Lemke-Howson Algorithm

I \ II	4	5
1	3,1	3,0
2	2,0	5,2
3	0,4	6,3

Diagrama de melhor resposta de I

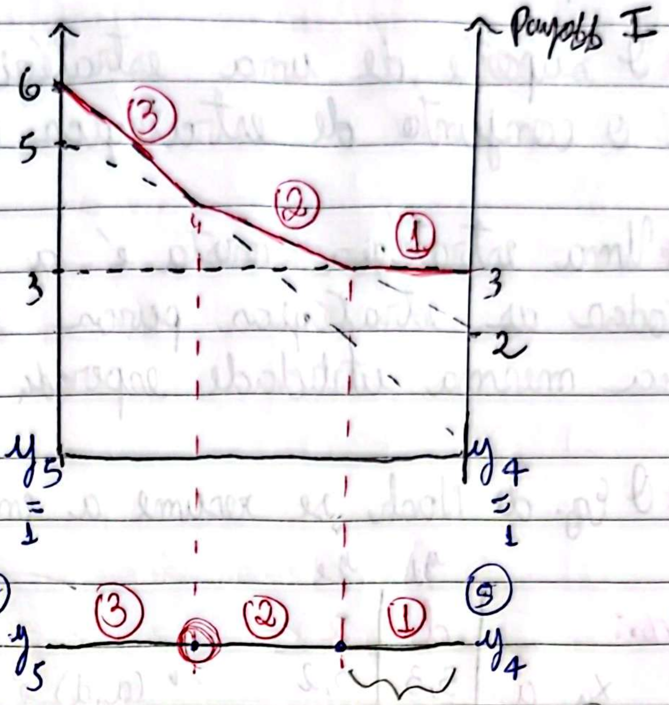
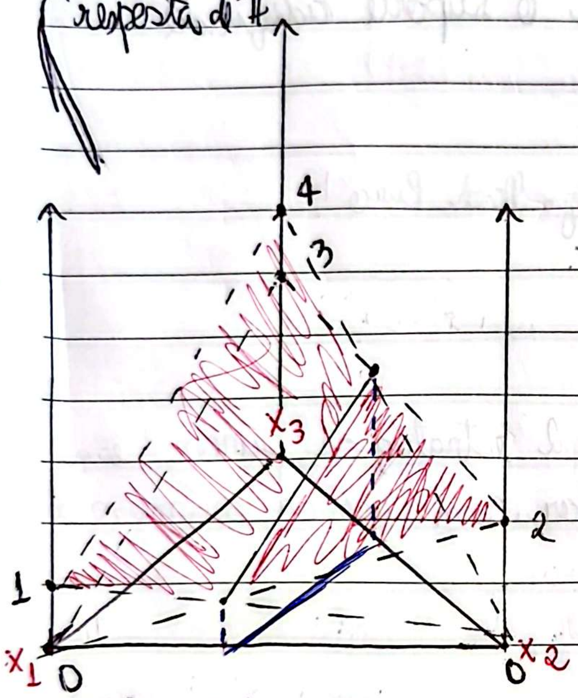
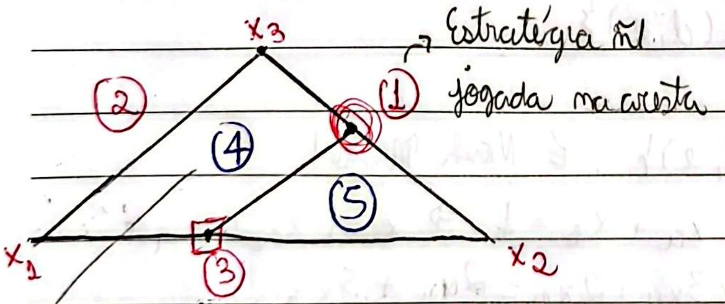


Diagrama de melhor resposta de II





Nos 2 grafos, busca-se um par de pontos "◎" em que, em conjunto, englobem todos os rótulos das ações:

I: 2 3

II: 4 5 1 → ação que não está sendo jogada

⇓

I ∪ II: 1 2 3 4 5

⇓

É Nash!

