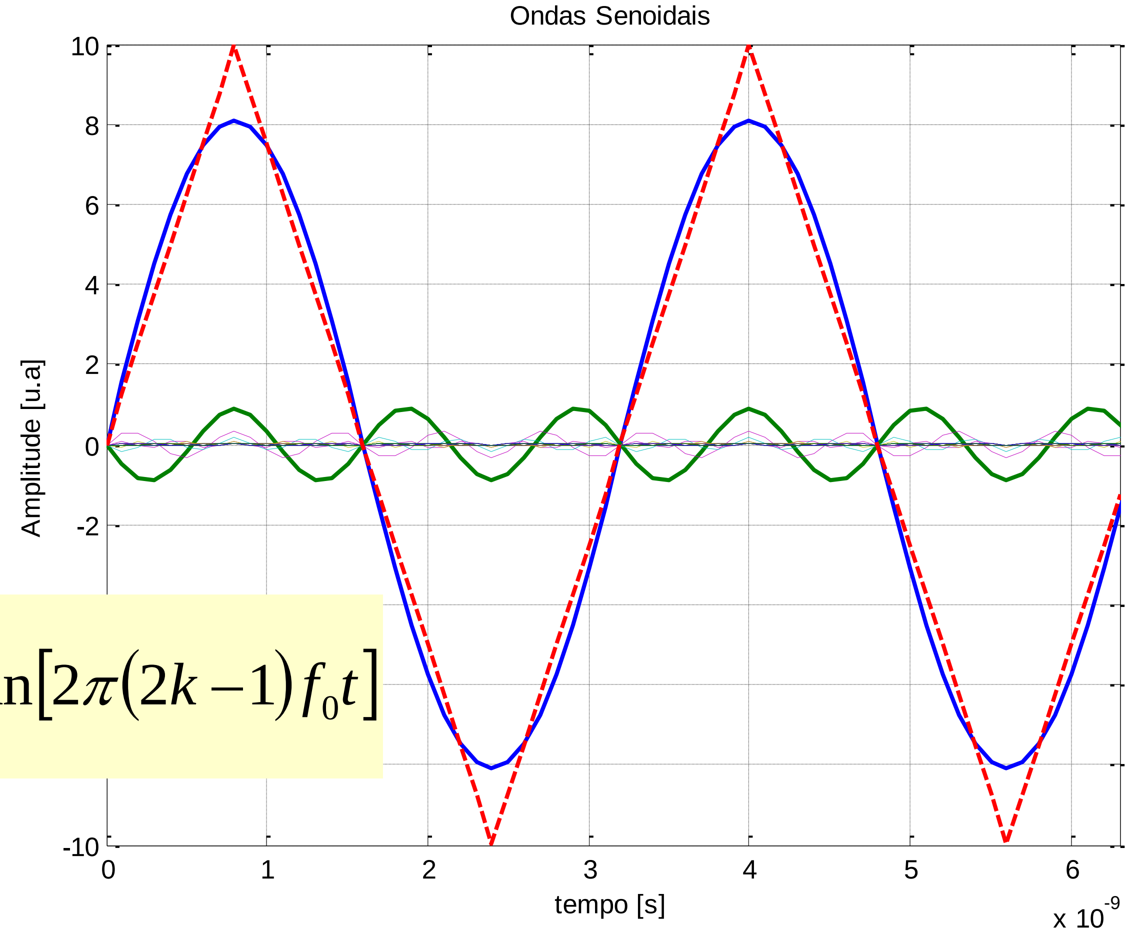
$$\sin\left[\frac{\pi}{2}(2k-1)\right] = \sin\left(\pi k - \frac{\pi}{2}\right) = \overbrace{\sin(\pi k)}^{0}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi k)\cdot\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{1} = (-1)^{k+1}$$

$$b_{2k-1} = \frac{8A\cdot\sin\left[(2k-1)\dfrac{\pi}{2}\right]}{\pi^2(2k-1)^2} = \frac{8A\cdot(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k-1)^2}$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8A(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k-1)^2}\sin[2\pi(2k-1)f_0 t]}$$

I. Série Trigonométrica de Fourier

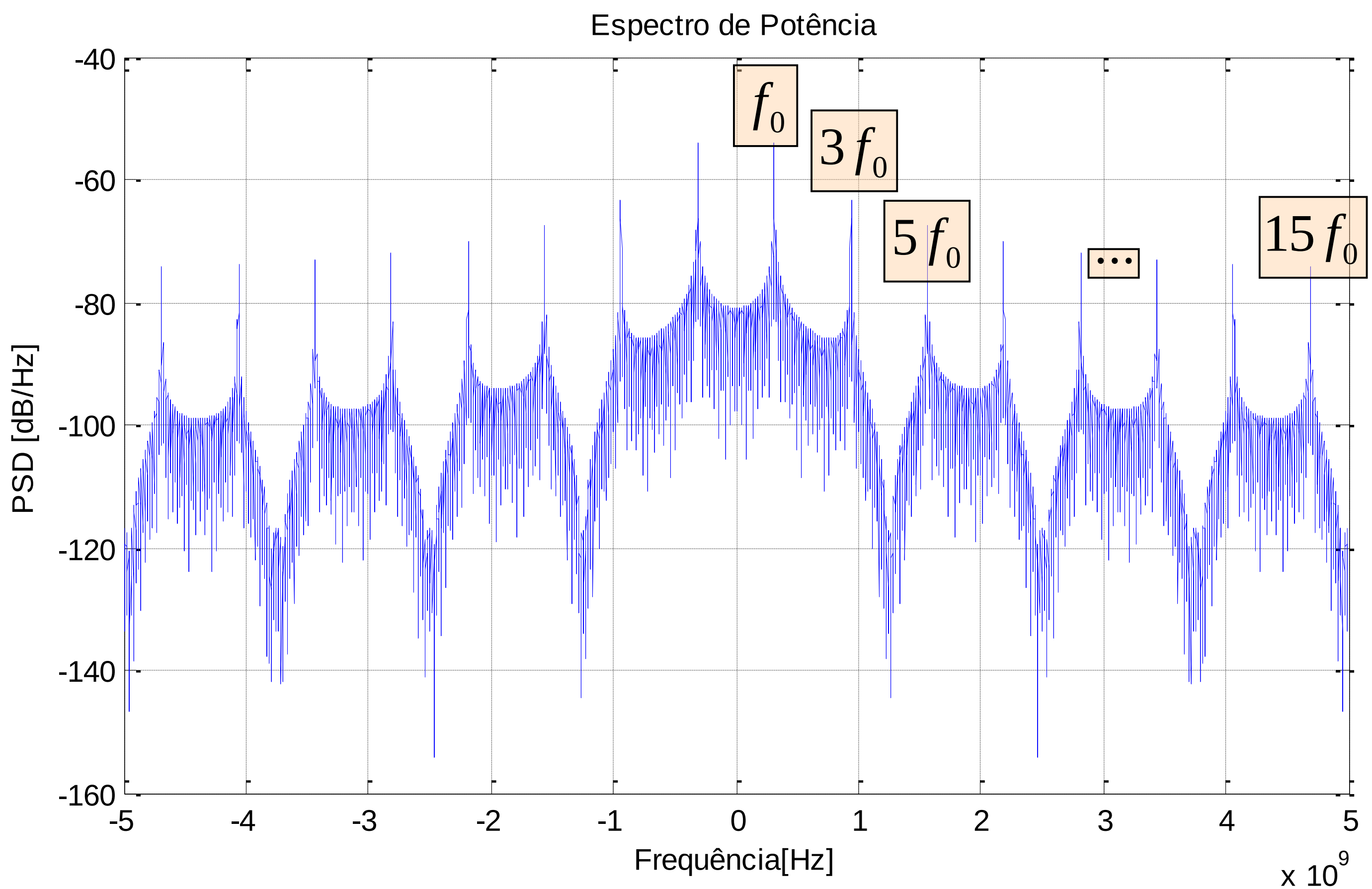
Onda Triangular – Domínio do Tempo



$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8A(-1)^{k+1}}{\pi^2 (2k-1)^2} \sin\left[2\pi(2k-1) f_0 t\right]$$

I. Série Trigonométrica de Fourier

Onda Triangular – Domínio da Frequência



Índice

http://www.labtel.ele.ufes.br

IIa. Série Harmônica de Fourier

- A série Harmônica representa uma maneira mais compacta da expansão em série de Fourier.

- É preferencial na análise de sinais em transmissão de dados, já que caracteriza melhor as influências do canal sobre o sinal ***f(t)*** utilizado.

- Assim, a partir da série trigonométrica e fazendo:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \text{e} \quad \theta_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

IIa. Série Harmônica de Fourier

- A série Harmônica de Fourier é descrita por:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(2\pi \cdot f_n \cdot t + \theta_n)$$

- Cada harmônica tem frequência nf_0, (n inteiro), amplitude A_n (não negativa) e fase θ_n (em relação à origem arbitrada em $t=0$, $-\pi \leq \theta_n \leq +\pi$) ,
- A_0 a componente CC (fase 0 se positivo e π se negativo)
- A representação da série Harmônica de Fourier no domínio da frequência denomina-se **Espectro**
    - A_n – Espectro de Amplitude
    - θ_n – Espectro de Fase
- **Espectro de sinais Periódicos é um Espectro Discreto**

IIb. Série Exponencial de Fourier

- Da equação de Euler:

$$e^{jwt} = \cos(wt) + j\sin(wt)$$

$$\cos(wt) = \frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(wt) = \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}$$

- Substituindo estas equações na expressão Canônica da expansão em série de Fourier,…

IIb. Série Exponencial de Fourier

- e lembrando que $nw = 2\pi f_n, \quad$ para $\quad n = 1,2,3,\ldots\infty$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\cdot\left(e^{jnwt} + e^{-jnwt}\right) + \frac{b_n}{2j}\cdot\left(e^{jnwt} - e^{-jnwt}\right)\right]$$

- Com $1/j = -j$, têm-se que

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right)e^{jnwt} + \frac{1}{2}\left(a_n + jb_n\right)e^{-jnwt}\right]$$

IIb. Série Exponencial de Fourier

- Definindo-se:

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad \text{e} \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

- Considerando-se que C_n e C_{-n} são os coeficientes das componentes de **frequências positivas** e **negativas** respectivamente, obtém-se que,

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{jnwt} + C_{-n} e^{-jnwt}\right)$$

- com as exponenciais representado respectivamente, as **harmônicas de frequências positivas** e **negativas**.

