Lista 1 - Teoria dos Jogos em Computação

Professor: Pedro Olmo Stancioli Vaz de Melo

Aluno: João Vítor Fernandes Dias; **Matrícula:** 2024711370

Utility (1, 2, 3, 4, 5)

1. Give an example of preferences over a countable set in which the preferences cannot be represented by a utility function that returns only integers as values

Resposta 1

Considerando o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, que são contáveis. Se formos tentar comparar dois números racionais q_1 e q_2, podemos ter $q_1 \succ q_2$ se $q_1 > q_2$. E se, tentarmos usar uma função de utilidade $u : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$, teríamos que $u(q_1) > u(q_2)$, o que não é possível, isso porque como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, logo não existe uma função de utilidade que possa mapear todos os números racionais em números inteiros, já que existem infinitos números racionais entre dois números inteiros. Portanto, não é possível representar as preferências sobre um conjunto contável com uma função de utilidade que retorna apenas valores inteiros.

---

2. A farmer wants to dig a well in a square field. The preferences of the farmer on the possible locations are lexicographic

> i.e:
>
> - If $x_1 < x_2$ then $(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2)$ for all y_1, y_2.
> - If $x_1 = x_2 = x$, then $(x, y_1) \succ (x, y_2)$ iff $y_1 < y_2$.
> - First, assume that the field has dimensions $[0, 1000] \times [0, 1000]$ and construct a linear utility function that represents this relation. Second, construct a utility function assuming that

> the field has dimensions $[0, \infty) \times [0, \infty)$. For both cases, assume that the well location must have integer coordinates.

Resposta 2

Resposta: Queremos uma função de utilidade que represente que, quanto menor os valores de X e Y, melhor a localização do poço. Além disso, tem-se por primeira ordem de desempate o valor de X e, por segunda ordem de desempate, o valor de Y.

Intuitivamente, podemos considerar que para determinado X, mesmo com o maior valor de Y, sua função de utilidade será sempre menor que a de um $X + 1$ e Y mínimo. Matematicamente: $u(X, \max(Y)) < u(X + 1, \min(Y))$.

Precisamos então que X seja multiplicado por um valor tal que garanta a veracidade de nossa intuição, para tanto, consideremos que: $u(X, Y) = -\alpha X - Y$, onde $\alpha > \max(Y)$.

Parte 1: Para o caso das dimensões $[0, 1000] \times [0, 1000]$, podemos consideramos então que $\max(Y) = 1000$ e, portanto, se $\alpha > 1000$, podemos considerar o menor valor natural de $\alpha = 1001$. Sendo assim, temos que a função de utilidade é dada por: $u(X, Y) = -1001X - Y$.

X	Y	$u(X, Y)$
0	0	0
0	1	-1
0	1000	-1000
1	0	-1001
1	1000	-2001
2	0	-2002
999	1000	-1000999
1000	0	-1001000
1000	1000	-1002000

Essa equação poderia ser modificada de duas formas:

1. Poderia-se limitar o valor de retorno aos números naturais.
2. Poderia-se definir uma função de utilidade que retornasse valores entre 0 e 1.

Mas deixemos assim mesmo.

Parte 2: Agora, para o caso das dimensões $[0, \infty) \times [0, \infty)$, podemos considerar que $\max(Y) = \infty$ e, portanto, se $\alpha > \infty$... Bom, $\infty + 1 = \infty$, e uma função de utilidade $u(X, Y) = -\infty X - Y$ acaba não sendo condizente. Sendo assim, não é possível definir uma função de utilidade que represente essa relação.

Outra análise mais conceitual a se fazer é que essa função de utilidade é chamada de função de utilidade lexicográfica, e ela apenas é válida para conjuntos finitos.

---

3. Is the statement "if both U and V represent $\succsim$, then there is a strictly monotonic function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $V(x) = f(U(x))$" correct?

> - **Tip:** consider $V(x) = x$ and $U(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0 \\ x+1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Resposta 3

Consideramos então que temos U e V como funções de utilidade que representam a mesma relação de preferência $\succsim$. Para confirmar a afirmação, precisamos mostrar que existe uma função estritamente monótona (ou seja, que sempre cresça ou decresça) f que converta os valores de U em valores de V.

