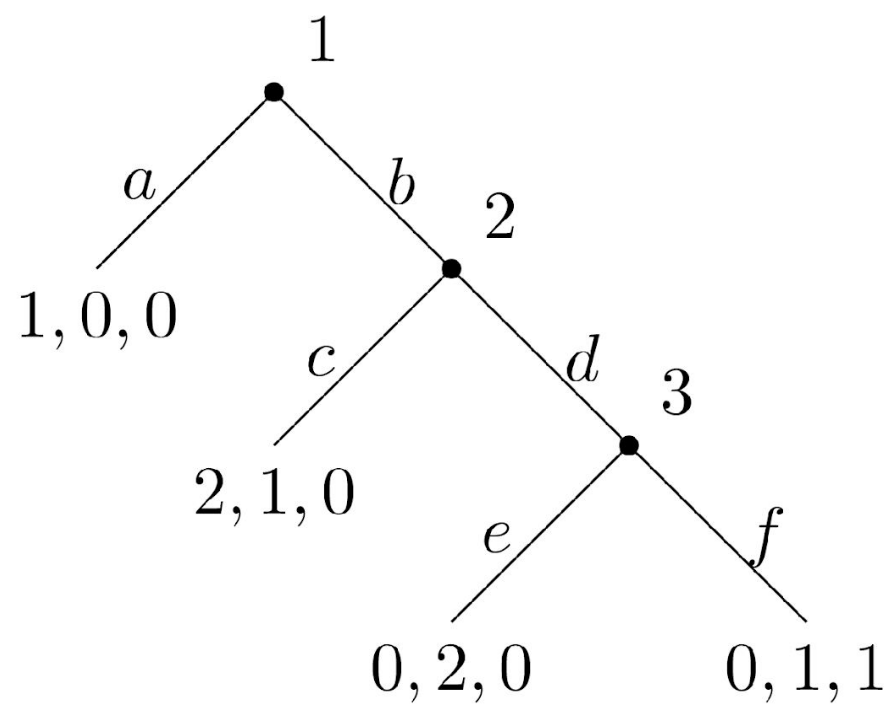
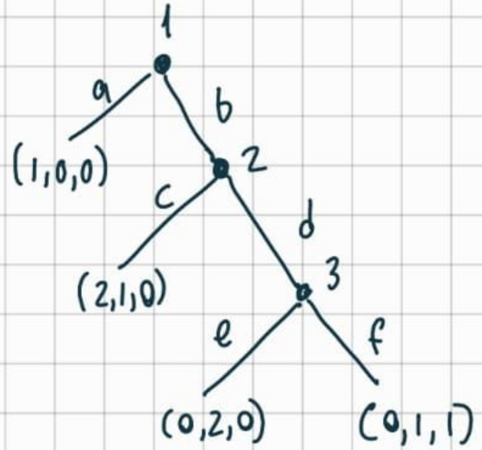
Exercise 1

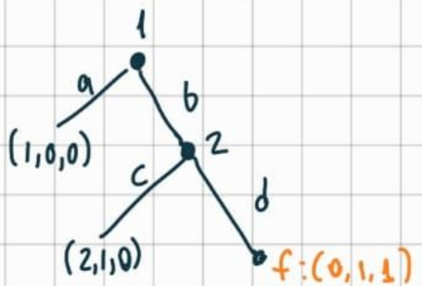
Find the pure-strategy subgame perfect equilibria of the game below:



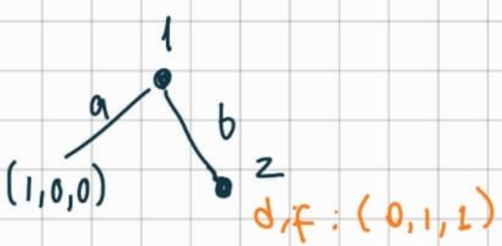
EXERCÍCIO 1 . GUSTAVO GODINHO . 11/07 , 2h



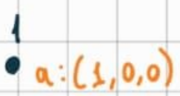
PARA O JOGADOR 3: $(0,1,1) \succ (0,2,0)$



PARA O JOGADOR 2 TANTO FAZ ENTRE c e d:

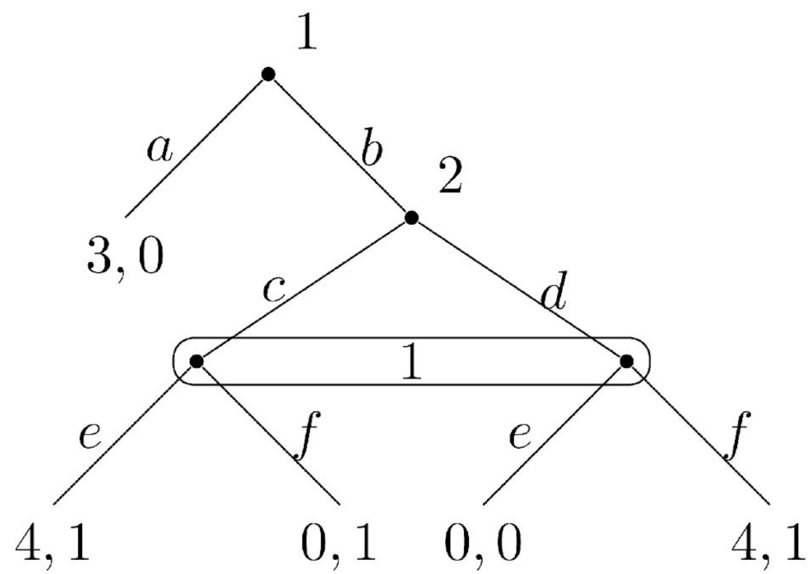


PARA O JOGADOR 1: $(1,0,0) \succ (0,1,1)$



NÃO É O ÚNICO SPE

Exercise 2



(a) Find the corresponding strategic (i.e., normal form) game.
(b) Find all pure-strategy Nash equilibria.
(c) What is the outcome of iterated elimination of weakly dominated (pure) strategies?

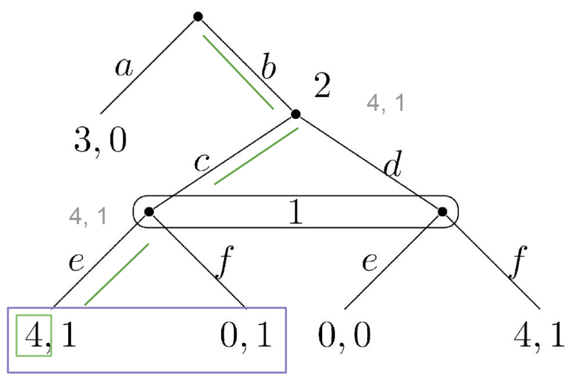
Exercício 2

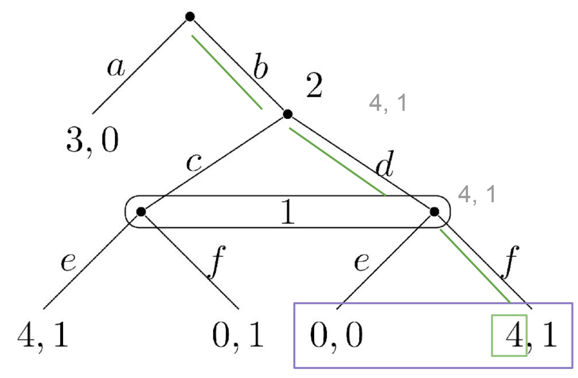
a) S_1 : {(a,e), (a,f), (b,e), (b,f)}
   S_2: {(c), (d)}

	c	d
(a, e)	3, 0	3, 0
(a, f)	3, 0	3, 0
(b, e)	4, 1	0, 0
(b, f)	0, 1	4, 1

Lívia Almeida - 18/07 - 08:32

b) SPE: [(b, e), (c)] e [(b, f), (d)]





Lívia Almeida - 18/07 - 08:32

c)

	c	d
(a, e)	3, 0	3, 0
(a, f)	3, 0	3, 0
(b, e)	4, 1	0, 0
(b, f)	0, 1	4, 1

→

	c	d
(a, e)	3, 0	3, 0
(a, f)	3, 0	3, 0
(b, e)	4, 1	0, 0
(b, f)	0, 1	4, 1

→

	c	d
(a, e)	3, 0	3, 0
(b, e)	4, 1	0, 0
(b, f)	0, 1	4, 1

→

	c
(a, e)	3, 0
(b, e)	4, 1
(b, f)	0, 1

O resultado será (4, 1)