Formulação

$$\sum_{k \in A_2} u_1(a_1^j, a_2^k) \cdot s_2^k + r_1^j = U_1^* \qquad \forall j \in A_1$$

$$\sum_{j \in A_1} u_2(a_1^j, a_2^k) \cdot s_1^j + r_2^k = U_2^* \qquad \forall k \in A_2$$

Exemplo resolvido

I \ II	y_4	y_5
x_1	0,1	6,0
x_2	2,0	5,2
x_3	3,4	3,3

* Assume-se que $U_i^* = 1$:

$$\underset{\text{I}}{\sum_{k \in A_2} u_1(a_1^j, a_2^k) \cdot s_2^k + r_1^j = 1} \quad \text{e} \quad \underset{\text{II}}{\sum_{j \in A_1} u_2(a_1^j, a_2^k) \cdot s_1^j + r_2^k = 1}$$

$$\text{I:}\begin{cases} (0 \cdot y_4 + 6 \cdot y_5) + r_1 = 1 \\ (2 \cdot y_4 + 5 y_5) + r_2 = 1 \\ (3y_4 + 3y_5) + r_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 - 6y_5 \\ r_2 = 1 - 2y_4 - 5y_5 \\ r_3 = 1 - 3y_4 - 3y_5 \end{cases}$$

$$\text{II:}\begin{cases} (1x_1 + 4x_3) + r_4 = 1 \\ (2x_2 + 3x_3) + r_5 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r_4 = 1 - x_1 - 4x_3 \\ r_5 = 1 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

→ Base do sistema de equações

I: (a_1^1, a_1^2, a_1^3) II: (a_2^1, a_2^2)

* Escolhe-se, arbitrariamente, uma variável para entrar na base (x_2)
(Ao entrar na base, a variável deve ir para o lado esquerdo e a equação deve ser atualizada)

I: (a_1^1, a_1^2, a_1^3) II: (a_2^1, a_1^2)

Antes → Depois

$$r_5 = 1 - 2x_2 - 3x_3 \longrightarrow x_2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}r_5$$

* A partir de agora, a variável que deve entrar na base é escolhida pela dual da variável que saiu por último (r_5 saiu, logo y_5 entra)

* Como y_5 aparece nas 3 equações do jogador ~~1~~, a escolha de qual entrará na base deve ser feita através do MRT (Min. Ratio Test)

$$V = C + qu + T$$

- T → Comb. linear de variáveis $\neq u$ e v
- u → Variável de entrada
- q → Constante (inicialmente $= 1$)
- C → Coeficiente constante
- V → Variável clashing

A variável que deve sair é a que possui MENOR q/C

$$\text{I}: \begin{cases} r_1 = 1 - 6y_5 \\ r_2 = 1 - 2y_4 - 5y_5 \\ r_3 = 1 - 3y_4 - 3y_5 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} MRT(r_1) = -6/1 = -6 \rightarrow r_1 \text{ deve sair da base!} \\ MRT(r_2) = -5/1 = -5 \\ MRT(r_3) = -3/1 = -3 \end{array}$$

Antes:

$$r_1 = 1 - 6y_5 \rightarrow \boxed{y_5 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} r_1}$$

$-1/2$

↓ substituindo y_5 nas outras equações

$$r_2 = 1 - 2y_4 - 5\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} r_1\right)$$

$$\boxed{r_2 = \frac{1}{6} - 2y_4 + \frac{5}{6} r_1}$$

$$\boxed{r_3 = \frac{1}{2} - 3y_4 + \frac{1}{2} r_1}$$

Logo:

$$\text{I}: \begin{cases} y_5 = 1/6 - 1/6\, r_1 \\ r_2 = 1/6 - 2y_4 + 5/6\, r_1 \\ r_3 = 1/2 - 3y_4 + 1/2\, r_1 \end{cases}$$

I: (a_2^1, a_1^2, a_1^3)

II: (a_2^1, a_1^2)

* Como r_1 saiu da base, x_1 deve entrar:

*

Antes: $r_4 = 1 - x_1 - 4x_3$ $\longrightarrow$ Depois: $x_1 = 1 - r_4 - 4x_3$

Logo:

$$\begin{cases} y_5 = 1/6 - 1/6\, r_1 \\ r_2 = 1/6 - 2y_4 + 5/6\, r_1 \\ r_3 = 1/2 - 3y_4 + 1/2\, r_1 \\ x_1 = 1 - r_4 - 4x_3 \\ x_2 = 1/2 - 3/2\, x_3 - 1/2\, r_5 \end{cases}$$

I: (a_2^2, a_2^2, a_1^3) II: (a_1^1, a_1^2)

* Como r_4 saiu da base, y_4 deve entrar:

$MRT(r_2) = -2/(1/6) = -12$ $\rightarrow$ r_2 deve sair da base!

