http://www.labtel.ele.ufes.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Elétrica

Princípios de Comunicações

Analise de Sinais (Revisão)
Semestre Letivo 2020/1

Prof.: Jair A. Lima Silva

Departamento de Engenharia Elétrica
CT/UFES

Índice

I. Densidade Espectral de Energia

- Considere o sinal *x(t)* como sendo um sinal de **ENERGIA**
- Ou seja, sua energia normalizada E_n é **finita** e positiva

$$\boxed{E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt}$$

- Considere ainda que este sinal pode ser obtido da **transformada inversa de Fourier** conforme:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df$$

LABTEL

I. Densidade Espectral de Energia

- A **energia normalizada total** desse sinal é dado por:

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t)dt$$

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df \right] dt$$

Invertendoa ordem da integracao :

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{+j2\pi ft} dt \right] df$$

$$\boxed{X^*(f)}$$

I. Densidade Espectral de Energia

- Portanto,

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot X^*(f)\,df$$

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df \rightarrow E_x(f)$$

Densidade Espectral de Energia Normalizada Bilateral

Que integrada na frequencia resulta na Energia Normalizada TOTAL do sinal

I. Densidade Espectral de Energia

- Ou seja, a **Energia Normalizada Total** do sinal pode ser obtida por integração no tempo **OU** na Frequência:

$$\boxed{E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|X(f)\right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f) \cdot df}$$

Teorema da Energia de Rayleigh

- **Observações Importantes:**
- Apenas o Espectro de Amplitude $|X(f)| = M_x(f)$ do sinal interessa na determinação de E_n
- Para uma função $x(t)$ real, o modulo $M_x(f)$ é **Par** e portanto $E_x(f) = M^2{}_x(f)$ é **Par** e

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(f)\cdot df = 2\int_{0}^{+\infty} E_x(f)\cdot df$$

- Em um intervalo de frequência (f_1, f_2), a energia normalizada é:

$$\boxed{E_n(f_1, f_2) = \int_{-f_1}^{+f_2} E_x(f)\cdot df}$$

II. Densidade Espectral de Potência

- Considere o sinal $x(t)$ como sendo de **Potência**
- Ou seja, sua energia normalizada total é infinita e potencia media normalizada **finita** e positiva.

$$P_{mn} = \overline{x^2(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\,dt$$

- Considere ainda uma função $x_T(t)$ que coincide com $x(t)$ em um intervalo de tempo T e nula fora dele:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{para } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{para } |t| > T/2 \end{cases}$$

II. Densidade Espectral de Potência

- Com $X_T(f)$ a T.F. de $x_T(t)$, a sua energia total normalizada é:

$$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T^{\,2}(t)dt = \int_{-T/2}^{+T/2} x_T^{\,2}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|X_T(f)\right|^2 df$$

- A potencia média normalizada de $x(t)$ é:

$$\boxed{P_{mn} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \lim_{T\to\infty} \frac{\left|X_T(f)\right|^2}{T}\, df}$$

II. Densidade Espectral de Potência

- À medida que T aumenta, a energia aumenta e portanto, $|X_T(f)|^2$ aumenta com T. No limite $(T \to \infty)$, $\frac{|X_T(f)|^2}{T}$ converge para um <u>valor finito</u> pois a potência do sinal é <u>finita</u>.

$$\boxed{P_X(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}}$$

Densidade Espectral de Potência Normalizada Bilateral

II. Densidade Espectral de Potência

- $P_X(f)$ integrada na frequência resulta na **potência média normalizada** do sinal.
- Se $P_X(f)$ é uma função par,

$$\boxed{\begin{gathered} P_{mn} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} P_X(f)\,df \\ \Rightarrow P(f) = 2P_X(f) \quad \text{para } f \geq 0 \end{gathered}}$$

Densidade Espectral de Potencia Normalizada Unilateral

III. Definição de Largura de Banda

- **<u>Exercício Exemplo</u>**: Determine a energia normalizada total do sinal $x(t) = V sinc(t/t_0)$.