Lívia Almeida - 18/07 - 08:32

Exercise 3

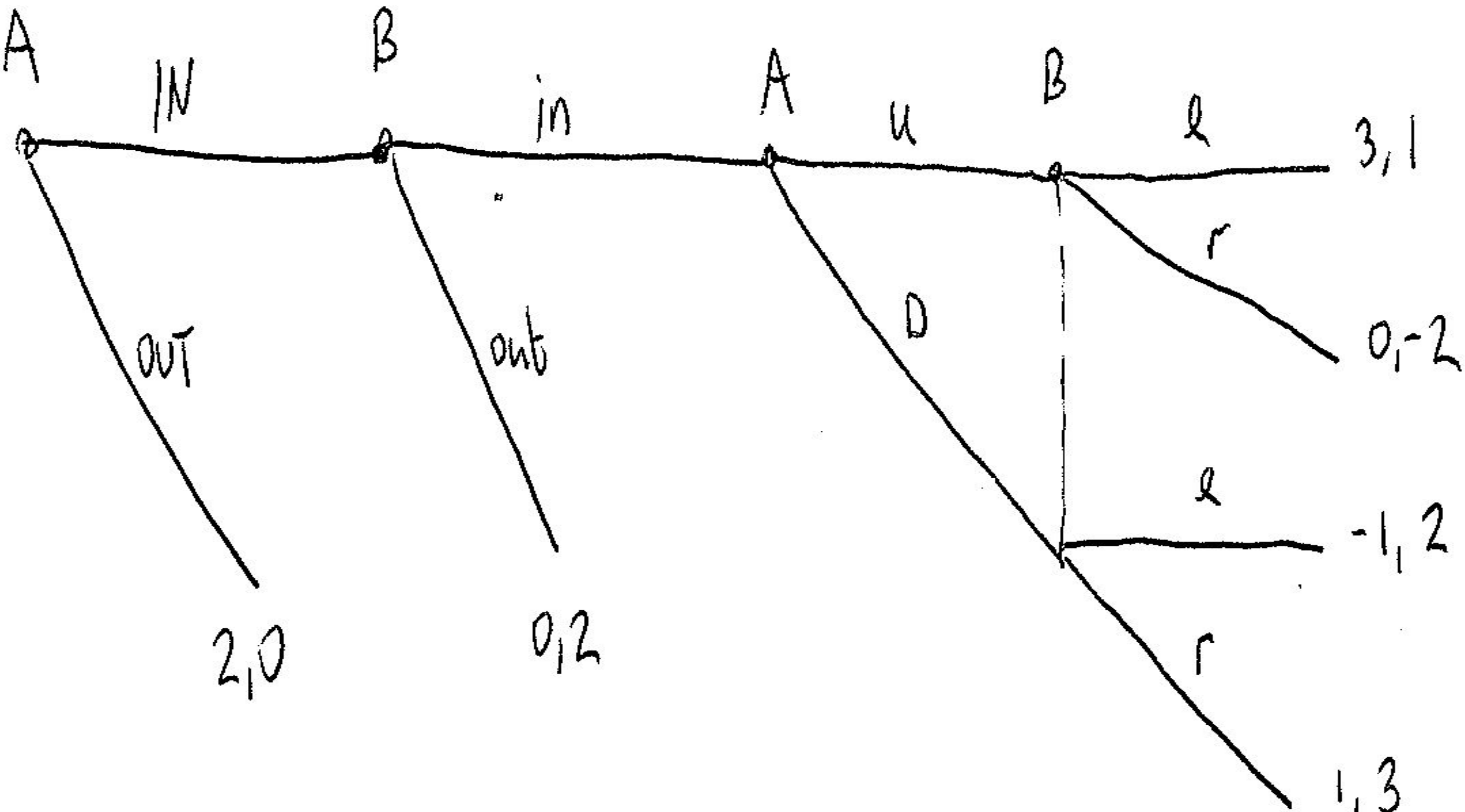
Two players, A and B play the following game. First A must choose IN or OUT. If A chooses OUT the game ends, and the payoffs are A gets 2, and B gets 0. If A chooses IN then B observes this and must then choose in or out. If B chooses out the game ends, and the payoffs are B gets 2, and A gets 0. If A chooses IN and B chooses in then they play the following simultaneous move game:

		B	
		left	right
A	up	$3, 1$	$0, -2$
	down	$-1, 2$	$1, 3$

a)Draw the tree that represents this game.

b) Find all the pure strategy SPE of the game.

a)



por: Pedro Olmo, 10/07/2022, 18:00

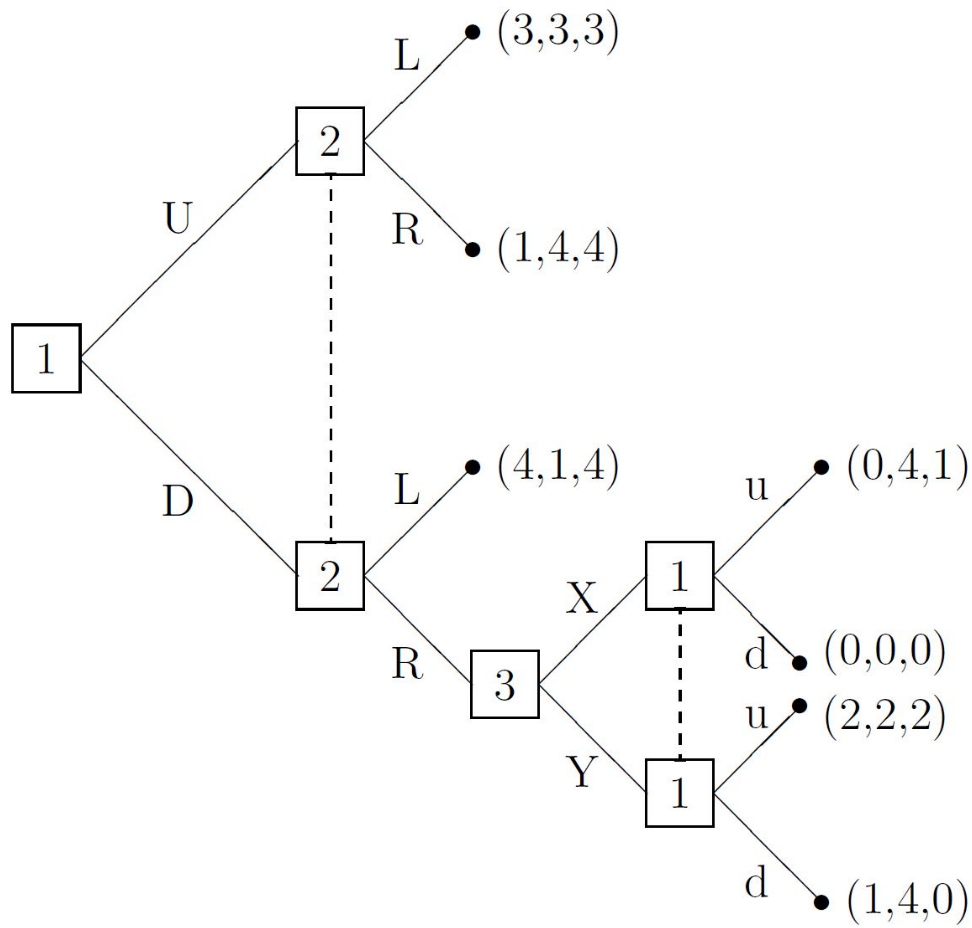
b)

Answer. *In the last subgame (the one represented by the matrix above), there are two pure strategy equilibria* $(up, left)$ *and* $(down, right)$. *Each corresponds to an SPE of the whole game. The SPE are:*

$$[(OUT, up), (out, left)] \text{ and } [(OUT, down), (in, right)]$$

por: Pedro Olmo, 10/07/2022, 18:00

Exercise 4



a) Find the equivalent strategic game of this extensive form game. Tip:
https://www.youtube.com/watch?v=P7Dg5FRH0cc

b) Find all the subgame perfect Nash equilibria of this extensive form game.
(Please give equilibrium strategies as well as payoffs.)

