Teoria dos Grafos: Fundamentos Matemáticos e Aplicações

Juliana Félix

Instituto de Informática INF-UFG

25 de junho de 2019

Um pouco sobre mim:

- Bacharel em Ciência da Computação pela UFG (2015)
    - Área de pesquisa do TCC: Conjuntos dominantes e conjuntos independentes em grafos.

Um pouco sobre mim:

- Bacharel em Ciência da Computação pela UFG (2015)
  - Área de pesquisa do TCC: Conjuntos dominantes e conjuntos independentes em grafos.
- Graduação sanduíche na University of Manitoba, Canadá (2013 - 2015)

Um pouco sobre mim:

- Bacharel em Ciência da Computação pela UFG (2015)
  - Área de pesquisa do TCC: Conjuntos dominantes e conjuntos independentes em grafos.
- Graduação sanduíche na University of Manitoba, Canadá (2013 - 2015)
- Estágio em Pesquisa no Departamento de Matemática da University of Manitoba (Verão 2014)
  - Área de pesquisa: Independent sets in large graphs

Um pouco sobre mim:

- Bacharel em Ciência da Computação pela UFG (2015)
  - Área de pesquisa do TCC: Conjuntos dominantes e conjuntos independentes em grafos.
- Graduação sanduíche na University of Manitoba, Canadá (2013 - 2015)
- Estágio em Pesquisa no Departamento de Matemática da University of Manitoba (Verão 2014)
  - Área de pesquisa: Independent sets in large graphs
- Mestrado em Ciência da Computação pela UFG (2018)
  - Área de pesquisa: Códigos identificadores em grafos.

Um pouco sobre mim:

- Bacharel em Ciência da Computação pela UFG (2015)
  - Área de pesquisa do TCC: Conjuntos dominantes e conjuntos independentes em grafos.
- Graduação sanduíche na University of Manitoba, Canadá (2013 - 2015)
- Estágio em Pesquisa no Departamento de Matemática da University of Manitoba (Verão 2014)
  - Área de pesquisa: Independent sets in large graphs
- Mestrado em Ciência da Computação pela UFG (2018)
  - Área de pesquisa: Códigos identificadores em grafos.
- Doutorado em andamento em Ciência da Computação pela UFG (2018–atual)
  - Área de pesquisa: Machine Learning

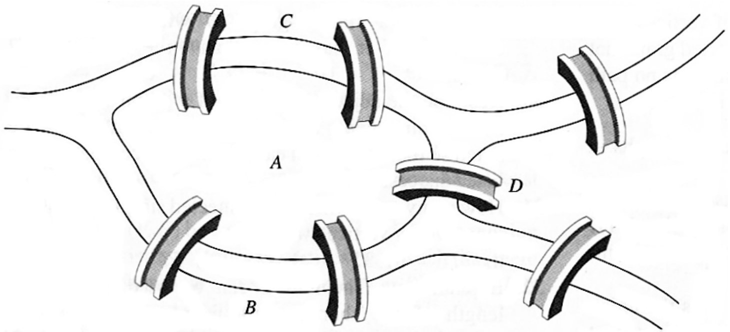
Agenda

Sete pontes de Königsberg

- Historicamente, consta como primeiro problema em grafos.
- É uma espécie de charada matemática, proposta e resolvida por *Leonhard Euler* em 1736.
- O problema é baseado na cidade de Königsberg (território da Prússia até 1945), que é cortada pelo Rio Prególia, onde há duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que na época continha sete pontes.
- Por muito tempo os habitantes daquela cidade perguntavam-se se seria possível sair de casa, cruzar cada ponte exatamente uma vez, e retornar para casa.

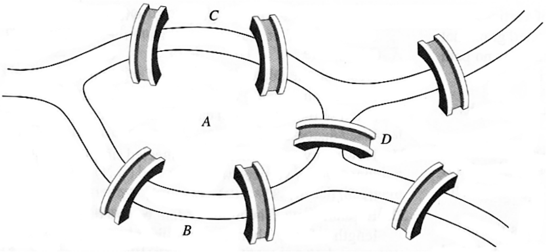
Sete pontes de Königsberg

"Havia um rio com duas ilhas A e D. Rotulando-se as duas margens do rio, respectivamente, por B e C, tínhamos 7 pontes: uma ligando as duas ilhas A e D, duas de A até a margem C, duas de A até a margem B, uma de D a C e a outra de D a B. Seria possível, partindo de uma das regiões (qualquer das duas margens ou das duas ilhas), atravessarmos as 7 pontes sem repetir nenhuma, terminando o percurso no ponto original?."



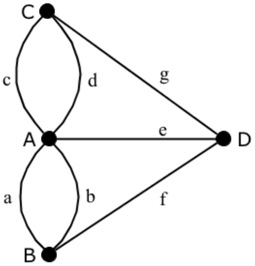
Sete pontes de Königsberg

- Havia-se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando Euler, em 1736, provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições.
- Euler usou um raciocínio muito simples: transformou os caminhos em linhas e suas intersecções em pontos, criando possivelmente o primeiro grafo da história.



Sete pontes de Königsberg

- Havia-se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando Euler, em 1736, provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições.
- Euler usou um raciocínio muito simples: transformou os caminhos em linhas e suas intersecções em pontos, criando possivelmente o primeiro grafo da história.



Sete pontes de Königsberg

- Através do grafo, Euler percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos.
- A razão de tal coisa é que de cada ponto deve haver um número par de caminhos, pois será preciso um caminho para "entrar" e outro para "sair".
- Os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente.

Teoria dos Grafos - Definição

Teoria dos Grafos

A **teoria dos grafos** é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto através de uma modelagem chamada de **grafo**.

Teoria dos Grafos - Definição

Teoria dos Grafos

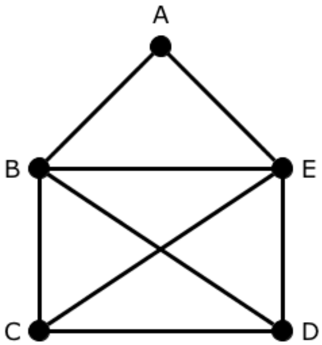
A **teoria dos grafos** é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto através de uma modelagem chamada de **grafo**.

Grafo - Definição

Um grafo G é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto não vazio e $E \subseteq [V^2]$ é um subconjunto de pares não ordenados de elementos de V. Elementos de V são chamados de vértices e elementos de E são chamados de arestas.

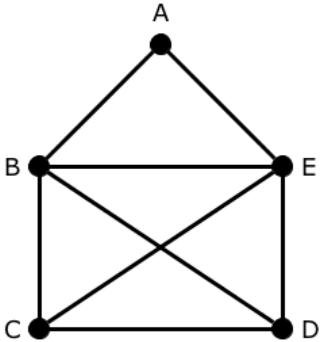
Alguns problemas em grafos

Você é capaz de desenhar o seguinte grafo sem tirar o lápis do papel? Você deve ir de ponto a ponto, e não pode passar pela mesma linha duas vezes.



Alguns problemas em grafos

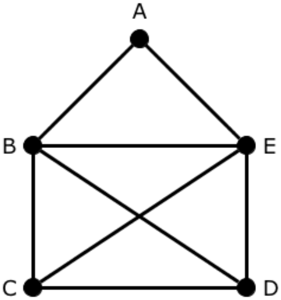
Foi fácil? E se você tentar começar pelo **vértice** B?



Alguns problemas em grafos

Problema de roteamento

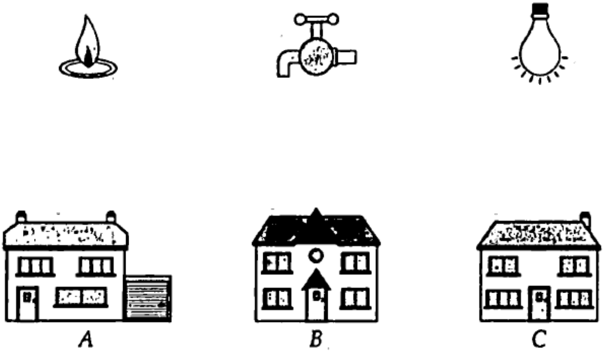
Pensemos numa pequena cidade com pequeno orçamento. O serviço de recolhimento de lixo é feito por um caminhão. Queremos evitar o desperdício; uma boa ideia seria fazer o caminhão passar uma única vez por cada rua e retornar ao ponto de partida.



Alguns problemas em grafos

Problema da distribuição de serviços

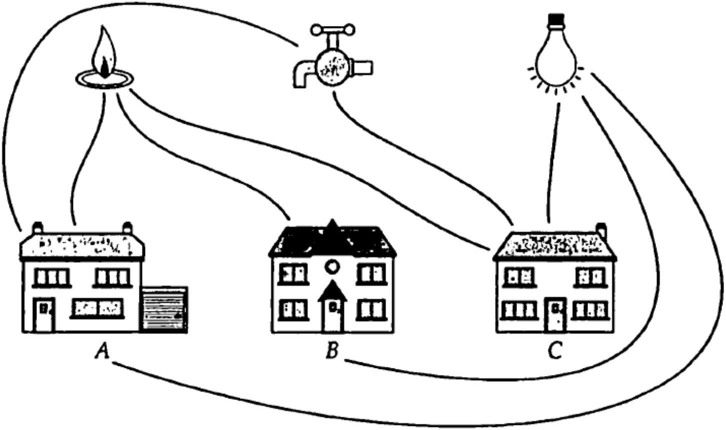
Tente ligar Gás, Água e Energia às três casas sem que as linhas se cruzem.