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 Sinc^2\left(t/t_0\right) dt \Rightarrow \text{Integraçao numerica}$$

complicada

- Mas do **Teorema de Energia de Rayleigh** e sabendo que:

$$X(f) = \begin{cases} V t_0 & \text{para} \left| f \right| \leq t_0/2 \\ 0 & \text{para} \left| f \right| > t_0/2 \end{cases}$$

III. Definição de Largura de Banda

$$E_n = 2\int_0^{+\infty} \left|X\left(f\right)\right|^2 df = 2V^2 t_0^2 \cdot \frac{1}{2t_0} = V^2 t_0$$

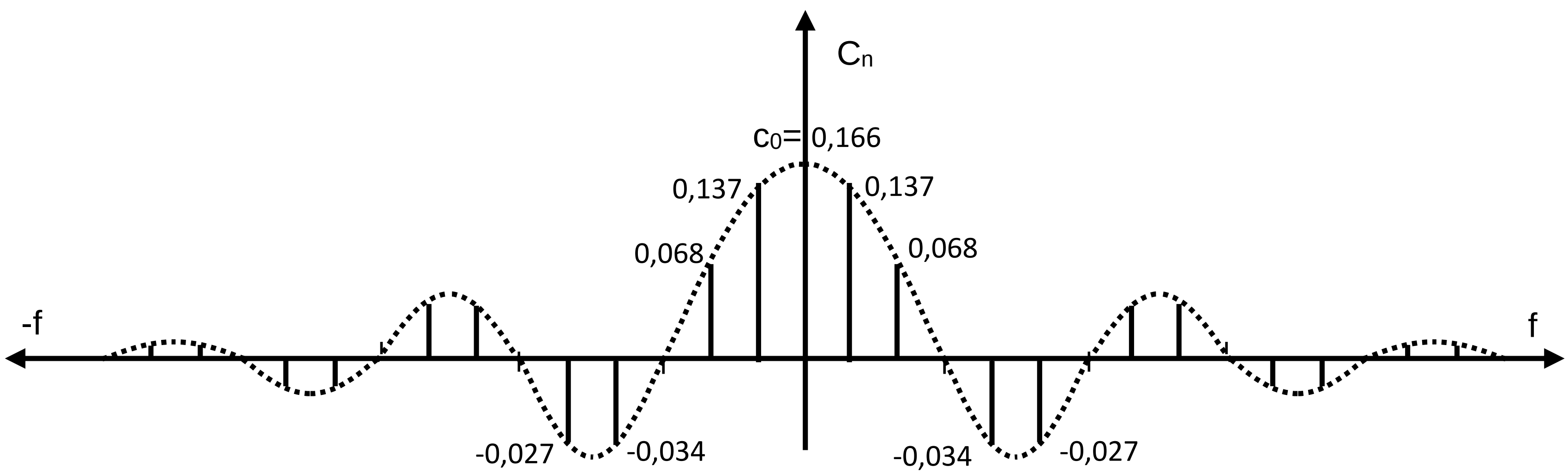
- Comparando as integrais no tempo e na frequência:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V^2 Sinc^2\left(t/t_0\right)dt = V^2 t_0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Sinc^2\left(t/t_0\right)dt = t_0$$

$$\text{fazendo } t/t_0 = x \text{ e } dt = t_0 dx \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} Sinc^2\left(x\right)dx = 1}$$