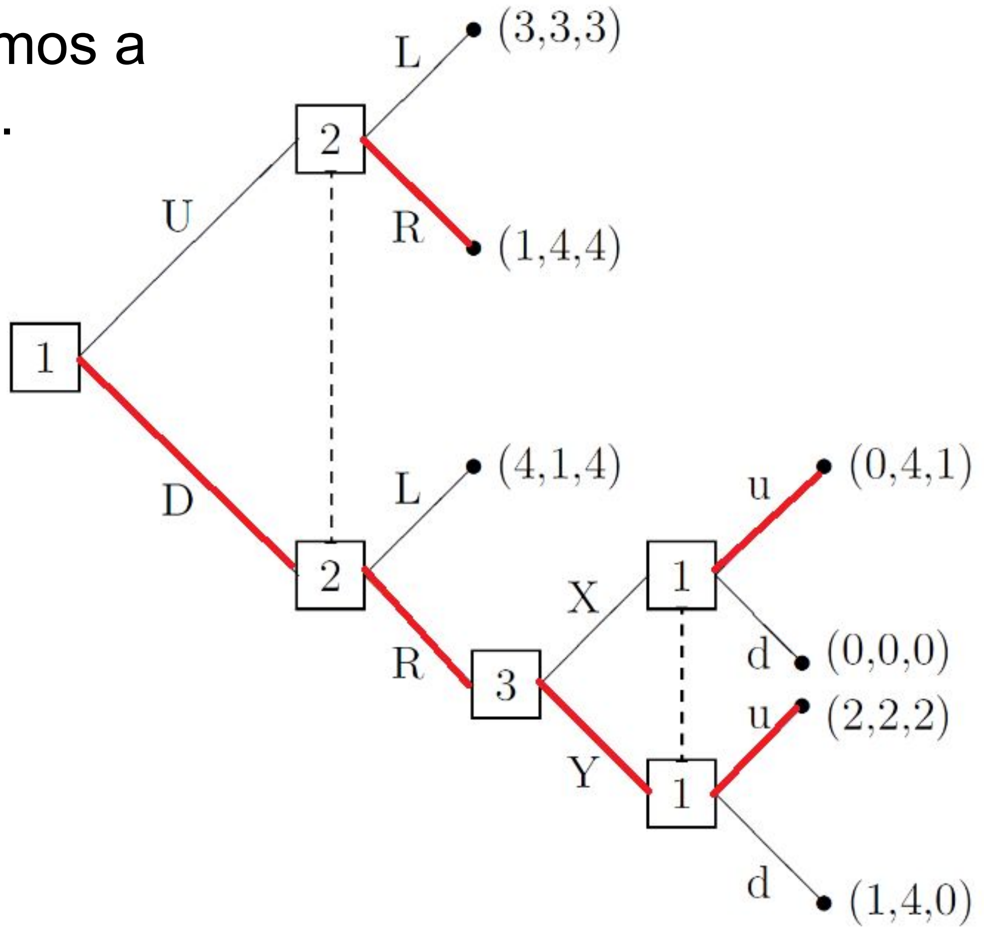
Exercício 4

a) Ao definir as ações de cada jogador conseguimos criar o jogo na forma normal, ou jogo estratégico, com o jogador 1 definindo qual jogo será jogado pelos outros jogadores. Como ele toma duas ações na versão extensiva, precisamos que na forma normal suas ações sejam a combinação das duas (Uu, Ud, Du, Dd).

				Player 3	
				X	**Y**
Player 1	**Uu**	**Player 2**	**R**	1,4,4	1,4,4
			L	3,3,3	3,3,3
	Ud	**Player 2**	**R**	1,4,4	1,4,4
			L	3,3,3	3,3,3
	Du	**Player 2**	**R**	0,4,1	2,2,2
			L	4,1,4	4,1,4
	Dd	**Player 2**	**R**	0,0,0	1,4,0
			L	4,1,4	4,1,4

Exercício 4

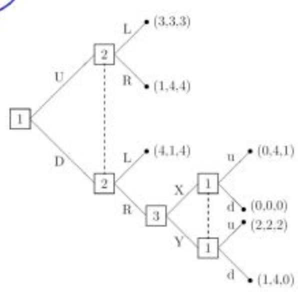
b) Como queremos o equilíbrio de nash perfeito em subjogos, vamos usar backward induction com a versão extensiva. Considerando o fato de que temos dois casos com informations sets com mais de um nó, as decisões tomadas nesses nós devem ser tomadas no set inteiro. Daí encontramos a resposta (Du,R,Y) com payoff (2,2,2).



Exercício 4 (dúvida ou correção)

a) Estava com dúvida no 4 porque ele pareceu ser resolvido diferente da 2 e 3. Segue outra solução.

(3)



Pode-se definir o jogo em função do jogador 3 pois $|A_3| = |A_2| < |A_1|$, sendo A_i as ações de um jogador.

se X

	L	R
Uu	(3,3,3)	$\boxed{(1,4,4)}$
Ud	(3,3,3)	$\boxed{(1,4,4)}$
Du	(4,1,4)	(0,4,1)
Dd	$\boxed{(4,1,4)}$	(0,0,0)

se Y

	L	R
Uu	(3,3,3)	(1,4,4)
Ud	(3,3,3)	(1,4,4)
Du	(4,1,4)	$\boxed{(2,2,2)}$
Dd	(4,1,4)	(1,4,0)

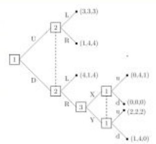
3 não quer mudar

Nash puros: (Uu, R, X) (Ud, R, X) (Dd, L, X) (Du, R, Y)

Alysson Ribeiro da Silva - 20/06 17:55

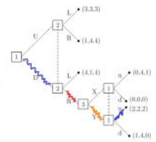
Exercício 4 (dúvida ou correção)

analisa separadamente (concordo com o samuel)

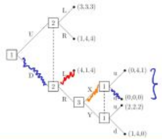


se $I_{1,5}$ é um information set que representa estados ambíguos e se uma estratégia comportamental é uma randomização em $I_{1,5}$ onde não se sabe em qual estado irá "cair", então deve-se calcular um SPE para cada estado $h \in I_{1,5}$ assim como mostrado na solução do exercício 3.

$SPE_1 = (Du, R, Y)$
$u(a) = (2,2,2)$

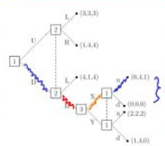


$SPE_2 = (Dd, L, X)$
$u(a) = (4,1,4)$



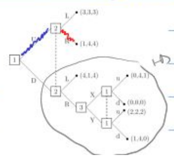
} 1 é indiferente

$SPE_3 = (Du, R, X)$
$u(a) = (0,4,1)$



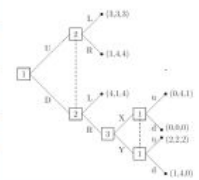
} 1 é indiferente

$SPE_4 = (U*, R, *)$ * → qualquer coisa.
$u(a) = (1,4,4)$



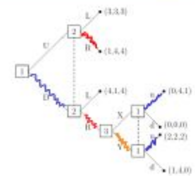
→ indiferente

analisa em paralelo

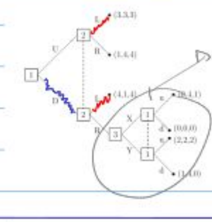


se $I_{1,5}$ é um information set que representa estados ambíguos e se uma estratégia comportamental é uma randomização em $I_{1,5}$ onde não se sabe em qual estado irá "cair", então deve-se calcular um SPE para cada estado $h \in I_{1,5}$ assim como mostrado na solução do exercício 3.

$SPE_1 = (Du, R, Y)$
$u(a) = (2,2,2)$

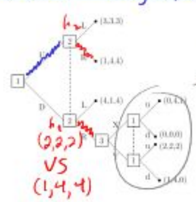


$SPE_2 = (D*, L, *)$ * indiferente
$u(a) = (4,1,4)$



→ indiferente

$SPE_3 = (U*, R, *)$ * → qualquer coisa
$u(a) = (1,4,4)$



h_2 h_1 → indiferente

(2,2,2) VS (1,4,4)

Existe SPE_3 ?!?
se não existir, então os equi. (1,4,4) na forma normal não tem relação...

se $I_{2,1} = (h_1, h_2)$, deve considerar h_1 quando escolher o subjogo h_2?

Alysson Ribeiro da Silva - 20/06 17:55

Exercise 5

Two farmers, Joe and Giles, graze their animals on a common land. They can choose to use the common resource lightly or heavily and the resulting strategic interaction may be described as a simultaneous-move game. The payoff matrix is the following:

		Giles	
		light	heavy
Joe	light	40, 40	20, 55
	heavy	55, 20	30, 30

1. *Find the Nash equilibrium of the game and show that it is an example of "Prisoners' Dilemma" games.*

2. *Suppose that the same game is repeated infinitely.*
   Is the {light, light} outcome a Nash equilibrium if both players play a Grim strategy and have a discount factor of 0.7?

EXERCÍCIO 5.

		Giles light	Giles heavy
Joe	light	40,40	20,55
	heavy	55,20	30,30

1. O equilíbrio de nash é (heavy, heavy), pois se um jogador trocar para a ação light enquanto o outro se mantém em heavy, o jogador que trocou perde payoff, ou seja, nesse perfil de ações os jogadores não possuem incentivo para trocar, apesar desse perfil de ação ser claramente dominado por (light, light). Essa é uma variação do dilema dos prisioneiros porque se os agentes optam por suas ações dominantes então eles recebem de payoff um valor menor do que teriam recebido se colaborassem e confiando que o outro vai colaborar (optar por light) os jogadores possuem claro incentivo para desviar.