Alguns problemas em grafos

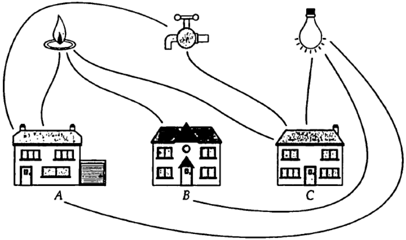
Problema da distribuição de serviços

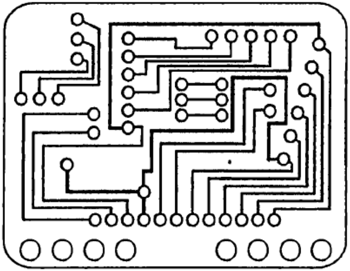
Tente ligar Gás, Água e Energia às três casas sem que as linhas se cruzem.



Alguns problemas em grafos

Considere, então, o problema de placas de circuito impressos. Encontrar esquemas de ligação que evitem cruzamento é crucial, pois cruzamentos podem levar a contatos elétricos indesejados.





Outras aplicações

- Roteamento de veículos, aviões;

Outras aplicações

- Roteamento de veículos, aviões;
- Melhores trajetos entre cidades;

Outras aplicações

UFG

- Roteamento de veículos, aviões;
- Melhores trajetos entre cidades;
- Escalonamento de horários e tarefas;

Outras aplicações

- Roteamento de veículos, aviões;
- Melhores trajetos entre cidades;
- Escalonamento de horários e tarefas;
- Alocação de Professores, de salas de aula;

Outras aplicações

- Roteamento de veículos, aviões;
- Melhores trajetos entre cidades;
- Escalonamento de horários e tarefas;
- Alocação de Professores, de salas de aula;
- Caminhos de custos mínimos;

Outras aplicações

- Roteamento de veículos, aviões;
- Melhores trajetos entre cidades;
- Escalonamento de horários e tarefas;
- Alocação de Professores, de salas de aula;
- Caminhos de custos mínimos;
- Redes sociais e relacionamentos;

Outras aplicações

- Roteamento de veículos, aviões;
- Melhores trajetos entre cidades;
- Escalonamento de horários e tarefas;
- Alocação de Professores, de salas de aula;
- Caminhos de custos mínimos;
- Redes sociais e relacionamentos;
- Rede de computadores;

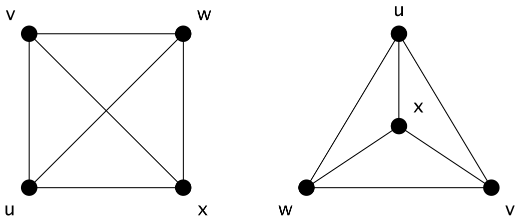
Outras aplicações

- Roteamento de veículos, aviões;
- Melhores trajetos entre cidades;
- Escalonamento de horários e tarefas;
- Alocação de Professores, de salas de aula;
- Caminhos de custos mínimos;
- Redes sociais e relacionamentos;
- Rede de computadores;
- etc.

Primeiras Noções de Grafos e Conceitos Básicos

Desenhando um grafo

Usualmente, desenhamos um grafo da seguinte forma: cada vértice é representado por um ponto, e existe uma linha ligando dois desses vértices (pontos) se os dois vértices representados formam uma aresta. A forma como os pontos e linhas são desenhados e arranjados, no entanto, é irrelevante.



Duas formas de se desenhar um mesmo grafo.

Primeiras Noções de Grafos

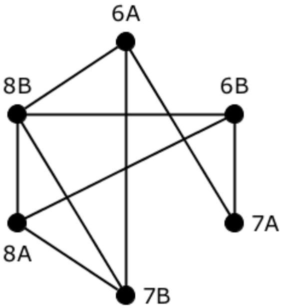
Torneio de Vôlei

Numa escola algumas turmas resolveram realizar um torneio de vôlei. Participam do torneio as turmas 6A, 6B, 7A, 7B, 8A e 8B. Alguns jogos foram realizados até agora:

- 6A jogou com 7A, 7B, 8B
- 6B jogou com 7A, 8A, 8B
- 7A jogou com 6A, 6B
- 7B jogou com 6A, 8A, 8B
- 8A jogou com 6B, 7B, 8B
- 8B jogou com 6A, 6B, 7B, 8A

Primeiras Noções de Grafos

- 6A jogou com 7A, 7B, 8B
- 6B jogou com 7A, 8A, 8B
- 7A jogou com 6A, 6B
- 7B jogou com 6A, 8A, 8B
- 8A jogou com 6B, 7B, 8B
- 8B jogou com 6A, 6B, 7B, 8A



Primeiras Noções de Grafos

Para que um grafo seja bem definido, precisamos dizer:

- O conjunto V de **vértices**: o conjunto das turmas;
- O conjunto E de **arestas**: os jogos realizados, ou seja, quais pares de vértices estão ligados.

Primeiras Noções de Grafos

Para que um grafo seja bem definido, precisamos dizer:

- O conjunto V de **vértices**: o conjunto das turmas;
- O conjunto E de **arestas**: os jogos realizados, ou seja, quais pares de vértices estão ligados.

Conjunto de vértices

$V = \{6A, 6B, 7A, 7B, 8A, 8B\}$.

Primeiras Noções de Grafos

UFG

Para que um grafo seja bem definido, precisamos dizer:

- O conjunto V de **vértices**: o conjunto das turmas;
- O conjunto E de **arestas**: os jogos realizados, ou seja, quais pares de vértices estão ligados.

Conjunto de vértices

$V = \{6A, 6B, 7A, 7B, 8A, 8B\}$.

Conjunto de arestas

$E = \{(6A, 7A); (6A, 7B); (6A, 8B); (6B, 7A); (6B, 8A); (6B, 8B); (7B, 8A); (7B, 8B); (8A, 8B)\}$

Primeiras Noções de Grafos

UFG

Para que um grafo seja bem definido, precisamos dizer:

- O conjunto V de **vértices**: o conjunto das turmas;
- O conjunto E de **arestas**: os jogos realizados, ou seja, quais pares de vértices estão ligados.

Conjunto de vértices

$V = \{6A, 6B, 7A, 7B, 8A, 8B\}$.

Conjunto de arestas

$E = \{(6A, 7A); (6A, 7B); (6A, 8B); (6B, 7A); (6B, 8A); (6B, 8B); (7B, 8A); (7B, 8B); (8A, 8B)\}$

Observe que não precisamos colocar $(8A; 7B)$ no conjunto de arestas pois já tínhamos colocado $(7B; 8A)$.

Número de vértices, vértices incidentes, adjacentes, vizinhos e grau de vértice

Seja G um grafo qualquer, e seja $e = uv$ uma aresta que liga os vértices u e v deste grafo.

Número de vértices, vértices incidentes, adjacentes, vizinhos e grau de vértice

Seja G um grafo qualquer, e seja $e = uv$ uma aresta que liga os vértices u e v deste grafo.

- O **número de vértices**, ou **ordem** de G geralmente é simbolizado por $|V|$ ou pela letra n.

Número de vértices, vértices incidentes, adjacentes, vizinhos e grau de vértice

Seja G um grafo qualquer, e seja $e = uv$ uma aresta que liga os vértices u e v deste grafo.

- O **número de vértices**, ou **ordem** de G geralmente é simbolizado por $|V|$ ou pela letra n.

Número de vértices, vértices incidentes, adjacentes, vizinhos e grau de vértice

Seja G um grafo qualquer, e seja $e = uv$ uma aresta que liga os vértices u e v deste grafo.

- O **número de vértices**, ou **ordem** de G geralmente é simbolizado por $|V|$ ou pela letra n.
- Dizemos que a aresta e **liga** o vértices u ao vértice v.

Primeiras Noções de Grafos

UFG

Número de vértices, vértices incidentes, adjacentes, vizinhos e grau de vértice

Seja G um grafo qualquer, e seja $e = uv$ uma aresta que liga os vértices u e v deste grafo.

- O **número de vértices**, ou **ordem** de G geralmente é simbolizado por $|V|$ ou pela letra n.
- Dizemos que a aresta e **liga** o vértices u ao vértice v.
- Quando u e v são vértices finais de uma aresta, dizemos que eles são **adjacentes** ou **vizinhos**.

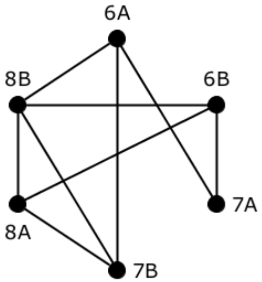
Número de vértices, vértices incidentes, adjacentes, vizinhos e grau de vértice

Seja G um grafo qualquer, e seja $e = uv$ uma aresta que liga os vértices u e v deste grafo.

- O **número de vértices**, ou **ordem** de G geralmente é simbolizado por $|V|$ ou pela letra n.
- Dizemos que a aresta e **liga** o vértices u ao vértice v.
- Quando u e v são vértices finais de uma aresta, dizemos que eles são **adjacentes** ou **vizinhos**.
- O número de vezes que as arestas incidem sobre um vértice v é chamado **grau do vértice** v, simbolizado por $d(v)$.

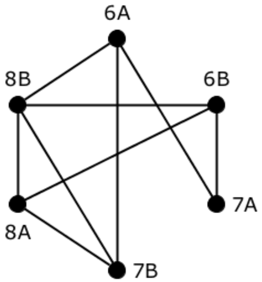
Primeiras Noções de Grafos

- A aresta $e = (6B, 7A)$ liga os vértices $6B$ e $7A$.