$MRT(r_3) = -3/(1/2) = -6$

Antes: $r_2 = 1/6 - 2y_4 + 5/6\, r_1$ $\longrightarrow$ Depois:

$\boxed{y_4 = 1/12 - 1/2\, r_2 + 5/12\, r_1}$ $+1/2\, r_1$

$r_3 = 1/2 - 3(1/12 - 1/2\, r_2 + 5/12\, r_1) +$

$r_3 = 1/2 - 3/12 + 3/2\, r_2 - 5/4\, r_1$

$\boxed{r_3 = 1/4 + 3/2\, r_2 - 5/4\, r_1}$ $+1/2\, r_1$

Logo:

$$\begin{cases} y_5 = 1/6 - 1/6\, r_1 \\ y_4 = 1/12 - 1/2\, r_2 + 5/12\, r_1 \\ r_3 = 1/4 + 3/2\, r_2 - 3/4\, r_1 + 1/2 \\ x_1 = 1 - r_4 - 4x_3 \\ x_2 = 1/2 - 3/2\, x_3 - 1/2\, r_5 \end{cases}$$

I: II:

$(a_2^2, a_2^1, a_1^3) \cup (a_1^1, a_1^2) = a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_2^1, a_2^2$ $\rightarrow$ O conjunto união representa todos os tableaux. É Nash!

$1-(1/2 - r_1/2 - 2y_4)$
$1 - 1/2 + r_1/2 + \underbrace{2y_4 - 10y_4}_{-8}$
$1/2$

$-5 + 5/2 \quad 10/2$

(/ /)

Exemplo: Rode o Lemke-Howson para o jogo abaixo, adicionando a_2^1 na base inicialmente.

	a_2^1, y_3, r_3	a_2^2, y_4, r_4
a_1^1, x_1, r_1	2, 1	4, 4
a_1^2, x_2, r_2	1, 5	10, 10

→ Definindo o sistema de equações iniciais:

$$\begin{cases} r_1 = 1 - 2y_3 - 4y_4 \\ r_2 = 1 - y_3 - 10y_4 \\ r_3 = 1 - x_1 - 5x_2 \\ r_4 = 1 - 4x_1 - 10x_2 \end{cases}$$

I: (a_1^1, a_1^2) II: (a_2^1, a_2^2)

→ Adicionando a_2^1 na base:

$MRT(r_1) = -2/1 = -2 \longrightarrow r_1$ deve sair da base (a_1^1)

$MRT(r_2) = -1/1 = -1$

$1 - 1/2$

Logo:

$$\begin{cases} y_3 = 1/2 - r_1/2 - 2y_4 \\ r_2 = 1/2 + r_1/2 - 8y_4 \\ r_3 = 1 - x_1 - 5x_2 \\ r_4 = 1 - 4x_1 - 10x_2 \end{cases}$$

I: (a_2^1, a_1^2); II: (a_2^1, a_2^2)

→ Como r_1 saiu da base, x_1 deve entrar (a_1^1):

$MRT(r_3) = -1$

$MRT(r_4) = -4 \rightarrow r_4$ deve sair da base (a_2^2):

$x_1 = 1/4 - r_4/4 - \cancel{10}5/2\, x_2$

Logo:

$$\begin{cases} y_3 = 1/2 - r_1/2 - 2y_4 \\ r_2 = 1/2 + r_1/2 - 8y_4 \\ r_3 = 3/4 + r_4/4 - 5/2\,x_2 \\ x_1 = 1/4 - r_4/4 - 5/2\,x_2 \end{cases}$$

I: (a_2^1, a_1^2) II: (a_2^1, a_1^1)

→ Como r_4 saiu da base, y_4 deve entrar (a_2^2): $-4r$

$MRT(y_3) = -2/(1/2) = -4$

$MRT(r_2) = -8/(1/2) = -16$ → r_2 deve sair da base

Logo:

$y_3 = 1/2 - r_1/2 - 1/8 - r_1/8 + r_2/4$ → $y_3 = 3/8 - 4r_1/8 - r_1/8 + r_2/4$

$y_4 = 1/16 + r_1/16 - r_2/8$

$$\begin{cases} y_3 = 3/8 - 5r_1/8 + r_2/4 \\ y_4 = 1/16 + r_1/16 - r_2/8 \\ r_3 = 3/4 + r_4/4 - 5/2\, x_2 \\ x_1 = 1/4 - r_4/4 - 5/2\, x_2 \end{cases}$$

I: (a_2^1, a_2^2) II: (a_2^1, a_1^1)

→ Como r_2 saiu da base, x_2 deve entrar

$MRT(r_3) = -5/2\,(3/4) = -20/6 = -10/3$

$MRT(x_1) = -5/2\,(1/4) = -20/2 = -10$ → x_1 deve sair da base

$x_2 = \frac{2}{5 \cdot 4} - \frac{2r_4}{5 \cdot 4} - 2/5\, x_1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} r_4 - \frac{2}{5} x_1$

I: (a_2^1, a_2^2) II: (a_2^1, a_1^2)

$r_3 = 3/4 + r_4/4 - 1/4 + r_4/4 + x_1 = 1/2 + r_4/2 + x_1$

→ Como x_1 saiu da base, r_1 deve entrar (a_1^1):

$MRT(y_3) = (-5/8)/(3/8)$ → y_3 deve sair da base

$MRT(y_4) =$

$r_1 = \frac{3}{8}\cdot\frac{8}{5} - \frac{8}{5} y_3 + \frac{8^2}{5 \cdot 4} r_2 = 3/5 - 8/5\, y_3 + 2/5\, r_2$

I: (a_1^1, a_2^2) II: (a_2^1, a_1^2)

$y_4 = 1/16 + \frac{1}{16}\left(\frac{3}{5} - \frac{8}{5} y_3 + \frac{2}{5} r_2\right) - \frac{r_2}{8} = \frac{5}{16 \cdot 5} + \frac{3}{80} - \frac{1}{10} y_3 + \frac{1}{40} r_2 - \frac{5 r_2}{8 \cdot 5}$

$y_4 = \frac{8}{80} - \frac{1}{10} y_3 - \frac{4r_2}{40}$

Logo:

$$\begin{cases} r_1 = 3/5 - 8/5\cancel{y_3} + 2/5\cancel{r_2} \\ y_4 = 1/10 - 1/10\cancel{y_3} - 1/10\cancel{r_2} \\ r_3 = 1/2 + \cancel{r_4}/2 + \cancel{x_1} \\ x_2 = 1/10 - 1/10\cancel{r_4} - 2/5\cancel{x_1} \end{cases}$$

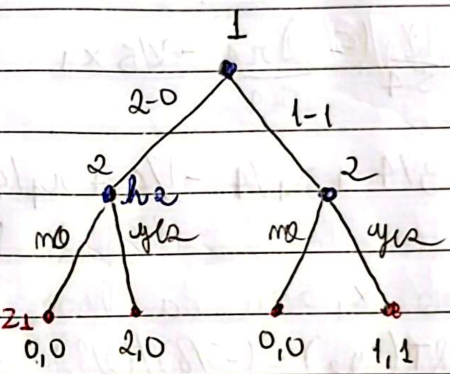
$y_4 = \frac{1/10}{1/10} = 1$ e $x_2 = \frac{1/10}{1/10} = 1$

$s_1 = (x_1 = 0, x_2 = 1)$ e $s_2 = (y_3 = 0, y_4 = 1)$

Extensive Form Games

* Exibe a noção de jogo sequencial na seguinte forma
$G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$

- N: Conjunto dos jogadores
- A: Conjunto (único) das ações
- H: Conjunto de nós não terminais
- Z: Conjunto de nós terminais
- χ: $H \to 2^A$ função das ações
- ρ: $H \to N$ função dos jogadores
- σ: $H \times A \to H \cup Z$ função do sucessor
- u: utilidades