III. Definição de Largura de Banda

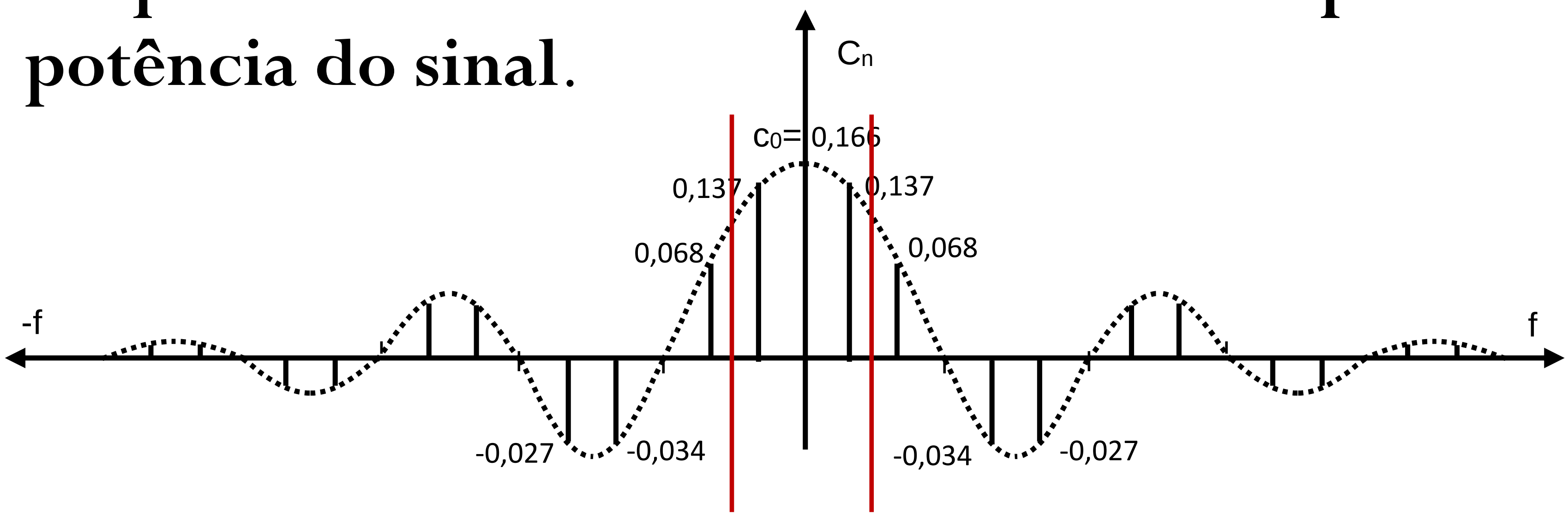
- Idealmente, defina-se a **largura de banda** $\boldsymbol{B_w}$ (ou largura de faixa) como sendo a **faixa de frequências em que a densidade espectral de potência é <u>não nula</u>**.



Então, qual a largura de banda deste sinal?

III. Definição de Largura de Banda

- A largura de banda deve então ser a **faixa de frequências onde se concentra a maior parte da potência do sinal**.