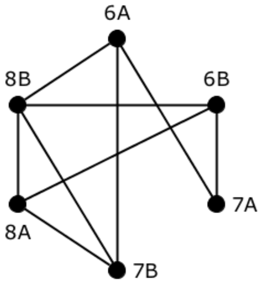
Primeiras Noções de Grafos

- A aresta $e = (6B, 7A)$ liga os vértices $6B$ e $7A$.
- Os vértices $8A$ e $7B$ são adjacentes, ou vizinhos.



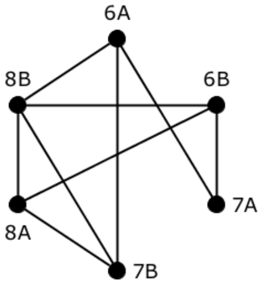
Primeiras Noções de Grafos

- A aresta $e = (6B, 7A)$ liga os vértices $6B$ e $7A$.
- Os vértices $8A$ e $7B$ são adjacentes, ou vizinhos.
- As arestas $e = (8A, 8B)$ e $e = (8A, 7B)$ são adjacentes, ou vizinhas.



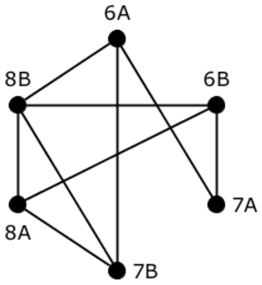
Primeiras Noções de Grafos

- A aresta $e = (6B, 7A)$ liga os vértices $6B$ e $7A$.
- Os vértices $8A$ e $7B$ são adjacentes, ou vizinhos.
- As arestas $e = (8A, 8B)$ e $e = (8A, 7B)$ são adjacentes, ou vizinhas.
- O número de vértices deste grafo é $|V| = n = 6$.



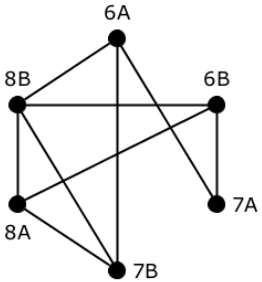
Primeiras Noções de Grafos

- A aresta $e = (6B, 7A)$ liga os vértices $6B$ e $7A$.
- Os vértices $8A$ e $7B$ são adjacentes, ou vizinhos.
- As arestas $e = (8A, 8B)$ e $e = (8A, 7B)$ são adjacentes, ou vizinhas.
- O número de vértices deste grafo é $|V| = n = 6$.



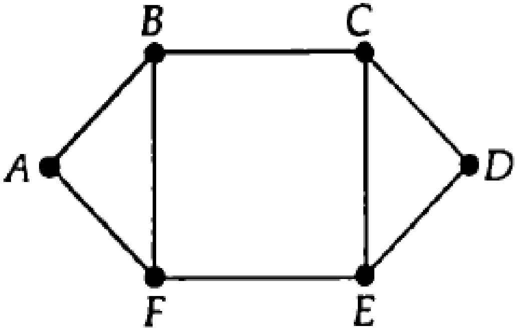
Primeiras Noções de Grafos

- A aresta $e = (6B, 7A)$ liga os vértices $6B$ e $7A$.
- Os vértices $8A$ e $7B$ são adjacentes, ou vizinhos.
- As arestas $e = (8A, 8B)$ e $e = (8A, 7B)$ são adjacentes, ou vizinhas.
- O número de vértices deste grafo é $|V| = n = 6$.
- O grau do vértice $7A$ é 2, ou seja, $d(7A) = 2$. Temos também que $d(6A) = 3$ e $d(8B) = 4$.



Grau máximo e Grau mínimo

O **grau máximo** dentre todos os vértices de um grafo é representado por $\Delta(G)$ e o **grau mínimo** por $\delta(G)$.

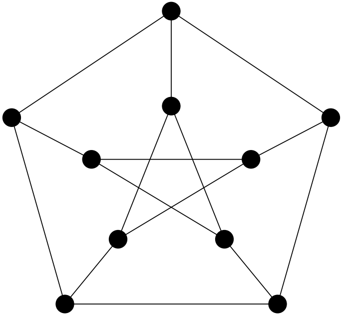


Grau máximo $\Delta(G) = 3$ e grau mínimo $\delta(G) = 2$, pois $d(B) = 3$ e $d(A) = 2$, respectivamente.

Conceitos Básicos

Grafo regular

Se $\Delta(G) = \delta(G) = k$, então G é dito ser k-**regular**. Um grafo 3-regular é também chamado de **grafo cúbico**.



Grafo de Petersen

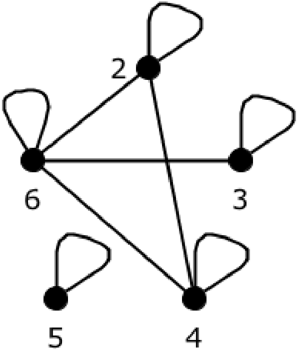
Conceitos Básicos

Uma aresta pode ligar um vértice a ele mesmo?

Conceitos Básicos

Uma aresta pode ligar um vértice a ele mesmo?

Pode. É o que chamamos de **laço**. Por exemplo, vamos construir o grafo em que $V = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e dois vértices serão ligados quando tiverem um divisor comum (diferente de 1).



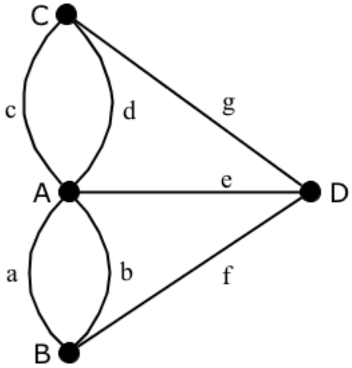
Conceitos Básicos

Dois vértices podem estar ligados por mais de uma aresta?

Conceitos Básicos

Dois vértices podem estar ligados por mais de uma aresta?

Podem. Neste caso usamos o nome especial de **multigrafo**, e estas arestas são chamadas de **arestas paralelas**. O exemplo das pontes de Königsberg que vimos anteriormente resultou no seguinte multigrafo:



Tipos especiais de grafos

Grafo simples

Um grafo que não possui laços, nem arestas paralelas é dito um **grafo simples**.

Tipos especiais de grafos

Grafo simples

Um grafo que não possui laços, nem arestas paralelas é dito um **grafo simples**.

Um grafo pode ter um conjunto vazio como arestas?

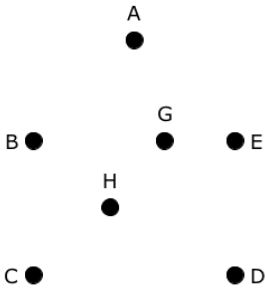
Tipos especiais de grafos

Grafo simples

Um grafo que não possui laços, nem arestas paralelas é dito um **grafo simples**.

Um grafo pode ter um conjunto vazio como arestas?

Pode. Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de grafo **vazio**.



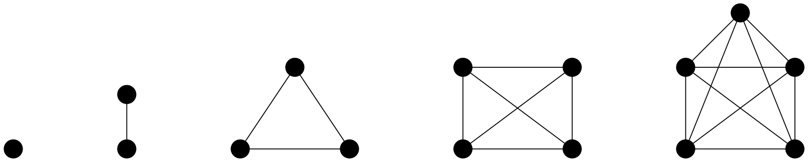
Tipos especiais de grafos

Grafo completo

Um grafo é **completo** se existe uma aresta ligando cada par de vértices. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n.

Grafo completo

Um grafo é **completo** se existe uma aresta ligando cada par de vértices. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n.



(a) K_1.

(b) K_2.

(c) K_3.

(d) K_4.

(e) K_5.

Figura 2: Grafos completos de ordem 1, 2, 3, 4 e 5.

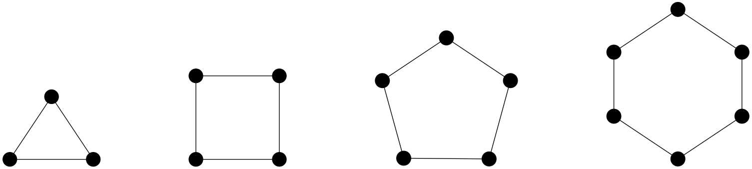
Tipos especiais de grafos

Ciclos

Um **ciclo** simples, geralmente chamado apenas de ciclo, é um caminho simples que começa e termina no mesmo vértice, possui comprimento maior do que 2, e todos os vértices internos são distintos. Os grafos ciclos são denotados por C_n, em que n representa seu número de vértices. O ciclo C_3, em especial, é denominado **triângulo**.

Ciclos

Um **ciclo** simples, geralmente chamado apenas de ciclo, é um caminho simples que começa e termina no mesmo vértice, possui comprimento maior do que 2, e todos os vértices internos são distintos. Os grafos ciclos são denotados por C_n, em que n representa seu número de vértices. O ciclo C_3, em especial, é denominado **triângulo**.



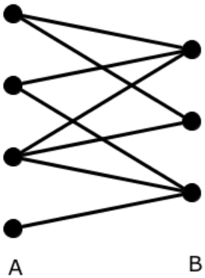
(a) C_3. (b) C_4. (c) C_5. (d) C_6.

Figura 3: Ciclos de ordem $3 \leq n \leq 6$.

Tipos especiais de grafos

Grafo bipartido

Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos, A e B, chamados **partição** de G, tal que não existem arestas entre dois vértices de uma mesma partição.

