

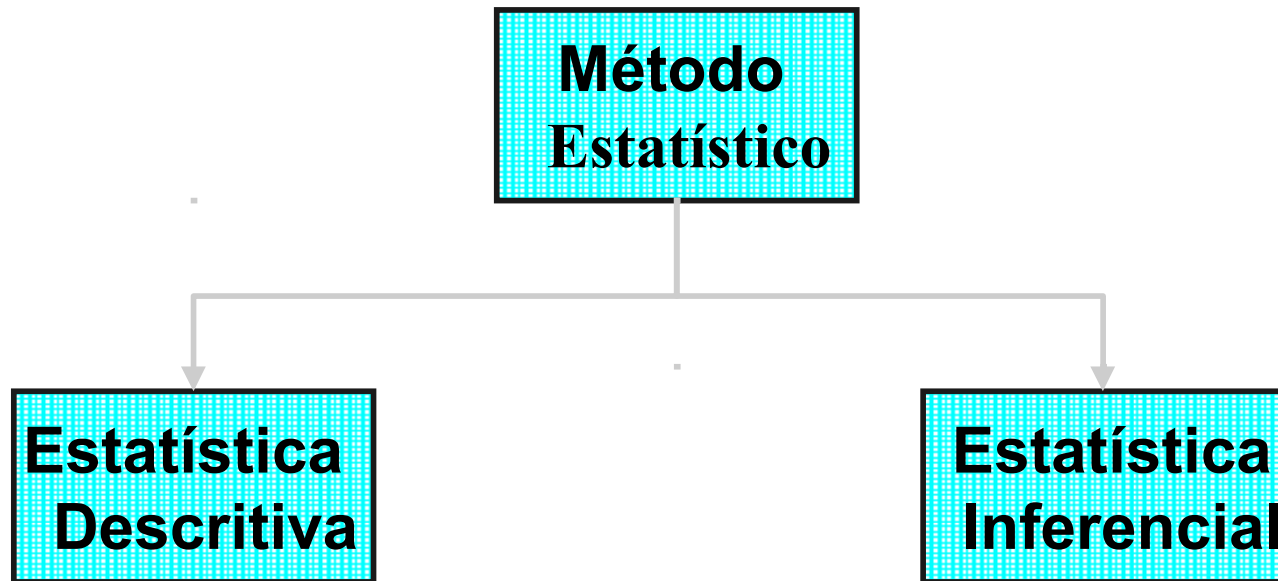
# Métodos Quantitativos para Ciência da Computação Experimental

**Jussara Almeida**  
**DCC-UFMG**  
**2017**

# Revisão de Probabilidade e Estatística

- **Concentrado em estatística aplicada**
- **Estatística apropriada para medições**
- **A aula vai focar em temas que já devem ser familiares a vocês.**

# Métodos Estadísticos



# **Estatística Descritiva**

- **Envolve**
  - **Coletar dados**
  - **Apresentar dados**
  - **Caracterizar dados**
- **Finalidade**
  - **Descrever dados**

# **Estatística Inferencial**

- **Envolve**
  - **Estimativas**
  - **Teste de hipótese**
- **Finalidade**
  - **Tomar decisões sobre características da população de uma coleta.**

