Finanças quantitativas e Gerenciamento de Risco – 2020/1

Lista de exercícios 1
Prof. Cristiano Arbex Valle
Entrega: Via Moodle

---

**Instruções**

(a) Para alguns dos exercícios abaixo, utilizaremos dados reais da Bovespa. Favor ler as instruções disponibilizadas no Moodle. Se você é pouco familiarizado com `R`, há também instruções sobre manipulação dos dados.

(b) Você não precisa necessariamente usar `R`, pode fazer como quiser: `Python`, `MatLab`, manualmente, etc.

(c) Não é necessário entregar o código, apenas as respostas finais. Caso queira incluir os cálculos e códigos não há problema.

---

**Questão 1** Considere uma ação cujo preço atual é R$100. Analistas financeiros concluíram que há duas possibilidades de preço ao final do próximo mês: R$105 e R$95, ambos cenários com probabilidade de 50%. Existe a possibilidade de comprar uma opção de compra desta ação com preço de exercício de R$102 ao final do mês. Atualmente a opção custa R$1.49.

a. Considerando uma taxa livre de risco de 0% ao mês, você compraria esta opção? Por que?

b. Se a taxa de livre de risco for 1% sua decisão mudaria?

Resposta:

a. Para calcular o preço justo da opção, vamos calcular primeiro o tamanho $\Delta$ da posição shorting pra fazer cobertura (*hedging*) - ou seja o shorting necessário para que o portfolio termine com o mesmo valor independente da opção ser realizada ou não. Seja $P$ o preço atual da opção.

- Valor agora, quando fazemos shorting:

$$100\Delta \text{ (dinheiro obtido com shorting) } - 100\Delta(\text{ dívida }) + P$$

- Valor em $t+1$ se o preço da ação é 105 (lucro da opção, 3):

$$100\Delta - 105\Delta + 3$$

- Valor em $t+1$ se o preço da ação é 95 (opção vale zero):

$$100\Delta - 95\Delta + 0$$

- Ambos tem que ser iguais para caracterizar cobertura (e cancelamento de volatilidade):

$$\begin{aligned} 100\Delta - 105\Delta + 3 &= 100\Delta - 95\Delta + 0 \\ -10\Delta &= -3 \\ \Delta &= 0.3 \end{aligned}$$

- O valor do portfolio em $t+1$ nos dois casos:

$$\begin{aligned} 100\Delta - 105\Delta + 3 &= 1.5 \\ 100\Delta - 95\Delta &= 1.5 \end{aligned}$$

- O portfolio no tempo $t$ também deve ser igual a 1.5:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0.3 - 100 \cdot 0.3 + P &= 1.5 \\ P &= 1.5 \end{aligned}$$

O preço justo da opção sem deconto é R\$1.50. Como a opção está custando R\$1.49, temos uma oportunidade de arbitragem (se o modelo for condizente com a realidade) e a compra vale a pena.

b. Na forma mais simples, a única diferença é que o valor do portfolio no tempo $t$ deveria ser menor que 1.50, pois ele vai valorizar 1% até $t + 1$ para valer 1.50. O valor atual $x$ seria:

$$\begin{aligned} x(1 + 0.01) &= 1.50 \\ x &= 1.485 \end{aligned}$$

O preço justo da opção com desconto é R\$1.485, menos que o preço atual da opção, R\$1.49, não valendo a pena.

Alternativamente, poderíamos também considerar que o dinheiro obtido com a venda das ações alugadas (proveniente de shorting) seria investido à mesma taxa livre de risco. Ou seja, se vendemos $\Delta$ ações a 100 no tempo $t$, ficamos com $100\Delta$ em dinheiro. Investimos este dinheiro a 1%, valendo $101\Delta$ no tempo $t + 1$:

- Valor em $t + 1$ se o preço da ação é 105 (lucro da opção, 3):

$$101\Delta - 105\Delta + 3$$

- Valor em $t + 1$ se o preço da ação é 95 (opção vale zero):

$$101\Delta - 95\Delta + 0$$

$$\begin{aligned} 101\Delta - 105\Delta + 3 &= 101\Delta - 95\Delta + 0 \\ \Delta &= 0.3 \end{aligned}$$

- O valor do portfolio em $t + 1$ nos dois casos:

$$\begin{aligned} 101\Delta - 105\Delta + 3 &= 1.8 \\ 101\Delta - 95\Delta &= 1.8 \end{aligned}$$

- O portfolio no tempo $t$ deve ser igual a:

$$\frac{1.8}{1 + 0.01} \approx 1.78$$

Neste caso a opção estaria bem barata e a compra valeria a pena.