IIb. Série Exponencial de Fourier

- A troca de sinais dos limites do segundo somatório, provoca mudança de sinal no argumento do somatório, tal que:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jnwt} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{jnwt}$$

- Se incluirmos o valor DC e se estendermos os limites da soma de - ∞ a +∞,…

IIb. Série Exponencial de Fourier

• Se incluirmos o valor DC e se estendermos os limites da soma de - ∞ a +∞,...

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jnwt}}$$

Série Exponencial Complexa de Fourier

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{-+T_0/2} x(t)dt, \qquad C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)e^{-jnwt}dt,$$

$$C_n = A_n + jB_n, \qquad |C_n| = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \qquad \text{e} \qquad \theta_n = tg^{-1}\left(\frac{B_n}{A_n}\right)$$

IIb. Série Exponencial de Fourier

- Considerações,...

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jnwt}$$

Série Exponencial Complexa de Fourier

ou

Série de Fourier de Tempo Contínuo

ou

Série de Fourier

✓ O espectro gerado terá componentes nas frequências positivas e frequências negativas (**Espectro Simétrico**)

✓ O eixo de simetria será a frequência zero (DC)

http://www.labtel.ele.ufes.br

IIb. Série Exponencial de Fourier

- Considerações,...

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jnwt}, \qquad x(t) \xrightarrow{SF} C_n$$

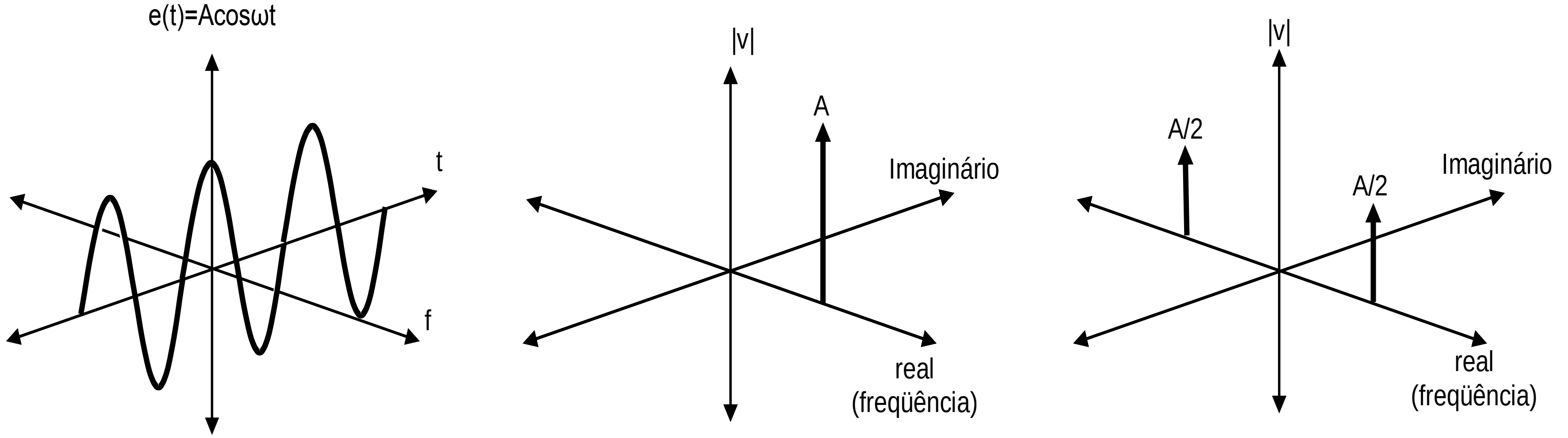
✓ O Teorema de Parseval se aplica, ou seja, a potência média é a mesma em ambos os domínios:

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

IIb. Série Exponencial de Fourier

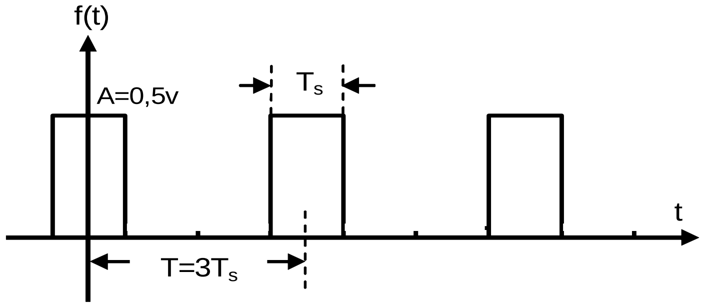
Representação Trignométrica ou real (um fasor)

Representação Complexa (dois fasores)



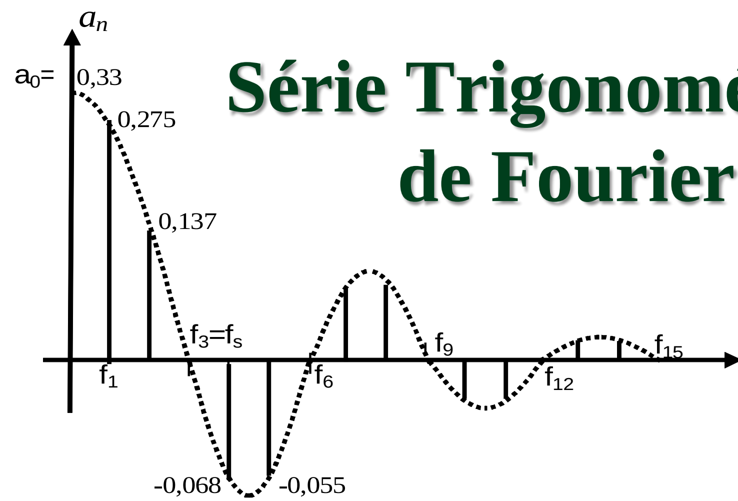
(a) Domínio tempo de e(t) (b) Fasor único (expansão trigonométrica) (c) Doisfasores na expansão complexa

No Exemplo

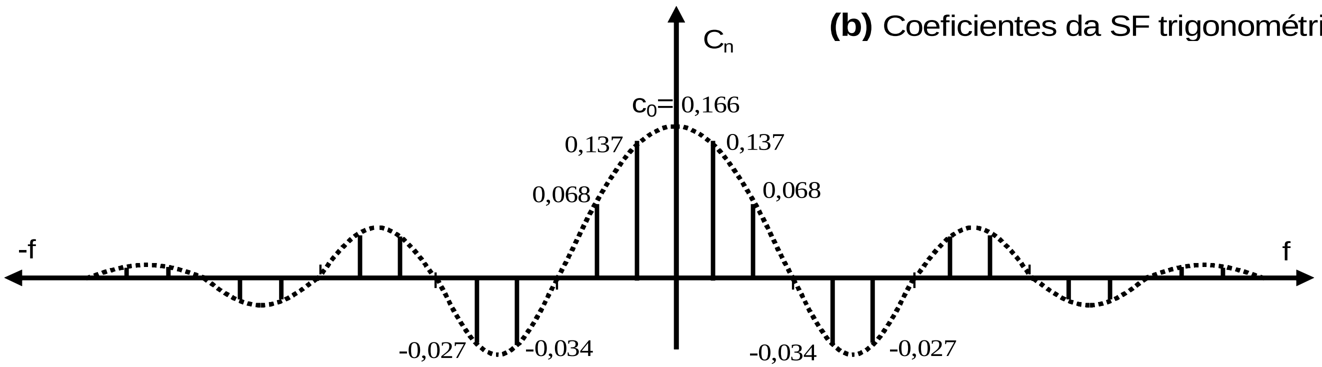


(a) Função f(t) com $T=3T_s$

Série Trigonométrica de Fourier

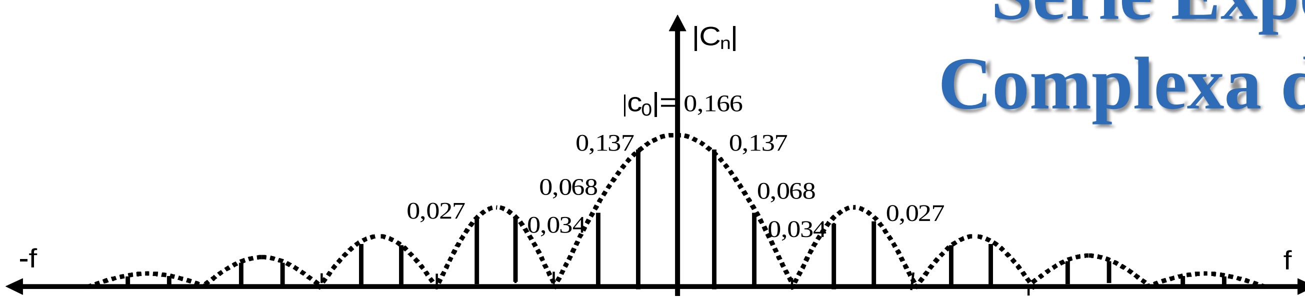


(b) Coeficientes da SF trigonométrica



(c) Coeficientes da SF complexa

Série Exponencial Complexa de Fourier



(d) Coeficientes da SF complexa em valor absoluto

Índice

III. Transformada de Fourier

- A série de Fourier se aplica a sinais Periódicos que são **sinais de potencia**.

- A necessidade de analisarmos tanto sinais de potência quanto sinais de energia requer a adoção de uma ferramenta mais poderosa.

✓ Esta ferramenta é a Transformada de Fourier

IV. Transformada de Fourier

a. Definição

- Da série de Fourier de um sinal Periódico de frequência fundamental $\Delta_f = f_0 = 1/T_0$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jnwt}, \quad C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)e^{-jnwt}dt$$

- Substituindo C_n em $x(t)$ teremos:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau)e^{-jnw\tau}d\tau\right]\cdot e^{jnwt}$$

III. Transformada de Fourier

a. Definição

- Sabendo que $w = 2\pi f_0 = 2\pi\Delta_f$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\Delta_f \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi n\Delta_f \tau} d\tau\right]\cdot e^{j2\pi n\Delta_f t}$$

- Se aproximarmos T_0 para infinito, o sinal periódico transforma-se em um **sinal aperiódico**.

- Δ_f transforma-se no diferencial d_f e $n\Delta_f$ uma variável contínua em f.

III. Transformada de Fourier

IVa. Definição

- Logo,

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Delta_f \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi n \Delta_f \tau} d\tau \right] \cdot e^{j2\pi n \Delta_f t} \right\}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f t} d\tau \right] e^{j2\pi f t} df$$

$$\boxed{F\{x(t)\}}$$

IV. Transformada de Fourier

IIIa. Definição

- **Relação Biunívoca**

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt$$

Transformada de Fourier

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[X(f)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft}\, df$$

Transformada Inversa de Fourier

III. Transformada de Fourier

- Considerações,…

✓ O sinal original está no domínio do tempo (argumento tempo)

✓ A representação da transformada de Fourier está no domínio da frequência (argumento frequência)

✓ A transformada de Fourier é chamada de **equação de análise** de $x(t)$ já que extrai as componentes de $X(f)$ em cada valor de f

✓ A transformada inversa é chamada de **equação de síntese** já que recombinas as componentes de $X(f)$ para obter $x(t)$.