Seguindo a sugestão dada, consideremos as funções U e V que têm a mesma relação de preferência $\succsim$:

$$U(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0 \\ x+1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$V(x) = x$$

Poderíamos então alterar a função U para representar a função V:

$$U(x) = \begin{cases} V(x), & \text{se } x \leq 0 \\ V(x)+1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Então, os únicos casos em que U se diferencia de V são quando $x > 0$. Para esses casos, podemos definir a função f como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0 \\ x - 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Então, aplicando a função f em U', temos:

$$f(U(x)) = \begin{cases} f(V(x)), & \text{se } x \leq 0 \\ f(V(x) + 1), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(U(x)) = \begin{cases} V(x), & \text{se } x \leq 0 \\ (V(x) + 1) - 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(U(x)) = \begin{cases} V(x), & \text{se } x \leq 0 \\ V(x), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(U(x)) = V(x)$$

Porém, percebe-se que, $f(x)$ não é uma função estritamente monótona, isso no intervalo $[0, 1]$, visto que $f(0) = f(1) = 0$.

Concluimos então que, a afirmação não é verdadeira, visto que para que a $f(U(x))$ conseguisse se igualar a $V(x)$, a função f precisaria ser não estritamente monótona.

---

4. Can a continuous preference relation be represented by a discontinuous utility function?

Resposta 4

Sim. A função de utilidade U apresentada na questão anterior exemplifica exatamente esse fato. Embora ela seja descontínua em $x = 0$, ela ainda representa uma relação de preferência contínua.

---

5. Show that in the case of $X = \mathbb{R}$, the preference relation that is represented by the discontinuous utility function $u(x) = floor(x)$ is not a continuous relation

> $floor(x)$: the largest integer n such that $x \geq n$

Resposta 5

Para que uma relação seja contínua, ela deve satisfazer a propriedade de que, se $x \succ y$, então existe uma vizinhança V_x e V_y tal que $\forall_{x' \in V_x} \forall_{y' \in V_y} : x' \succ y'$.

Outra forma de interpretar isso é que, se obtivermos um conjunto das utilidades $U(x')$ e $U(y')$, mesmo a menor das utilidades de X' ainda será maior que a maior das utilidades de Y'. Ou seja, $u(\min(X')) > u(\max(Y'))$.

Outro detalhe a se considerar é que a vizinhança V_x e V_y devem incluir mais elementos do que apenas x e y, ou seja, $\{x\} \nsubseteq V_x$ e $\{y\} \nsubseteq V_y$.

Sabendo disso, consideremos inicialmente que $x = 10$ e $y = 1$, podemos dizer que há uma vizinhança definida de forma $V_j = (j - 1, j + 1)$, tal que $V_x = (9, 11)$ e $V_y = (0, 2)$. E que $u(\min(V_x)) > u(\max(V_y))$.

Porém, se na função de vizinhança substituirmos o valor de 1 por ϵ: $V_j = (j - \epsilon, j + \epsilon)$, deve sempre haver algum valor de $\epsilon > 0$, tal que $u(\min(V_x)) > u(\max(V_y))$.

E se fizermos com que x se aproxime de y, ou seja que $x - y$ se aproxime de 0, como por exemplo com $x = 2$ e $y = 1$, temos que $V_x = (2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$ e $V_y = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$.

Então, precisamos que $u(\min(V_x)) > u(\max(V_y))$, ou seja, $floor(2 - \epsilon + \phi) > floor(1 + \epsilon - \phi)$. **Obs.:** ϕ é um valor infinitesimal para considerar a abertura do intervalo. Considere também que $\phi < \epsilon$.

Porém, não existe um valor de ϵ que satisfaça essa condição, visto que $floor(2 - \epsilon + \phi) = 1$ e $floor(1 + \epsilon - \phi) = 1$. Assim, não satisfazendo a definição de continuidade.

