http://www.labtel.ele.ufes.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Elétrica

Princípios de Comunicações

Analise de Sinais (Revisão)
Semestre Letivo 2020/1

Prof.: Jair A. Lima Silva

PPGEE/DEL/UFES

Índice

I. Séries de Fourier

a. Trigonométrica

b. Exponencial Complexa

Ia. Série Trigonométrica de Fourier

• Fourier demonstrou que uma função periódica $f(t)$ qualquer pode ser representada por uma série **infinita** de somas de funções senoidais e cossenoidais.

• A 1ª parcela da soma possui frequência $f_0 = 1/T_0$ (**frequência fundamental**), para T_o o periodo de repetição da função.

• As outras parcelas são múltiplos inteiros desta frequência fundamental, ou seja, $f_n = n/T_0$ (**frequências harmônicas**), com $n = 1,2,3,\infty$.

http://www.labtel.ele.ufes.br

LAbTel

Ia. Série Trigonométrica de Fourier

- Portanto, ***f(t)*** pode ser expandida na **série infinita**:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(2\pi \cdot f_n \cdot t) + b_n \cdot \sin(2\pi \cdot f_n \cdot t) \right], \quad (0 < t < T_0)$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0}, \quad f_n = n \times f_0, \quad 2\pi \cdot f_n = w_n$$

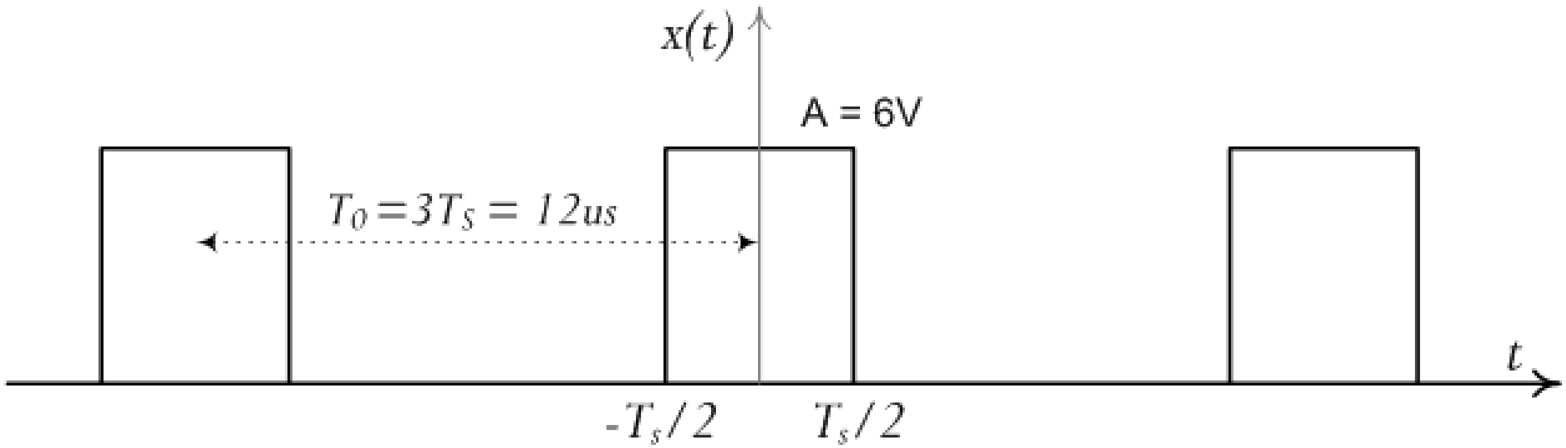
$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \cdot dt \rightarrow \text{valor médio (componente CC)}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_n \cdot t) \cdot dt \rightarrow \text{Coeficientes}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f_n \cdot t) \cdot dt \rightarrow \text{Coeficientes}$$