✓ Se a unidade de $x(t)$ for Volts, a de $X(f)$ é Volts/Hz

IV. Transformada de Fourier

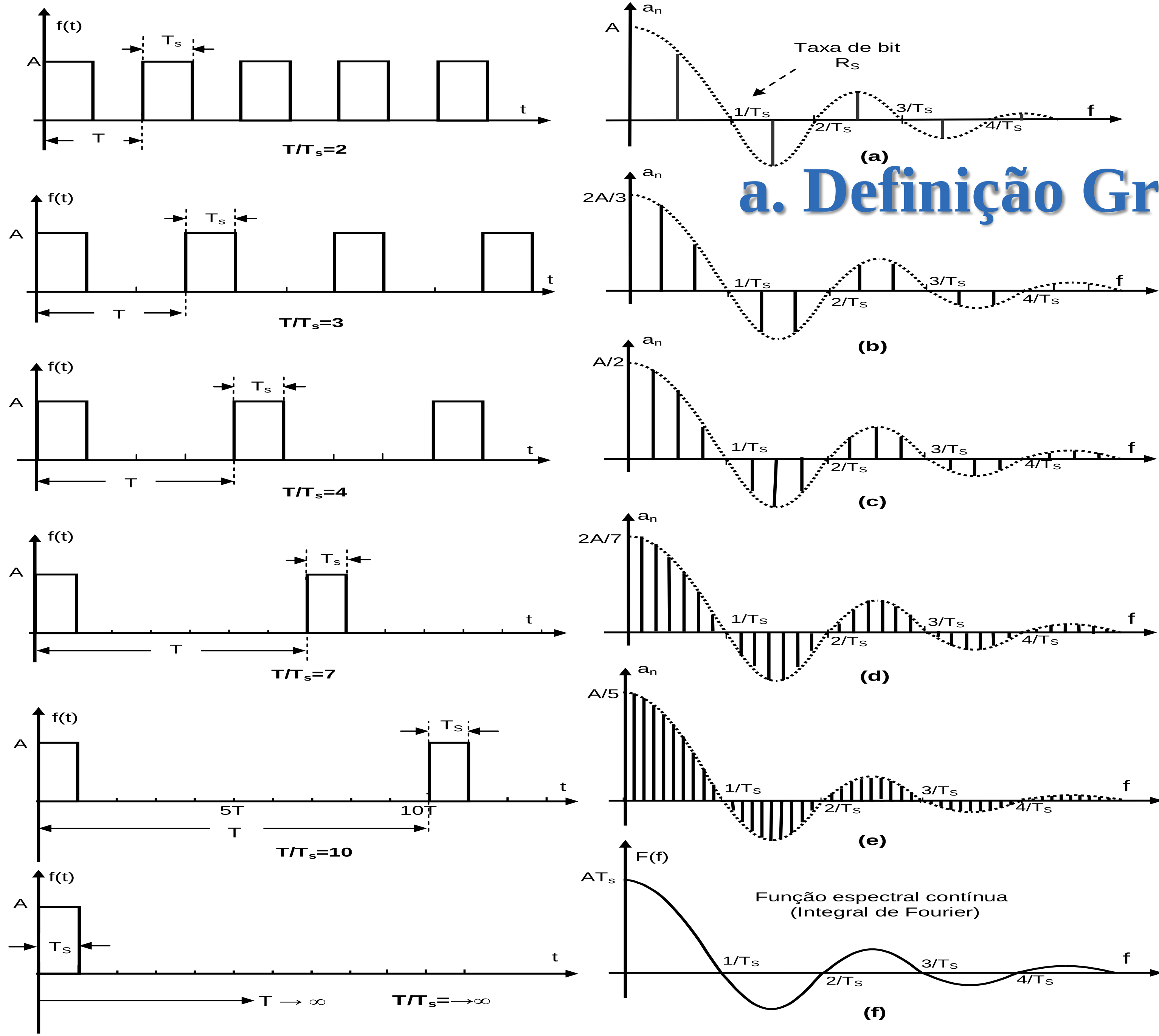
- **Exercícios**

1. Encontre a expressão da transformada de Fourier das funções:

$$x_1(t) = rect\left(\frac{t}{T_0}\right) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = u(t)\cdot e^{-at} = \begin{cases} e^{-at}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

2. Faça gráficos ilustrativos das formas de onda no tempo e da característica de amplitude.

a. Definição Gráfica

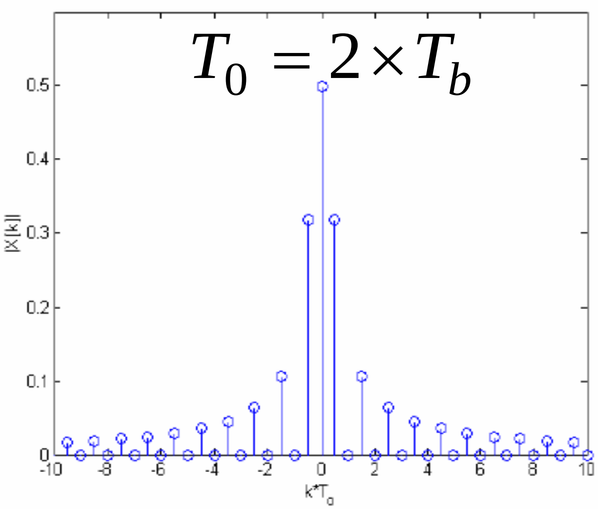


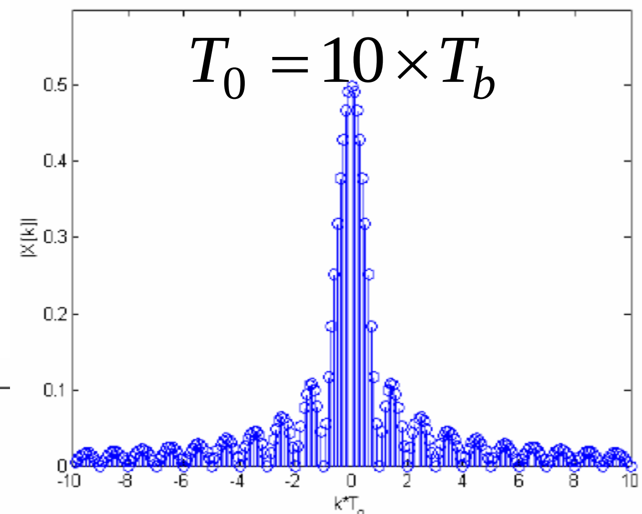
III. Transformada de Fourier

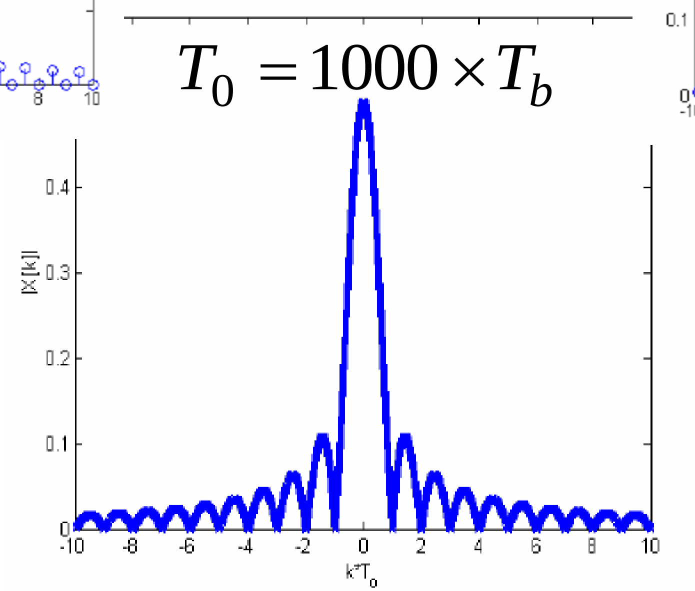
IIIa. Definição Gráfica – Matlab (TPC)

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

$$X(f) = T_0 \cdot \mathrm{sinc}(ft)$$







III. Transformada de Fourier

- A Transformada de Fourier é uma função complexa da frequência:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \sin(2\pi f t) dt = A(f) \cdot e^{j\theta(f)}$$

- O módulo representa o espectro de amplitude do sinal
- A fase representa o espectro de fase do sinal
- Tais <u>Espectros são Contínuos</u> para <u>sinais não-Periódicos</u>.

III. Transformada de Fourier

- Da equação abaixo conclui-se que:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\sin(2\pi ft)dt = A(f)\cdot e^{j\theta(f)}$$

- O complexo conjugado de $X(f)$ é $X^*(f) = X(-f)$
- O módulo $A(f)$ é uma função **par** da frequência e a fase $\theta(f)$ é uma função **ímpar** da frequência

III. Transformada de Fourier

- Conclui-se também que:
- Para *x(t)* uma função **par**, a transformada é uma função **real**

$$X(f) = 2\int_{0}^{+\infty} x(t)\cdot\cos(2\pi f t)dt$$

- Neste caso, o espectro de fase pode ser:
  - 0 rad se $X(f)$ for real positivo
  - π rad se $X(f)$ for real negativo e $f > 0$
  - - π rad se $X(f)$ for real negativo e $f < 0$

III. Transformada de Fourier

- Conclui-se também que:
- Para *x(t)* uma função **ímpar**, a transformada é uma função **imaginária** da frequência.

$$X(f) = -2j\int_{0}^{+\infty} x(t)\cdot\sin(2\pi ft)dt$$

- Neste caso, o espectro de fase só pode ser:
  - π/2 rad se *X(f)* for imaginário positivo e *f >0*
  - - π/2 rad se *X(f)* for imaginário negativo e *f >0*
  - - π/2 rad se *X(f)* for imaginário positivo e *f <0*
  - π/2 rad se *X(f)* for imaginário negativo e *f <0*

IV. Transformada de Fourier

- **Exemplo: Considere um pulso retangular com tensão $A = 6V$ e largura $T_s = 10\mu s$. Considere esta função básica das comunicações digitais com sendo uma função par do tempo.**

  a) Desenhe a forma de onda no tempo

  b) Determine a transformada de Fourier do sinal

  c) Esboce os espectros de amplitude e fase do resultado obtido em b).