Choice (6, 7)

6. The following are descriptions of decision-making procedures. Discuss whether the procedures can be described in the framework of the choice model discussed in this course and whether they are compatible with the "rational man" paradigm. In other words, can I construct a utility function $u(x)$ based solely on the set of alternatives $x \in X$ according with these procedures? Explain why (e.g. with an example)

Para essa questão, consideremos que $C_{\succsim}(A)$ representa a função que encontra o melhor dos elementos possíveis pertencentes ao conjunto $A = \{u(x) | x \in X\}$.

6.1. The decision maker chooses an alternative in order to maximize another person’s suffering

Resposta 6.1

Sim, é compatível. Isso pois sua função de utilidade pode ser representada como $u(x) = -v(x)$, onde $v(x)$ é a função de utilidade do outro indivíduo, ou seja, quanto menor for $v(x)$, maior seria o sofrimento. Assim, o agente racional irá escolher a alternativa que maximiza a função de utilidade negativa do outro indivíduo.

6.2. The decision maker asks his two children to rank the alternatives and then chooses the alternative that is the best on average (you can use your own definition of "best on average")

Resposta 6.2

Sim, é compatível. Isso pois visa maximizar a média das funções de utilidade dos filhos. A função de utilidade do agente racional pode ser representada como $u(x) = \frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}$, onde $v_1(x)$ e $v_2(x)$ são as funções de utilidade dos filhos.

6.3. The decision maker has an ideal point in mind and chooses the alternative that is closest to it

Resposta 6.3

Sim, é compatível. Isso porque a função de utilidade do agente racional pode ser representada como $u(x) = -d(x, x')$, onde $d(x, x')$ é a distância entre o ponto ideal x' e o ponto x. Assim, o agente racional irá escolher a alternativa que minimiza a distância entre o ponto ideal e o ponto escolhido.

6.4. The decision maker looks for the alternative that appears most often in a list of alternatives

Resposta 6.4

Não é compatível. Isso porque a função de utilidade do agente depende de outra variável, sendo esse o conjunto de alternativas.

6.5. The decision maker has an ordering in mind and always chooses the median element

Resposta 6.5

Não é compatível. Isso porque a função de utilidade do agente depende de outra variável, sendo esse o conjunto dos valores ordenados.

7. Consider the following choice procedure: a decision maker has a strict ordering $\succsim$ over the set X and assigns to each $x \in X$ a natural number $class(x)$ to be interpreted as the "class" of x. Given a choice problem A, he chooses the best element in A from those belonging to the most common class in A (i.e., the class that appears in A most often). If there is more than one most common class, he picks the best element from the members of A that belong to a most common class

Entendendo o enunciado: temos um conjunto ordenado por preferência onde cada um dos elementos está arbitrariamente definido como pertencente a uma classe. Considera-se que a classe de menor número é a preferível. O seu critério para escolha de "melhor" elemento é pegar o melhor elemento da classe preferível, e em caso de empate, pegar o melhor elemento dentre as classes empatadas.

7.1 Is this procedure consistent with the "rational man" paradigm?

Resposta 7.1

Não. Isso porque a escolha do agente racional não depende apenas da classe, mas sim de que forma o conjunto de escolhas está definido. Então se tivermos $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $class(x_1) =$

$class(x_2) = 1, class(x_3) = class(x_4) = 2$, então $C(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1$, mas se $C(x_1, x_3, x_4) = x_3$. Assim violando a condição α que afirma que para dos conjuntos $A, B \in D$, se $A \subset B$ e $C(B) = A$, então $C(A) = C(B)$.

7.2 Define the relation: xPy if x is chosen from $\{x, y\}$. Show that the relation P is a strict ordering (complete, asymmetric, and transitive)

- **Completo:** Para todo $x, y \in X$, temos que xPy ou yPx.
- **Assimétrico:** Para todo $x, y \in X$, temos que se xPy então não é verdade que yPx.
- **Transitivo:** Para todo $x, y, z \in X$, temos que se xPy e yPz, então xPz.

Se todos os três critérios forem satisfeitos, então a relação P é uma ordem estrita.