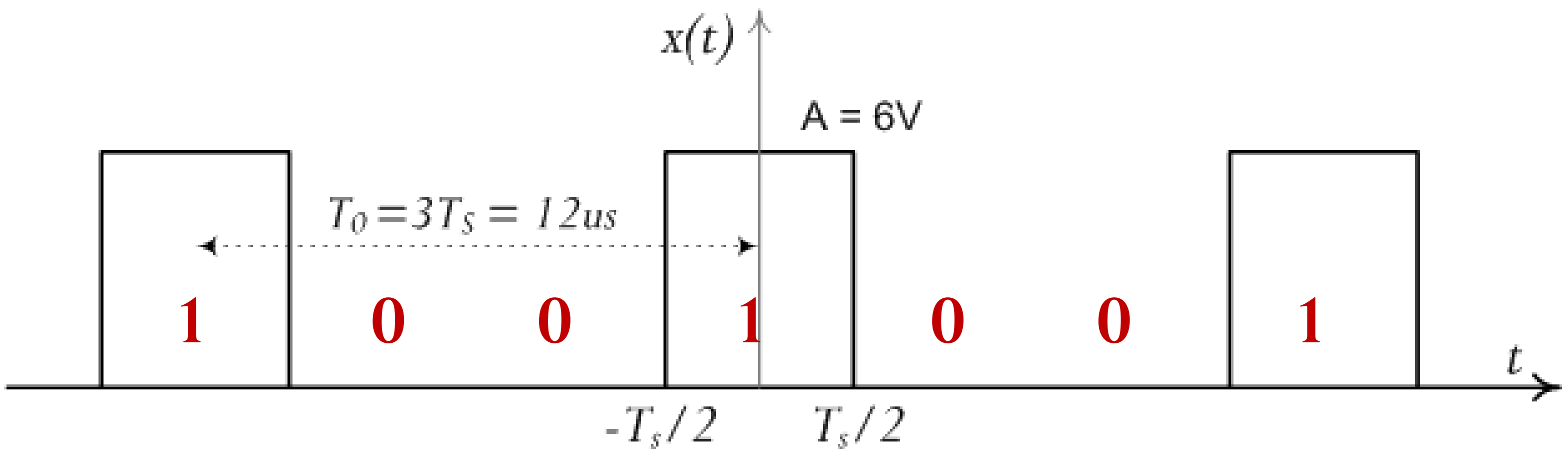
Ia. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício Exemplo**: Encontre a equação da expansão em série Trigonométrica de Fourier da onda quadrada unipolar (**trem de pulsos retangulares**) mostrada na Figura abaixo.



Ia. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício Exemplo (cont)**: Aplicado ao Padrão Repetitivo de Bits



$$x(t) = \begin{cases} A \text{..........} |t| < \dfrac{T_s}{2} \\ 0 \text{..........} \dfrac{T_s}{2} < |t| < \dfrac{T_0}{2} \end{cases}$$

Ia. Série Trigonométrica de Fourier

Onda Quadrada – Domínio do Tempo

$$x(t)=\begin{cases} A\text{..........}|t|<\dfrac{T_s}{2} \\ 0\text{..........}\dfrac{T_s}{2}<|t|<\dfrac{T_0}{2} \end{cases}$$

Expandindo a função em uma série trigonométrica de Fourier escolhendo-se o eixo de simetria para função **par** teremos que:

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\cos(2\pi\cdot f_n\cdot t)\right]$$

$$onde\begin{cases} 0<t<T_0 \\ T_0=\dfrac{1}{f_0},\quad f_n=n\cdot f_0 \end{cases}$$

Ia. Série Trigonométrica de Fourier

Onda Quadrada – Domínio do Tempo

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cdot dt = \frac{2A\cdot T_s}{T_0}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cdot \cos(2\pi f_n t)\cdot dt = \frac{2}{T_0}\cdot\left[\frac{A\cdot\sin(2\pi f_n t)}{2\pi f_n}\right]_{-T_s/2}^{T_s/2}$$

$$a_n = \frac{2A}{T_0}\cdot\frac{\sin(\pi\cdot f_n\cdot T_s)}{\pi\cdot f_n} = \frac{2A\cdot T_s}{T_0}\cdot\frac{\sin(\pi\cdot f_n\cdot T_s)}{\pi\cdot f_n\cdot T_s}$$