IIIb. Pares de Transformada - TPC

Rectangular Pulse	$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\left[\mathrm{sinc}(fT)\right]$
Triangular Pulse	$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\left[\mathrm{sinc}(fT)\right]^2$
Unit Step	$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
Signum	$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
Constant	1	$\delta(f)$
Impulse at t_o	$\delta(t-t_o)$	$e^{-j2\pi f t_o}$
Sinc	$\mathrm{sinc}(2Wt)$	$\frac{1}{2W}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$
Phasor	$e^{j\omega_o t+\varphi}$	$e^{j\varphi}\delta(f-f_o)$
Sinusoid	$\cos(2\pi f t+\varphi)$	$\frac{1}{2}e^{j\varphi}\delta(f-f_o)+\frac{1}{2}e^{-j\varphi}\delta(f+f_o)$
Gaussian	$e^{-\pi(t/t_o)^2}$	$t_o e^{-\pi(f t_o)^2}$

IVc. Propriedades

Property	
Conjugation	$x^*(t) \rightleftharpoons X^*(-f)$
Linearity	$\alpha x(t) + \beta y(t) \rightleftharpoons \alpha X(f) + \beta Y(f)$
Time-shifting	$x(t - t_o) \rightleftharpoons e^{-j2\pi f t_o} X(f)$
Frequency-shifting	$e^{j2\pi f_o t} x(t) \rightleftharpoons X(f - f_o)$
Time reversal	$x(-t) \rightleftharpoons X(-f)$
Time-differentiation	$\frac{d}{dt}\{x(t)\} \rightleftharpoons (j2\pi f) X(f)$
Time-integration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{*}{\rightleftharpoons} \frac{1}{j2\pi f} X(f)$ *If X(0) = 0
Time/freq-scaling	$x(at) \rightleftharpoons \frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
Multiplication	$x(t)y(t) \rightleftharpoons X(f) * Y(f)$
Convolution	$x(t) * y(t) \rightleftharpoons X(f)Y(f)$

Especial Interesse

IIIc. Propriedades - *Linearidade*

Se $z(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t)$

$$\Rightarrow Z(f) = \mathscr{F}[z(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\Rightarrow Z(f) = \alpha \cdot X(f) + \beta \cdot Y(f)$$

$$\alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t) \leftrightarrow \alpha \cdot X(f) + \beta \cdot Y(f)$$

IIIc. Propriedades – *Escalonamento no tempo*

Se $z(t) = x(at)$

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Fazendo $\lambda = at$

$$\Rightarrow Z(f) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \cdot e^{-j2\pi f(\lambda/a)} d\lambda$$

$$\Rightarrow Z(f) = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Compressão na Frequencia

IVc. Propriedades – *Diferenciação no tempo*

$$\frac{d}{dt}\{x(t)\} = \frac{d}{dt}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi f \cdot X(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df$$

$$\frac{d}{dt}\{x(t)\} = \mathscr{F}^{-1}\{j2\pi f \cdot x(t)\}$$

IIIc. Propriedades – *Deslocamento no tempo*

Se $z(t) = x(t - t_0)$

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Fazendo $\tau = t - t_0$

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f(\tau + t_0)} d\tau$$

$$\Rightarrow Z(f) = e^{-j2\pi f \cdot t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$\Rightarrow Z(f) = e^{-j2\pi f \cdot t_0} X(f)$$

Desvio na fase de $-2\pi f t_0$

IIIc. Propriedades – *Deslocamento na Frequência*

$$\text{Se } z(t) = x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\Rightarrow Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi (f - f_0)t} dt$$

$$Z(f) = X(f - f_0)$$

Teorema da Modulação

Índice

IVa. Densidade Espectral de Energia

- Considere o sinal *x(t)* como sendo um sinal de ENERGIA
- Ou seja, sua energia normalizada E_n é **finita** e positiva

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$$

- Considere ainda que este sinal pode ser obtido da transformada inversa de Fourier conforme:

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df$$

IVa. Densidade Espectral de Energia

- A energia normalizada total desse sinal é dado por:

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot x(t)dt$$

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot e^{+j2\pi ft}df\right]dt$$

Invertendo a ordem da integracao:

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{+j2\pi ft}dt\right]df$$

$$\boxed{X^*(f)}$$

IVa. Densidade Espectral de Energia

- Portanto,

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot X^*(f)\, df$$

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|X(f)\right|^2 df$$

$$E_x(f)$$

Densidade Espectral de Energia Normalizada Bilateral

Que integrada na frequencia resulta na Energia Normalizada TOTAL do sinal

http://www.labtel.ele.ufes.br

LAbTel

IVa. Densidade Espectral de Energia

- Ou seja, a Energia Normalizada Total do sinal pode ser obtida por integração no tempo OU na Frequência:

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f) \cdot df$$

Teorema da Energia de Rayleigh

- **<u>Observações Importantes</u>:**
- Apenas o Espectro de Amplitude $|X(f)| = M_x(f)$ do sinal interessa na determinação de E_n
- Para uma função $x(t)$ real, o modulo $M_x(f)$ é **Par** e portanto $E_x(f) = M^2{}_x(f)$ é **Par** e

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f) \cdot df = 2\int_{0}^{+\infty} E_x(f) \cdot df$$

- Em um intervalo de frequência (f_1, f_2), a energia normalizada é:

$$E_n(f_1, f_2) = \int_{-f_1}^{+f_2} E_x(f) \cdot df$$

IVb. Densidade Espectral de Potência

- Considere o sinal $x(t)$ como sendo de **Potência**
- Ou seja, sua energia normalizada total é infinita e potencia media normalizada **finita** e positiva.

$$P_{mn} = \overline{x^2(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\,dt$$

- Considere ainda uma função $x_T(t)$ que coincide com $x(t)$ em um intervalo de tempo T e nula fora dele:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{para } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{para } |t| > T/2 \end{cases}$$

LABTEL

http://www.labtel.ele.ufes.br

IVb. Densidade Espectral de Potência

- Com $X_T(f)$ a T.F. de $x_T(t)$, a sua energia total normalizada é:

$$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T^{\,2}(t)dt = \int_{-T/2}^{+T/2} x_T^{\,2}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|X_T(f)\right|^2 df$$

- A potencia média normalizada de $x(t)$ é:

$$\boxed{P_{mn} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \lim_{T \to \infty} \frac{\left|X_T(f)\right|^2}{T} df}$$

http://www.labtel.ele.ufes.br

IVb. Densidade Espectral de Potência

- À medida que T aumenta, a energia aumenta e portanto, $|X_T(f)|^2$ aumenta com T. No limite $(T \to \infty)$, $\frac{|X_T(f)|^2}{T}$ converge para um valor finito pois a potência do sinal é finita.

$$\boxed{P_X(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{\left|X_T(f)\right|^2}{T}}$$

Densidade Espectral de Potência Normalizada Bilateral

IVb. Densidade Espectral de Potência

- $P_X(f)$ integrada na frequência resulta na **potência média normalizada** do sinal.
- Se $P_X(f)$ é uma função par,

$$P_{mn} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} P_X(f)\,df$$

$$\Rightarrow P(f) = 2P_X(f) \quad \text{para } f \geq 0$$

Densidade Espectral de Potencia Normalizada Unilateral

Definição de Largura de Banda

- **<u>Exercício Exemplo</u>**: Determine a energia normalizada total do sinal $x(t) = Vsinc(t/t_0)$.

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 Sinc^2(t/t_0)dt \Rightarrow \text{Integraçao numerica}$$

complicada

- Mas do Teorema de Energia de Rayleigh e sabendo que:

$$X(f) = \begin{cases} Vt_0 & \text{para} \left| f \right| \leq t_0/2 \\ 0 & \text{para} \left| f \right| > t_0/2 \end{cases}$$

http://www.labtel.ele.ufes.br

Definição de Largura de Banda

$$E_n = 2\int_0^{+\infty} |X(f)|^2 df = 2V^2 t_0^2 \cdot \frac{1}{2t_0} = V^2 t_0$$

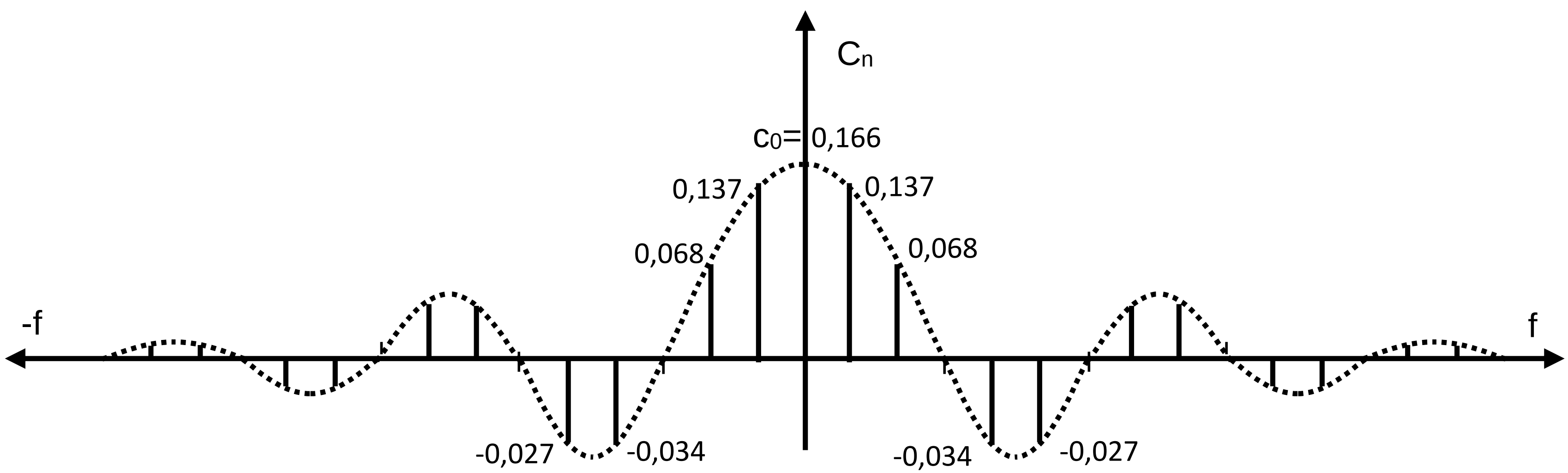
- Comparando as integrais no tempo e na frequência:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V^2 Sinc^2(t/t_0)dt = V^2 t_0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Sinc^2(t/t_0)dt = t_0$$

fazendo $t/t_0 = x$ e $dt = t_0 dx \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} Sinc^2(x)dx = 1}$