Expected Utility (8, 9, 10)

8. Which lottery do you prefer?

> - $L = (0.25z_1, 0.25z_2, 0.25z_3, 0.25z_4)$ OR
> - $L' = (0.15z_1, 0.50z_2, 0.15z_3, 0.20z_4)$
>
> Suppose, by continuity: $z_2 \sim z_2' = (0.6z_1, 0.4z_4)$ and $z_3 \sim z_3' = (0.2z_1, 0.8z_4)$

Resposta 8

Nessa questão de continuidade, seria o mesmo que considerarmos que o prêmio de z_2 e z_2' têm o mesmo valor esperado que uma loteria $(0.6z_1, 0.4z_4)$ e z_3 e z_3' têm o mesmo valor esperado que uma loteria $(0.2z_1, 0.8z_4)$. Então, para simplificar, podemos substituir esses dois pares por suas respectivas loterias equivalentes com o intuito de reduzir o número de variáveis.

Consideremos que os prêmios (z_1, z_2, z_3, z_4) seguem a seguinte ordem de preferência: $z_1 \succ z_2 \succ z_3 \succ z_4$.

- Equivalência de loterias $L \sim L^{\sim}$.
  - **Cálculos:**
    - $L^{\sim} =$
      - $(0.25z_1, 0.25(0.6z_1 + 0.4z_4), 0.25(0.2z_1 + 0.8z_4), 0.25z_4)$
      - $(0.25z_1, 0.15z_1 + 0.10z_4, 0.05z_1 + 0.20z_4, 0.25z_4)$
      - $(0.25z_1 + 0.15z_1 + 0.05z_1, 0.10z_4 + 0.20z_4 + 0.25z_4)$

        - $(0.45z_1, 0.55z_4)$
      - $L'^{\sim} =$
        - $(0.15z_1, 0.50(0.6z_1 + 0.4z_4), 0.15(0.2z_1 + 0.8z_4), 0.20z_4)$
        - $(0.15z_1, 0.30z_1 + 0.20z_4, 0.03z_1 + 0.12z_4, 0.20z_4)$
        - $(0.15z_1 + 0.30z_1 + 0.03z_1, 0.20z_4 + 0.20z_4 + 0.12z_4)$
        - $(0.48z_1, 0.52z_4)$
- **Critério:** Utilidade esperada: $U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(z_i)$
  - **Cálculos:**
    - $U(L^{\sim}) = 0.45u(z_1) + 0.55u(z_4)$
    - $U(L'^{\sim}) = 0.48u(z_1) + 0.52u(z_4)$
  - **Resultado:**
    - $\begin{cases} L^{\sim} \succ L'^{\sim} & \text{if } U(L^{\sim}) > U(L'^{\sim}) \\ L'^{\sim} \succ L^{\sim} & \text{if } U(L^{\sim}) < U(L'^{\sim}) \\ L^{\sim} \sim L'^{\sim} & \text{if } U(L^{\sim}) = U(L'^{\sim}) \end{cases}$
- **Critério:** preferência pelo mais provável: $L \succ L' \rightarrow \max_z L(z) > \max_z L'(z)$
  - **Cálculos:**
    - $\begin{cases} L \succ L' & \text{if } \max_z L(z) > \max_z L'(z) \\ L' \succ L & \text{if } \max_z L(z) < \max_z L'(z) \\ L \sim L' & \text{if } \max_z L(z) = \max_z L'(z) \end{cases}$
    - $\max_z L(z) > \max_z L'(z)$
      - $z_1 > z_2 : verdadeiro$
      - **Explicação:** o mais provável de L é preferível ao mais provável de L'.
      - **Resultado:** $L \succ L'$.
    - $\max_z L^{\sim}(z) > \max_z L'^{\sim}(z)$
      - $z_4 > z_4 : falso$
      - **Explicação:** o mais provável de $L^{\sim}$ é tão preferível quanto o mais provável de $L'^{\sim}$.
      - **Resultado:** Como os mais prováveis de $L^{\sim}$ e $L'^{\sim}$ são equivalentes, podemos considerar que $L^{\sim} \sim L'^{\sim}$. Ou, se considerarmos que $p(L^{\sim}(\max_z L^{\sim}(z))) > p(L'^{\sim}(\max_z L'^{\sim}(z)))$, podemos considerar que $L^{\sim} \succ L'^{\sim}$.