$N = \{1, 2\}$

$A_1 = \{2\text{-}0, 1\text{-}1\}, A_2 = \{no, yes\}$

H •

Z •

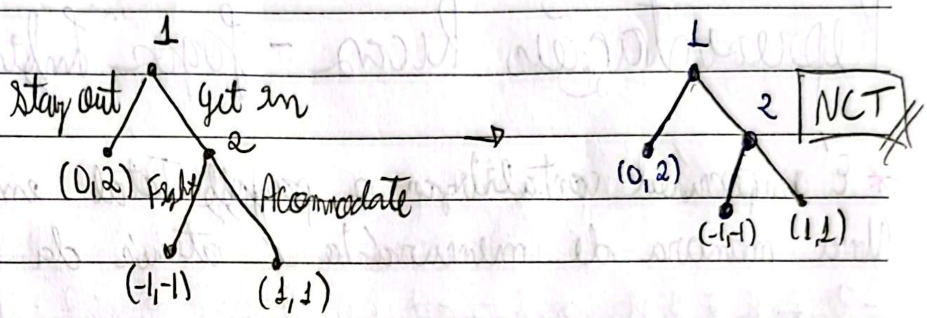
$\sigma(h_2, no) = z_1$

$u_1(z_1) = 0$

* A estratégia do jogador requer uma decisão em cada nó não terminal, mesmo que ele não seja alcançável

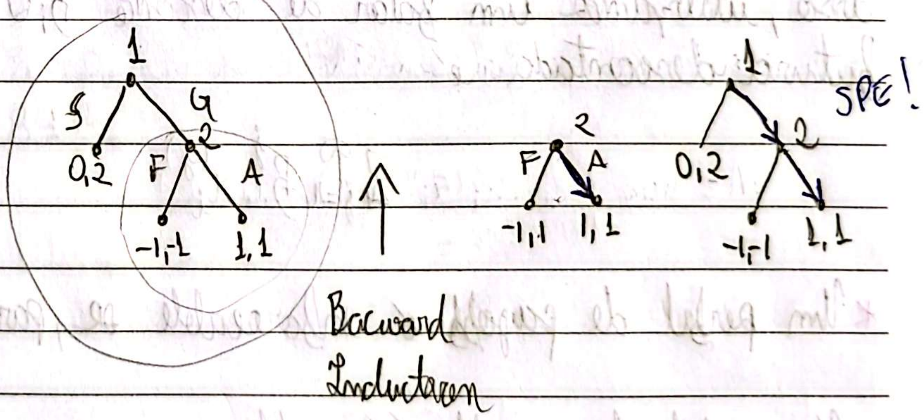
* Todo Perfect-Information Game na forma extensiva possui um Equilíbrio de Nash de estratégias puras

* Alguns Equilíbrios de Nash possuem ameaças não críveis (Non-Credible Threat). Nesse caso, um jogador faz uma ameaça, mas que não seria racional executar se a situação realmente ocorrer:



* No exemplo acima, o NCT é Nash, pois ambos estão dando as melhores respostas.

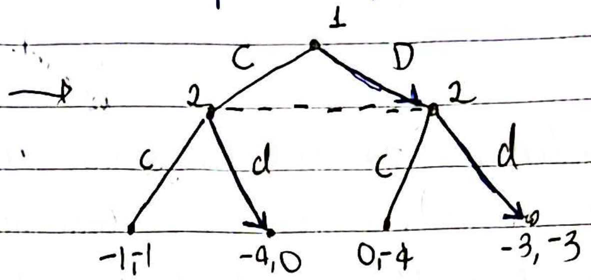
* Para superar o NCT, é definido o conceito de subgame perfect equilibrium (SPE). No SPE, todas as estratégias devem representar um Nash para cada subjogo



* Imperfect Information game consiste em aplicar Information sets, que denotam que o jogador não sabe em que ponto ele está. Esse conceito quebra a ideia de sequência, tornando possível normal-form game → imperfect information game:

	c	d
C	-1,-1	-4,0
D	0,-4	-3,-3

→



Representações Ricas - Jogos Infinitos

* É impossível contabilizar o payoff total em jogos infinitos. Uma maneira de mensurá-lo é através da recompensa média:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k} r_i^{(j)}}{k}$$

→ sequência de payoffs

* Em muitos casos, o agente se preocupa mais com o payoff presente do que com o futuro (seres humanos). Para modelar isso, utilizamos um fator de desconto β; $0 \leq \beta \leq 1$. A recompensa futura descontada é:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j} \cdot r_i^{(j)}$$

minmax

* Um perfil de payoff é enforceable se, para todo $\forall i \in N$, $r_i \geq v_i$