Definição de Largura de Banda

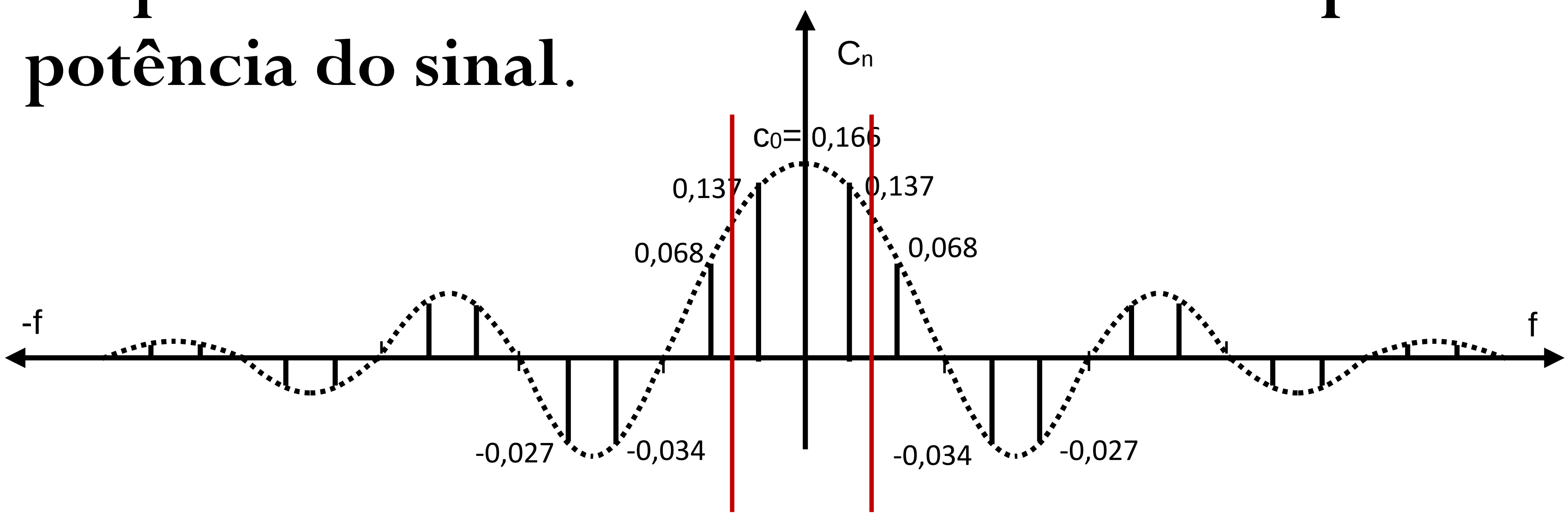
• Idealmente, defina-se a **largura de banda $\boldsymbol{B_w}$** (ou largura de faixa) como sendo a **faixa de frequências em que a densidade espectral de potência é <u>não nula</u>**.



Então, qual a largura de banda deste sinal?

Definição de Largura de Banda

- A largura de banda deve então ser a **faixa de frequências onde se concentra a maior parte da potência do sinal**.

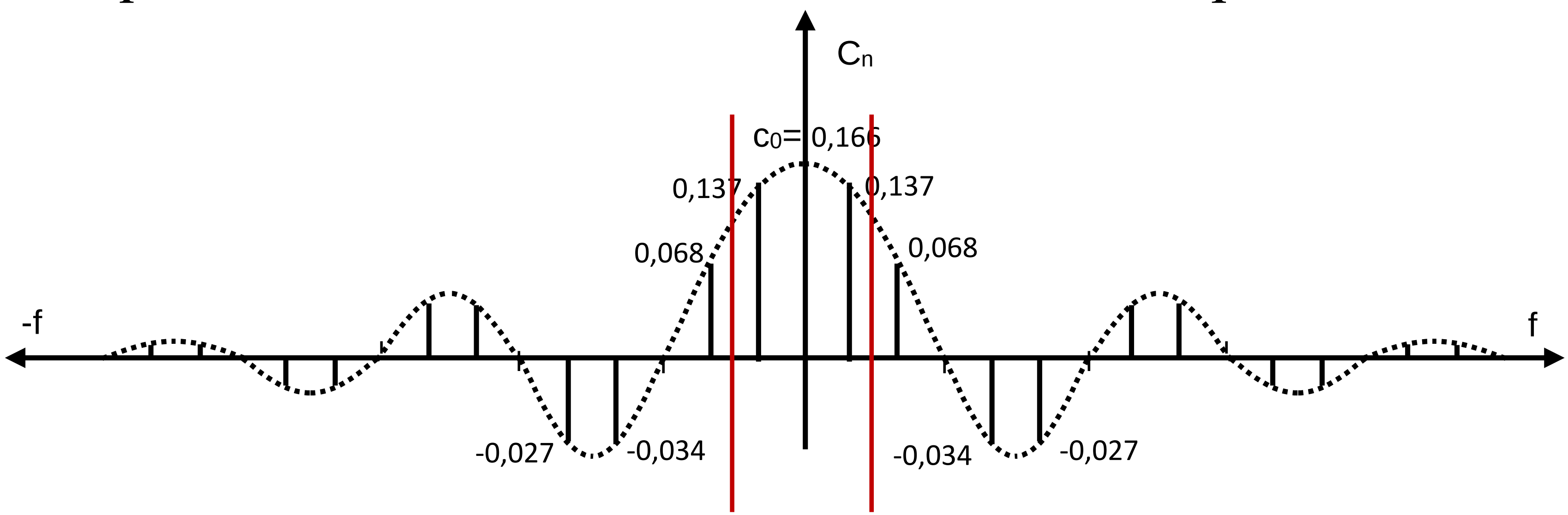


$B_{w_{3dB}}$

Largura de banda de Meia Potência?

Definição de Largura de Banda

- A largura de banda de meia potência compreende a faixa na qual a PSD decai até 3 dB do seu valor de pico

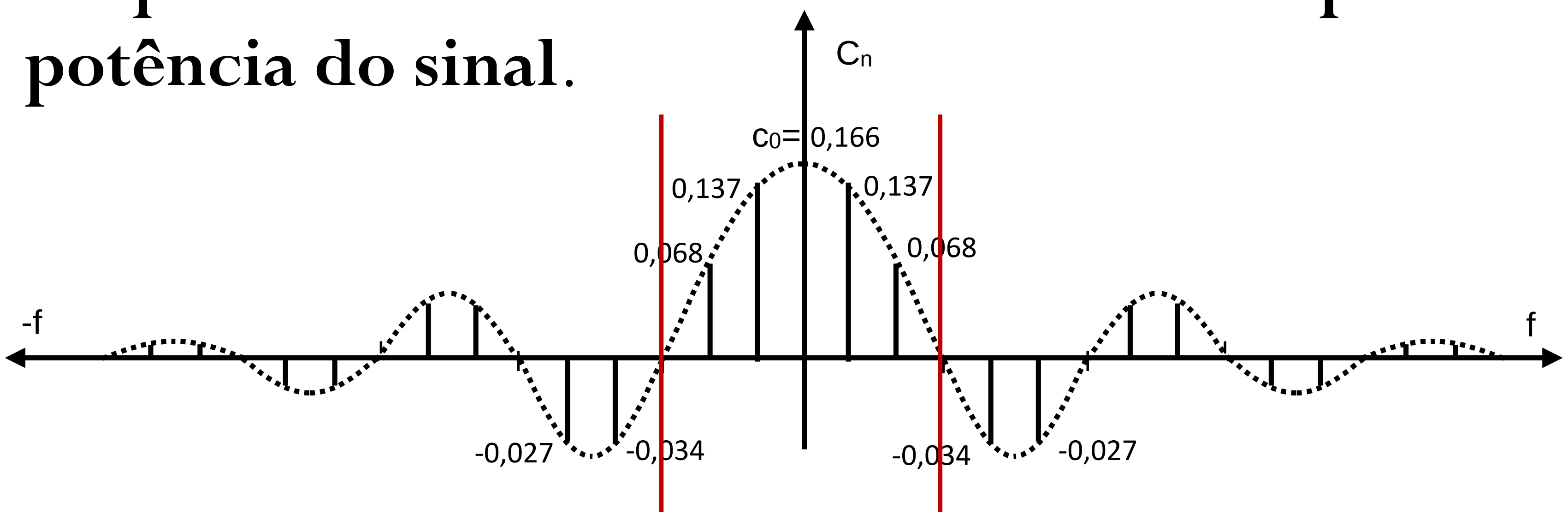


$$B_{w_{3dB}}$$

Indicação simplista da dispersão do espectro.

Definição de Largura de Banda

- A largura de banda deve então ser a **faixa de frequências onde se concentra a maior parte da potência do sinal**.

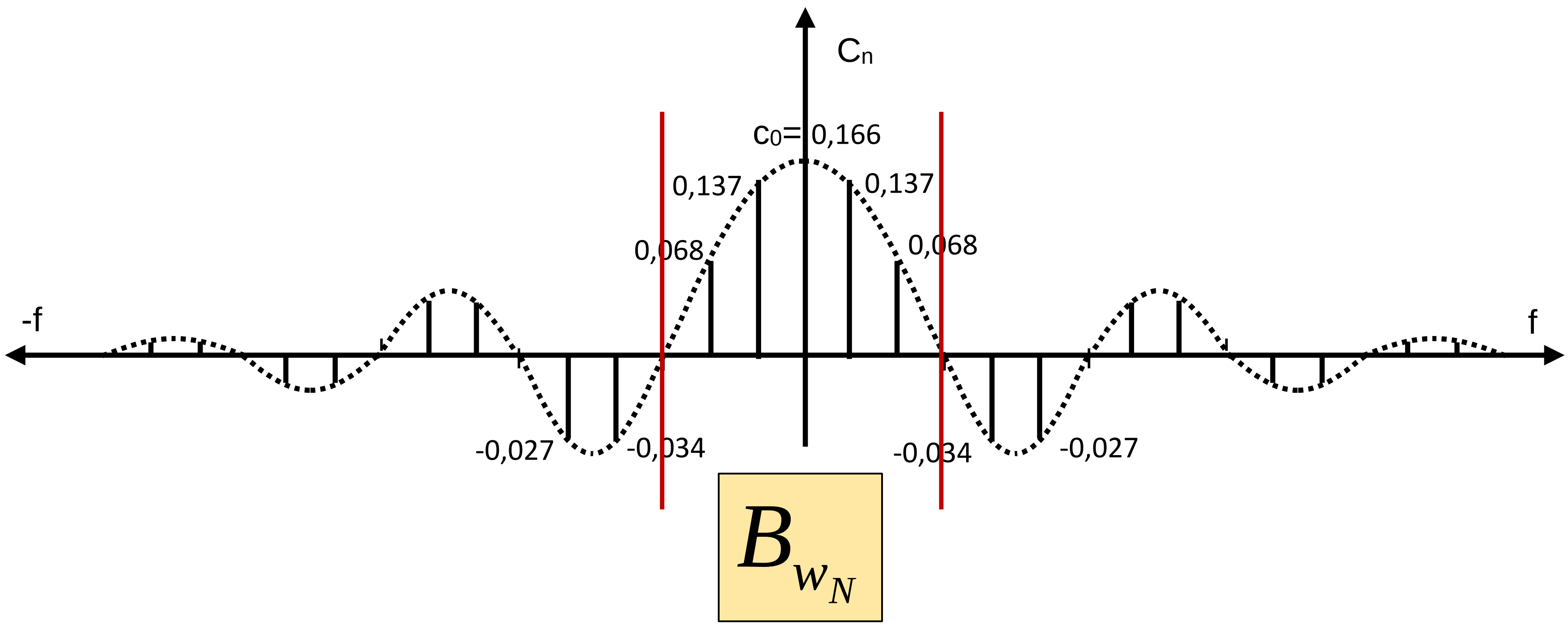


$$\boxed{B_{w_N}}$$

Largura de banda entre zeros (Null-to-Null)?