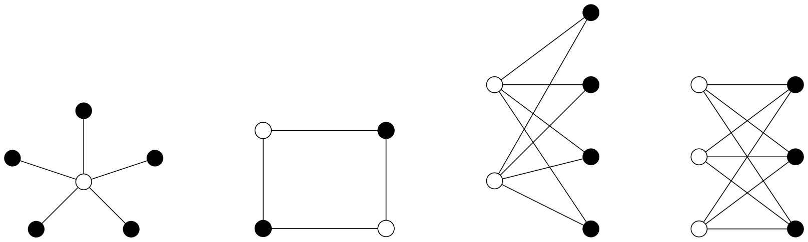


Um grafo bipartido com partições A e B.

Tipos especiais de grafos

Bipartido completo

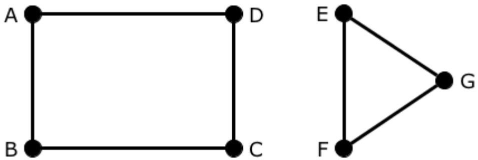
Um grafo G é **bipartido completo** se todo vértice do conjunto A é conectado a todo vértice do conjunto B. Um grafo bipartido completo com m vértices na partição A, e n vértices na partição B, é denotado por $K_{m,n}$.



(a) $K_{1,5}$. (b) $K_{2,2}$. (c) $K_{2,4}$. (d) $K_{3,3}$.

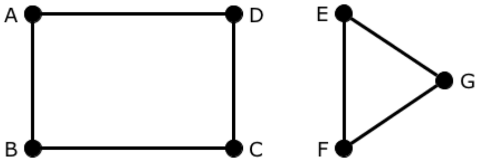
Alguns grafos bipartidos completos.

Conceitos Básicos



A Figura acima mostra um ou dois grafos?

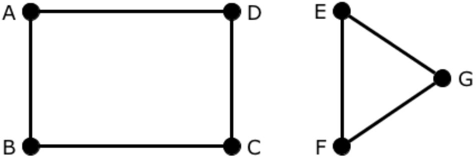
Conceitos Básicos



A Figura acima mostra um ou dois grafos?

Depende da situação que está sendo representada.

Conceitos Básicos

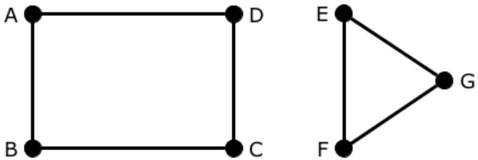


A Figura acima mostra um ou dois grafos?

Depende da situação que está sendo representada.

Se a Figura acima representar um único grafo, então este é um grafo **desconexo**. Cada parte do grafo (quadrado e triângulo) é chamada de **componente conexa do grafo**.

Conceitos Básicos



A Figura acima mostra um ou dois grafos?

Depende da situação que está sendo representada.

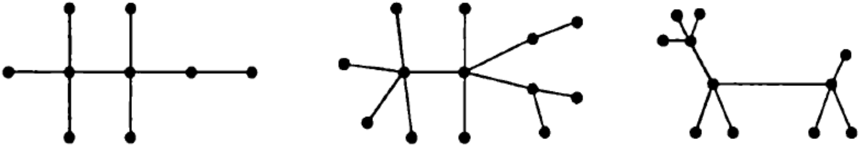
Se a Figura acima representar um único grafo, então este é um grafo **desconexo**. Cada parte do grafo (quadrado e triângulo) é chamada de **componente conexa do grafo**.

Dizemos que um grafo é **conexo** se qualquer par de vértices é ligado por ao menos um **caminho**.

Tipos especiais de grafos

Árvore

Uma **árvore** é um grafo **conexo** que não possui ciclos.



Três diferentes árvores.

Tipos especiais de grafos

Grafo complemento

O **complemento** $\overline{G}$ de um grafo simples G é um grafo simples cujo conjunto de vértices é o próprio $V(G)$, e dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se eles não são adjacentes em G.

Tipos especiais de grafos

Grafo complemento

O **complemento** $\overline{G}$ de um grafo simples G é um grafo simples cujo conjunto de vértices é o próprio $V(G)$, e dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se eles não são adjacentes em G.

Exercício

Descreva os grafos $\overline{K_n}$ e $\overline{K_{m,n}}$

Tipos especiais de grafos

Grafo complemento

O **complemento** $\overline{G}$ de um grafo simples G é um grafo simples cujo conjunto de vértices é o próprio $V(G)$, e dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se eles não são adjacentes em G.

Exercício

Descreva os grafos $\overline{K_n}$ e $\overline{K_{m,n}}$

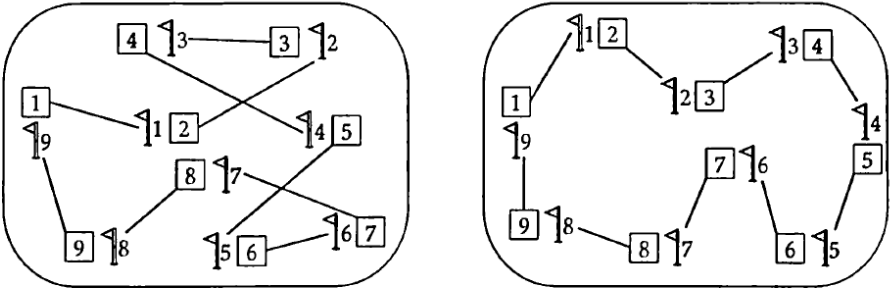
Solução

O completo do grafo $\overline{K_n}$ é um grafo vazio com n vértices e o completo do grafo $\overline{K_{m,n}}$ consiste em um grafo desconexo, com uma componente conexa sendo o K_m e outra componente conexa sendo o K_n.

Planaridade

Definição

Um grafo é dito **planar** se ele pode ser representado em um plano sem que haja cruzamento de suas arestas.

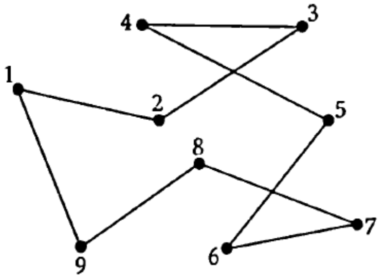


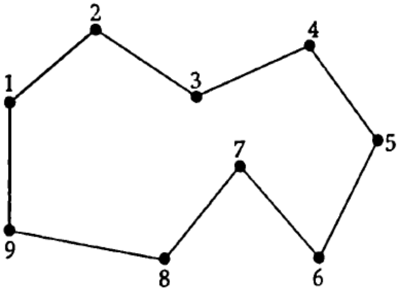
Planaridade

UFG

Definição

Um grafo é dito **planar** se ele pode ser representado em um plano sem que haja cruzamento de suas arestas.

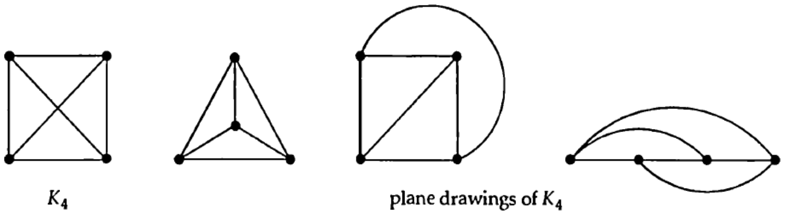




Planaridade

Definição

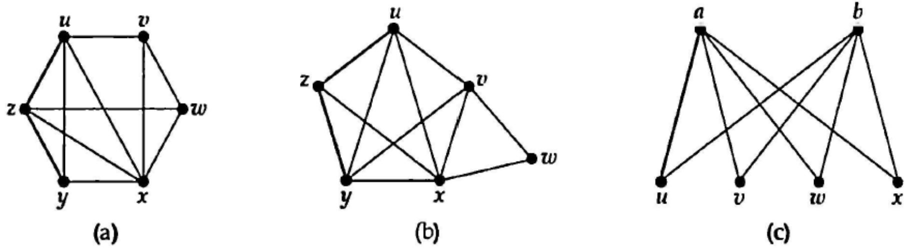
Um representação gráfica de um grafo em que não há cruzamento de arestas é dito **desenho plano**.



Planaridade

Exercício

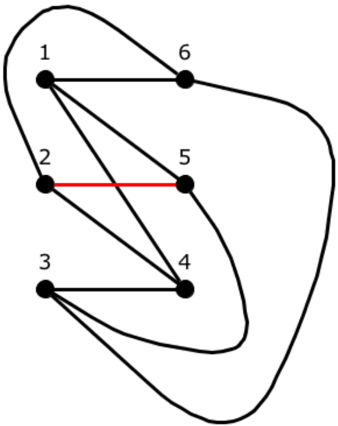
Mostre que os seguintes grafos são planares encontrando desenhos planos para cada um.



Planaridade

Nem todo grafo é planar

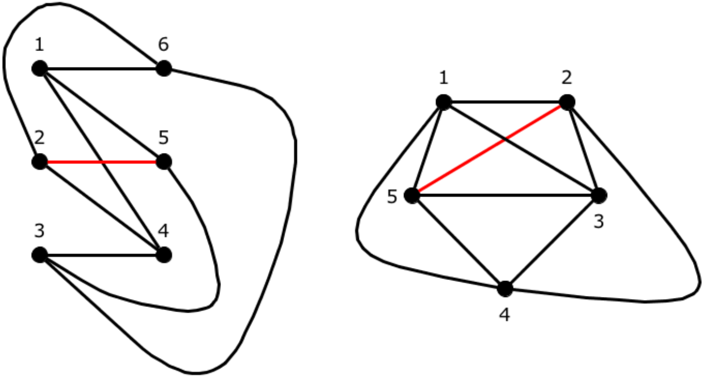
O problema da distribuição de energia mostrado anteriormente corresponde a um grafo bipartido completo $K_{3,3}$. Este grafo não é planar.