* Um perfil de payoff é feasible se existe um α racional e não negativo em que $\forall i \in N$, $r_i = \sum_{a \in A} \alpha_a u_i(a)$ com $\sum_{a \in A} \alpha_a = 1$

* Exemplo:

	L	R
U	4,0	1,1
D	0,0	0,4

* $(-1,1)$ × enforceable → < minmax
× feasible → não reproduzível com α

* $(10,10)$ ✓ enforceable → > minmax
× feasible → não reproduzível com α

* $(0,0)$ × enforceable → < minmax
✓ feasible → $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \alpha_3=1, \alpha_4=0$

* $(1,1)$ ✓ enforceable → = minmax
✓ feasible → $\alpha_1=0, \alpha_2=1, \alpha_3=0, \alpha_4=0$

* $(2,2)$ ✓ enforceable → > minmax
✓ feasible → $\alpha_1=0{,}5, \alpha_2=0, \alpha_3=0, \alpha_4=0{,}5$

Folk Theorem

* Se o perfil de payoff é Nash, é enforceable
Mesmo que $r_i = v_i$, eles ainda estão dando as melhores respostas

* Se r é feasible e enforceable, é Nash
Alguns Nash podem não ser feasible pelos α irracionais

* Exemplo:

	L	R
U	4,0 $^{3/7}$	1,1 $^{1/7}$
D	0,0 $^{0/7}$	0,4 $^{3/7}$

$\alpha = (3/7, 1/7, 0/7, 3/7)$
$B = (3, 1, 0, 3)$
$\gamma = \sum B = 7$

$$\Rightarrow r_1 = \sum_{a \in A} \frac{B_a \cdot u_1(a)}{\gamma}$$

$$= 4 \cdot 3/7 + 1/7 + 0 + 0$$
$$= 13/7 > 1 \rightarrow \text{Nash!}$$

Feasible
Enforceable

Descontos em Jogos Repetidos

* Exemplo:

	C	D
C	3,3	0,5
D	5,0	1,1

(1) → Se o jogador i cooperar: $3 + B.3 + B^2.3 \ldots = 3 . \frac{1}{1-B}$

(2) → Se o jogador trair NO PRESENTE: $5 + \underbrace{B.1 + B^2.1 \ldots}_{\text{Demais jogadores acionam Grim Trigger RANCOR!}} = 5 + B\frac{1}{1-B}$

→ Para valer a pena cooperar, (1) ≥ (2)

$-2 + B.2 + B^2.2 \ldots \geq 0 = -2 + B.\frac{2}{1-B} \rightarrow -2 + B.\frac{2}{1-B} \geq 0$

$B.\frac{2}{1-B} \geq 2$

$2B \geq 2 - 2B$

$4B \geq 2$

$B \geq 1/2$

* O máximo ganho em TRAIR no presente é:

$M = \max_{i, a_i''} \underbrace{u_i(a_i'', a_{-i}')}_{\text{utilidade da melhor opção presente dado que } -i \text{ jogam } a'} - \underbrace{u_i(a')}_{\text{utilidade do Nash passado}}$

No dilema acima: $M = 5 - 3 = 2$

* A mínima perda por período devido ao ~~castigo~~ future punishment:

$m = \min_i \underbrace{u_i(a')}_{\text{utilidade do eq. Nash passado sem trair}} - \underbrace{u_i(a)}_{\text{jogadores passam a jogar mínimos}}$

* $m = 3 - 1 = 2$

* Generalizando, o máximo ganho possível em desviar AGORA é:

$$M - m\frac{B_i}{1-B}$$

* Não vale a pena desviar se $M - m\frac{B_i}{1-B} \leq 0$

$$M \leq m\frac{B}{1-B}$$

$$\frac{M}{m} \leq \frac{B}{1-B} \rightarrow$$

$$B \geq \frac{M}{m} - \frac{M}{m}B$$

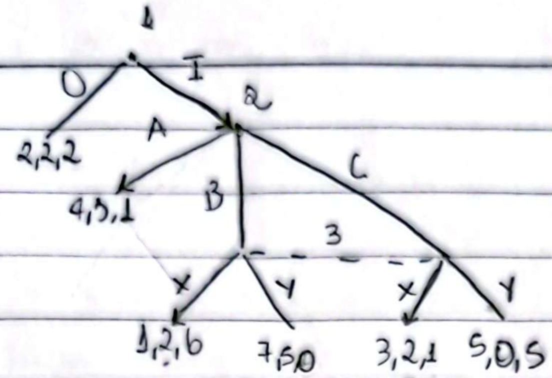
$$(1 + M/m)B \geq M/m$$

$$B \geq \frac{M}{m(1+M/m)}$$

$$B \geq \frac{M}{m+M}$$

* No dilema, desviar não é vantajoso se $B \geq \frac{2}{2+2} \geq 1/2$

2.

