Terceira Prova - FECD

Ano da pandemia 2020

1. **4 PONTOS** As v.a.'s binárias $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são independentes com $y_i \sim$ Bernoulli(p_i) onde

$$p_i = \frac{1}{1+e^{-\eta_i}} = \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\ldots+\beta_p x_{ip})}} = \frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}_i^t \boldsymbol{\theta}}}$$

onde o vetor-COLUNA $\mathbf{x}_i = (1, x_{i1}, \ldots, x_{ip})^t$ é a i-ésima LINHA da matriz $\mathbf{X}$ de dimensão $n \times (p+1)$ e $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$ é o vetor-coluna de parâmetros desconhecidos. Mostre EM DETALHES que a equação de verossimilhança é dada por

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}^t(\mathbf{y} - \mathbf{p})$$

OBS: Eu saltei alguns detalhes nos slides. Por exemplo, não mostrei como os p_i's aparecem na equação acima. Você deve mostrar estes detalhes também, não basta copiar os slides.

2. **4 PONTOS** Ainda com relação ao problema acima, faça a derivação detalhada mostrando que

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^t} = -\mathbf{X}^t \mathbf{W} \mathbf{X}$$

esclarecendo o que é a matriz $\mathbf{W}$.

3. **4 PONTOS** Encontre o MLE do parâmetro σ^2 se $Y_1, \ldots, Y_n$ são i.i.d. com distribuição gaussiana $N(\mu_0, \sigma^2)$ onde μ_0 *é um valor conhecido*. Por exemplo, assuma que $\mu_0 = 7$ e forneça o MLE de σ^2.

4. **4 PONTOS** Seja Y uma v.a. com $\mu = \mathbb{E}(Y)$. Prove que $m = \mu$ é o valor que minimiza $\mathbb{E}(Y-m)^2$. Isto é, que $\mu = \arg\min_m \mathbb{E}(Y-m)^2$.

5. **4 PONTOS** Seja

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}' = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que, qualquer que seja o vetor resposta $\mathbf{Y}$ de dimensão $n \times 1$, ele pode ser decomposto como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}_1\mathbf{Y} + (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1)\,\mathbf{Y} = \bar{y}\mathbf{1} + (\mathbf{Y} - \bar{y}\mathbf{1})$$

e que os dois vetores do lado direito da equação são ortogonais entre si.