---

9. T or F. Justify or give a counterexample

9.1 A lottery p is preferred to q because the expected utility $U(p)$ is greater than the expected utility $U(q)$

Resposta 9.1

Verdadeiro. A utilidade esperada é uma das medidas de preferências que pode ser utilizada para comparar loterias. Então, nesse contexto, considerando que deseja-se obter a loteria de maior utilidade esperada, podemos afirmar que $U(p) > U(q)$ implica que $p \succ q$.

9.2 Suppose that $A \succ B \succ C \succ D$ and that the vNM utilities of these prizes satisfy $v(A) + v(D) = v(B) + v(C)$, then $(\frac{1}{2}B, \frac{1}{2}C)$ should be preferred to $(\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}D)$ because, although they have the same expected utility, the former has the smaller utility variance

Resposta 9.2

Falso. Isso porque, partindo da premissa que o somatório dos valores apresentado se mantém o mesmo, podemos o que deve ser considerado são seus valores de utilidade dados pela função v. Logo, não devendo haver alteração na relação de preferência em caso de se alterar os valores iniciais.

Contraexemplo: $A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, v(X) = 3x + 1$

Valor	$v(X)$	$v(X/2)$
$A = 8$	$3 \cdot 8 + 1 = 25$	$3 \cdot 8/2 + 1 = 13$
$B = 6$	$3 \cdot 6 + 1 = 19$	$3 \cdot 6/2 + 1 = 10$
$C = 4$	$3 \cdot 4 + 1 = 13$	$3 \cdot 4/2 + 1 = 7$
$D = 2$	$3 \cdot 2 + 1 = 7$	$3 \cdot 2/2 + 1 = 4$

- Confirmando a soma: $v(A) + v(D) = 25 + 7 = 32$ e $v(B) + v(C) = 19 + 13 = 32$
- Confirmando a preferência: $A \succ B \succ C \succ D : 25 > 19 > 13 > 7$

Agora confirmemos para $X/2$:

- Confirmando a soma: $v(\frac{1}{2}A) + v(\frac{1}{2}D) = 13 + 4 = 17$ e $v(\frac{1}{2}B) + v(\frac{1}{2}C) = 10 + 7 = 17$
- Confirmando a preferência: $A \succ B \succ C \succ D : 13 > 10 > 7 > 4$

9.3 Suppose that $A \succ B \succ C \succ D$ and that the vNM utility function has the property that $v(A) - v(B) \succ v(C) - v(D)$, then the change from B to A is more preferred than the change from D to C

Resposta 9.3

Verdadeiro. Isso porque, se considerarmos uma relação de preferência tal que $A \succ B$ se $v(A) > v(B)$. E então consideramos que $v(A) - v(B) \succ v(C) - v(D)$, então, entende-se que a variação de utilidade de B para A é maior do que a variação de utilidade de D para C, assim, sendo preferível a mudança de B para A do que a mudança de D para C.

---

10. Verify whether each of the following preference relations over lotteries satisfy (or not) von Neumann and Morgenstern axioms (I and C). Consult the book "Lecture Notes in Microeconomic Theory" by Ariel Rubinstein, Pages 95 and 96, for more details

10.1. The worst case (the decision maker evaluates lotteries by the worst possible case)

- Definindo os axiomas:
  - **Independência:** Para quaiquer 3 loterias L_1, L_2, L_3, se $L_1 \succ L_2$ e $\alpha \in (0,1)$. Temos que $L_1 \succsim L_2 \iff \alpha L_1 \oplus (1-\alpha) L_3 \succsim \alpha L_2 \oplus (1-\alpha) L_3$
    - **Intuição:** Se L_1 é preferível a L_2, então, se adicionarmos uma loteria L_3 a ambas, a relação de preferência se mantém.
  - **Continuidade:** Para quaisquer prêmios z_1, z_2, z_3, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $z_2 \sim \alpha z_1 \oplus (1-\alpha) z_3$
    - **Intuição:** Se z_1 é preferível a z_2, e z_2 é preferível a z_3, então existe uma probabilidade tal que o prêmio se tornará independente à probabilidade de z_1 e z_3.