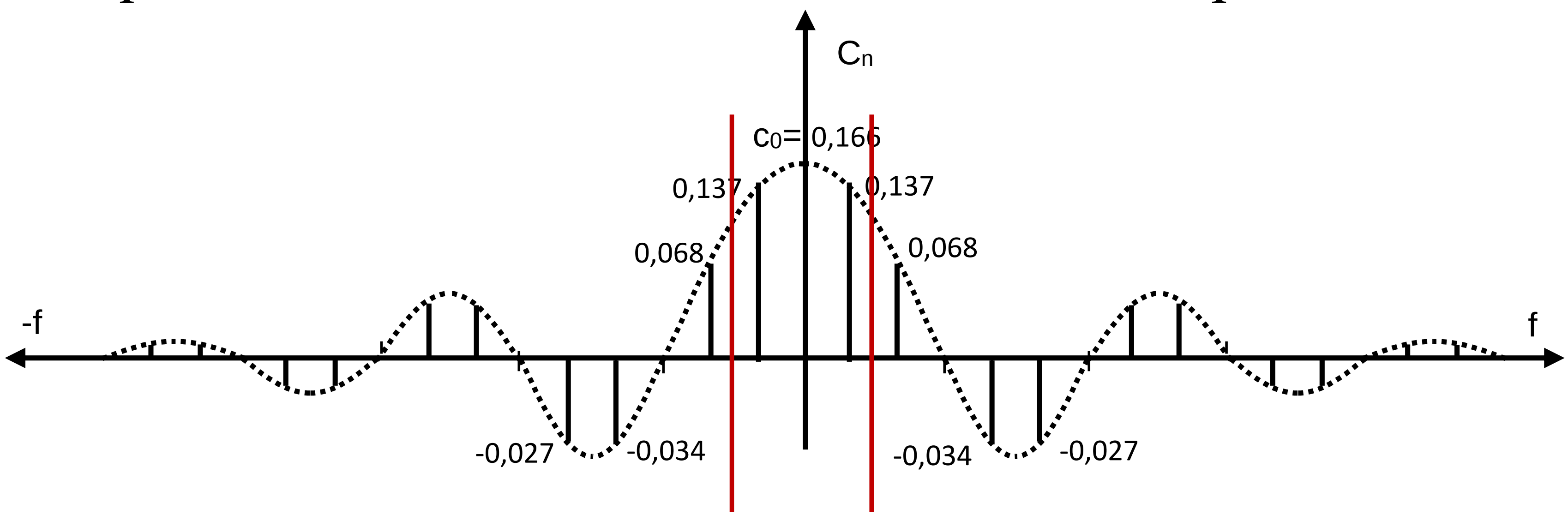


$$\boxed{B_{w_{3dB}}}$$

a) Largura de banda de Meia Potência?

Definição de Largura de Banda

- A largura de banda de meia potência compreende a faixa na qual a PSD decai até 3 dB do seu valor de pico

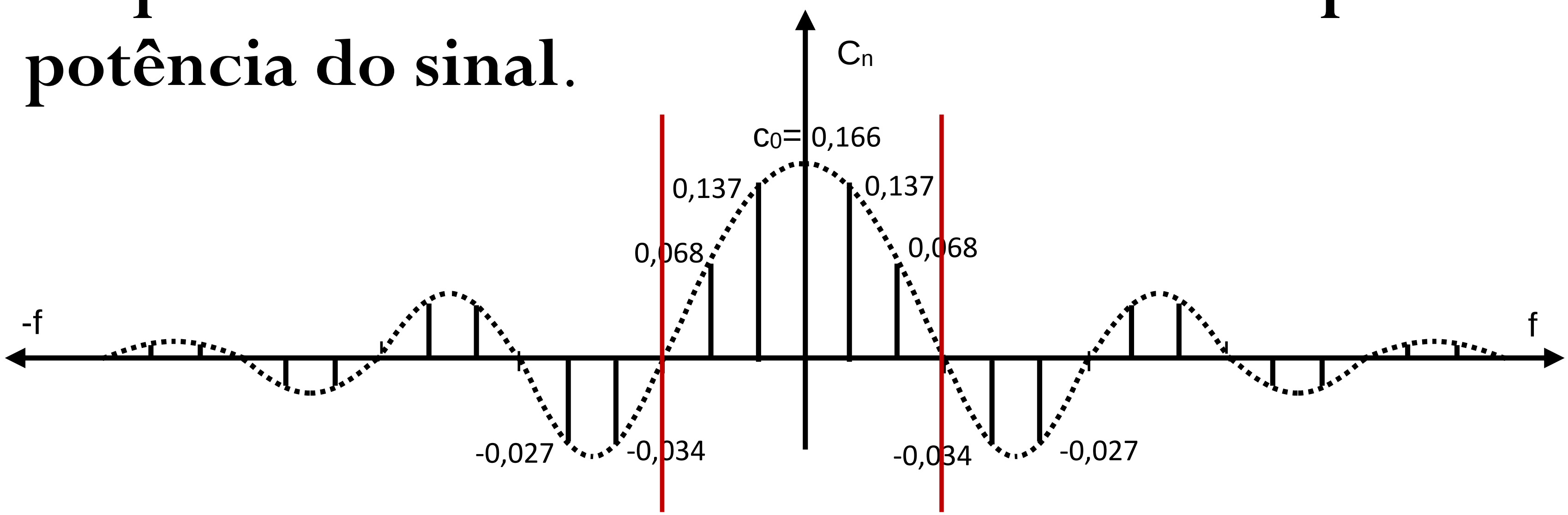


$$B_{w_{3dB}}$$

Indicação simplista da dispersão do espectro.

Definição de Largura de Banda

- A largura de banda deve então ser a **faixa de frequências onde se concentra a maior parte da potência do sinal**.