2. Verificar se o resultado (light, light) é um equilíbrio de nash quando os agentes jogam esse jogo repetidamente em estratégia grim trigger e um fator de desconto de 0,7:

Com ambos os jogadores colaborando em jogar light a recompensa com desconto futuro esperada é:

$$r_1 = r_2 = 40 + 40(0,7) + 40(0,7)^2 + 40(0,7)^3 + \ldots = 40 \sum_{k=0}^{\infty} (0,7)^k = 40 \cdot \frac{1}{1-0.7} = \frac{40}{0.3} = 133,33$$

Se Joe desviar para heavy, ele ganhará 55 mas logo em seguida passará a ganhar no máximo 30 por toda a eternidade porque Giles usará da estratégia pura grim trigger para punir Joe; daí a recompensa futura esperada caso Joe permaneça optando por heavy é:

$$55 + 30(0,7) + 30(0,7)^2 + 30(0,7)^3 + \ldots = 55 + 30 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (0,7)^k = 55 + 30 \frac{(0,7)}{(0,3)} = 55 + 7.10 = 125$$

Caso Joe se arrependa de ter desviado para heavy e volte a optar por light isso não fará diferença para Giles que continuará optando por heavy e daí o valor de recompensa para Joe será ainda menor que os 125. O mesmo se aplica para Giles desviando porque o jogo é simétrico. Como não compensa para nenhum dos jogadores desviar de (light, light) então esse estado é um equilíbrio de nash.

Gustavo Godinho, 18/07/2022 às 16h

Exercise 6

The absent-minded driver. Alice está sentada tarde da noite em um restaurante planejando sua viagem de meia-noite para casa. A fim de chegar em casa, ela tem que tomar a estrada e virar na segunda saída. Virando na primeira saída a leva a uma área desastrosa, com muitos assaltos e acidentes (*payoff* de 0). Virando na segunda saída ela terá a mais alta recompensa, pois chega em casa (*payoff* de 4). Se ela continuar para além da segunda saída, ela não pode voltar atrás, encontrando no final da estrada um motel onde ela pode passar a noite (*payoff* de 1). Alice é altamente distraída e é ciente deste fato. Em um cruzamento, ela não pode dizer se é o primeiro ou o segundo, ou seja, ela não se lembra de quantos cruzamentos já passaram.

a. Desenhe a árvore deste jogo na forma extensiva.

b. Qual é equilíbrio de estratégias puras deste jogo?

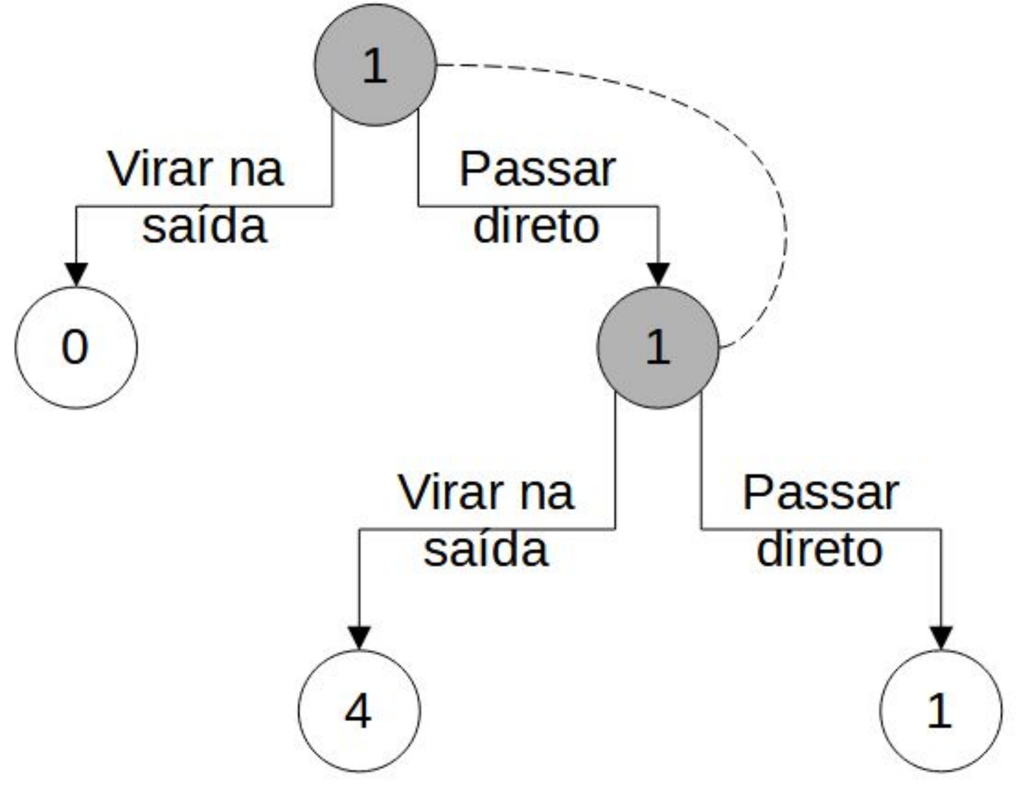
c. Qual o perfil de estratégias comportamentais que lhe dá o maior *payoff* esperado?

d. Suponha que Alice é casada com Bob e este é um marido muito amoroso, preocupado e medroso. Neste novo cenário, Bob pode tomar duas decisões: esperar por Alice em casa ou ir até o motel procurar por ela. Desenhe a árvore deste jogo na forma extensiva.

Exercício 6

a) A árvore na forma extensiva só tem um jogador, a Alice, e tem duas ações, virar na saída ou passar direto, com cada esquina sendo um nó não-terminal e ambos estando no mesmo *information set*, já que Alice não sabe dizer onde está.

b) O equilíbrio de Nash de estratégias puras é *Passar Direto*, já que, devido ao *information set* escolher passar direto e então virar na esquina não é possível, e *Passar direto* duas vezes é melhor que *virar na saída* e cair no 0.



Samuel Guimarães - 18/07 - 22:36

Exercício 6

c) Para definirmos a melhor estratégia comportamental, vamos primeiro definir o payoff para uma estratégia comportamental qualquer. Para isso definimos a tupla $b_{1,1} = (x,1-x)$ onde x é a probabilidade de *virar na saída*, que podemos chamar só de **v**, e (1-x) a probabilidade de *passar direto*, que podemos chamar só de **p**. Calculando a utilidade temos:

$$U(b_{1,1}) = P(v)*U(v) + P(p,v)*U(p,v) + P(p,p)*U(p,p) =$$
$$x*0 \quad +((1-x)*x)*4 \quad + ((1-x)^2)*1 \quad = 4x - 4x^2 + x^2 - 2x + 1 =$$
$$-3x^2 + 2x + 1$$

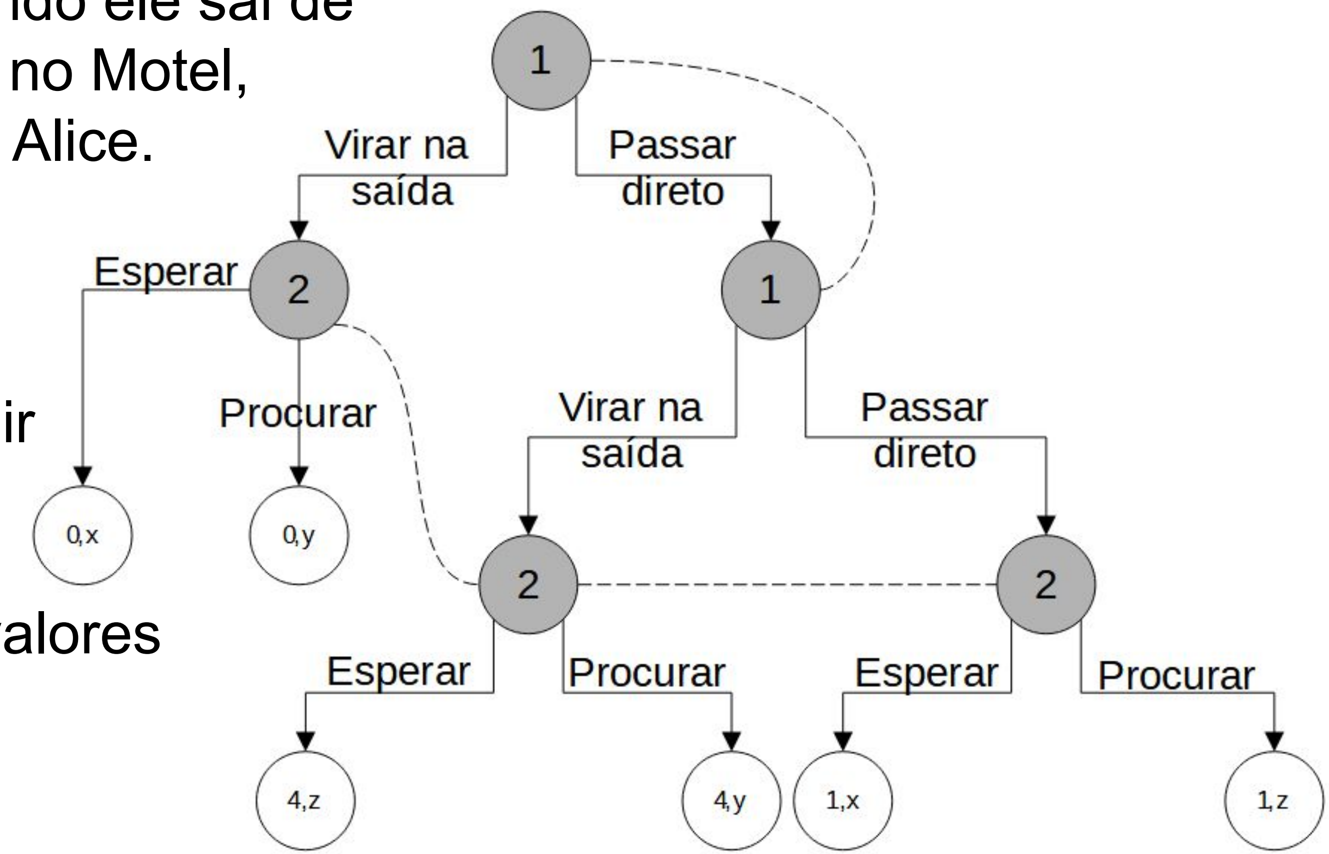
Calculando a derivada da função encontramos: $-3(2x) + 2 = -6x+2$. Igualamos a equação a 0 para encontrar o ponto de valor máximo, obtendo: $-6x+2 = 0 \Rightarrow x = 2/6 = 1/3$.