Resposta 10.1

- **Livro**
  - > The preference relation does not satisfy C. In the two-prize case where $v(z_1) > v(z_2)$, $[z_1] \succ 1/2[z_1] \oplus 1/2[z_2]$. Viewed as points in $\mathbb{R}^2_+$, we can rewrite this as $(1,0) \succ (1/2, 1/2)$. Any neighborhood of $(1,0)$ contains lotteries that are not strictly preferred to $(1/2, 1/2)$, and thus C is not satisfied. The preference relation also does not satisfy I ($[z_1] \succ [z_2]$ but $1/2[z_1] \oplus 1/2[z_2] \sim [z_2]$.)

Relembrando a relação de preferência "o pior caso", temos que a relação de preferência é dada por $L \succsim L'$ se o pior prêmio obtenível em L é preferível ao pior prêmio obtenível em L'. Ou seja, $L \succsim L'$ se $\min\{v(z)|p(z) > 0 \text{ e } z \in L\} \succsim \min\{v(z')|p(z') > 0 \text{ e } z' \in L'\}$.

- **Verificando Independência:** 👎
  - A preferência "o pior caso" não satisfaz o axioma de independência, pois se $L_1 \succ L_2$, então consideramos que o pior prêmio de L_1 é preferível ao pior prêmio de L_2. Porém, se adicionarmos uma loteria L_3 a ambas, a relação de preferência pode não se manter, visto que o pior prêmio de L_3 pode ser preferível ao pior prêmio de L_1 ou L_2.
- **Verificando Continuidade:** 👎
  - Como para que satisfaça o axioma de continuidade, precisamos que exista uma probabilidade α tal que $z_2 \sim \alpha z_1 \oplus (1-\alpha)z_3$, entende-se que esta relação de preferência não se mantém, visto que na loteria composta $\alpha z_1 \oplus (1-\alpha)z_3$ o pior prêmio é z_3, e $z_2 \nsim z_3$.

10.2. Increasing the probability of a "good" consequence

Resposta 10.2

> Increasing the probability of a "good" consequence: Such a preference relation satisfies the two axioms since it can be represented by the expectation of v where $v(z) = 1$ for $z \in G$ and $v(z) = 0$ for $z \in B$.

Relembrando a relação de preferência "aumentar a probabilidade de uma boa consequência", temos os prêmios da loteria L separados em grupos disjuntos G (Good) e B (Bad). De forma tal que $p(G) > p(B)$, ou seja, a probabilidade de obter um prêmio bom é maior do que a probabilidade de obter um prêmio ruim. Considere que $p(G)$ é a soma das probabilidades dos prêmios bons e $p(B)$ é a soma das probabilidades dos prêmios ruins.

- **Verificando Independência:** 👍
  - A preferência "aumentar a probabilidade de uma boa consequência" satisfaz o axioma de independência, pois se $L_1 \succ L_2$, mesmo se adicionarmos uma loteria L_3 a ambas, a relação de preferência se mantém, visto que a probabilidade de obter um prêmio bom em L_3 não altera a relação de preferência geral.
- **Verificando Continuidade:** 👎 ❓
  - Apesar de contradizer o que diz o livro, em meu entendimento o axioma de continuidade não é satisfeito, visto que para um caso onde $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (G, G, B)$, para que z_2 seja indiferente entre z_1 e z_3, é necessário que exista uma probabilidade α tal que $z_2 \sim \alpha z_1 \oplus (1-\alpha)z_3$. Essa condição apenas ocorre se $\alpha = 1$, assim resultando em $z_2 \sim z_1$. Porém, pela definição do axioma de continuidade $\alpha \notin \{0, 1\}$.