# Terminologia Básica

**Experimento:** um processo cujo resultado não é determinado com certeza

**Espaço Amostral:**  $S = \{\text{todos possíveis resultados de um experimento}\}$

**Ponto da amostra:** um resultado (um membro do espaço amostral  $S$ )

**Ex:** uma moeda não viciada,  $S = \{H, T\}$ , onde H and T são resultados

**Variável aleatória:** uma função que atribui um número real a cada ponto do espaço amostral  $S$ .

**Exemplo:**  $X = 1$  se  $x=H$   
 $X = 0$  se  $x=T$

# Terminologia Básica

**Experimento:** um processo cujo resultado não é determinado com certeza

**Espaço Amostral:**  $S = \{\text{todos possíveis resultados de um experimento}\}$

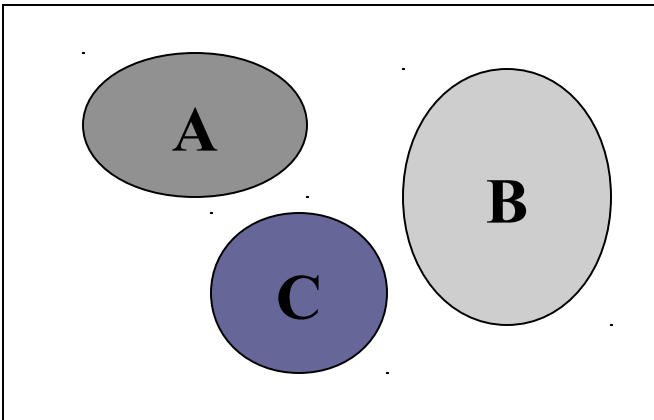
**Ponto da amostra:** um resultado (um membro do espaço amostral  $S$ )

**Exemplo:** uma moeda não viciada,  $S = \{H, T\}$ , onde H and T são resultados

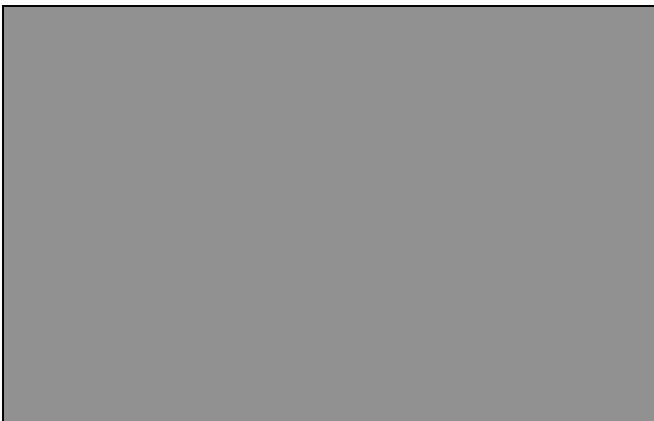
**Variável aleatória:** uma função que atribui um número real a cada ponto do espaço amostral  $S$ .

**Exemplo:**  $X = 1$  se  $x=H$   
 $X = 0$  se  $x=T$

# Algebra de Eventos



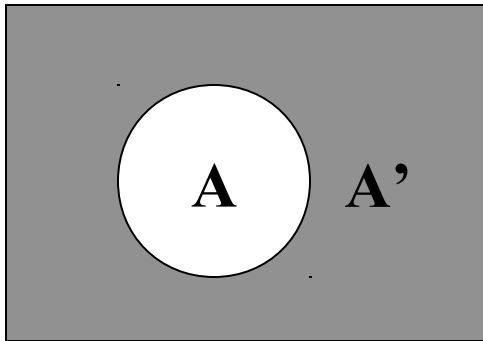
***Eventos*** são coleções de pontos ou áreas em um espaço.



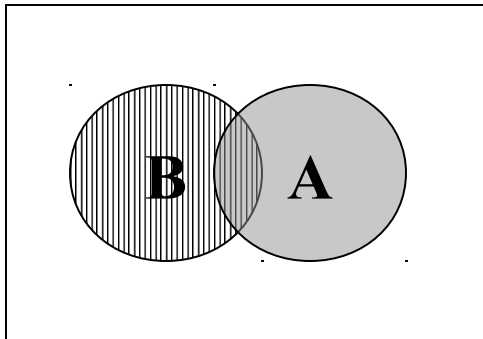
A coleção de todos os pontos num espaço inteiro é chamada de  $U$ , o conjunto universal.