Definição de Largura de Banda

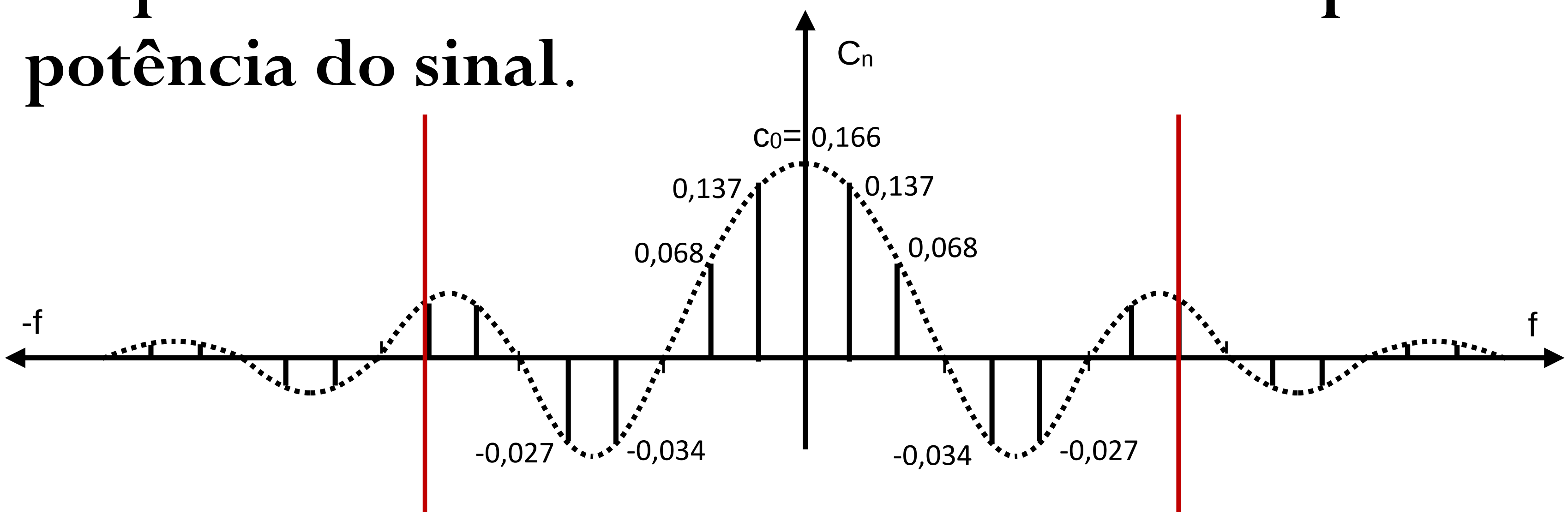
- Representa a largura de banda do lóbulo principal da PSD.



Assume que o lóbulo principal contém maior parte da potência.

Definição de Largura de Banda

- A largura de banda deve então ser a **faixa de frequências onde se concentra a maior parte da potência do sinal**.

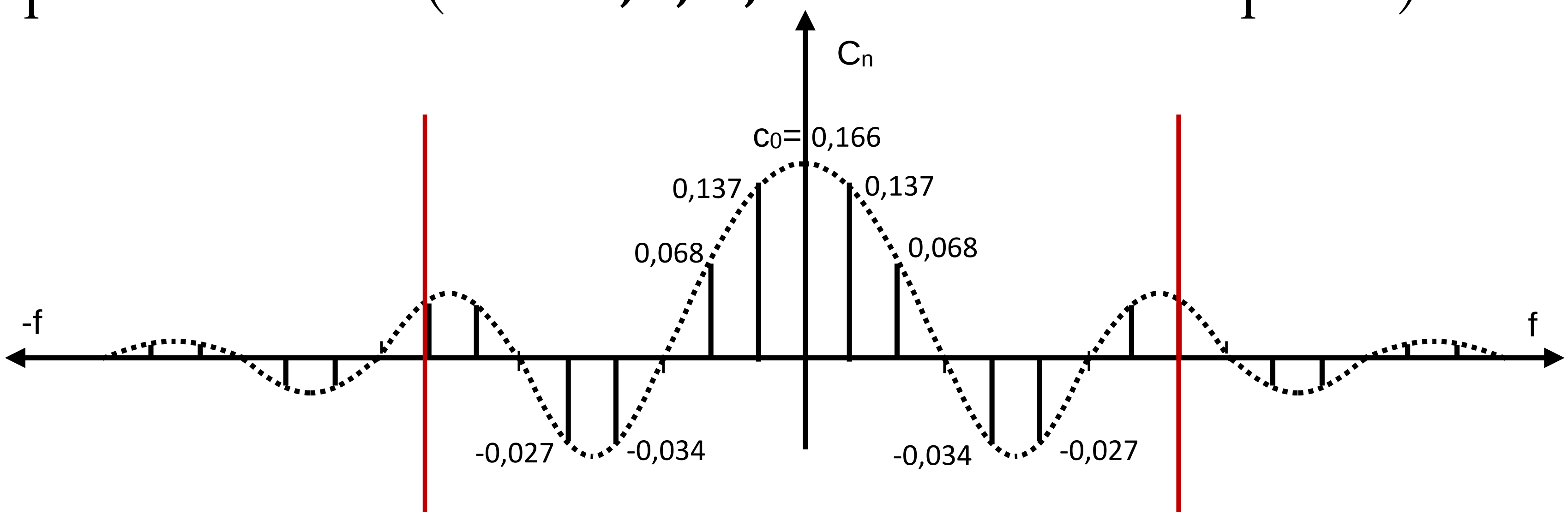


$$B_{w_{90\%}}$$

Largura de banda de conteúdo fracional de potencia?

Definição de Largura de Banda

- Definida pela faixa de frequências que contém $1 - \epsilon$ da potência total. ($\epsilon = 0{,}1, 0{,}001$ são valores típicos.)

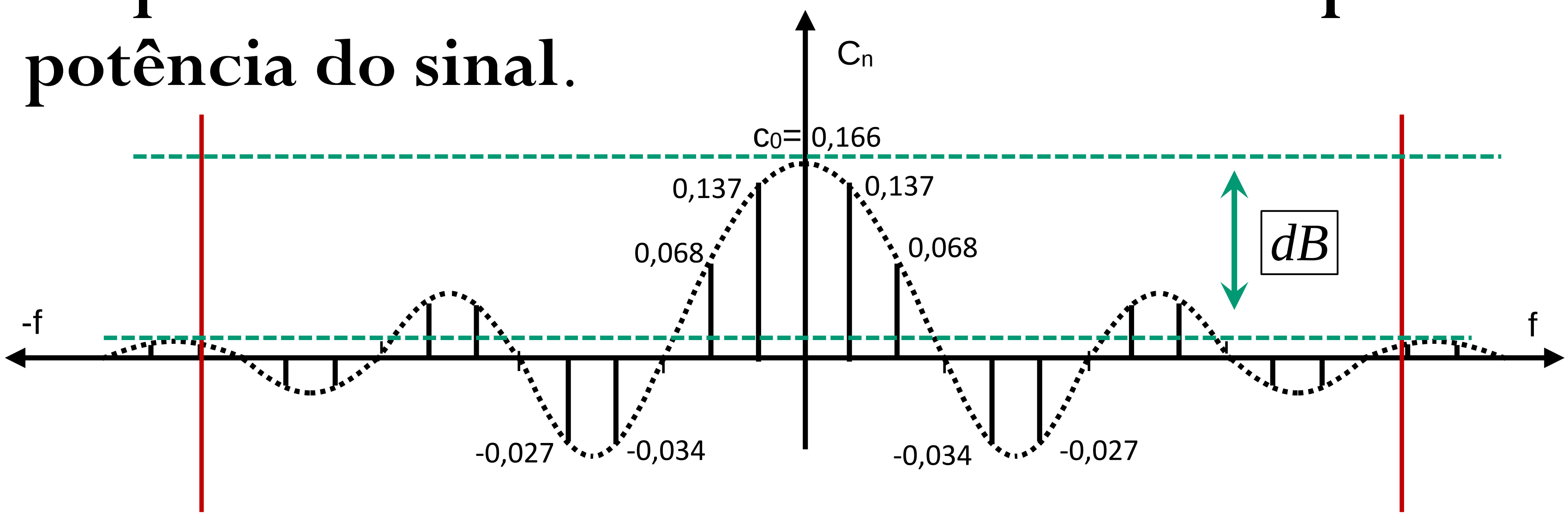


$$B_{w_{90\%}}$$

Dependendente do tipo de sinal (potência ou energia).

Definição de Largura de Banda

- A largura de banda deve então ser a **faixa de frequências onde se concentra a maior parte da potência do sinal**.