**Questão 2** Considere uma roleta em um cassino que possui números de 1 a 30. Ao jogar nesta roleta, suponha que uma pessoa escolha um número ímpar e faça sua aposta. Se o crupiê girar a roleta e obtiver um número par, a pessoa perde todo o valor apostado. Se a bolinha parar em um número ímpar, mas diferente daquele escolhido, a pessoa perde metade do valor apostado. Caso a pessoa acerte o número sorteado, ela recebe 50 vezes o valor apostado. O mesmo raciocínio vale se a pessoa escolher um número par.

Suponha que esta pessoa possua um capital disponível $M$, seja viciada em jogos e possua todo o tempo do mundo, isto é, está disposta a apostar na roleta infinitamente.

a. Qual porcentagem ideal de $M$ que ela deve apostar de forma a maximizar o **retorno esperado** deste jogo? Qual é este retorno esperado?

b. O que vai acontecer na prática se ela apostar a proporção obtida acima?

c. Qual é aproximadamente a proporção de $M$ que deve ser apostada repetidamente de forma a maximizar os lucros obtidos?

Não é necessário resolver na letra (c) o problema de maximização, apenas achar um valor aproximado.

Resposta:

a. Seja $w$ a proporção de $M$ investida. O retorno esperado é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\text{Roleta}] &= \left(\frac{15}{30}(1-w) + \frac{14}{30}(1-\frac{w}{2}) + \frac{1}{30}(1+49w)\right) - 1 \\
&= \frac{15+14+1}{30} + w\left(\frac{49-15-7}{30}\right) - 1 \\
&= 0.9w = 90\%w
\end{aligned}$$

Com um retorno esperado desses, o ideal era investir $w = 100\%$.

b. Vai eventualmente perder tudo.

c. O cálculo da média geométrica é:

$$G_{\text{Roleta}} = (1-w)^{\frac{15}{30}} \times (1-\frac{w}{2})^{\frac{14}{30}} \times (1+49w)^{\frac{1}{30}} - 1$$

Variando $w$ entre 0 e 1 e calculando a média geométrica para todos os valores, obtemos o máximo de $G_{\text{Roleta}} = 0.817\%$ quando $w \approx 2.41\%$.

**Questão 3** Considere os preços diários de todos os ativos disponibilizados em 2020 e, separadamente, em 2019 (do primeiro dia de 2019 ao primeiro dia de 2020). Calcule os retornos de cada série e as correlações entre os retornos de cada ativo com o índice `IBOV` tanto em 2019 quanto em 2020.

a. Em 2019, qual é a correlação média? E a mínima?

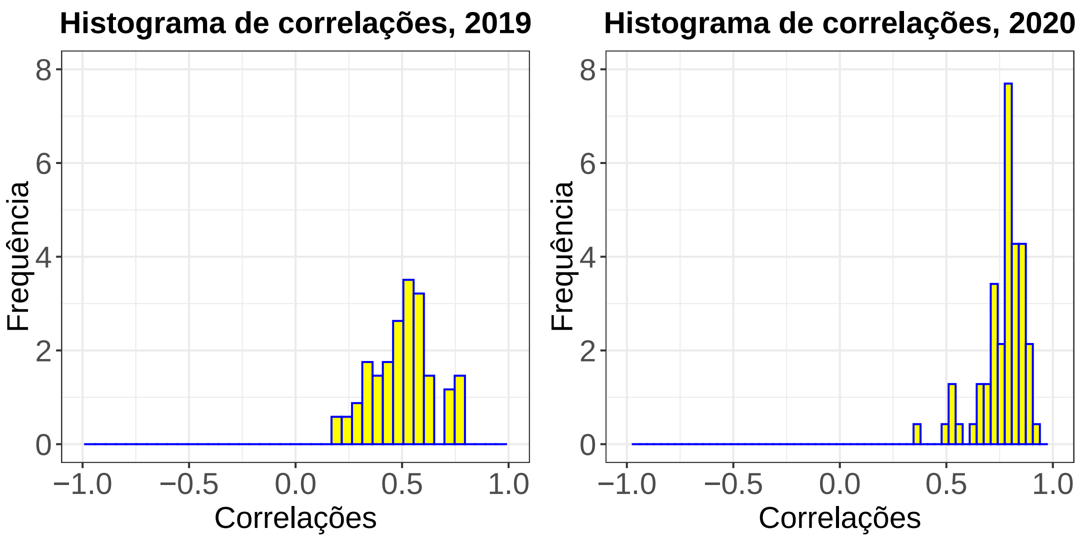
a. Em 2020, qual é a correlação média? E a mínima?

