Segunda Prova - FECD

2020

1. **4 PONTOS** A Tabela abaixo mostra a distribuição conjunta do vetor aleatório discreto (X, Y). Obtenha: (a) a distribuição marginal da variável X, (b) a distribuição condicional $(Y|X = 1)$ e a (c) a distribuição condicional $(X|Y = 0)$.

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$y = 0$	0.1	0.2	0.2
$y = 1$	0.1	0.2	0.1
$y = 2$	0.1	0.0	0.0

2. **4 PONTOS** Mostre que a matriz de covariância

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.0 & .63 & .45 \\ .63 & 1.0 & .35 \\ .45 & .35 & 1.0 \end{bmatrix}$$

do vetor aleatório $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ pode ser obtida por um modelo fatorial com apenas um fator F com

$$\begin{aligned} Z_1 &= .9F + \varepsilon_1 \\ Z_2 &= .7F + \varepsilon_2 \\ Z_3 &= .5F + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

onde $\mathbb{V}(F) = 1$, $\text{Cov}(F, \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{\Psi} = \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$ é uma matriz diagonal com elementos $(0.19, 0.51, 0.75)$.

3. **4 PONTOS** Os autovalores e autovetores da matriz de correlação do problema 2 são os seguintes: $\lambda_1 = 1.96$, $\lambda_2 = 0.68$ e $\lambda_3 = 0.36$; e $\mathbf{e}_1 = (0.625, 0.593, 0.507)$, $\mathbf{e}_2 = (-0.219, -0.491, 0.843)$ e $\mathbf{e}_3 = (0.749, -0.638, -0.177)$. Assumindo um modelo com apenas um único fator, estime a matriz 3×1 de cargas $\mathbf{L}$ e a matriz de variâncias específicas usando o método de componentes principais. Qual a proporção da variância total é explicada pelo fator comum?

4. **4 PONTOS** O vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ corresponde a variação diária do preço de 4 ações no mercado financeiro num certo dia. Suponha que ele possua distribuição normal multivariada com vetor esperado $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariância $\mathbf{\Sigma}$. Pelo Teorema espectral temos $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P\Lambda P'}$ onde $\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3|\mathbf{e}_4]$ é a matriz com os autovetores e $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz diagonal com os autovalores de $\mathbf{\Sigma}$. Usando os dois primeiros autovetores, duas carteiras são formadas com diferentes combinações das 4 ações: $Y_1 = \mathbf{e}_1'\mathbf{X}$ e $Y_2 = \mathbf{e}_2'\mathbf{X}$. Obtenha a distribuição conjunta $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ e, em particular, mostre que a matriz 2×2 de covariância do vetor $\mathbf{Y}$ é uma matriz diagonal com elementos λ_1 e λ_2.

5. **4 PONTOS** O método de simulação Monte Carlo bolado por Stan Ulam é o da transformada inversa. Ele é baseado num simples resultado de probabilidade que você deve provar. Seja X uma variável aleatória contínua com função distribuição acumulada de probabilidade $\mathbb{F}(x)$, a qual possui uma função inversa $\mathbb{F}^{-1}$.
   (a) Mostre que o suporte da variável aleatória $\mathbb{F}(X)$ é o intervalo $[0, 1]$ e ela possui distribuição uniforme $U(0, 1)$.
   (b) Seja $U \sim U(0, 1)$. Mostre que $\mathbb{F}^{-1}(U)$ é uma variável aleatória cuja distribuição acumulada de probabilidade é $\mathbb{F}(x)$ (e portanto $\mathbb{F}^{-1}(U)$ possui a mesma distribuição que X).