Planaridade

Teorema de Kuratowski

Um grafo é planar se, e somente se, ele não possui uma **subdivisão** de $K_{3,3}$ ou K_5.

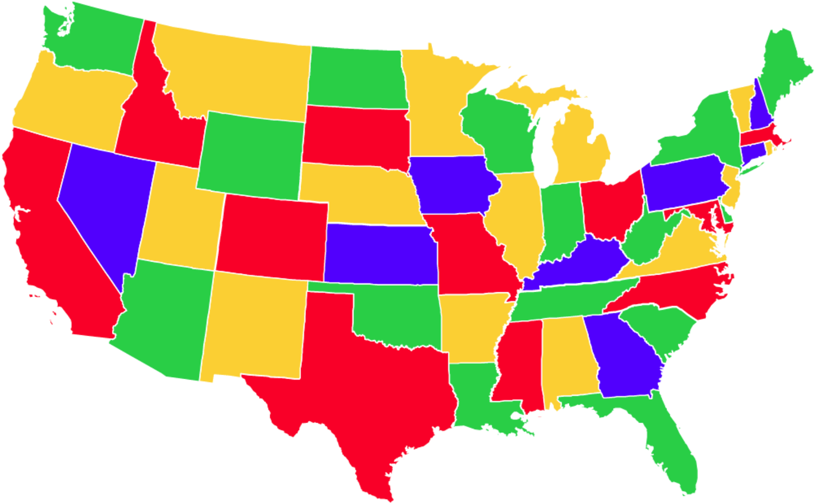


Coloração

Quantas cores são necessárias para colorir o mapa dos Estados Unidos de modo que nenhum estado vizinho tenha a mesma cor?

Coloração

Resposta: Apenas 4.



Coloração

Quantas cores são necessária para colorir um mapa, de países reais ou imaginários, de forma que países com fronteira comum tenham cores diferentes?

Coloração

Quantas cores são necessária para colorir um mapa, de países reais ou imaginários, de forma que países com fronteira comum tenham cores diferentes?

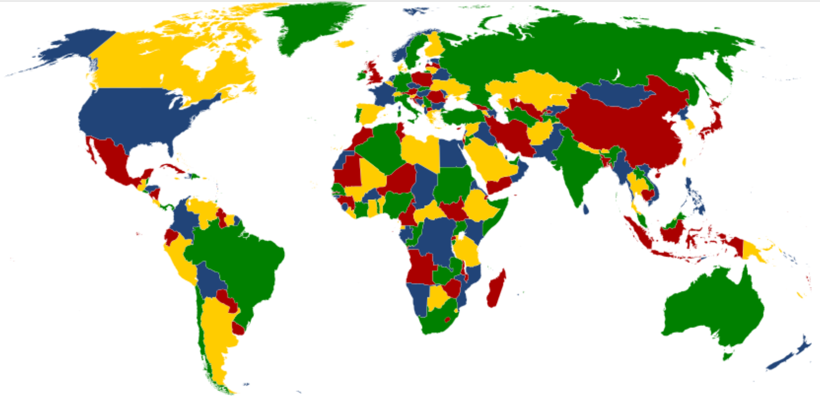
Teorema das 4 cores

- Em 1852, Francis Guthrie conjecturou que 4 era esse número mínimo.
- Não obstante a aparente simplicidade, só ao cabo de mais de cem anos, em 1976, se conseguiu provar que realmente a conjectura estava certa, obtendo-se o chamado **Teorema das Quatro Cores**.

Coloração

Teorema das 4 cores para grafos planares

Os vértices de qualquer grafo simples, conexo e planar podem ser coloridos com quatro (ou menos) cores de modo que todos os vértices adjacentes tenham cores diferentes.



Grafos com Pesos

- Grafos podem ter pesos associados a cada aresta, dependendo do problema que está sendo representado em grafos.

Grafos com Pesos

- Grafos podem ter pesos associados a cada aresta, dependendo do problema que está sendo representado em grafos.
- Se considerarmos um mapa de algumas cidades, podemos representar cada cidade por um vértice, com arestas ligando cada cidade se existe uma rota de carro entre elas.

Grafos com Pesos

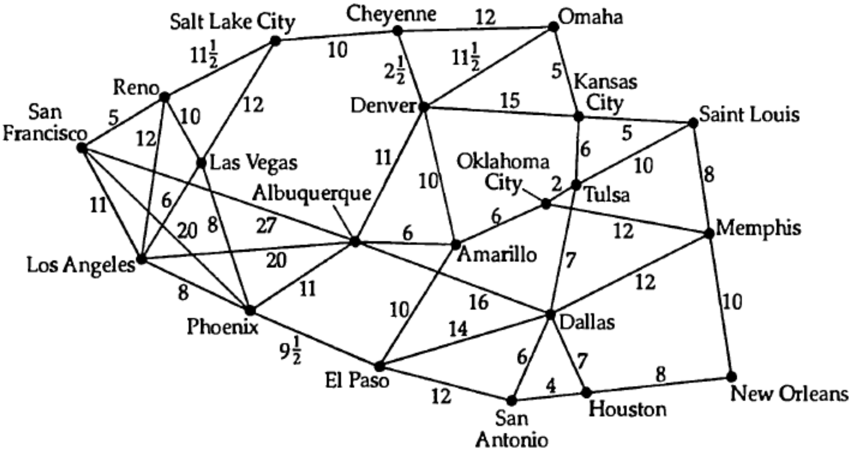
- Grafos podem ter pesos associados a cada aresta, dependendo do problema que está sendo representado em grafos.
- Se considerarmos um mapa de algumas cidades, podemos representar cada cidade por um vértice, com arestas ligando cada cidade se existe uma rota de carro entre elas.
- Para cada aresta, podemos associar um número, representando o tempo gasto, em horas, para dirigir de uma cidade a outra.

Grafos com Pesos

- Grafos podem ter pesos associados a cada aresta, dependendo do problema que está sendo representado em grafos.
- Se considerarmos um mapa de algumas cidades, podemos representar cada cidade por um vértice, com arestas ligando cada cidade se existe uma rota de carro entre elas.
- Para cada aresta, podemos associar um número, representando o tempo gasto, em horas, para dirigir de uma cidade a outra.
- Esses números são chamados de **pesos**, e um grafo que possui pesos associados a cada aresta é dito **grafo com pesos**.

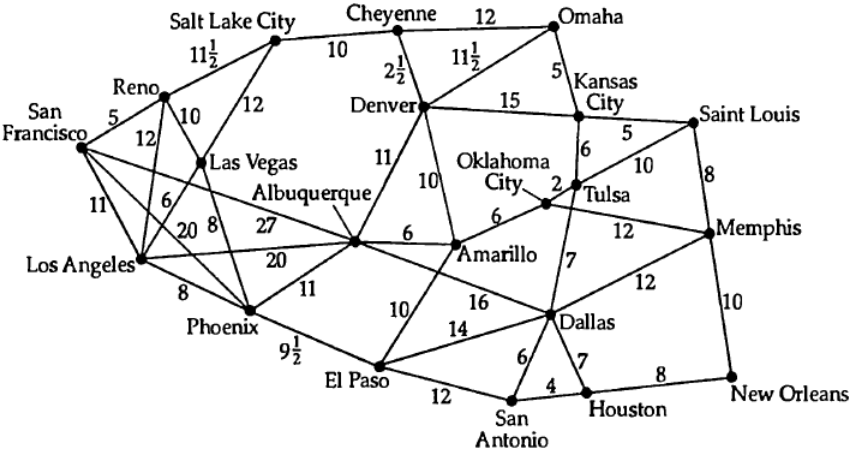
Problema do caminho mínimo

Encontre a menor rota entre Los Angeles e Amarillo.



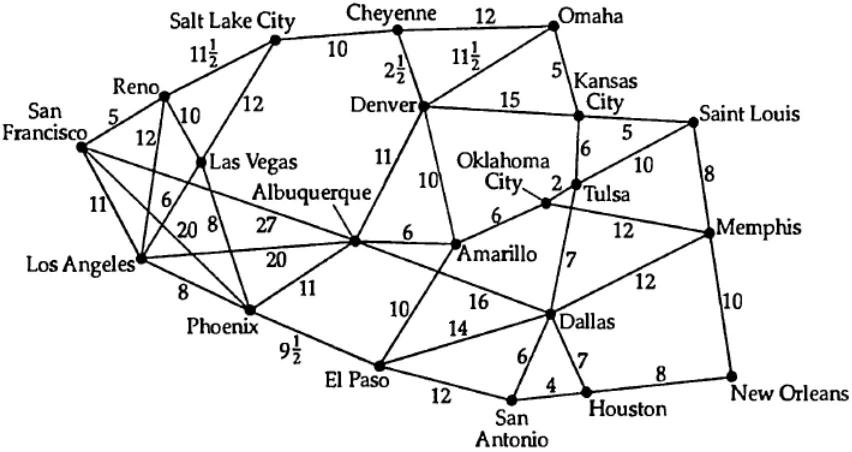
Problema do caminho mínimo

Menor rota entre Los Angeles e Amarillo: 25 horas.
Los Angeles - Phoenix - Albuquerque - Amarillo.