Aplicando na equação encontramos $U(b_{1,1}) = U(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = -3(\frac{1}{3})^2 + 2(\frac{1}{3}) + 1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 1 + \frac{1}{3} \sim 1.33$

Exercício 6

d) A partir da árvore anterior, podemos expandir a mesma para o caso onde temos Bob, que será o jogador 2. Suas ações são *Esperar* ou *Procurar*. Como ele não sabe o que Alice fez, todos os seus nós também são um único *information set*. Como não foi informado o payoff de Bob, vamos usar incógnitas, onde x é o caso onde ele não encontra Alice mas não saiu de casa, y é quando ele sai de casa e não encontra Alice no Motel, e z é quando ele encontra Alice.

Como ele é medroso e preocupado, esperamos que ele se sinta pior se sair de casa e não encontrar Alice, logo, x < y < z.
Se quisermos manter os valores de Alice, x=0, y=1 e z=4.



Exercise 7

For the Battle of the sexes game, what is the set of feasible payoffs if it is infinitely repeated? What is the highest feasible symmetric payoff? Let $\delta = \frac{9}{10}$ and find a deterministic strategy profile for the repeated game with payoffs $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

	$Bach$	$Stravinsky$
$Bach$	$2, 1$	$0, 0$
$Strv$	$0, 0$	$1, 2$

Exercise 8

- Consider the following stage game:

1\2	L	C	R
T	1,-1	2,1	1,0
M	3,4	0,1	-3,2
B	4,-5	-1,3	1,1

a. Find the unique pure strategy Nash equilibrium.

b. Write down a trigger strategy where the outcome of the game is (M, L).

c. Find a lower bound on δ_i that is sufficient to insure that player i will not deviate from his trigger strategy given that the other player uses his trigger strategy.

Exercício 8

a) O equilíbrio de Nash de estratégias puras é (T,C).

b) Para definirmos a estratégia de grim trigger, queremos definir quais são as estratégias que serão usadas para punir o jogador que sair do equilíbrio desejado em (M,L). As estratégias que podemos usar são as do equilíbrio de Nash, pois estando naquele perfil de estratégias, o jogo entra em equilíbrio, e estando com um payoff menor, o jogador "traidor" tem sua punição. Logo, se o jogador 1 mudar sua estratégia, o jogador 2 para de jogar L e passa a jogar C, e caso o jogador 2 troque sua estratégia, o jogador 1 para de jogar M e passa a jogar T.

c) Como podemos ver, para o jogador 2, L já é a melhor resposta para T, logo, em geral qualquer valor de δ_i deve ser o suficiente para ele. Já para o jogador 1, ele tem um incentivo para jogar B em vez de M, e ganhar 4 em (B,L). Nesse caso, devemos escolher um valor de δ_i para que a decisão de permanecer em (M,L) seja melhor que trocar para (B,L).

Exercício 8

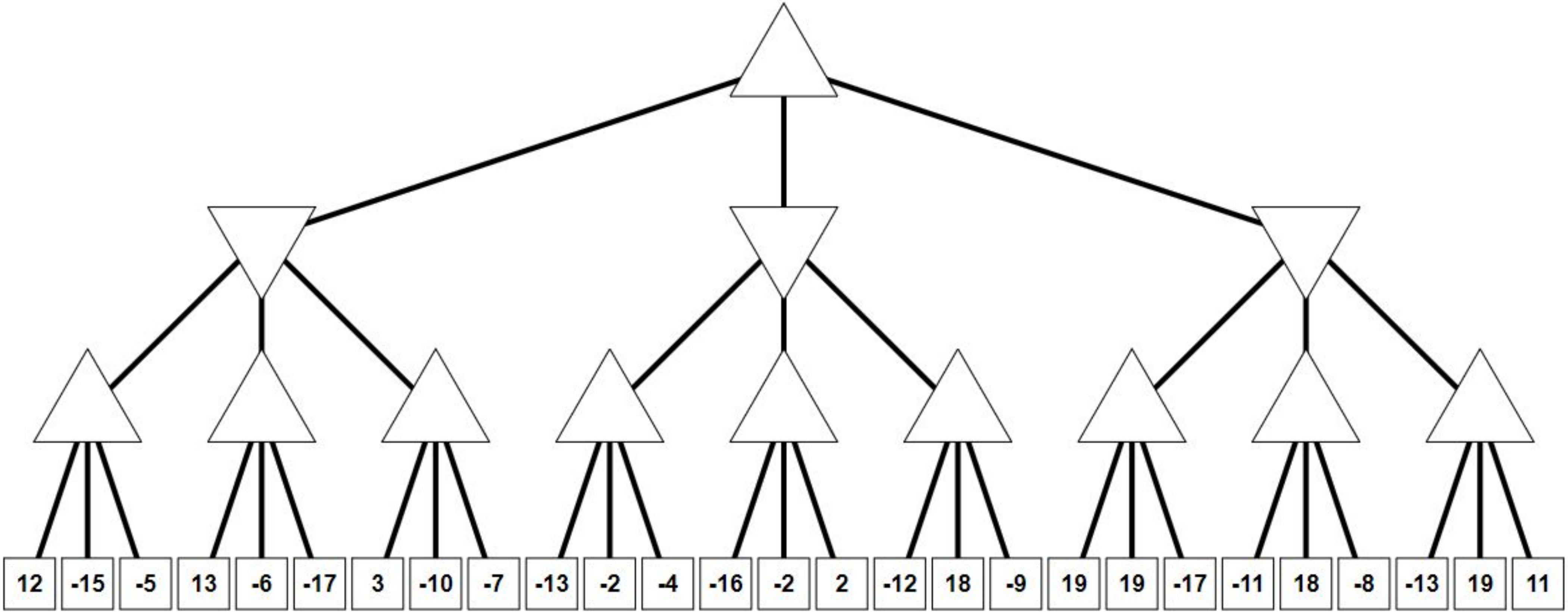
c) Caso o jogador 2 permaneça jogando M, seu payoff será:
$3 + 3(\delta_i) + 3(\delta_i^2) + 3(\delta_i^3) + \ldots = 3(\sum_0^\infty \delta_i) = 3(1/(1-\delta_i))$

Já para o caso onde o jogador desvia para B, ele ganha:
$4 + 2(\delta_i) + 2(\delta_i^2) + 2(\delta_i^3) + \ldots = 4 + 2(\sum_1^\infty \delta_i) = 4 + 2(1/(1-\delta_i) - 1) =$
$2 + 2(1/(1-\delta_i))$

A partir disso, queremos que $3(1/(1-\delta_i)) > 2 + 2(1/(1-\delta_i))$, logo:
$3/(1-\delta_i) > 2 + (2/(1-\delta_i)) \Rightarrow 1/(1-\delta_i) > 2 \Rightarrow ½ > (1-\delta_i) \Rightarrow$
$(1-\delta_i) < ½ \Rightarrow 1 < \delta_i + ½ \Rightarrow \delta_i > ½$