$$a_n = \frac{2A\cdot T_s}{T_0}\cdot \mathrm{sinc}(\pi\cdot f_n\cdot T_s)$$

Ia. Série Trigonométrica de Fourier

Onda Quadrada – Domínio do Tempo

$$a_0 = \frac{2A \cdot T_s}{T_0}$$

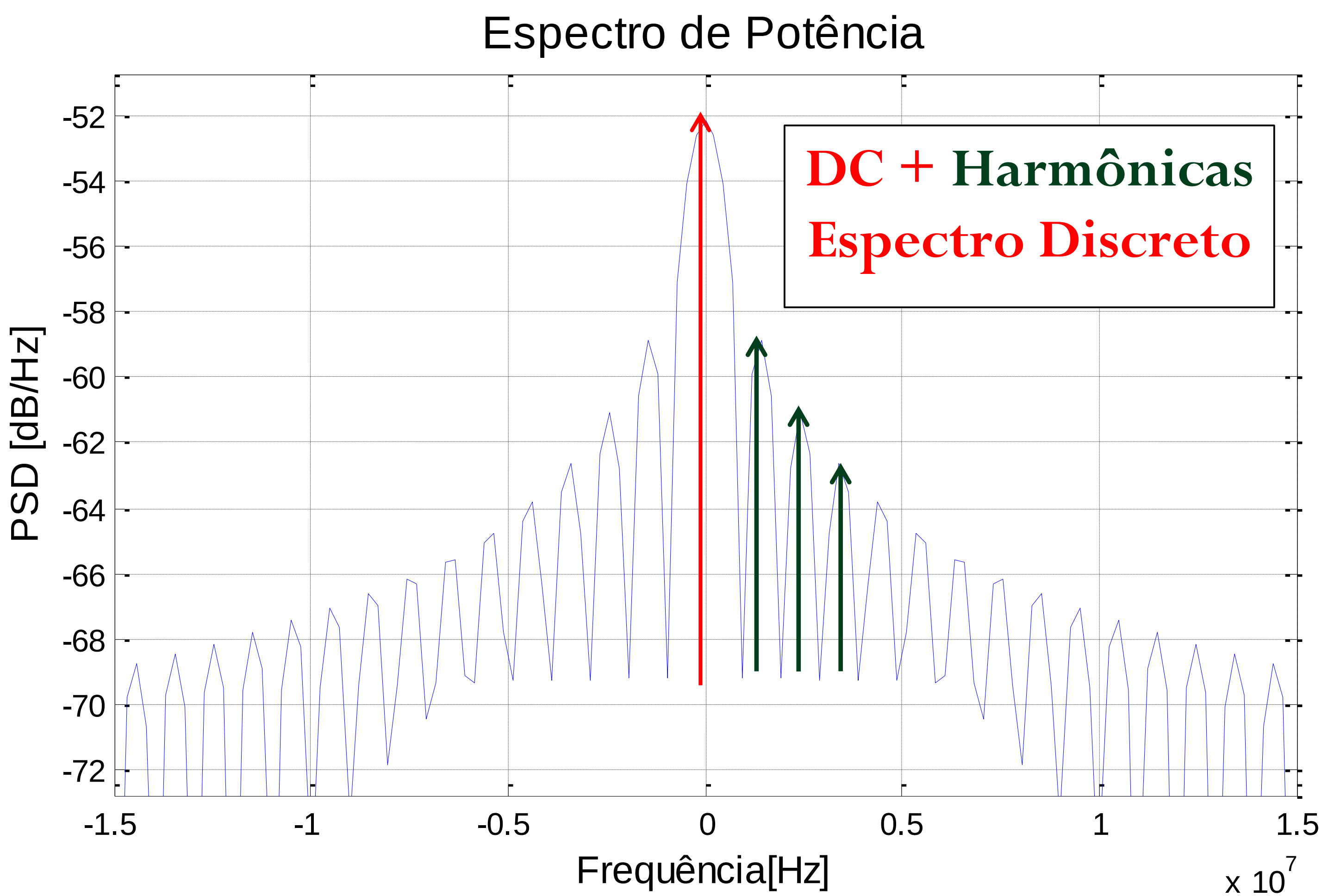
$$a_n = \frac{2A \cdot T_s}{T_0} \cdot \mathrm{sinc}(\pi \cdot f_n \cdot T_s)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{AT_s}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AT_s}{T_0} \cdot \mathrm{sinc}(\pi \cdot f_n \cdot T_s) \cdot \cos(2\pi \cdot f_n \cdot t)}$$