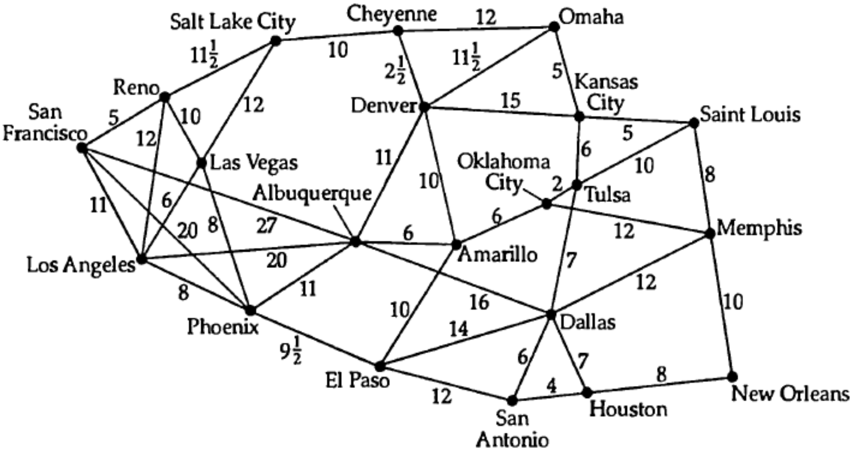
Problema do caminho mínimo

Encontre a menor rota entre São Francisco e Denver.



Problema do caminho mínimo

Menor rota entre São Francisco e Denver: 29 horas
São Francisco - Reno - Salt Lake City - Cheyenne - Denver.



Problema do Caixeiro Viajante

Um Caixeiro viajante deseja visitar todas as cidades, vender suas mercadorias em cada cidade, e voltar à cidade de onde partiu.

Problema do Caixeiro Viajante

O problema corresponde a encontrar uma rota de peso mínimo que visita todos os vértice e retorna ao ponto de início.

Problema do Caixeiro Viajante

Suponha que o ponto de partida seja London. Qual a rota o caixeiro viajante deve escolher para que percorra o menor caminho possível?

Problema do Caixeiro Viajante

É fácil mostrar por tentativa e erro que a solução deste problema é a rota London - Coventry - Preston - Leeds - London (em qualquer das duas direções), com um total de $100+125+68+194 = 487$ milhas.

Problema do Caixeiro Viajante

- Conforme o número de cidades cresce, a dificuldade torna-se exponencialmente maior.

Problema do Caixeiro Viajante

- Conforme o número de cidades cresce, a dificuldade torna-se exponencialmente maior.
- Não existe método conhecido que provê uma solução para o problema do caixeiro viajante geral.

Problema do Caixeiro Viajante

- Conforme o número de cidades cresce, a dificuldade torna-se exponencialmente maior.
- Não existe método conhecido que provê uma solução para o problema do caixeiro viajante geral.
- O que existem são procedimentos que determinam soluções aproximadas.

Problema do Caixeiro Viajante

- Conforme o número de cidades cresce, a dificuldade torna-se exponencialmente maior.
- Não existe método conhecido que provê uma solução para o problema do caixeiro viajante geral.
- O que existem são procedimentos que determinam soluções aproximadas.
- O único método conhecido que é garantidamente capaz de resolver qualquer instância do problema do caixeiro viajante é o método de força-bruta.

Problema do Caixeiro Viajante

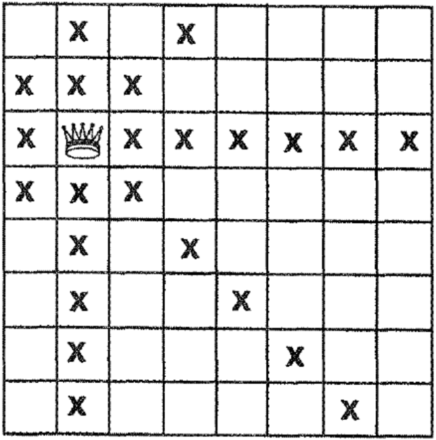
- Se considerarmos 10 cidades, um computador deve verificar todas as $\frac{1}{2}(9!) = 181440$ possibilidades de rotas e consegue resolver o problema por força-bruta em cerca de 3 minutos.

Problema do Caixeiro Viajante

- Se considerarmos 10 cidades, um computador deve verificar todas as $\frac{1}{2}(9!) = 181440$ possibilidades de rotas e consegue resolver o problema por força-bruta em cerca de 3 minutos.
- Se considerarmos 20 cidades, um computador deve verificar todas as $\frac{1}{2}(19!) = 6.08x10^6$ possibilidades, e um computador gastaria cerca de 2 milhões de anos para dar a solução.

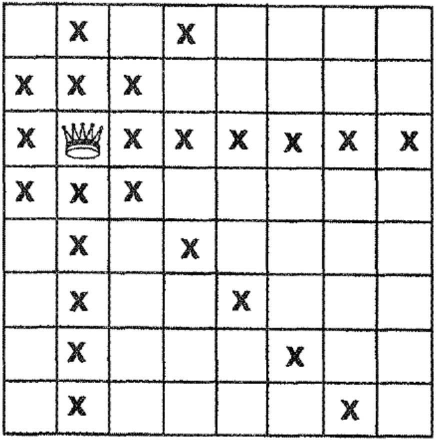
Problema da Rainha

Num tabuleiro de xadrez, cada rainha pode se mover na horizontal, vertical, ou nas diagonais.

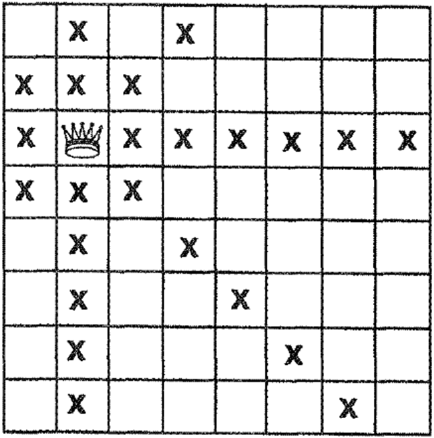


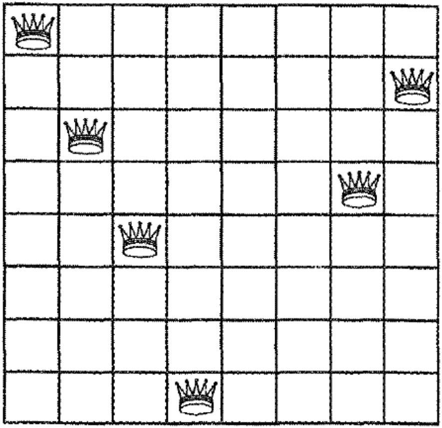
Problema da Rainha

Quantas rainhas são necessárias para que todas as posições do tabuleiro possam ser alcançadas por alguma das rainhas, ou esteja ocupada por uma?



Problema da Rainha





Circuito Euleriano

UFG

Definição

Um **circuito euleriano** passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez, e retorna para o ponto inicial.

Grafo Euleriano

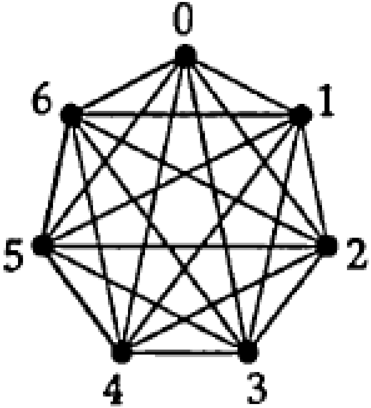
Um grafo conexo possui um **circuito euleriano** se, e somente se, todos os vértices tem grau par.

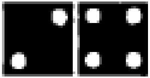
Grafo semi-euleriano

Um grafo conexo é **semi-euleriano** se, e somente se, ele possui exatamente 2 vértices ímpares.

Dominós

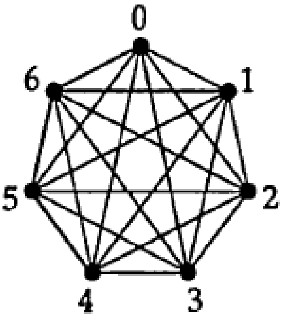
Uma aplicação para o circuitos eulerianos em grafos ocorre no jogo de dominó. O grafo abaixo representa todas as peças de um jogo de dominó cujo maior número é 6.





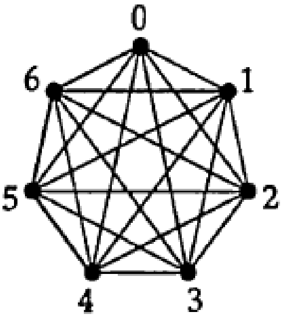
Dominós

Encontrar um circuito Euleriano neste grafo corresponde a criar uma disposição fechada de peças que usam todas as peças do jogo.



Dominós

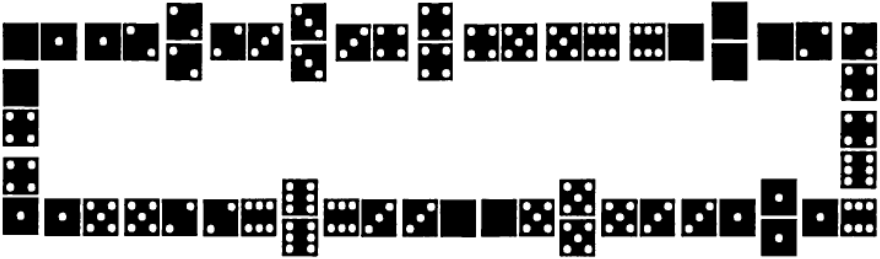
Encontrar um circuito Euleriano neste grafo corresponde a criar uma disposição fechada de peças que usam todas as peças do jogo.