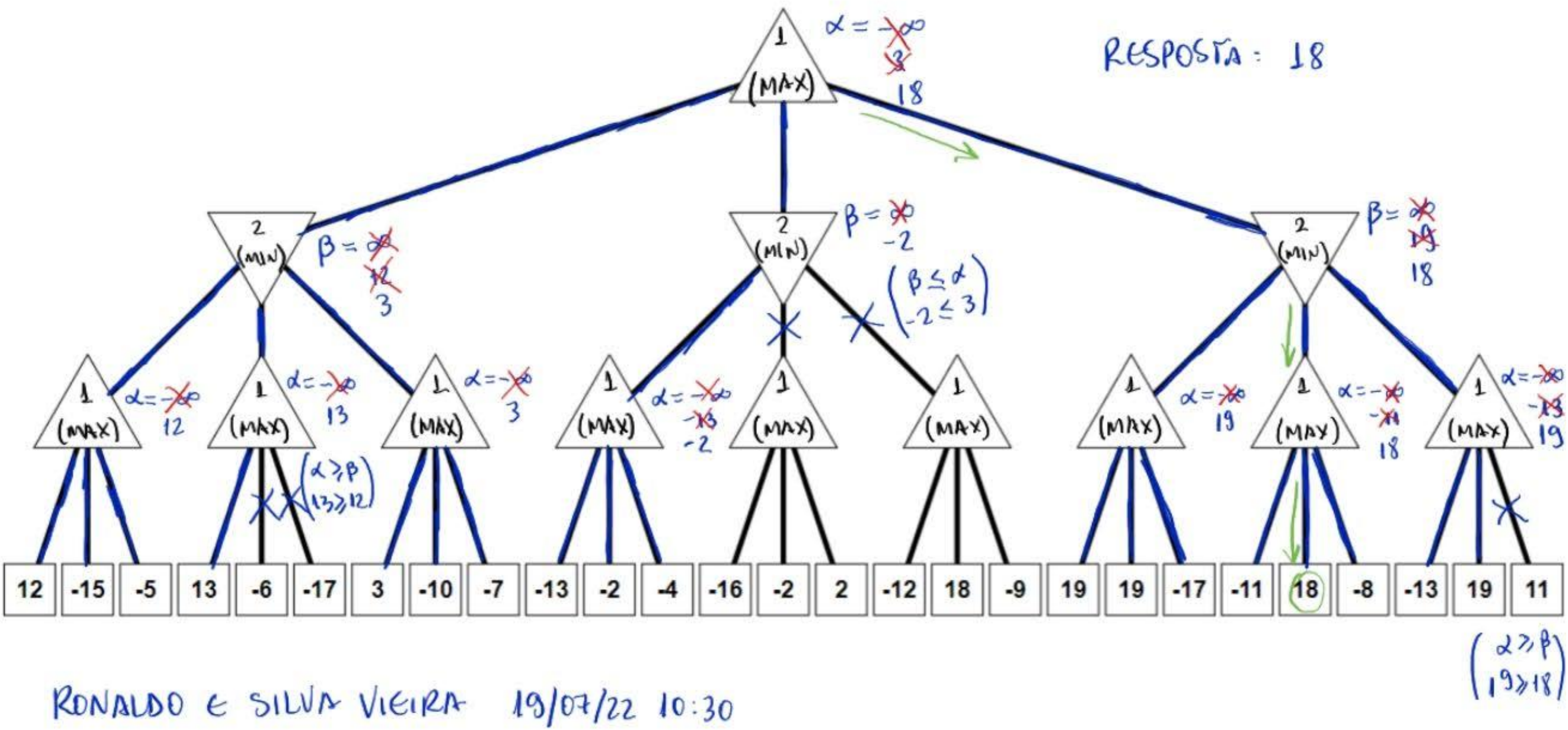
Exercise 9

Solve the game below using the alpha-beta pruning procedure.



Exercise 9

Solve the game below using the alpha-beta pruning procedure.



Exercise 10

Solve the following game using the Lemke-howson algorithm

$p1 \backslash p2$	4	5	6
1	1,2	3,1	0,0
2	0,1	0,3	2,1
3	2,0	1,0	1,3

exercício 10.

GUSTAVO GODINHO. 11/07. 01h30

P1 / P2	4	5	6
1	1,2	3,1	0,0
2	0,1	0,3	2,1
3	2,0	1,0	1,3

JOGADOR	AÇÃO	VARIÁVEL	FOLGA
1	1	x_1	r_1
	2	x_2	r_2
	3	x_3	r_3
2	4	y_4	s_4
	5	y_5	s_5
	6	y_6	s_6

BR(1) = 4 BR(4) = 3
BR(2) = 5 BR(5) = 1
BR(3) = 6 BR(6) = 2

as equações são:

$r_1 = 1 - y_4 - 3y_5$
$r_2 = 1 - 2y_6$
$r_3 = 1 - 2y_4 - y_5 - y_6$

$s_4 = 1 - 2x_1 - x_2$
$s_5 = 1 - x_1 - 3x_2$
$s_6 = 1 - x_2 - 3x_3$

ação 1: escolha arbitrária: x_1 entra na base, mas no lugar de quem?

$MRT(s_4) = Q/C = -2/1 = -2$

$MRT(s_5) = Q/C = -1/1 = -1$

x_1 entra no lugar de s_4:

$s_4 = 1 - 2x_1 - x_2$

$2x_1 = 1 - x_2 - s_4 \rightarrow x_1 = (1/2) - (1/2)x_2 - (1/2)s_4$

atualizando o valor de x_1 em s_5:

$s_5 = 1 - x_1 - 3x_2$

$s_5 = 1 - [(1/2) - (1/2)x_2 - (1/2)s_4] - 3x_2 \rightarrow s_5 = (1/2) - (5/2)x_2 - (1/2)s_4$

as equações são:

$r_1 = 1 - y_4 - 3y_5$
$r_2 = 1 - 2y_6$
$r_3 = 1 - 2y_4 - y_5 - y_6$

$x_1 = (1/2) - (1/2)x_2 - (1/2)s_4$
$s_5 = (1/2) - (5/2)x_2 - (1/2)s_4$
$s_6 = 1 - x_2 - 3x_3$

$L(0,0,0) \cup L(1,0,0) = \underline{r_1}, r_2, r_3, \underline{x_1}, s_5, s_6$

ação 2: s_4 saiu da base então y_4 precisa entrar, mas onde?

$MRT(r_1) = Q/C = -1/1 = -1$

$MRT(r_3) = Q/C = -2/1 = -2$

y_4 entra no lugar de r_3:

$r_3 = 1 - 2y_4 - y_5 - y_6$

$2y_4 = 1 - y_5 - y_6 - r_3 \rightarrow y_4 = (1/2) - (1/2)y_5 - (1/2)y_6 - (1/2)r_3$

atualizando o valor de y_4 em r_1:

$r_1 = 1 - y_4 - 3y_5$

$r_1 = 1 - [(1/2) - (1/2)y_5 - (1/2)y_6 - (1/2)r_3] - 3y_5$

$r_1 = (1/2) - (5/2)y_5 + (1/2)y_6 + (1/2)r_3$

as equações são:

$r_1 = (1/2) - (5/2)y_5 + (1/2)y_6 + (1/2)r_3$
$r_2 = 1 - 2y_6$
$y_4 = (1/2) - (1/2)y_5 - (1/2)y_6 - (1/2)r_3$

$x_1 = (1/2) - (1/2)x_2 - (1/2)s_4$
$s_5 = (1/2) - (5/2)x_2 - (1/2)s_4$
$s_6 = 1 - x_2 - 3x_3$

$L(0,0,1) \cup L(1,0,0) = \underline{r_1}, r_2, y_4, \underline{x_1}, s_5, s_6$

ação 3: r_3 saiu da base então x_3 precisa entrar no lugar de s_6:

$s_6 = 1 - x_2 - 3x_3$

$3x_3 = 1 - x_2 - s_6 \rightarrow x_3 = (1/3) - (1/3)x_2 - (1/3)s_6$

as equações são:

$r_1 = (1/2) - (5/2)y_5 + (1/2)y_6 + (1/2)r_3$
$r_2 = 1 - 2y_6$
$y_4 = (1/2) - (1/2)y_5 - (1/2)y_6 - (1/2)r_3$

$x_1 = (1/2) - (1/2)x_2 - (1/2)s_4$
$s_5 = (1/2) - (5/2)x_2 - (1/2)s_4$
$x_3 = (1/3) - (1/3)x_2 - (1/3)s_6$

$L(0,0,1) \cup L(p_4,0,p_6) = \underline{r_1}, r_2, y_4, \underline{x_1}, s_5, x_3$

ação 4: S_6 saiu da base então y_6 precisa entrar, mas onde?