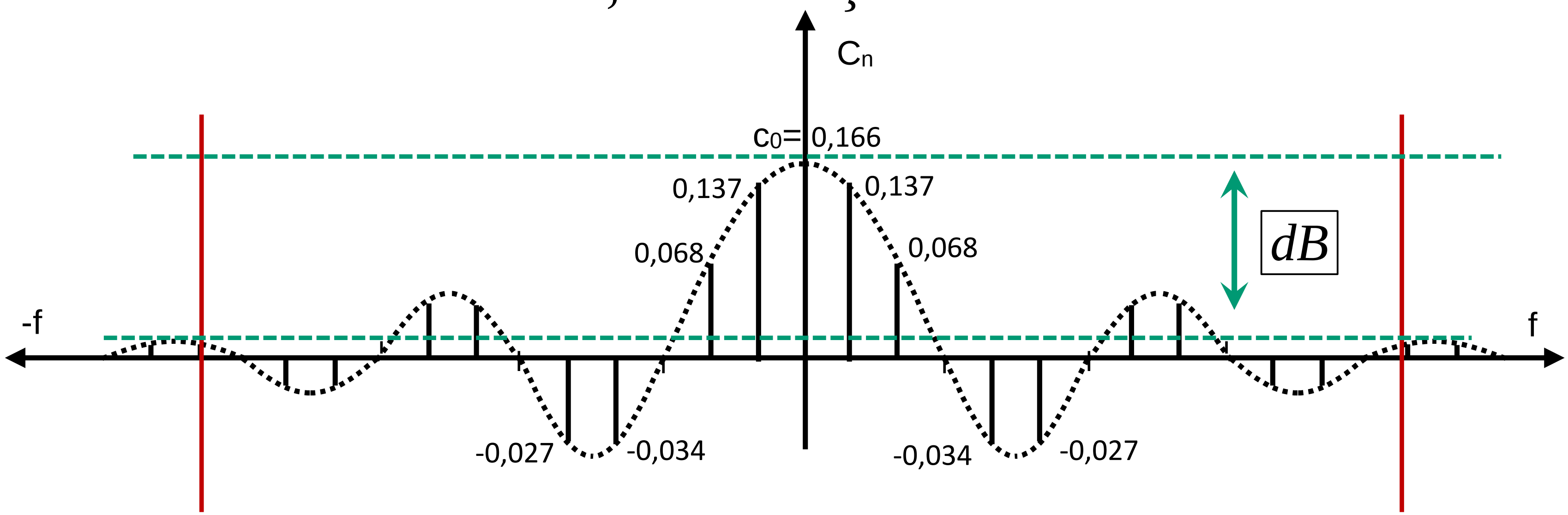


$$\boxed{B_{w_{PSD}}}$$

Largura de banda limitada pela PSD?

Definição de Largura de Banda

- Faixa de frequências na qual a PSD permanece abaixo de um certo nível em dB, em relação ao seu valor máximo.



$$\boxed{B_{w_{PSD}}}$$

Definição de Largura de Banda

- Todas as definições são apropriadas e a escolha de um em detrimento dos outros depende da aplicação.
- Geralmente defina-se matematicamente a largura de banda conforme:

$$B_w = \alpha \frac{1}{T} = \alpha \cdot R \quad [Hz]$$

para α uma constante real dependente da PSD e da definicao adotada

$R = \frac{1}{T}$ a taxa de sinalizacao $[bauds/s]$

T a duracao do sinal

Índice

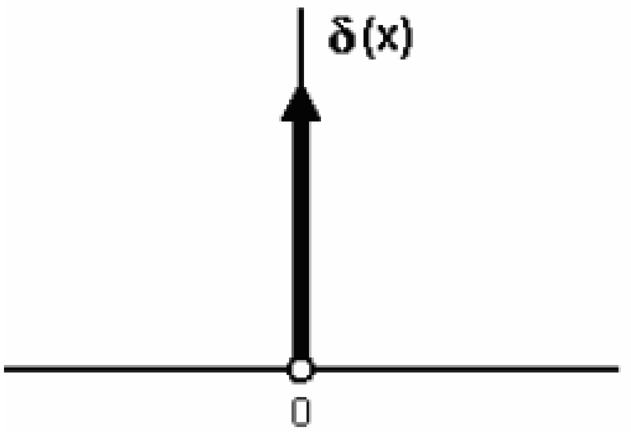
V. Função Impulso

- Também chamada de **Função Delta de Dirac**, o **Impulso Unitário** é definida pelas relações:

$$\delta(x) = 0, \quad \text{para} \quad x \neq 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$



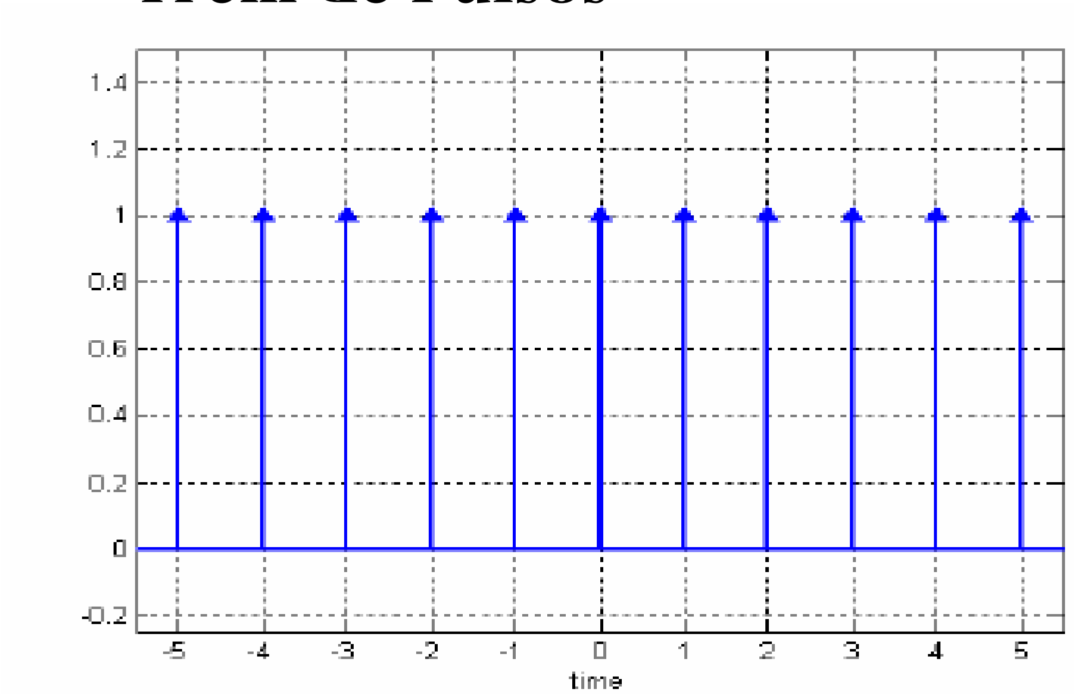
http://www.labtel.ele.ufes.br

V. Função Impulso

- O Trem de Pulsos (***Tp***) mostrado na figura abaixo é dado pela relação:

$$Tp(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

Trem de Pulsos

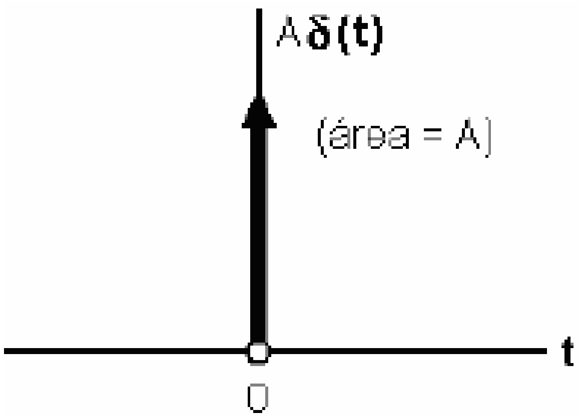


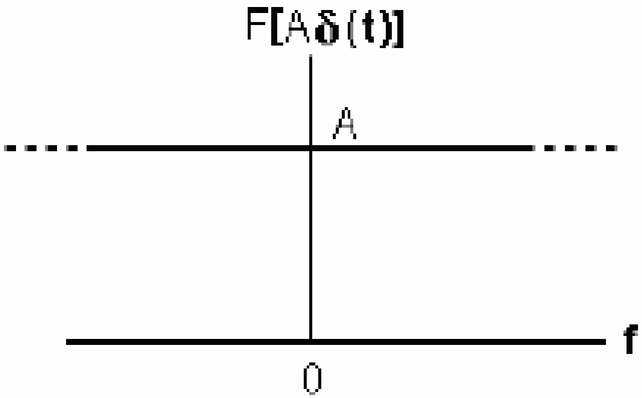
V. Função Impulso

Transformada de Fourier da Função Delta de Dirac

$$x(t) = A \cdot \delta(t), \qquad \text{para} \quad A \ \text{uma constante real}$$

$$F[A \cdot \delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = A \cdot e^{0} = A$$





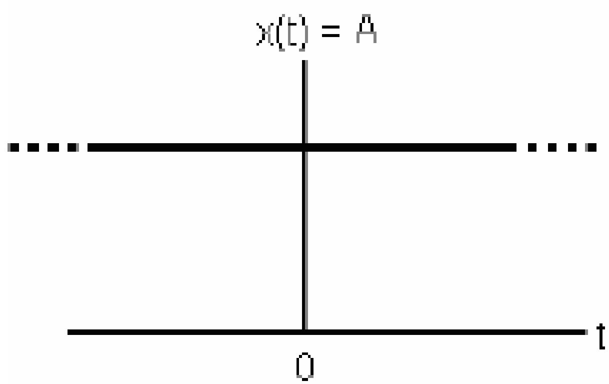
$$F\{Tp(t)\} = F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)$$

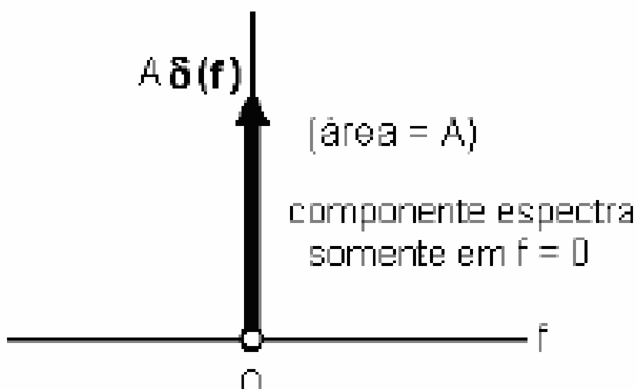
a. Aplicações da Função Impulso

Sinal CC

$$x(t) = A \qquad \text{para} \quad t \subset (-\infty, +\infty)$$

Da propriedade da Dualidade : $F[A \cdot \delta(t)] = A \rightarrow F[A] = A\delta(f)$





LAbTel

V. Função Impulso

a. Aplicações da Função Impulso

Exponencial Complexa de Frequência f_0

$$x(t) = A \cdot e^{j2\pi f_0 t} \qquad \text{para} \quad t \subset (-\infty, +\infty)$$

