Prova 3

Teoria dos Jogos em Computação

Professor: Pedro O.S. Vaz de Melo

03 de dezembro de 2019

Nome: $\underbrace{\hspace{10cm}}_{\text{escrevendo o meu nome eu juro que seguirei o código de honra}}$

Código de Honra para este exame:

- Não darei ajuda a outros colegas durante os exames, nem lhes pedirei ajuda;
- não copiarei nem deixarei que um colega copie de mim.

1. (*10 points*) Dois jogadores **neutros ao risco**, P_1 e P_2, estão disputando (repetidamente) o seguinte jogo de cartas $\in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ valendo dinheiro. O jogo começa com a carta 3 virada para todos. Depois, o jogador P_1 retira às aleatoriamente (50% de chances para cada) e às cegas uma carta c_1 de duas possíveis: 1 e 5. Até o fim do jogo, essa carta fica escondida de todos os jogadores. O jogador P_2, por sua vez, retira uma carta c_2 aleatoriamente (50% de chances para cada) de duas possíveis: 2 e 4. Sem mostrá-la para P_1, P_2 observa a carta e escolhe se prossegue ou não no jogo. Se decidir por *sair*, ambos jogadores recebem \$0. Se P_2 *continuar*, P_1 decide, ainda sem ver o conteúdo da carta, se fica com a sua carta c_1 ou se a troca pela carta 3, que é de conhecimento de todos. Caso P_1 decida por não trocar, c_1 é finalmente exibida para todos. Por fim, as cartas de P_1 e P_2 são comparadas. O jogador com a carta de maior valor recebe \$1 daquele com a carta de menor valor.

a. (*5 pts*) Modele este jogo na forma extensiva. Desenhe a árvore deste jogo indicando, pelo menos, os jogadores responsáveis pelas ações em cada nó, as ações, os *information sets* e os *payoffs* dos nós-folha.

b. (*5 pts*) Compute e encontre pelo menos um equilíbrio de Nash Bayesiano de estratégias puras para este jogo. **Dica:** Use o conceito de utilidade esperada.

2. (*10 points*) Duas empresas competidoras, E_1, uma empresa maior, e E_2, uma empresa menor, jogam o seguinte jogo repetido infinito em que todas as jogadas anteriores são observadas, e cada jogador tenta maximizar a soma dos seus lucros. A cada estágio t, simultaneamente, cada firma i seleciona o preço $p_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ do seu produto. Se $p_1 = p_2$, então cada firma vende uma unidade do produto e tem lucro $p_1 = p_2$. Caso contrário, se $p_i < p_j$, a empresa de menor preço vende duas unidades, lucrando $2 \times p_i$, e a de maior preço não vende nenhuma, lucrando 0. O fator de desconto da empresa E_1 é $\beta_1 = 0.4$ e da empresa E_2 é $\beta_2 = 0.8$. Considere que produzir produtos não custa nada para as empresas.
Dica: para $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}$$

a. (*2 pts*) Encontre um *subgame perfect equilibrium* (SPE) que dá à empresa E_1 um lucro médio (por estágio) de pelo menos 6.

b. (*8 pts*) Prove que o perfil de estratégia que você construiu é de fato um SPE.

3. (*10 points*) Considere o jogo na forma normal abaixo.

$$\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{P_2} \\
 & & y_1 & y_2 \\
\cline{3-4}
 & x_1 & 2,1 & 0,2 \\
\cline{3-4}
P_1 & x_2 & 1,4 & 1,0 \\
\cline{3-4}
 & x_3 & 0,1 & 4,0 \\
\cline{3-4}
\end{array}$$

a. (*2 pts*) Escreva o sistema de equações do algoritmo Lemke Howson.

b. (*4 pts*) Execute o algoritmo Lemke Howson até encontrar um Equilíbrio de Nash. Inicie colocando x_1 na base.

c. (*4 pts*) Qual é o Equilíbrio de Nash encontrado?