$MRT(r_1) = \varphi/c = (1/2)/(1/2) = 1$

$MRT(r_2) = \varphi/c = -2/1 = -2$

$MRT(y_4) = \varphi/c = (-1/2)/(1/2) = -1$

x_6 entra no lugar de r_2:

$r_2 = 1 - 2y_6$

$2y_6 = 1 - r_2 \rightarrow y_6 = (1/2) - (1/2)r_2$

atualizando y_6 em r_1:

$r_1 = (1/2) - (5/2)y_5 + (1/2)y_6 + (1/2)r_3$

$r_1 = (1/2) - (5/2)y_5 + (1/2)[(1/2) - (1/2)r_2] + (1/2)r_3$

$r_1 = (3/4) - (5/2)y_5 - (1/4)r_2 + (1/2)r_3$

atualizando y_6 em y_4:

$y_4 = (1/2) - (1/2)y_5 - (1/2)y_6 - (1/2)r_3$

$y_4 = (1/2) - (1/2)y_5 - (1/2)[(1/2) - (1/2)r_2] - (1/2)r_3$

$y_4 = (1/4) - (1/2)y_5 + (1/4)r_2 - (1/2)r_3$

as equações são:

$$\begin{array}{l|l}
r_1 = (3/4) - (5/2)y_5 - (1/4)r_2 + (1/2)r_3 & x_1 = (1/2) - (1/2)x_2 - (1/2)s_4 \\
y_6 = (1/2) - (1/2)r_2 & s_5 = (1/2) - (5/2)x_2 - (1/2)s_4 \\
y_4 = (1/4) - (1/2)y_5 + (1/4)r_2 - (1/2)r_3 & x_3 = (1/3) - (1/3)x_2 - (1/3)s_6
\end{array}$$

$L(0,p_2,p_3) \cup L(p_4,0,p_6) = \underline{r_1}, y_6, y_4, \underline{x_1}, s_5, x_3$

ação 5: r_2 saiu da base então x_2 precisa entrar, mas onde?

$MRT(x_1) = \varphi/C = (-1/2)/(1/2) = -1$

$MRT(s_5) = \varphi/C = (-5/2)/(1/2) = -5$

$MRT(x_3) = \varphi/c = (-1/3)/(1/3) = -1$

x_2 entra no lugar de S_5:

$S_5 = (1/2) - (5/2)x_2 - (1/2)s_4$

$(5/2)x_2 = (1/2) - (1/2)s_4 - s_5 \rightarrow x_2 = (1/5) - (1/5)s_4 - (2/5)s_5$

atualizando o valor de x_2 em x_1:

$x_1 = (1/2) - (1/2)x_2 - (1/2)s_4$

$x_1 = (1/2) - (1/2)[(1/5) - (1/5)s_4 - (2/5)s_5] - (1/2)s_4$

$x_1 = (2/5) - (2/5)s_4 + (1/5)s_5$

atualizando o valor de x_2 em x_3:

$x_3 = (1/3) - (1/3)x_2 - (1/3)s_6$

$x_3 = (1/3) - (1/3)[(1/5) - (1/5)s_4 - (2/5)s_5] - (1/3)s_6$

$x_3 = (4/15) + (1/15)s_4 + (2/15)s_5 - (1/3)s_6$

as equações são:

$$\begin{array}{l|l}
r_1 = (3/4) - (5/2)y_5 - (1/4)r_2 + (1/2)r_3 & x_1 = (2/5) - (2/5)s_4 + (1/5)s_5 \\
y_6 = (1/2) - (1/2)r_2 & x_2 = (1/5) - (1/5)s_4 - (2/5)s_5 \\
y_4 = (1/4) - (1/2)y_5 + (1/4)r_2 - (1/2)r_3 & x_3 = (4/15) + (1/15)s_4 + (2/15)s_5 - (1/3)s_6
\end{array}$$

$L(0,p_2,p_3) \cup L(p_4,p_5,p_6) = \underline{r_1}, y_6, y_4, \underline{x_1}, x_2, x_3$

ação 6: S_5 saiu da base então y_5 precisa entrar, mas onde?

$MRT(r_1) = \varphi/C = (-5/2)/(3/4) = -10/3$

$MRT(y_4) = \varphi/C = (-1/2)/(1/4) = -2$

y_5 entra no lugar de r_1:

$r_1 = (3/4) - (5/2)y_5 - (1/4)r_2 + (1/2)r_3$

$(5/2)y_5 = (3/4) - (1/4)r_2 + (1/2)r_3 - r_1$

$y_5 = (3/10) - (1/10)r_2 + (1/5)r_3 - (2/5)r_1$

atualizando o valor de y_5 em y_4:

$$y_4 = (1/4) - (1/2)\left[(3/10) - (1/10)r_2 + (1/5)r_3 - (2/5)r_1\right] + (1/4)r_2 - (1/2)r_3$$

$$y_4 = (1/10) + (3/10)r_2 - (3/5)r_3 + (1/5)r_1$$

as equações são:

$$y_5 = (3/10) - (1/10)r_2 + (1/5)r_3 - (2/5)r_1$$
$$y_6 = (1/2) - (1/2)r_2$$
$$y_4 = (1/10) + (3/10)r_2 - (3/5)r_3 + (1/5)r_1$$

$$x_1 = (2/5) - (2/5)s_4 + (1/5)s_5$$
$$x_2 = (1/5) - (1/5)s_4 - (2/5)s_5$$
$$x_3 = (4/15) + (1/15)s_4 + (2/15)s_5 - (1/3)s_6$$

$$L(p_1, p_2, p_3) \cup L(p_4, p_5, p_6) = y_5, y_6, y_4, x_1, x_2, x_3$$

normalizando as constantes para encontras as estratégi mistas dos jogadores:

- para o jogador 1:

  soma: $(2/5) + (1/5) + (4/15) = 6/15 + 3/15 + 4/15 = 13/15$

  $p_1 = 6/13$, $p_2 = 3/13$, $p_3 = 4/13$

- para o jogador 2:

  soma: $(1/10) + (3/10) + (1/2) = 9/10$

  $p_4 = 1/9$, $p_5 = 1/3$, $p_6 = 5/9$

calculando as utilidades para checar se estamos em equilíbrio de nash:

$$u_1(1) = (1/9) \cdot 1 + (1/3) \cdot 3 + (5/9) \cdot 0 = 10/9$$
$$u_1(2) = (1/9) \cdot 0 + (1/3) \cdot 0 + (5/9) \cdot 2 = 10/9$$
$$u_1(3) = (1/9) \cdot 2 + (1/3) \cdot 1 + (5/9) \cdot 1 = 10/9$$

$$u_2(4) = (6/13) \cdot 2 + (3/13) \cdot 1 + (4/13) \cdot 0 = 15/13$$
$$u_2(5) = (6/13) \cdot 1 + (3/13) \cdot 3 + (4/13) \cdot 0 = 15/13$$
$$u_2(6) = (6/13) \cdot 0 + (3/13) \cdot 1 + (4/13) \cdot 3 = 15/13$$

exercício 10. inicialização por x_3

Gustavo Godinho . 11/07 . 14h30

P1 / P2	4	5	6
1	1,2	3,1	0,0
2	0,1	0,3	2,1
3	2,0	1,0	1,3

BR(1) = 4 BR(4) = 3

BR(2) = 5 BR(5) = 1

BR(3) = 6 BR(6) = 2

JOGADOR	AÇÃO	VARIÁVEL	FOLGA
1	1	x_1	r_1
	2	x_2	r_2
	3	x_3	r_3
2	4	y_4	s_4
	5	y_5	s_5
	6	y_6	s_6

as equações são:

$r_1 = 1 - y_4 - 3y_5$ | $s_4 = 1 - 2x_1 - x_2$

$r_2 = 1 - 2y_6$ | $s_5 = 1 - x_1 - 3x_2$

$r_3 = 1 - 2y_4 - y_5 - y_6$ | $s_6 = 1 - x_2 - 3x_3$

ação 1: escolha arbitrária: x_3 entra na base no lugar de s_6:

$3x_3 = 1 - x_2 - s_6 \rightarrow x_3 = (1/3)[1 - x_2 - s_6]$

ação 2: s_6 saiu da base, y_6 precisa entrar, mas no lugar de quem?

$MRT(r_2) = \varphi/c = -2/1 = -2$

$MRT(r_3) = \varphi/c = -1/1 = -1$

y_6 entra no lugar de r_2:

$y_6 = (1/2)[1 - r_2]$

atualizando o valor de y_6 em r_3:

$r_3 = 1 - 2y_4 - y_5 - y_6$

$r_3 = (1/2) - 2y_4 - y_5 + (1/2)r_2$

as equações são:

$r_1 = 1 - y_4 - 3y_5$ | $s_4 = 1 - 2x_1 - x_2$

$y_6 = (1/2)[1 - r_2]$ | $s_5 = 1 - x_1 - 3x_2$

$r_3 = (1/2) - 2y_4 - y_5 + (1/2)r_2$ | $x_3 = (1/3)[1 - x_2 - s_6]$

$L(0,1,0) \cup L(0,0,1) = r_1, y_6, \underline{r_3}, s_4, s_5, \underline{x_3}$

ação 3: r_2 saiu da base então x_2 precisa entrar, mas onde?