Da propriedade do Deslocamento em Frequência :

$$F\left[A \cdot e^{j2\pi f_0 t}\right] = A\delta(f - f_0)$$

Espectro não simétrico, discreto, com componente espectral somente em $f = +f_0$ e nulo para $f \neq f_0$

a. Aplicações da Função Impulso

Sinal Senoidal de Frequência f_0

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi), \qquad \text{para} \quad t \subset (-\infty, +\infty)$$

$$\text{Do Teorema de Euler + Propriedade da Linearidade:}$$

$$TF[A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi)] = TF\left[\frac{A}{2} \cdot e^{+j\phi} e^{+j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t}\right]$$

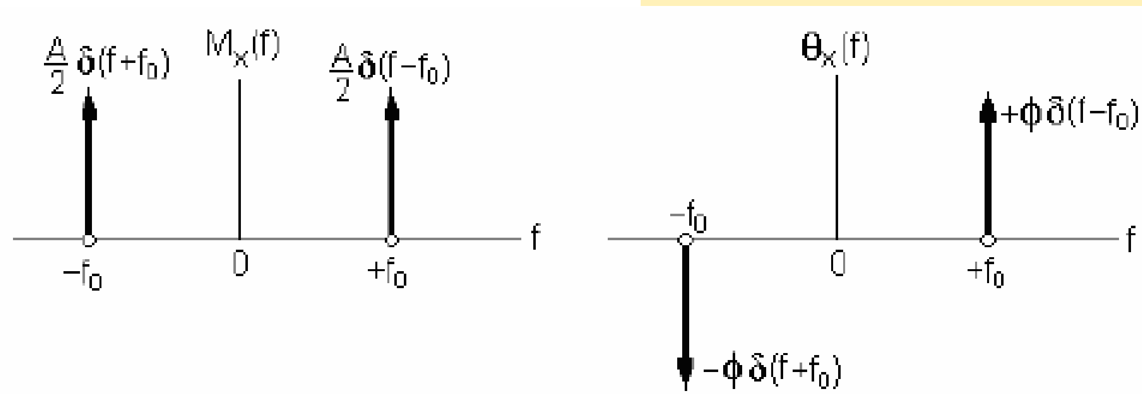
$$TF[A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi)] = \frac{A}{2} \cdot e^{+j\phi} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \cdot e^{-j\phi} \delta(f + f_0)$$

a. Aplicações da Função Impulso

Sinal Senoidal de Frequência f_0

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$X(f) = \frac{A}{2} e^{j\phi} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \delta(f + f_0)$$



Espectro simétrico (**par** para amplitude e **ímpar** para fase), discreto, com componentes espectrais em $f = +f_0$ e $f = -f_0$

a. Aplicações da Função Impulso

Teorema da Modulação

$$z(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$$Z(f) = X(f) * F[\cos(2\pi f_0 t)]$$

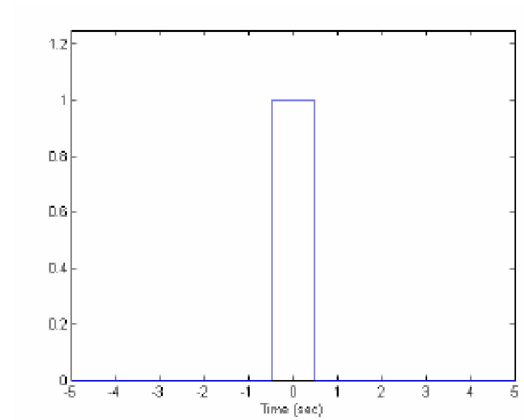
$$Z(f) = X(f) * \left\{ \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \right\}$$

$$Z(f) = \frac{1}{2} X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0)$$

a. Aplicações da Função Impulso

Teorema da Modulação - Exemplo

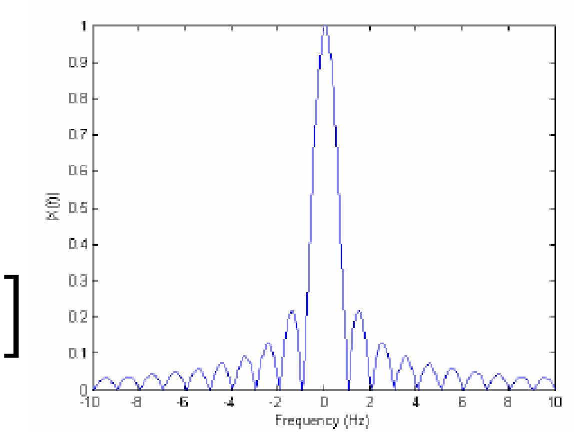
$$z(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$



$$Z(f) = \frac{1}{2} X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0)$$

Da Tabela de Fourier

$$Z(f) = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}[(f - f_0)T] + \frac{T}{2} \operatorname{sinc}[(f + f_0)T]$$

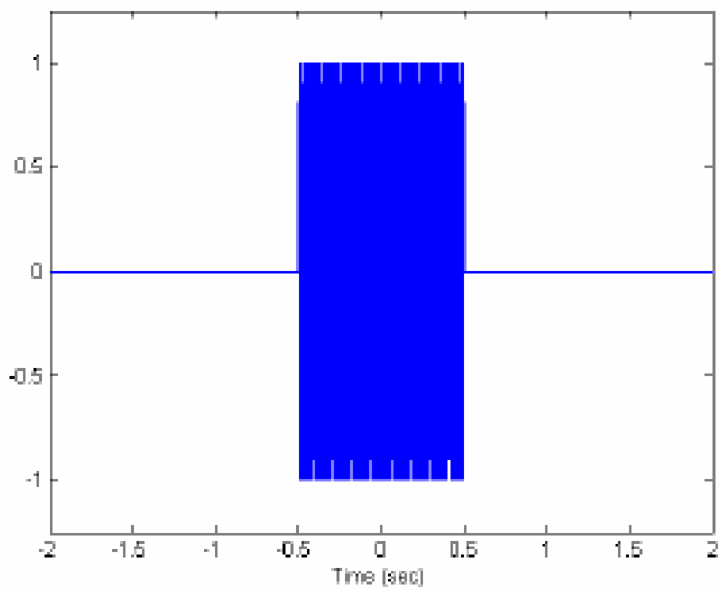


V. Função Impulso

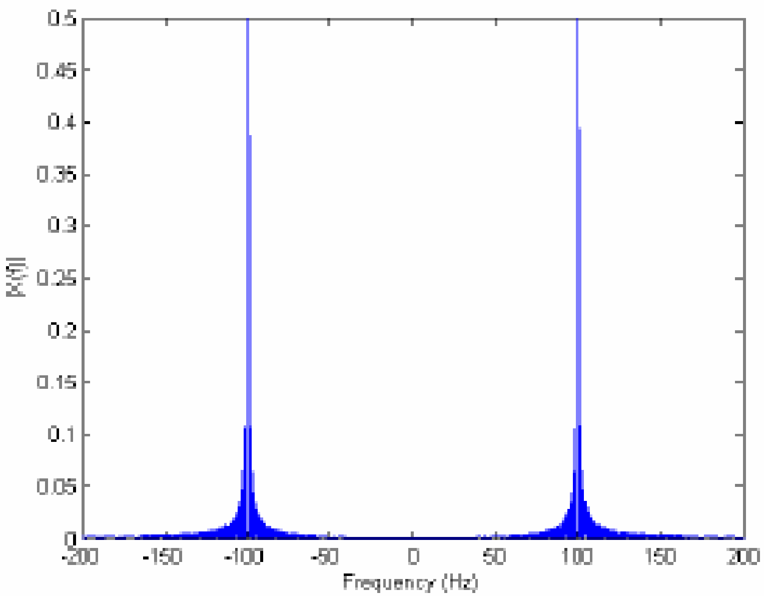
a. Aplicações da Função Impulso

Teorema da Modulação - Exemplo

$$z(t) = rect(t) \cdot \cos(200\pi t)$$



$$Z(f) = \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(f-100) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(f+100)$$



Índice

VI. Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

- Sabemos que *x(t)* periódico com período T_0 pode ser representada pela Série Exponencial de Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j2\pi \cdot f_n t} \qquad \text{para } f_n = n \cdot f_0 \quad (\text{com } n \text{ inteiro})$$

$$A_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f_n t} \qquad \text{para } T_0 = \frac{1}{f_0}$$

VI. Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

- Aplicando a <u>propriedade da linearidade</u> e sabendo da **transformada de Fourier da exponencial complexa**:

$$A \cdot e^{j2\pi \cdot f_0 t} \leftrightarrow A \cdot \delta(f - f_0)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \mathfrak{F}\left(e^{j2\pi \cdot f_n t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \delta(f - nf_0)$$

Ou seja, a transformada de Fourier de sinais periódicos resulta em sinais com espectros discretos constituídos de funções delta de Dirac nas frequências $f = n.f_0$.

VI. Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

• Considerando a **função geradora** não periódica ***g(t)*** de forma a assumir *x(t)* como uma soma de cópias de *g(t)* deslocadas para cada um dos instantes $t=mt_0$ (*m* inteiro de $-\infty$ a $+\infty$):

$$g(t)=\begin{cases} x(t) & |t| \le \dfrac{T_0}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{T_0}{2} \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cdot e^{-j2\pi ft}$$

$$\Rightarrow x(t)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} g(t-mT_0) \quad \text{e} \quad \Rightarrow A_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cdot e^{-j2\pi\cdot f_n t}dt=\frac{1}{T_0}G(f_n)$$

$$\boxed{X(f)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(nf_0)\cdot\delta(f-nf_0)}$$

Transformada Inversa

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G(nf_0)}{T_0} \cdot e^{j2\pi \cdot nf_0 t}$$

$$x(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot \cos(2\pi \cdot nf_0 t + \phi_n)$$

$$E_0 = \frac{G(0)}{T_0} \quad \text{e} \quad E_n e^{j\phi_n} = \frac{2G(nf_0)}{T_0}$$

Permite obter a amplitude (função par) e a fase (função ímpar) das componentes senoidais discretas do sinal periódico a partir da TF da **função geradora**.

VI. Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

- <u>Exemplo de Aplicação</u>: **A Função de Amostragem Ideal**

Sequência infinita de funções delta de Dirac

$$\delta_{Ta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_a)$$

A **função geradora** é a própria função delta de Dirac

A **transformada de Fourier da função geradora** é igual a 1 para qualquer frequência de -∞ a + ∞.

$$X_a(f) = \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_a) \quad \text{para} \quad f_a = \frac{1}{T_a}$$

- Exemplo de Aplicação: **A Função de Amostragem Ideal**

$$\delta_{Ta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_a) \qquad X_a(f) = \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_a)$$