DC **Coeficientes** **Harmonicas**

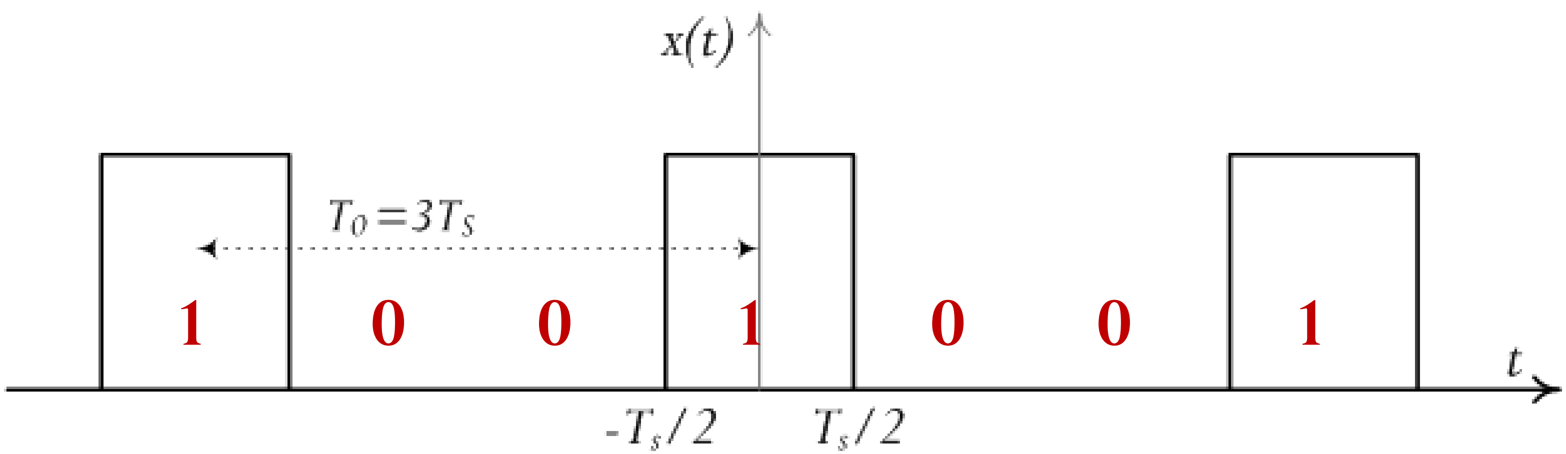
Ia. Série Trigonométrica de Fourier

Espectro da onda quadrada no Matlab



Ia. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício Exemplo**: Calcule as 6 primeiras raias da expansão da forma de onda quadrada anterior considerando que A = 0.5 V, $T_0=3xT_s=1$ ms. Escreva a equação da expansão para este caso.



Ia. Série Trigonométrica de Fourier

- **Exercício Exemplo (cont)**:

$$a_0 = \frac{2AT_s}{T} = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

$$a_n = \frac{sen(n\pi/3)}{n\pi}$$

$$a_1 = \frac{sen(\pi/3)}{\pi} = 0{,}275 \qquad a_2 = \frac{sen(2\pi/3)}{2\pi} = 0{,}137$$

$$a_3 = \frac{sen(\pi)}{3\pi} = 0 \qquad a_4 = \frac{sen(4\pi/3)}{4\pi} = -0{,}068$$