$MRT(s_4) = \varphi/c = -1/1 = -2$

$MRT(s_5) = \varphi/c = -3/1 = -3$

$MRT(x_3) = \varphi/c = (-1/3)/(1/3) = -1$

x_2 entra no lugar de s_5:

$3x_2 = 1 - x_1 - s_5$

$x_2 = (1/3)[1 - x_1 - s_5]$

atualizando o valor de x_2 em s_4:

$s_4 = 1 - 2x_1 - x_2$

$s_4 = 1 - 2x_1 - (1/3) + (1/3)x_1 + (1/3)s_5 \rightarrow s_4 = (2/3) - (5/3)x_1 + (1/3)s_5$

$s_4 = (1/3)[2 - 5x_1 + s_5]$

atualizando o valor de x_2 em x_3:

$x_3 = (1/3)[1 - x_2 - s_6]$

$x_3 = (1/3)[1 - (1/3) + (1/3)x_1 + (1/3)s_5 - s_6] \rightarrow x_3 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}s_5 - \frac{1}{3}s_6$

$x_3 = (1/9)[2 + x_1 + s_5 - 3s_6]$

as equações são:

$r_1 = 1 - y_4 - 3y_5$ | $s_4 = (1/3)[2 - 5x_1 + s_5]$

$y_6 = (1/2)[1 - r_2]$ | $x_2 = (1/3)[1 - x_1 - s_5]$

$r_3 = (1/2) - 2y_4 - y_5 + (1/2)r_2$ | $x_3 = (1/9)[2 + x_1 + s_5 - 3s_6]$

$L(0,1,0) \cup L(0,P_5,P_6) = r_1, y_6, \underline{r_3}, s_4, x_2, \underline{x_3}$

ação 4: s_5 saiu da base então y_5 precisa entrar mas onde?

$MRT(r_1) = \varphi/c = -3/1 = -3$

$MRT(r_3) = \varphi/c = -1/(1/2) = -2$

y_5 entrará no lugar de r_1:

$3y_5 = 1 - y_4 - r_1 \rightarrow y_5 = (1/3)[1 - y_4 - r_1]$

atualizando o valor de y_5 em r_3:

$r_3 = (1/2) - 2y_4 - (1/3) + (1/3)y_4 + (1/3)r_1 + (1/2)r_2$

$r_3 = (1/6) - (5/3)y_4 + (1/2)r_2 + (1/3)r_1$

$r_3 = (1/6).[1 - 10y_4 + 3r_2 + 2r_1]$

as equações são:

$$\begin{array}{l|l} y_5 = (1/3)[1 - y_4 - r_1] & s_4 = (1/3)[2 - 5x_1 + s_5] \\ y_6 = (1/2)[1 - r_2] & x_2 = (1/3)[1 - x_1 - s_5] \\ r_3 = (1/6).[1 - 10y_4 + 3r_2 + 2r_1] & x_3 = (1/9)[2 + x_1 + s_5 - 3s_6] \end{array}$$

$L(p_1, p_2, 0) \cup L(0, p_5, p_6) = y_5, y_6, \underline{r_3}, s_4, x_2, \underline{x_3}$

ação 5: r_1 saiu da base então x_1 precisa entrar mas onde?

$MRT(s_4) = \varphi/c = (-5/3)/(2/3) = -5/2$ $MRT(x_3) = \varphi/c = (1/9)/(2/9) = 1/2$

$MRT(x_2) = \varphi/c = (-1/3)(1/3) = -1$

x_1 entra no lugar de s_4:

$3s_4 = 2 - 5x_1 + s_5 \rightarrow 5x_1 = 2 + s_5 - 3s_4$

$x_1 = (1/5)[2 + s_5 - 3s_4]$

atualizando o valor de x_1 em x_2:

$x_2 = (1/3)[1 - x_1 - s_5]$

$x_2 = (1/3)[1 - (2/5) - (1/5)s_5 + (3/5)s_4 - s_5]$

$x_2 = (1/5)[1 - 2s_5 + s_4]$

atualizando o valor de x_1 em x_3:

$x_3 = (1/9)[2 + x_1 + s_5 - 3s_6]$

$x_3 = (1/9)[2 + (2/5) + (1/5)s_5 - (3/5)s_4 + s_5 - 3s_6]$

$x_3 = (1/9)[(12/5) + (6/5)s_5 - (3/5)s_4 - 3s_6]$

$x_3 = (1/15)[4 + 2s_5 - s_4 - 5s_6]$

as equações são:

$$\begin{array}{l|l} y_5 = (1/3)[1 - y_4 - r_1] & x_1 = (1/5)[2 + s_5 - 3s_4] \\ y_6 = (1/2)[1 - r_2] & x_2 = (1/5)[1 - 2s_5 + s_4] \\ r_3 = (1/6).[1 - 10y_4 + 3r_2 + 2r_1] & x_3 = (1/15)[4 + 2s_5 - s_4 - 5s_6] \end{array}$$

$L(p_1, p_2, 0) \cup L(p_4, p_5, p_6) = y_5, y_6, \underline{r_3}, x_1, x_2, \underline{x_3}$

ação 6: s_4 saiu da base então y_4 precisa entrar mas onde?

$MRT(y_5) = \varphi/c = (-1/3)/(1/3) = 1$

$MRT(r_3) = \varphi/c = (-10/6)/(1/6) = -10$

y_4 entra no lugar de r_3:

$6r_3 = 1 - 10y_4 + 3r_2 + 2r_1$

$10y_4 = 1 + 3r_2 + 2r_1 - 6r_3$

$y_4 = (1/10) + (3/10)r_2 + (2/10)r_1 - (6/10)r_3$

$y_4 = (1/10)[1 + 3r_2 + 2r_1 - 6r_3]$

atualizando o valor de y_4 em y_5:

$y_5 = (1/3)[1 - y_4 - r_1]$

$y_5 = (1/3)[1 - (1/10) - (3/10)r_2 - (2/10)r_1 + (6/10)r_3 - r_1]$

$y_5 = (1/3)[(9/10) - (3/10)r_2 - (12/10)r_1 + (6/10)r_3]$

$y_5 = (1/30)[9 - 3r_2 - 12r_1 + 6r_3]$

as equações são:

$$\begin{array}{l|l} y_5 = (1/30)[9 - 3r_2 - 12r_1 + 6r_3] & x_1 = (1/5)[2 + s_5 - 3s_4] \\ y_6 = (1/2)[1 - r_2] & x_2 = (1/5)[1 - 2s_5 + s_4] \\ y_4 = (1/10)[1 + 3r_2 + 2r_1 - 6r_3] & x_3 = (1/15)[4 + 2s_5 - s_4 - 5s_6] \end{array}$$

$L(p_1, p_2, p_3) \cup L(p_4, p_5, p_6) = y_5, y_6, y_4, x_1, x_2, x_3$

normalizando as constantes para encontras as estratégias mistas dos jogadores:

- para o jogador 1:

soma: $(2/5) + (1/5) + (4/15) = 6/15 + 3/15 + 4/15 = 13/15$

$p_1 = 6/13$, $p_2 = 3/13$, $p_3 = 4/13$

- PARA O JOGADOR 2:

$\text{soma}: (1/10) + (9/30) + (1/2) = 1/10 + 3/10 + 5/10 = 9/10$

$p_4 = 1/9, \quad p_5 = 1/3, \quad p_6 = 5/9$

CALCULANDO AS UTILIDADES PARA CHECAR SE ESTAMOS EM EQUILÍBRIO DE NASH:

$u_1(1) = (1/9) \cdot 1 + (1/3) \cdot 3 + (5/9) \cdot 0 = 10/9$

$u_1(2) = (1/9) \cdot 0 + (1/3) \cdot 0 + (5/9) \cdot 2 = 10/9$

$u_1(3) = (1/9) \cdot 2 + (1/3) \cdot 1 + (5/9) \cdot 1 = 10/9$

$u_2(4) = (6/13) \cdot 2 + (3/13) \cdot 1 + (4/13) \cdot 0 = 15/13$

$u_2(5) = (6/13) \cdot 1 + (3/13) \cdot 3 + (4/13) \cdot 0 = 15/13$

$u_2(6) = (6/13) \cdot 0 + (3/13) \cdot 1 + (4/13) \cdot 3 = 15/13$