c. Plote dois histogramas com as correlações de todos os ativos com índice, um para 2019 e outro 2020. Ajuste o eixo X para mostrar de -1 a 1, e o eixo Y para que seja igual para os dois casos. Qual interpretação você tira dessa análise?

Para referência, a correlação entre os retornos do `IBOV` e `ITUB4` em 2019 (até o 1o dia de 2020) foi de 0.7412. O objetivo principal desta questão é se familiarizar com os dados fornecidos.

a. Mais correlacionado: `BOVA11`, 0.98950. Menos correlacionado: `BRKM5`, 0.16978. Média 0.50655

b. Mais correlacionado: `BOVA11`, 0.99248. Menos correlacionado: `SUZB3`, 0.35035. Média 0.76952




c.

Pelo gráfico e valores, podemos concluir que o `BOVA11` cumpre bem seu papel e que o ano de 2020 teve correlações muito maiores que o de 2019 (estas estão mais espalhadas). Isto pode ser explicado pelo momento de crise, que faz com que as notícias macroeconômicas e nacionais/globais afetem o mercado todo de forma mais uniforme.

Também podemos notar que não houve correlação negativa, o que sugere a presença do risco não-diversificável.

**Questão 4** A partir dos dados diários da Bovespa disponibilizados, obtenha os 250 retornos mais recentes (simbolizando mais ou menos 1 ano em dias úteis). Considere um portfolio igualmente distribuído nos ativos `BOVA11`, `PETR4`, `ABEV3`, `SUZB3` e `ITSA4`. Complete a tabela abaixo:

| Asset | Expected return | Std. deviation | Skewness | Kurtosis | VaR 5% |
|---|---|---|---|---|---|
| BOVA11 | | | | | |
| PETR4 | | | | | |
| ABEV3 | | | | | |
| SUZB3 | | | | | |
| ITSA4 | | | | | |
| Portfolio | | | | | |

Tanto faz usar o desvio padrão da amostra ou da população. Para o Value-at-Risk 5%, considere o caso não paramétrico. O VaR não paramétrico não supõe nenhuma distribuição para os retornos, apenas assume que os dados históricos representam uma distribuição discreta dos possíveis retornos futuros, todos com probabilidades iguais, e calcula o VaR a partir destes dados. Além da tabela, discuta alguns aspectos:

- Ao calcular o VaR você verá que a resposta não é tão óbvia. Explique como você definiu o valor a ser utilizado.
- O que os valores da curtose sugerem.
- Como o portfolio se compara com o ativos individuais em relação ao risco esperado.

**Dica:** Para ter 250 retornos, você precisa dos últimos 251 preços. Se ler os dados disponibilizados em `R` utilizando as instruções sugeridas, você pode obter os 251 preços mais recentes com o comando:

```
> n = nrow(prices);
> prices = prices[(n-250):n,];
```

| Asset | Expected return | Std. deviation | Skewness | Kurtosis | VaR 5% |
|---|---|---|---|---|---|
| BOVA11 | 0.00044 | 0.02692 | -1.05417 | 13.35100 | -0.03704 |
| PETR4 | 0.00058 | 0.04135 | -1.45044 | 19.36252 | -0.04029 |
| ABEV3 | -0.00127 | 0.02676 | -0.90962 | 10.39559 | -0.04185 |
| SUZB3 | 0.00229 | 0.03422 | -0.08418 | 7.75604 | -0.05196 |
| ITSA4 | -0.00019 | 0.02665 | -0.34514 | 5.86184 | -0.04579 |
| Portfolio | 0.00037 | 0.02461 | -1.65793 | 15.56293 | -0.02851 |

- O VaR seria a posição 12.5 do vetor, existem diversas formas de calcular o quantil. Ver função `quantile` do `R`.
- A curtose em todos os casos é bem maior que a da normal, o que sugere caudas pesadas.
- Possui VaR melhor e variância menor, sugerindo benefício da diversificação.