# Algebra de Eventos

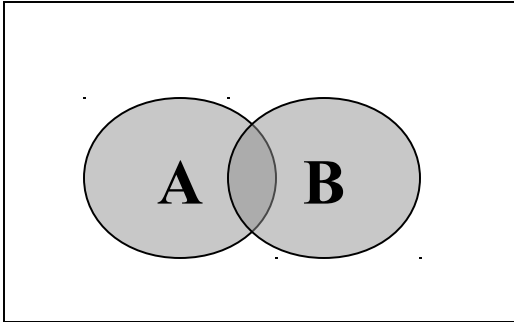


**Evento  $A'$ , o *complemento* do evento  $A$ , é a coleção de todos os pontos no conjunto universal que não estão incluídos em  $A$ .**



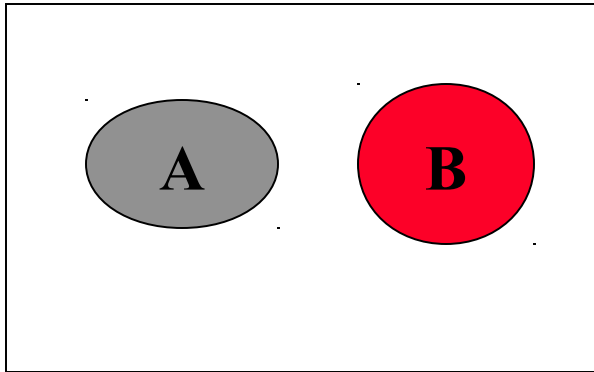
**A intersecção de dois eventos  $A$  e  $B$  é a coleção de todos os pontos que estão contidos em ambos  $A$  e  $B$ , denotados por  $A \cap B$  ou  $AB$**

# Algebra de Eventos

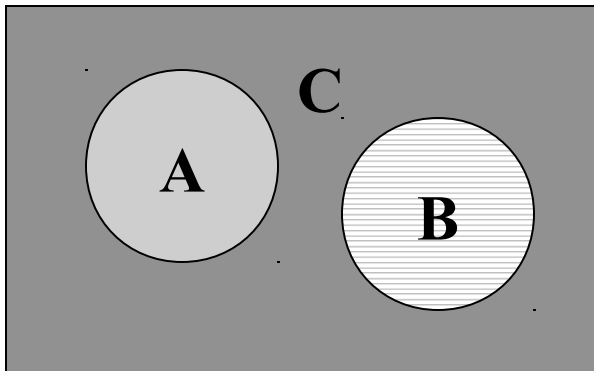


**A *união* de dois eventos A e B é a coleção de todos pontos que estão em A ou em B ou em ambos.**

# Mutuamente Exclusivos e Coletivamente Exhaustivo



**Conjuntos de eventos são mutuamente exclusivos se todos conjuntos dos eventos não tem interseção**



**Conjuntos de eventos coletivamente exhaustivos somam U**

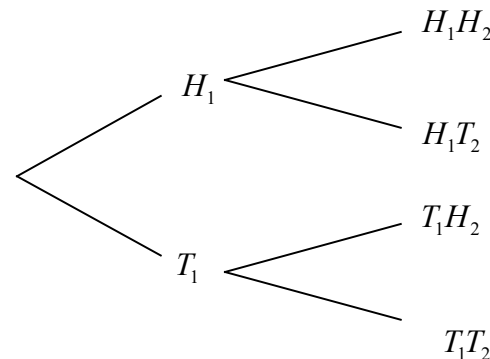
$$A + B + C = U$$

# Espaços Amostrais

**Espaço amostral: um conjunto mutuamente exclusivo e coletivamente exaustivo listando todos possíveis resultados de um experimento ou modelo.**

## Espaço Amostral

**Evento**  $\left\{ \begin{matrix} H_n \\ T_n \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} Heads \\ Tails \end{matrix} \right\}$  na  $n$ -ésima jogada de uma moeda.



$H_1H_2$  é o evento de grão fino para duas jogadas

$H_1$  é o evento de grão grosso para duas jogadas

# Exercicio de Probabilidade

- Uma serie de  $n$  jobs chega a um multiprocessador com  $n$  processadores.

