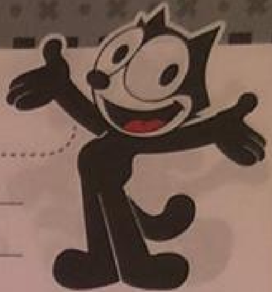
S T Q Q S S D



Segunda Prova - [redacted]

1.a. Marginal

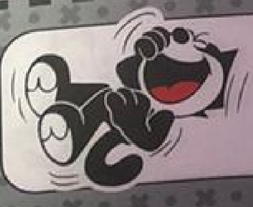
X	P(x)
x = 0	0.3
x = 1	0.4
x = 2	0.3
	1.0

b. Distribuição Condicional (Y | X = 1)

Y | X = 1	P	P(Y | X = 1)
Y = 0	0.2	0.5
Y = 1	0.2	0.5
Y = 2	0	0
Total	0.4	1

c. Distribuição Condicional (X | Y = 0)

X | Y = 0	P	P(X | Y = 0)
x = 0	0.1	0.2
x = 1	0.2	0.4
x = 2	0.2	0.4
Total	0.5	1.0



2. $\Psi = \begin{bmatrix} 0.19 & 0 & 0 \\ 0 & 0.51 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix}$ - Considerando que Var = 1

$$Cov(Z) = \Sigma = LL' + \Psi$$

$$\Sigma = LL' + \begin{bmatrix} 0.19 & 0 & 0 \\ 0 & 0.51 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} \quad e \quad L = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0,81 & 0,63 & 0.45 \\ 0.63 & 0.49 & 0.35 \\ 0.45 & 0.35 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.19 & 0 & 0 \\ 0 & 0.51 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.63 & 0.45 \\ 0.63 & 1 & 0.35 \\ 0.45 & 0.35 & 1 \end{bmatrix}$$

S T Q Q S S D

3. $\lambda_1 = 1.96$, $\lambda_2 = 0.68$, $\lambda_3 = 0.36$

$$e = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0,625 & 0,593 & 0,507 \\ -0,219 & -0,491 & 0,843 \\ 0.749 & -0,638 & -0.177 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma \approx L L' = \left[\sqrt{\lambda_1}\, v_1 \;\; \ldots \;\; \sqrt{\lambda_3}\, v_3 \right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\, v_1' \\ \sqrt{\lambda_2}\, v_2' \\ \sqrt{\lambda_3}\, v_3' \end{bmatrix}$$

→ Como queremos uma matriz L 3×1 temos

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0,625 \\ \sqrt{\lambda_1} & 0,593 \\ \sqrt{\lambda_1} & 0,507 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \cdot 0,625 \\ 1.4 \quad 0,593 \\ 1.4 \quad 0,507 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,8302 \\ 0,7098 \end{bmatrix}$$

$$V(Z_i) = \|L_i\|^2 + \Psi_i$$

$$\Psi_1 = 1 - (\sqrt{1.96} \times 0,625)^2 = 0.234$$
$$\Psi_2 = 1 - (\sqrt{1.96} \times 0,593)^2 = 0.311$$
$$\Psi_3 = 1 - (\sqrt{1.96} \times 0,507)^2 = 0.496$$

$$\text{Prop V total} = \frac{\lambda_1}{\Sigma \lambda_k} = \frac{1.96}{1.96 + 0.68 + 0.36} = 0,653$$

4. $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$

$Y_1 = e_1' X$ e $Y_2 = e_2' X$

$Y_1 = e_1' \begin{bmatrix} N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ \vdots \\ \vdots \\ N(\mu_4, \sigma_4^2) \end{bmatrix}$ e o mesmo p/ Y_2

Esperança:

$- E(Y_K) = E(e_K' X) = e_K' E(X)$

$E(Y_1) = e_1' \mu$

$E(Y_2) = e_2' \mu$

Variância

$Var(Y_1) = e_1' \Sigma e_1 \rightarrow e_1' \lambda_1 e_1 \rightarrow \lambda_1 e_1' e_1 \rightarrow \lambda_1 \|e_1\| = \lambda_1$

$Var(Y_2) = \lambda_2$

$Y_1 \sim (e_1' \mu, \lambda_1)$, $Y_2 \sim (e_2' \mu, \lambda_2)$

Covariância $(Y_i, Y_j) = E[(Y_i - y_i)(Y_j - y_j)]$ $\quad$ y_k é a média Y_k

$= E[e_i'(X - \mu) e_j'(X - \mu)]$

$= e_i' E[(X-\mu)(X-\mu)'] e_j$

$= e_i' E[(X-\mu)^2] e_j$

$= e_i' Cov(X) e_j$

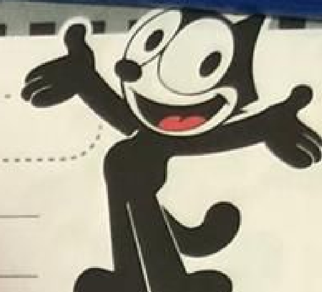
$= e_i' \Sigma e_j$

$= e_i' \lambda_j e_j$

$= \lambda_j e_i' e_j$

se $i = j$ o elemento vai ser $\lambda_i \rightarrow$ diagonal da matriz de cov. vai ser λ_1 e λ_2

S T Q Q S S D



5. a. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

$\hookrightarrow F(x)$ é não decrescente)

$\hookrightarrow F(x) \in [0,1]$

$W = F_x(x)$

$$
\begin{aligned}
F_W(w) &= P(W \leq w) \\
&= P(F_x(x) \leq w) \\
&= P(F_x^{-1}(F_x(x)) \leq F_x^{-1}(w)) \\
&= P(X \leq F_x^{-1}(w)) \sim \text{temos que } P(X \leq k) = F_x(k) \\
&= F_x(F_x^{-1}(w)) \\
F_W(w) &= w
\end{aligned}
$$

$\sim P(U \leq a) = a$ se $a \in [0,1] \sim$

Logo $F_W \in [0,1]$ e F_W é uniforme

b. Seja $U \sim U(0,1)$

$Y = F_x^{-1}(U)$

- A função distribuição é uma função que nunca é decrescente em $[0,1]$

-

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(F_x^{-1}(U) \leq y) \\
&= P(F_x(F_x^{-1}(U)) \leq F_x(y))
\end{aligned}
$$

$\sim P(U \leq a) = a$ se $a \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
&= P(U \leq F_x(y)) \\
&= F_x(y)
\end{aligned}
$$

Assim F_x é a função inversa de F_Y e podemos gerar F_Y a partir de F_x (e vice-versa)