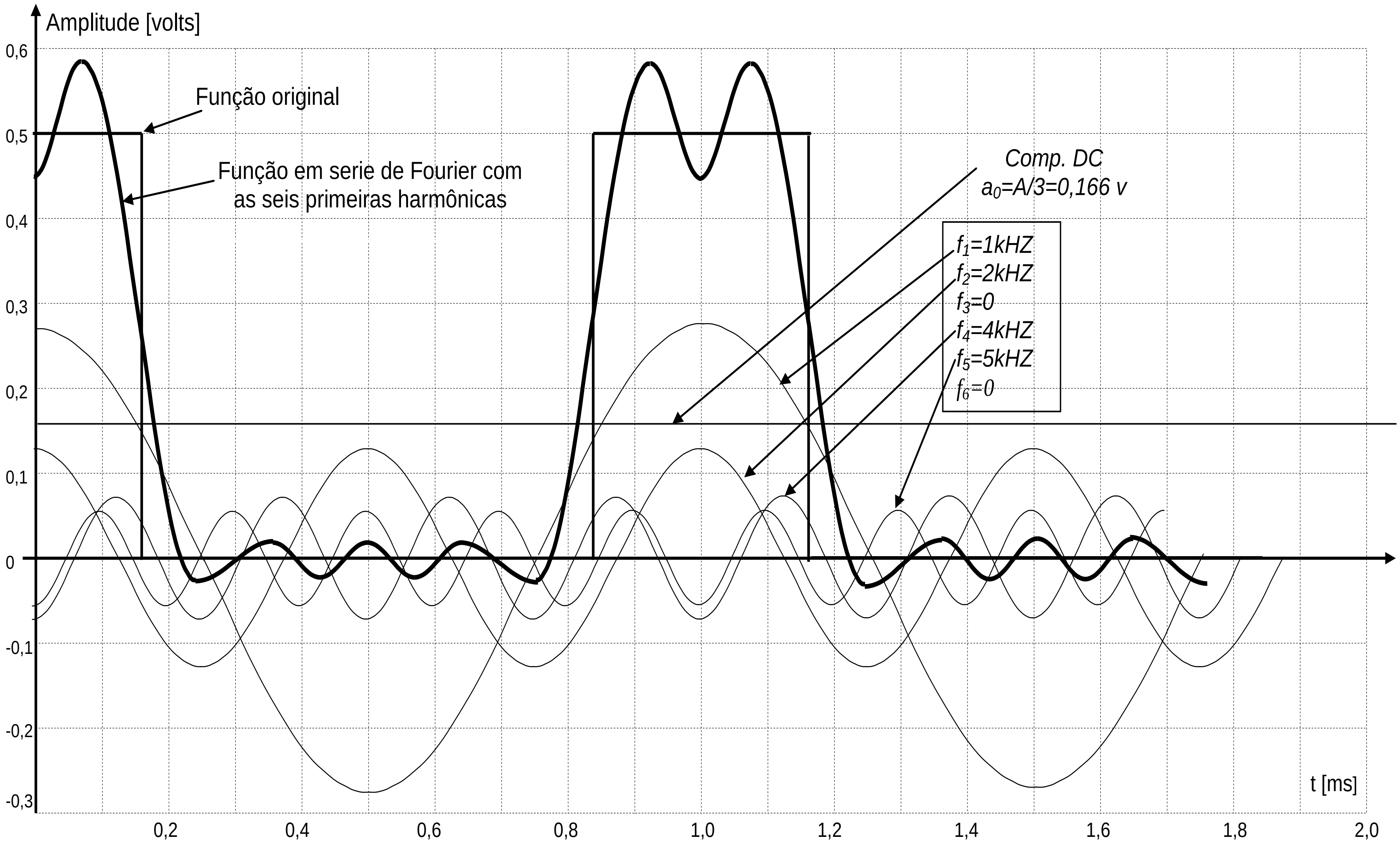
$$a_5 = \frac{sen(5\pi/3)}{5\pi} = -0{,}055 \qquad a_6 = \frac{sen(2\pi)}{6\pi} = 0$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{sen(n\pi/3)}{n\pi}\right)\cos(n\omega t)$$

$$f(t) \approx 0{,}166 + 0{,}275\cos(\omega t) + 0{,}137\cos(2\omega t) - 0{,}068\cos(4\omega t) - 0{,}055\cos(5\omega t)$$