Quantos vetores de atribuicao :

(processador para job 1, ..., processador para job  $n$ )

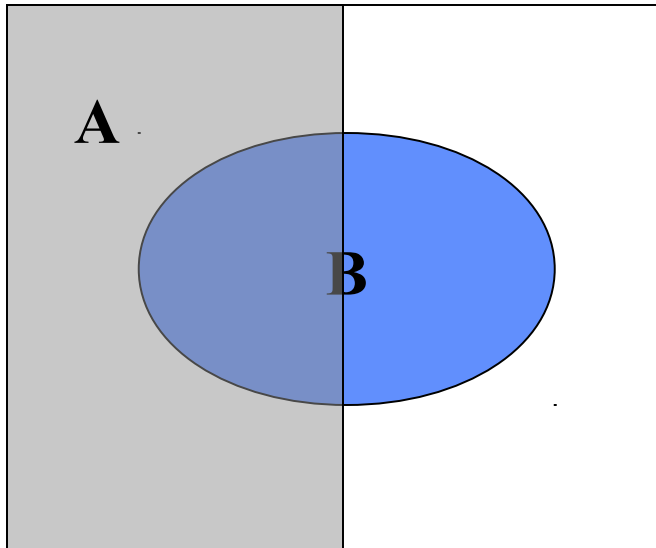
são possíveis?

# Três Axiomas da Medida de Probabilidade

- Para qualquer evento  $A$ ,  $P(A) \geq 0$
- $P(U) = 1$  (Normalização)
- Se  $AB = \phi$ , então  $P(A+B) = P(A) + P(B)$

A partir desses axiomas pode-se determinar a medida de probabilidade de um evento  $E$  simplesmente somando todas as medidas dos eventos de grão mais fino que formam  $E$ .

# Probabilidade condicional: visão intuitiva



$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

# Probabilidades

- Técnicas de contagem
- Permutações
- Combinações
- Probabilidade
- Expectância matemática



# Probabilidade

Se existem **n** igualmente prováveis resultados (eventos) e **s** são favoráveis (“sucesso”) então a probabilidade de um sucesso é :  $\frac{s}{n}$

Exemplo: a probabilidade de obter “cara” para uma jogada da moeda é:  $n = 2, s = 1$

$$\text{então } P(\text{“cara”}) = 1/2$$

$$P(\text{“coroa”}) = 1/2$$

$$\text{Obs: } P(\text{“cara”}) + P(\text{“coroa”}) = 1/2 + 1/2 = 1$$

# Exemplos

**Determine a probabilidade de que 2 cartas retiradas de um baralho de 52 cartas sejam ambas pretas.**

# Exemplos

Determine a probabilidade de que 2 cartas retiradas de um baralho de 52 cartas sejam ambas pretas.

O número total de possibilidades :

$$n = \binom{52}{2} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$$

Número total de possibilidades favoráveis (“sucessos”):

$$s = \binom{26}{2} = \frac{26 \cdot 25}{2} = 325$$

**Probabilidade é:**  $P = s/n = 325 / 1326 = 0.245$

# Exercícios em Aula

1. Se um número decimal de até três dígitos é escolhido aleatoriamente, determine a probabilidade que exatamente  $k$  dígitos são  $\geq 7$ , para  $0 \leq k \leq 3$
2. Considere uma caixa com 15 chips VLSI, sendo 5 deles defeituosos. Se uma amostra aleatória de 3 chips é retirada da caixa, qual a probabilidade de todos os três terem defeitos?

# Exercicio de Probabilidade

- Uma serie de  $n$  jobs chega a um multiprocessador com  $n$  processadores.

Assuma que cada um dos  $n^n$  possiveis vetores de atribuicao (i.e., processador para job 1, ..., processador para job  $n$ ) são igualmente provaveis.