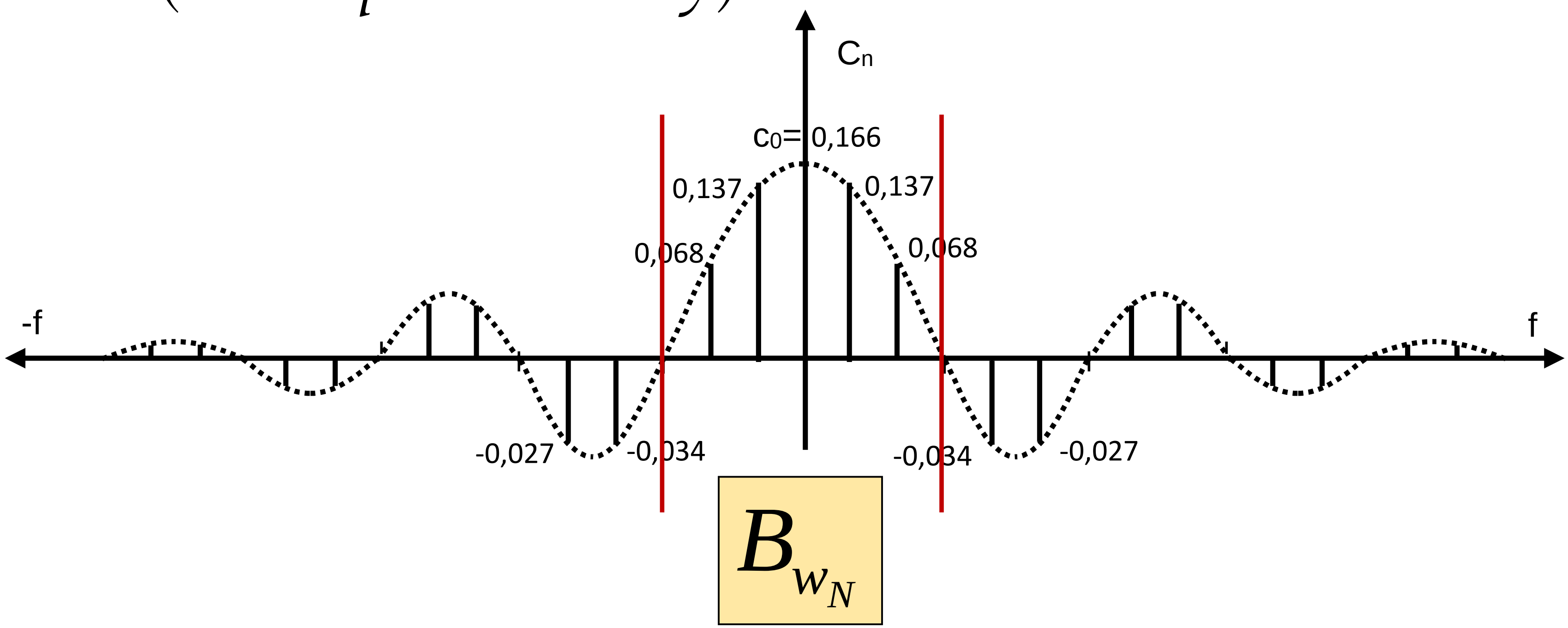


B_{w_N}

b) Largura de banda entre zeros (Null-to-Null)?