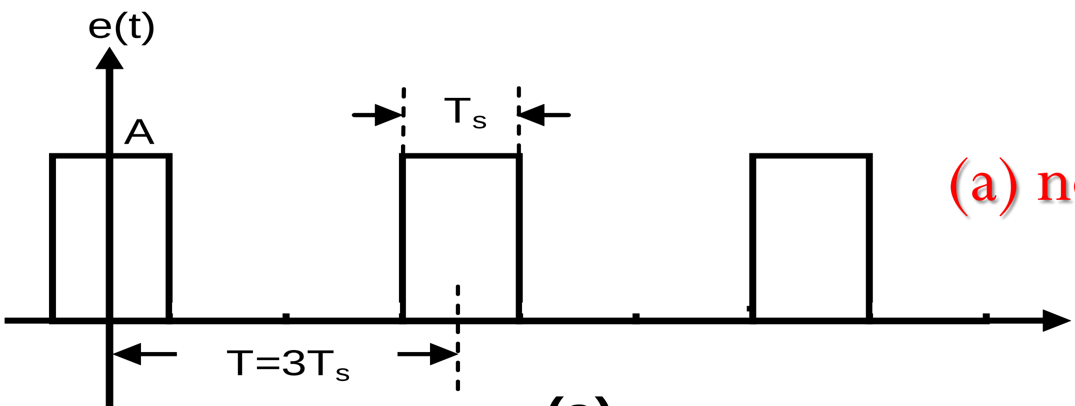
http://www.labtel.ele.ufes.br

Ia. Série Trigonométrica de Fourier



Ia. Série Trigonométrica de Fourier

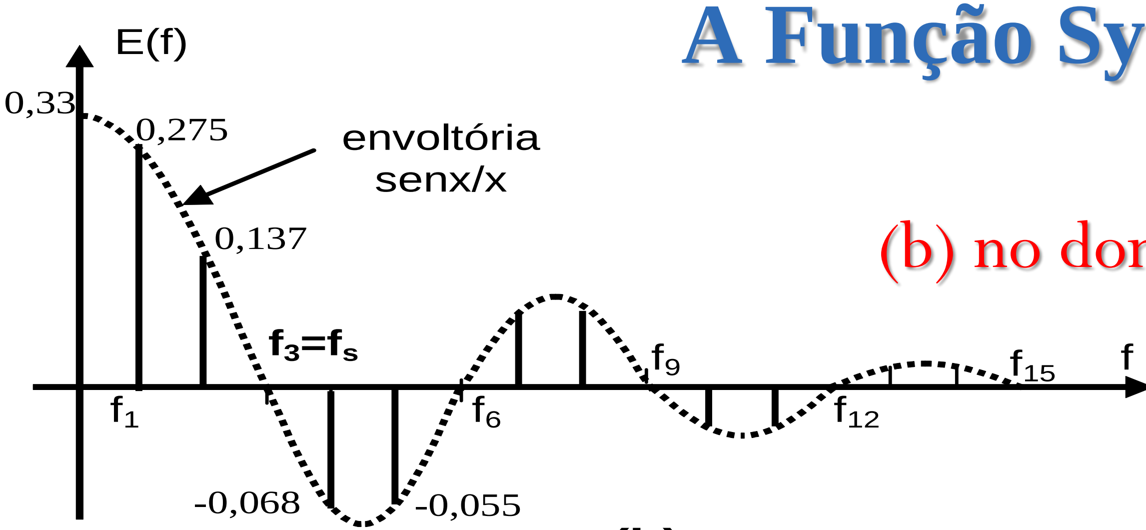
No Padrão Repetitivo para T/TS=3



(a)

(a) no domínio tempo

A Função Sync



(b)

(b) no domínio frequência

Ib. Série Exponencial Complexa de Fourier

- Da equação de Euler:

$$e^{jwt} = \cos(wt) + j\sin(wt)$$

$$\cos(wt) = \frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(wt) = \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}$$

- Substituindo estas equações na expressão Canônica da expansão em série de Fourier,…

Ib. Série Exponencial de Fourier

- e lembrando que $nw = 2\pi f_n,$ para $n = 1,2,3,\ldots\infty$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\cdot\left(e^{jnwt} + e^{-jnwt}\right) + \frac{b_n}{2j}\cdot\left(e^{jnwt} - e^{-jnwt}\right)\right]$$

- Com $1/j = -j$, têm-se que

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jnwt} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jnwt}\right]$$

Ib. Série Exponencial de Fourier

- Definindo-se:

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad \text{e} \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

- Considerando-se que C_n e C_{-n} são os coeficientes das componentes de **frequências positivas** e **negativas** respectivamente, obtém-se que,

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{jnwt} + C_{-n} e^{-jnwt}\right)$$

- com as exponenciais representado respectivamente, as **harmônicas de frequências positivas** e **negativas**.

Ib. Série Exponencial de Fourier

• A troca de sinais dos limites do segundo somatório, provoca mudança de sinal no argumento do somatório, tal que:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jnwt} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{jnwt}$$

• Se incluirmos o valor DC e se estendermos os limites da soma de - ∞ a +∞,…

Ib. Série Exponencial de Fourier

- Se incluirmos o valor DC e se estendermos os limites da soma de - ∞ a +∞,…

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jnwt}}$$

Série Exponencial Complexa de Fourier

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{-+T_0/2} x(t)dt, \qquad C_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t)e^{-jnwt}dt,$$

$$C_n = A_n + jB_n, \qquad \left|C_n\right| = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \qquad \text{e} \qquad \theta_n = tg^{-1}\left(\frac{B_n}{A_n}\right)$$

Ib. Série Exponencial de Fourier

- Considerações,...