Encontre a probabilidade de que exatamente um processador nao seja assinalado a nenhum job. Para efeitos de exemplo, considere  $n = 3$  e calcule, mas mostre a forma geral para  $n$ .

# Exercicio de Probabilidade

- Uma serie de  $n$  jobs chega a um multiprocessador com  $n$  processadores.

Assuma que cada um dos  $n^n$  possiveis vetores de atribuicao (i.e., processador para job 1, ..., processador para job  $n$ ) são igualmente provaveis.

Encontre a probabilidade de que exatamente um processador nao seja assinalado a nenhum job. Para efeitos de exemplo, considere  $n = 3$  e calcule, mas mostre a forma geral para  $n$ .

Solucao: Espaco amostral ( $S$ ), onde  $i_j$  representa o processador para o qual o job  $j$  e assinalado. Vamos chamar a solucao de  $P$  (*evento processador ocioso*)

$$S = \{ (i_1, i_2, \dots, i_n) \mid i_j \in \{1, 2, \dots, n\} \}$$

$$|S| = n^n$$

# Exercicio de Probabilidade

**Primeiro, vamos calcular a probabilidade que somente o processador '1' esteja ocioso, denominando este evento de  $A_1$**

***Seja  $B_j$  = processador  $j$  tem 2 jobs,  $2 \leq j \leq n$***

**$B_j = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) \mid i_k \in \{2, 3, \dots, n\} \text{ e}$**

**existe  $k_1 \neq k_2$  tal que  $i_{k_1} = i_{k_2} = j$ ; e  $i_{j_1} \neq i_{j_2}$ , caso contrário**

$$A_1 = \bigcup_{(j=2..n)} B_j$$

# Exercicio de Probabilidade

$$P(B_i) = \frac{\binom{n}{2}}{n}$$

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



# Eventos Independentes

- **Ocorrência de um evento não afeta a probabilidade do outro.**
- **Exemplos:**
  - **Jogar moedas**
  - **“dados de entrada” de usuários separados**
  - **Acidentes de trânsito “não relacionados”**

# Probabilidade Condicional

- A probabilidade condicional do evento  $A$  dado que o evento  $B$  ocorreu, denotada por  $P(A|B)$ , e definida como:

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

# Regra de Bayes e Teorema da Probabilidade Total

- **Prob. Total:** Sejam  $A_1, \dots, A_k$  uma particao do espaco  $S$  e  $B$  um evento qualquer de  $S$ , entao:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) * P(B|A_i)$$

- **Regra de Bayes:** Sejam os eventos  $A_1, \dots, A_k$  uma particao do espaco  $S$  tal que  $P(A_j) > 0$ , para todo  $j$ , e seja  $B$  um evento tal que  $P(B) > 0$ . Entao, para  $i = 1, \dots, k$ :

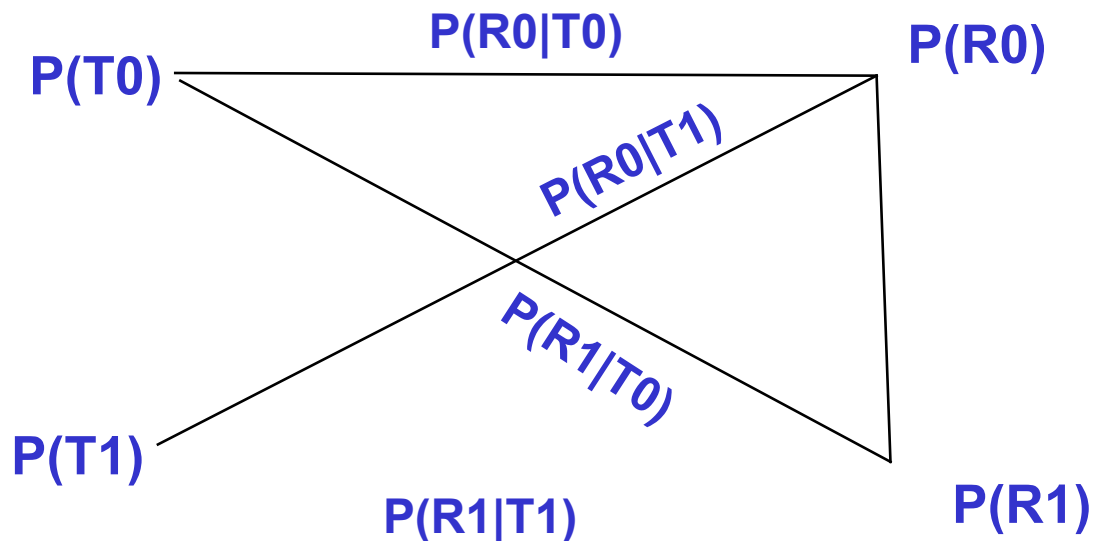
$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum P(A_k)P(B|A_k)}$$