III. Definição de Largura de Banda

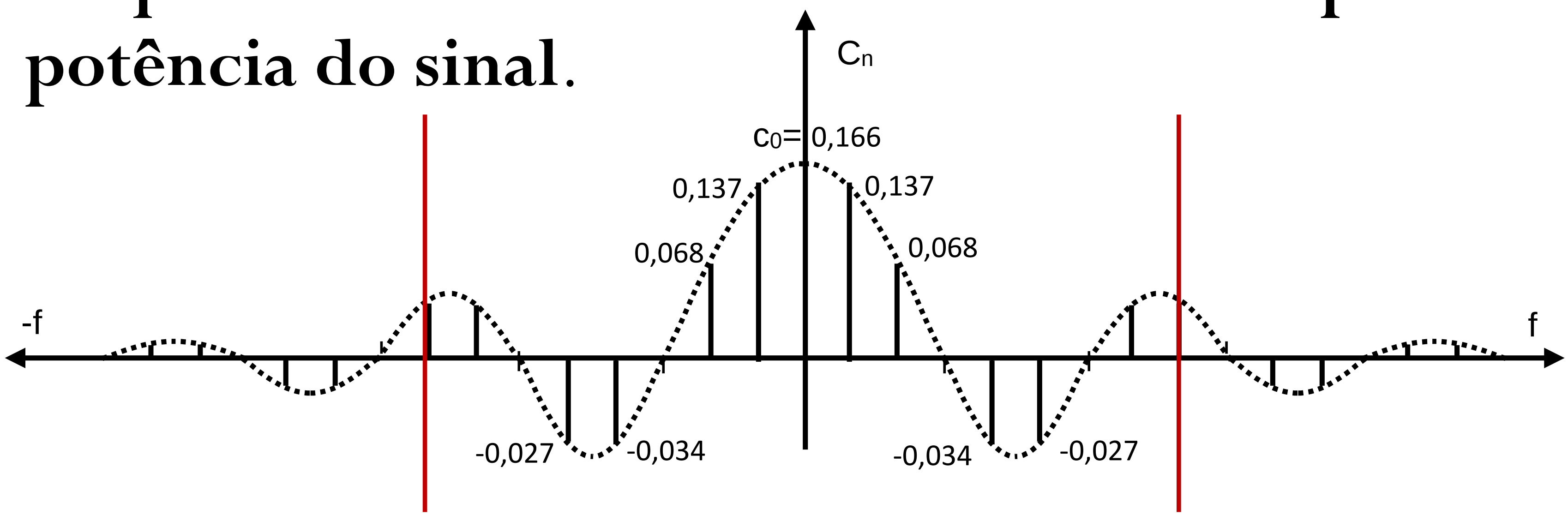
- Representa a largura de banda do lóbulo principal da PSD (*Power Spectral Density*).



Assume que o lóbulo principal contém maior parte da potência.

III. Definição de Largura de Banda

- A largura de banda deve então ser a **faixa de frequências onde se concentra a maior parte da potência do sinal**.