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jnwt}$$

Série Exponencial Complexa de Fourier
ou
Série de Fourier de Tempo Contínuo
ou
Série de Fourier

✓ O espectro gerado terá componentes nas frequências positivas e frequências negativas (**Espectro Simétrico**)

✓ O eixo de simetria será a frequência zero (DC)

Ib. Série Exponencial de Fourier

- Considerações,...

$$\boxed{x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jnwt}, \qquad x(t)\xrightarrow{SF} C_n}$$

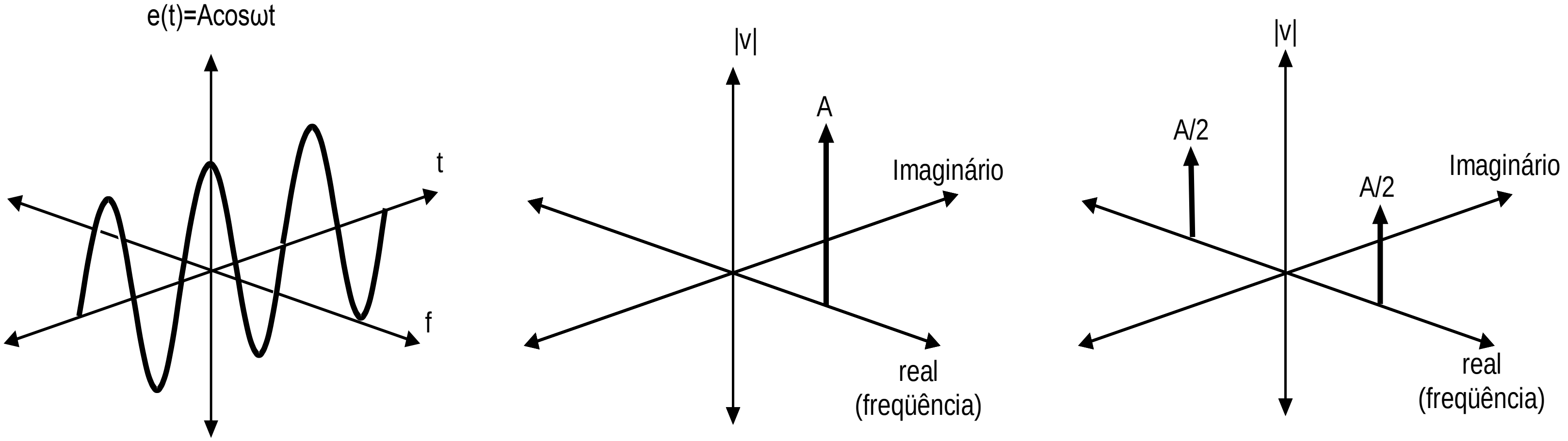
✓ O Teorema de Parseval se aplica, ou seja, a potência média é a mesma em ambos os domínios:

$$C_0=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$$

Ib. Série Exponencial de Fourier

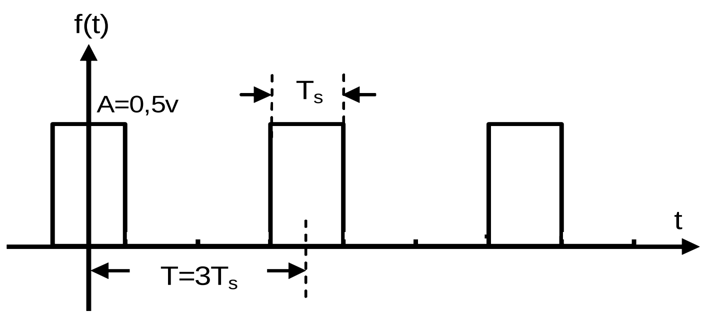
Representação Trignométrica ou real (um fasor)

Representação Complexa (dois fasores)