# Exercicio

- Um canal de comunicação transporta dois tipos de sinais, denotados por 0 e 1. Devido ao ruído, um 0 transmitido e recebido como 1 e 1 como 0. Para um dado canal, assuma a probabilidade de 0.94 que um 0 transmitido seja corretamente recebido como 0 e a probabilidade de 0.91 que um 1 seja recebido como 1. Assuma também a probabilidade 0.45 de transmitir um 0. Determine:
  - Probabilidade que um 1 seja recebido
  - Probabilidade que um 0 seja recebido
  - Probabilidade que um 1 foi transmitido dado que um 1 foi recebido
  - Probabilidade que um 0 foi transmitido dado que um 0 foi recebido
  - Probabilidade de um erro

# Solução

- Definição de eventos:
  - $T_0$  = um 0 é transmitido
  - $R_0$  = um 0 é recebido
  - $T_1 = \bar{T}_0$  um 1 é transmitido
  - $R_1 = \bar{R}_0$  um 1 é recebido



# Perguntas

1. Probabilidade que um 1 é recebido
2. Probabilidade que um 0 é recebido
3. Probabilidade que um 1 foi transmitido dado que um 1 foi recebido
4. Probabilidade que um 0 foi transmitido dado que um 0 foi recebido
5. Probabilidade de um erro.

Sabe-se que:

$$P(R0 | T0) = 0.94 \Rightarrow P(R1 | T0) = 1 - P(R0 | T0) = 0.06$$

$$P(R1 | T1) = 0.91 \Rightarrow P(R0 | T1) = 1 - P(R1 | T1) = 0.09$$

$$P(T0) = 0.45 \Rightarrow P(T1) = 1 - P(T0) = 0.55$$

# Solução

$$P(R1) = P(T0)P(R1|T0) + P(T1)P(R1|T1)$$

$$0.45 * 0.06 + 0.55 * 0.91 = 0.5275$$

$$P(R0) = P(\bar{R}1) = 1 - 0.5275 = 0.4725$$

$$\begin{aligned} P(T1|R1) &= \frac{P(R1|T1)P(T1)}{P(T0)P(R1|T0) + P(T1)P(R1|T1)} \\ &= \frac{P(R1|T1)P(T1)}{P(R1)} = \frac{0.55 * 0.91}{0.5275} = 0.9488 \end{aligned}$$

$$P(T0|R0) = \frac{P(R0|T0)P(T0)}{P(R0)} = \frac{0.94 * 0.45}{0.4725} = 0.8952$$

## Solução

$$\begin{aligned}P(\textit{erro}) &= P(T\ 1 \cap R\ 0) + P(T\ 0 \cap R\ 1) \\&= P(T\ 1 | R\ 0) P(R\ 0) + P(T\ 0 | R\ 1) P(R\ 1) \\&= (1 - P(T\ 0 | R\ 0)) P(R\ 0) + (1 - P(T\ 1 | R\ 1)) P(R\ 1) \\&= (1 - 0.8952) 0.4725 + (1 - 0.9488) 0.5275 = .0765\end{aligned}$$