Risk Aversion (11, 12, 13)

11. Adam lives in the Garden of Eden and eats only apples. Time in the garden is discrete ($t = 1, 2, ...$) and apples are eaten only in discrete units. Adam possesses preferences over the set of streams of apple consumption

Assume that:

> 1. Adam likes to eat up to 2 apples a day and cannot bear to eat 3 apples a day.
> 2. Adam is **impatient**. He would be delighted to increase his consumption on day t from 0 to 1 or from 1 to 2 apples at the expense of an apple he is promised a day later $t + 1$.
> 3. In any day in which he does not have an apple, he prefers to get 1 apple immediately in exchange for 2 apples tomorrow.
> 4. Adam expects to live for 120 years.
>
> Show that if (poor) Adam is offered a stream of 2 apples starting in day 4 for the rest of his expected life, he would be willing to exchange that offer for 1 apple right away.
>
> *Tips:*
>
> - (2) means that one single apple is promised to Adam on day $t + 1$
> - initial stream offered to Adam can be represented by $(0, 0, 0, 2, 2, \ldots, 2, 2)$
> - evolve it due to Adam's preferences

Resposta 11

1. Consumo por dia = $[0, 1, 2]$.
2. Troca uma maçã de amanhã por uma maçã hoje (caso não tenha comido menos que 2 maçãs).
3. 1 maçã hoje $\succ$ 2 maçãs amanhã
4. Viverá por 120 anos (120*365 = 43800 dias)

Consideremos o processo decisório do nosso querido Adão 🧑 🫴 🍎 sobre a oferta de duas maçãs por dia a partir do 4º dia:

- **Oferta Atual:** $(0, 0, 0, 2, 2, 2, \ldots, 2, 2)$
  - Durante os dois primeiros dias, Adão não tem maçãs. Porém, no terceiro ele tem a opção de trocar as duas maçãs do dia 4 por uma maçã hoje. Assim tendo a seguinte oferta:

- **Oferta Atual (1 hoje $\succ$ 2 amanhã):** $(0, 0, 1, 0, 2, 2, \ldots, 2, 2)$
    - Como já não tem mais maçãs no dia seguinte, ele se alimenta com uma maçã e o dia passa. Chegando no dia 4, ele novamente tem a opção de trocar as duas maçãs do dia 5 por uma maçã hoje. Assim tendo a seguinte oferta:
- **Oferta Atual (1 hoje $\succ$ 2 amanhã):** $(0, 0, 1, 1, 0, 2, \ldots, 2, 2)$
    - Dessa forma, ele seguirá trocando as maçãs do dia seguinte por uma maçã hoje até o final de sua vida. Assim, a oferta final terá sido:
- **Oferta Final:** $(0, 0, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1)$

---

12. Given the pairs of lotteries in tables 1 and 2, in each case, which one do you prefer? Explain considering the First-Order Stochastic Domination concept

- Relembrando o conceito de First-Order Stochastic Domination, temos que L_1 domina estocasticamente L_2 $(L_1 D_1 L_2)$ se:
    - $\forall z \in Z, F(L_1, z) \geq F(L_2, z)$
    - Onde:
        - z é um prêmio
        - Z é o conjunto de prêmios ordenado em ordem crescente de preferência
            - Ex.: $z_1 \succ z_2 \succ \cdots \succ z_n$
        - $F(L, z)$ é a função de distribuição acumulada da loteria L para o prêmio z
            - Ex.:
                - Loteria $L = (0.5z_1, 0.3z_2, 0.2z_3)$
                - $p(z_1) = 0.5, p(z_2) = 0.3, p(z_3) = 0.2$
                - $F(L, z_1) = 0.5$
                - $F(L, z_2) = 0.5 + 0.3 = 0.8$
                - $F(L, z_3) = 0.5 + 0.3 + 0.2 = 1$
    - **Intuição:** todos os prêmios, do pior ao melhor, terão uma probabilidade maior ou igual de serem obtidos na loteria L_1 do que na loteria L_2.