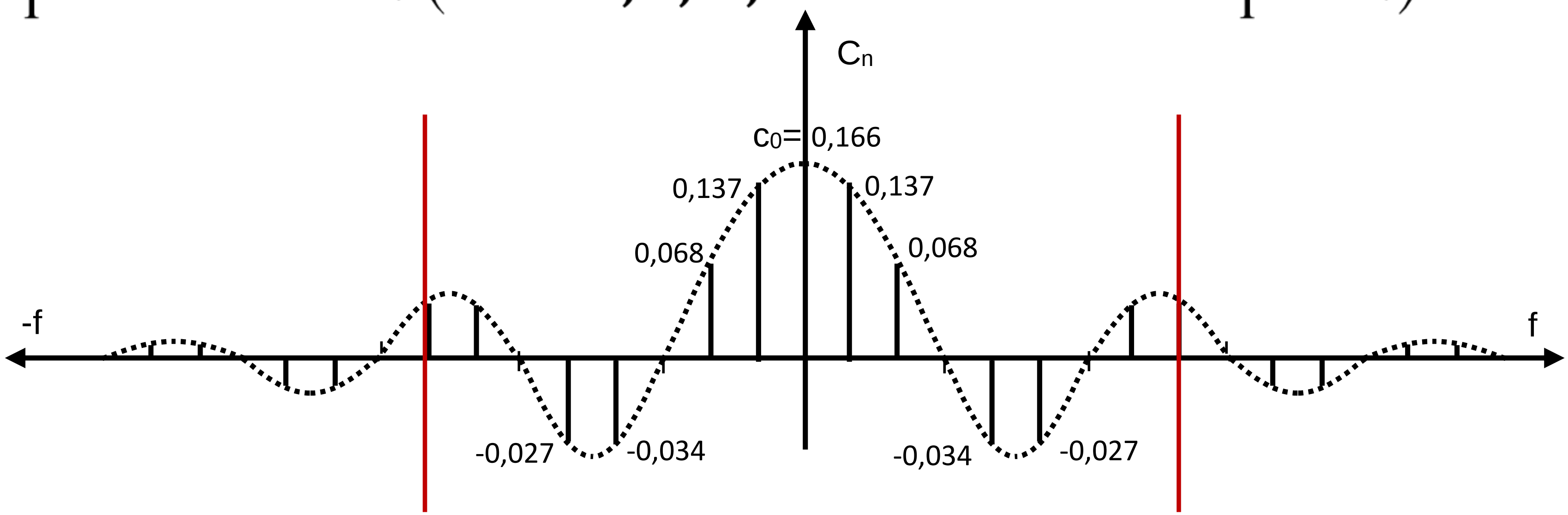


$$B_{w_{90\%}}$$

c) Largura de banda de conteúdo fracional de potencia?

III. Definição de Largura de Banda

- Definida pela faixa de frequências que contém $1-\epsilon$ da potência total. ($\epsilon = 0{,}1, 0{,}001$ são valores típicos.)

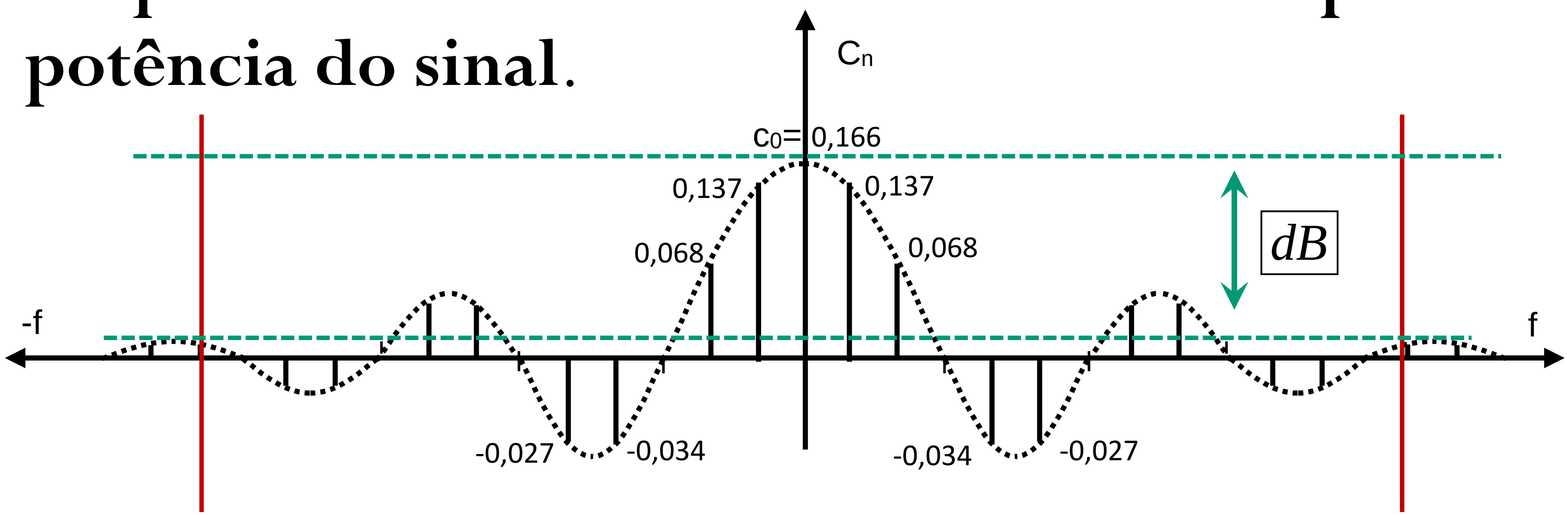


$$B_{w_{90\%}}$$

Dependendente do tipo de sinal (potência ou energia).

III. Definição de Largura de Banda

- A largura de banda deve então ser a **faixa de frequências onde se concentra a maior parte da potência do sinal**.



$$\boxed{B_{w_{PSD}}}$$

d) Largura de banda limitada pela PSD?