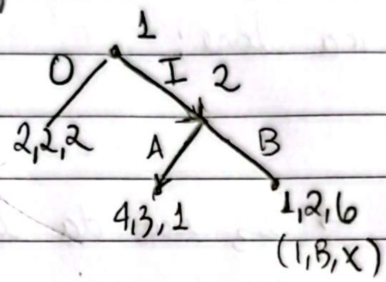


a) SPNE: {I, A, X}

b) 3 não possui uma estratégia dominante

	X	Y
B	2,6	5,0
C	2,1	0,5

→



SPNE: {I, A, X}

3.

a) P1 e P2 jogam 5 sempre, e se algum trair, joga 1 (minmax) até o fim do jogo

Cooperando: $5 + \beta 5 + \beta^2 \cdot 5 + \dots = \frac{5}{1-\beta}$

Traindo: $8 + \beta \cdot 1 + \beta^2 \cdot 1 + \dots = 8 + \beta \frac{1}{1-\beta}$

$M = 3$

$m = 4$ Cooperar vale a pena se $\beta_{min} \geq \frac{M}{m+M} \geq \frac{3}{7}$

→ Como $\beta > \beta_{min}$

$4/5 > 3/7$, é SPE

b) Ainda seria um equilíbrio, pois $\beta' = 3/5 \geq \beta_{min}$

4.

		y_1	y_2	y_3
a) P_1	x_1	0,0	4,3	2,4
	x_2	1,4	2,0	0,0

$$\begin{cases} r_1 = 1 - \quad -4y_2 - 2y_3 \\ r_2 = 1 - y_1 - 2y_2 \\ s_1 = 1 - \quad -4x_2 \\ s_2 = 1 - 3x_1 \\ s_3 = 1 - 4x_1 \end{cases}$$

b) → Colocando x_1 na base:

$MRT(s_2) = -3$

$MRT(s_3) = -4 \rightarrow s_3$ sai da base

$\boxed{x_1 = 1/4 - s_3/4}$ //

Logo:

$$\begin{cases} r_1 = 1 \quad -4y_2 - 2y_3 \\ r_2 = 1 - y_1 - 2y_2 \\ s_1 = 1 \quad -4x_2 \\ s_2 = 1/4 + 3s_3/4 \\ x_1 = 1/4 - s_3/4 \end{cases}$$

→ Como s_3 saiu da base, y_3 deve entrar;

Logo:

$y_3 = 1/2 - r_1/2 - 2y_2$

$$\begin{cases} r_2 = 1 - y_1 - 2y_2 \\ s_1 = 1 - 4x_2 \\ s_2 = 1/4 + 3s_3/4 \\ x_1 = 1/4 - s_3/4 \end{cases}$$

c) I: II:

$(a_2^3, a_1^2) \cup (a_2^1, a_2^2, a_1^1) = (a_1^1, a_1^2, a_2^3, a_2^2, a_2^3)$

↓

Nash!

$s_1 = (1, 0)$

$s_2 = (0, 0, 1)$

→ Após achar Nash, o próximo passo é Random!

d) → x_2 entra na base:

$x_2 = 1/4 - s_1/4$

→ Se s_1 sair da base, y_1 entra

$y_1 = 1 - r_2 - 2y_2$

Logo:

$$\begin{cases} y_3 = 1/2 - r_1/2 - 2y_2 \\ y_1 = 1 - r_2 - 2y_2 \\ x_2 = 1/4 - s_1/4 \\ s_2 = 1/4 + 3s_3/4 \\ x_1 = 1/4 - s_3/4 \end{cases}$$

e)

I: II:

$(a_2^3, a_2^1) \cup (a_1^2, a_2^2, a_1^1) = (a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_3^2, \ldots$

↓

Nash!

$s_1 = (1/2, 1/2)$

$s_2 = (2/3, 0, 1/3) = (1/3, 2/3)$

$3/2 \quad 3/2$