12.1 **Table 1:** (a) or (b)?

chance %	90	6	1	3
(a)	0	45	30	-15
(b)	0	45	-10	-15

Resposta 12.1

Primeiro, é necessário que convertamos as loterias em suas respectivas tabelas de equivalência:

Prêmios ($)	-15	-10	0	30	45
(a) %	3	0	90	1	6
(b) %	3	1	90	0	6

Agora, analisando as frequências acumuladas de cada uma das loterias:

- **Loteria (a):** $\forall z \in Z, F(L_a, z) = \{0.03, 0.03, 0.93, 0.94, 1\}$
- **Loteria (b):** $\forall z \in Z, F(L_b, z) = \{0.03, 0.04, 0.94, 0.94, 1\}$

Com isso, concluimos que aD_1b, visto que $\forall_{f\in F}\forall_{z\in Z}(L_a, z) \leq F(L_b, z)$ é verdadeiro.

12.2 Table 2: (c) or (d)?

chance %	40	35	15	10
(c)	0	10	50	200
(d)	0	25	40	180

Resposta 12.2

Primeiro, é necessário que convertamos as loterias em suas respectivas tabelas de equivalência:

Prêmios ($)	0	10	25	40	50	180	200
(c) %	40	35	0	0	15	0	10
(d) %	40	0	35	15	0	10	0

Agora, analisando as frequências acumuladas de cada uma das loterias:

- **Loteria (c):** $\forall z \in Z, F(L_c, z) = \{0.4, 0.75, 0.75, 0.75, 0.9, 0.9, 1\}$
- **Loteria (d):** $\forall z \in Z, F(L_d, z) = \{0.4, 0.40, 0.75, 0.90, 0.9, 1.0, 1\}$

Nota-se que, nesse caso, a loteria (c) não domina estocasticamente a loteria (d), e o mesmo pode ser dito para a loteria (d) em relação à loteria (c). Isso porque existe momento em que $F(L_c, z) < F(L_d, z)$ e $F(L_d, z) < F(L_c, z)$.

Com isso, conclui-se que não existe relação de dominância estocástica entre as duas loterias, ou seja, $L_c \not\succsim L_d$ e que $L_d \not\succsim L_c$.

Portanto, não é possível afirmar que uma das loterias é preferível à outra considerando o conceito de Dominância Estocástica de Primeira Ordem.

---

13. A gambling house charges $15 for the lottery below

prize	0	36	64
p	0.50	0.30	0.20

> Will a person, whose utility function over money is $u(x) = \frac{5}{4}\sqrt{x}$, pay to play p? Justify your answer.

Resposta 13

Primeiro, calculemos a utilidade esperada da loteria L:

- $U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(z_i) | p_i = p(z_i) \text{ e } z_i \in L$
- $U(L) = 0.50u(0) + 0.30u(36) + 0.20u(64)$

Agora, utilizando a função de utilidade dada, temos:

- $U(L) = 0.50 \cdot (\frac{5}{4}\sqrt{0}) + 0.30 \cdot (\frac{5}{4}\sqrt{36}) + 0.20 \cdot (\frac{5}{4}\sqrt{64})$
- $U(L) = 0.50 \cdot 0 + 0.30 \cdot (\frac{5}{4} \cdot 6) + 0.20 \cdot (\frac{5}{4} \cdot 8)$
- $U(L) = 0 + 0.30 \cdot 7.5 + 0.20 \cdot 10$
- $U(L) = 0 + 2.25 + 2$
- $U(L) = 4.25$

Consideremos também a utilidade do valor pago para jogar a loteria, que é de 15:

- $u(15) = \frac{5}{4}\sqrt{15}$
- $u(15) = \frac{5}{4} \cdot 3.872$
- $u(15) = 4.84$

Portando, como a utilidade esperada da loteria é inferior à utilidade do valor pago para jogar a loteria, podemos concluir que o jogador **não pagará para jogar a loteria L**.

Outra forma de analisarmos a utilidade esperada da loteria é considerarmos em seu cálculo de utilidade esperada o valor pago para jogar a loteria:

- $U(L) - U([15]) = [0.50u(0) + 0.30u(36) + 0.20u(64)] - 1.00u(15)$
- $U(L) - U([15]) = 4.25 - 4.84$
- $U(L) - U([15]) = -0.59$

Sendo assim, a utilidade esperada de se jogar a loteria é negativa, significando que o esperado é que o jogador perca dinheiro, sendo assim, ele não pagará para jogar a loteria L.