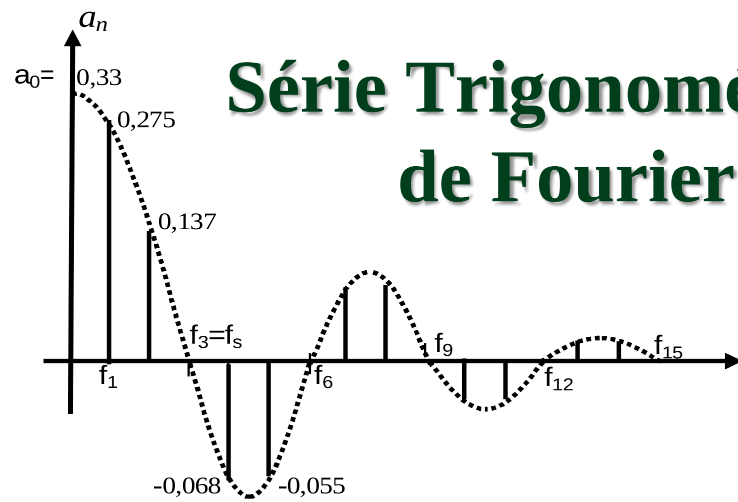
(a) Domínio tempo de e(t) (b) Fasor único (expansão trigonométrica) (c) Doisfasores na expansão complexa

No Exemplo

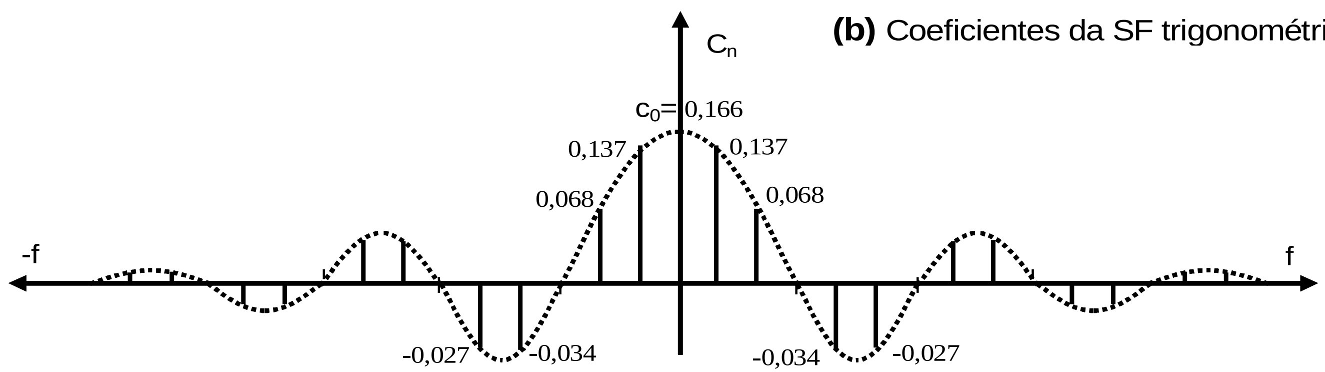


(a) Função f(t) com $T=3T_s$

Série Trigonométrica de Fourier

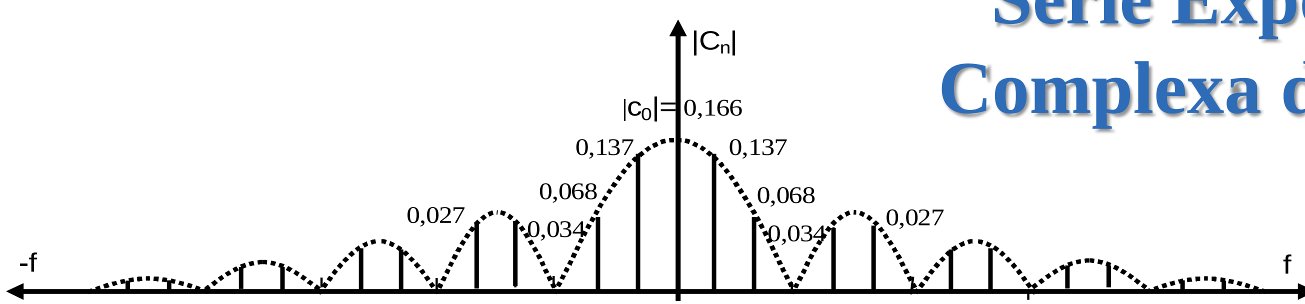


(b) Coeficientes da SF trigonométrica



(c) Coeficientes da SF complexa

Série Exponencial Complexa de Fourier



(d) Coeficientes da SF complexa em valor absoluto