Um circuito Euleriano possível

01, 12, 23, 34, 45, 56, 60, 02, 24, 46, 61, 13, 35, 50, 03, 36, 62, 25, 51, 14, 40.

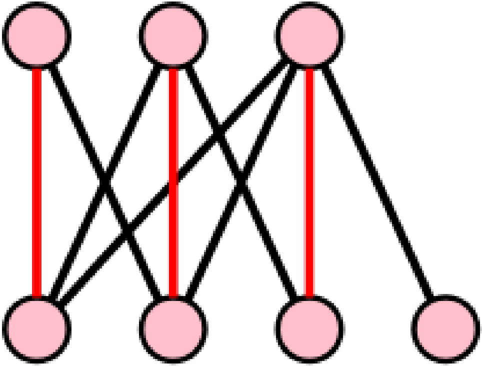
Dominós



Emparelhamento (*Matching*)

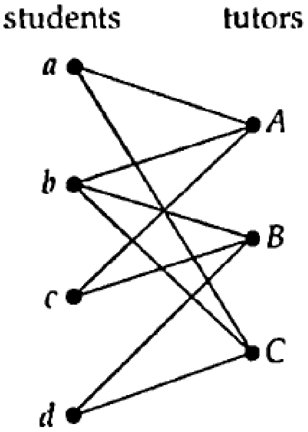
Definição

Um *matching* (emparelhamento) em um grafo G consiste num conjunto de arestas de G tais que não existam arestas adjacentes.



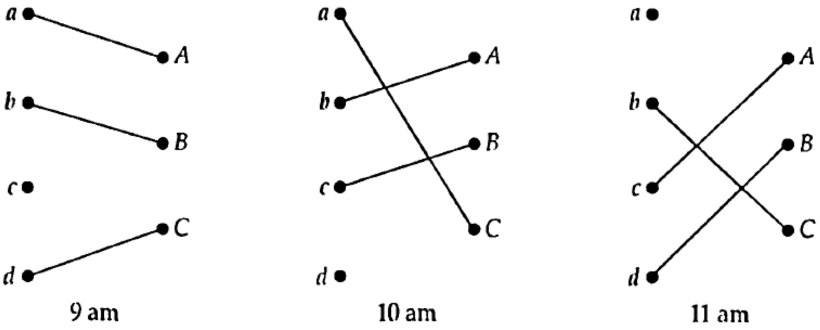
Escalonamento de Horários

Todo fim de semestre, todos os alunos devem fazer um prova de uma hora de duração com cada um de seus professores. Dois alunos não podem fazer a prova com o mesmo professor no mesmo horário.



Escalonamento de Horários

Uma solução possível:



Estação de Rádio

- Deseja-se instalar estações de rádio em uma cidade de modo que todas os bairros desta cidade sejam cobertos pelo sinal da estação de rádio instalada.

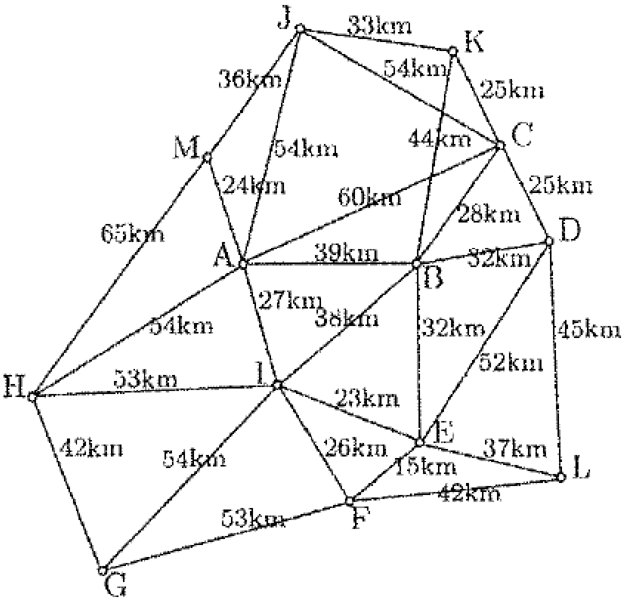
Estação de Rádio

- Deseja-se instalar estações de rádio em uma cidade de modo que todas os bairros desta cidade sejam cobertos pelo sinal da estação de rádio instalada.
- Cada estação de rádio possui um alcance máximo de 50km.

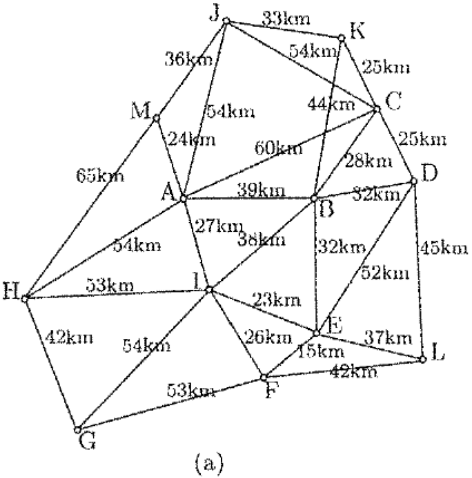
Estação de Rádio

- Deseja-se instalar estações de rádio em uma cidade de modo que todas os bairros desta cidade sejam cobertos pelo sinal da estação de rádio instalada.
- Cada estação de rádio possui um alcance máximo de 50km.
- Deseja-se instalar o menor número possível de estações nesta cidade de modo que todos os bairros sejam atendidos pelo sinal.

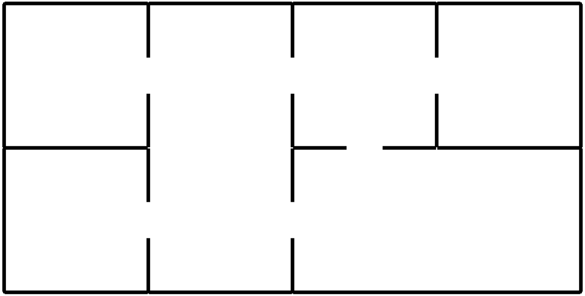
Estação de Rádio



Estação de Rádio

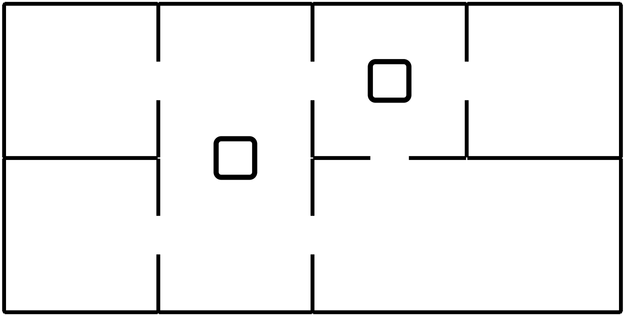


Vigilância

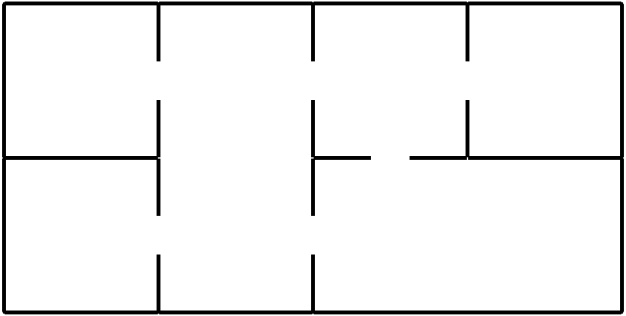


- Suponha que uma empresa deseje adquirir sensores de movimento para o prédio.
- Sabe-se que cada sensor é capaz de detectar movimento no cômodo instalado ou nos cômodos vizinhos, desde que haja uma passagem entre entre dois ambientes.
- Quantos sensores são necessários para proteger todo o prédio?

Vigilância

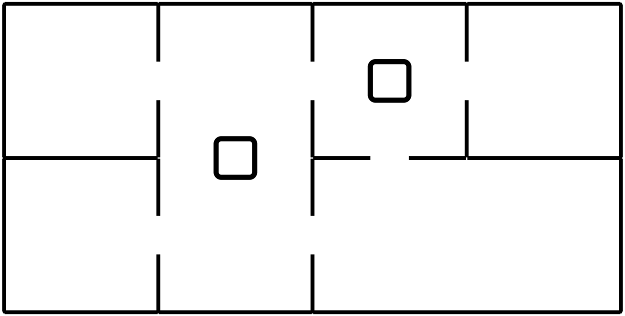


Prevenção de Incêndio

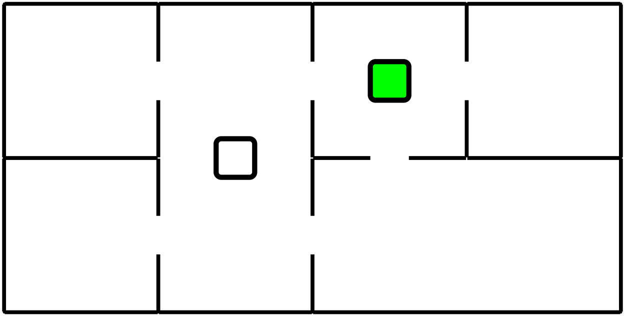


- Cada sensor de incêndio é capaz de identificar a presença de fumaça no cômodo instalado ou nos cômodos vizinhos.
- Quantos sensores são necessários para identificar precisamente a sala em que há foco de incêndio?

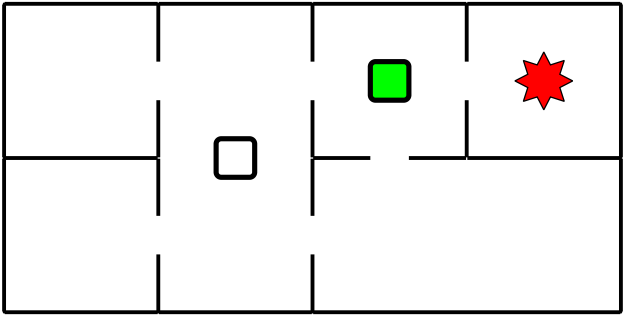
Prevenção de Incêndio



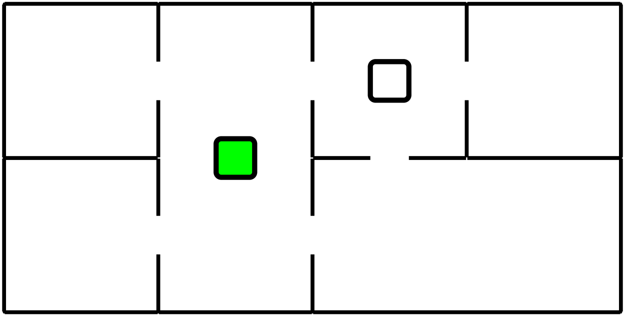
Prevenção de Incêndio



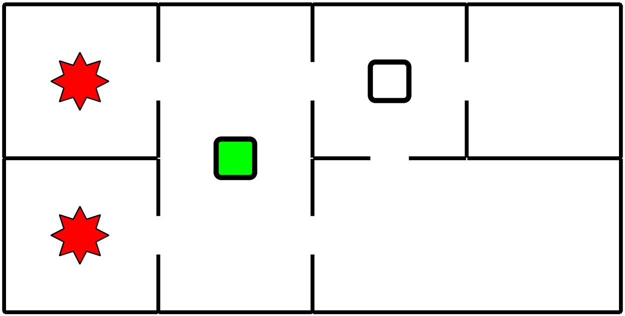
Prevenção de Incêndio



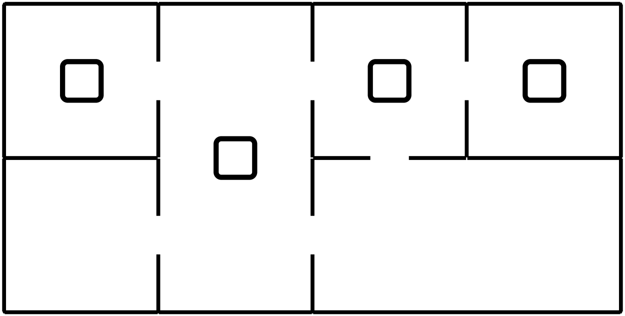
Prevenção de Incêndio



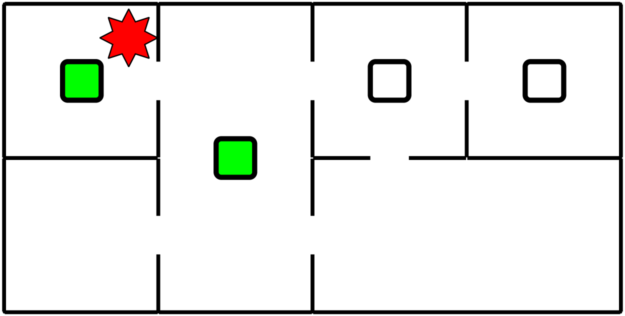
Prevenção de Incêndio



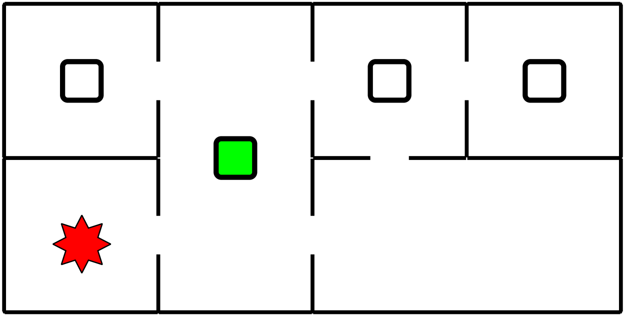
Prevenção de Incêndio



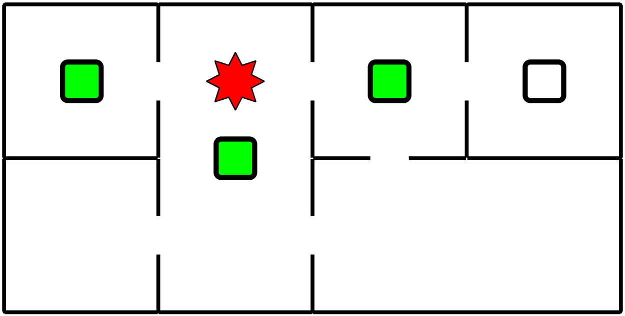
Prevenção de Incêndio



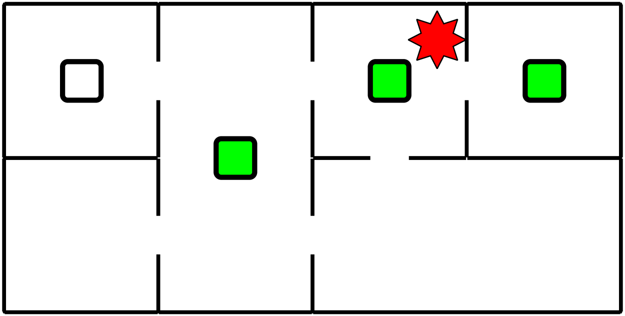
Prevenção de Incêndio



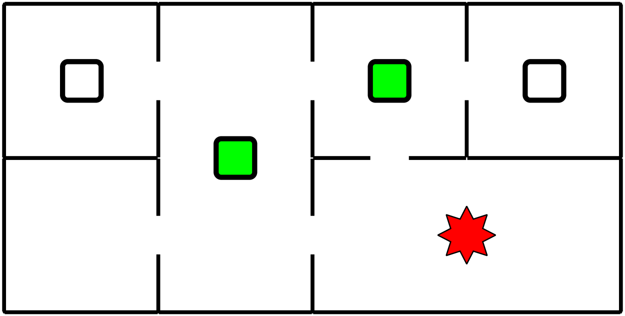
Prevenção de Incêndio



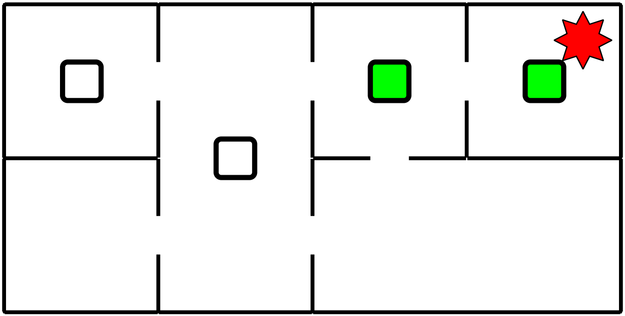
Prevenção de Incêndio



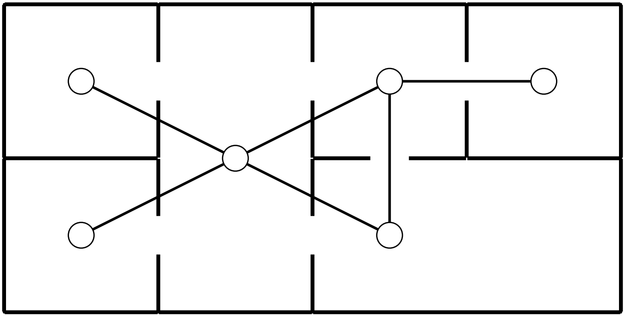
Prevenção de Incêndio



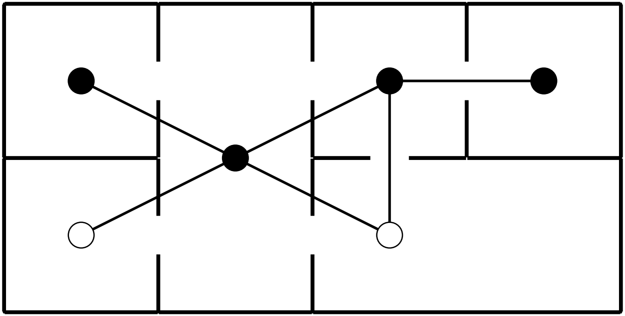
Prevenção de Incêndio



Prevenção de Incêndio



Prevenção de Incêndio



O que mais há para se estudar?

- Como se representa um grafo computacionalmente?
  - Que estrutura de dados utilizar?
- Principais algoritmos em grafos:
  - Algoritmos de busca (largura, profundidade);
  - Algoritmos de caminho mínimo (Dijkstra, Bellman–Ford);
  - Algoritmos para encontrar uma árvore geradora mínima (Kruskal, Prim);

Principais Bibliografias

- J. A. Bondy & U.S.R. Murty. Graph Theory with Applications, North-Holland, 1976
- R. Diestel. Graph Theory, Springer, 1997
- J. M. Aldous & R. J. Wilson. Graphs and Applications: An Introductory Approach, Springer, 2004
- D. B. West. Introduction to Graph Theory. Pearson Education, 2001.

Contato

E-mail:julianafelix@inf.ufg.br
https://julianafelix.me/

Obrigada! Perguntas?