Lista 2 - 6.11 Exercises

Conteúdos

- Equilíbrio de Nash
    - Estratégia Pura: [1, 3, 10b, 10c]
        - Encontrar todos os equilíbrios puros: [4b, 5, 6a, 6b, 8a, 12a, 13a, 13b, 15d]
    - Encontrar todos os equilíbrios: [6c, 7a, 7b, 9, 10a, 14a]
    - Estratégia Mista: [8b, 14b, 15c?, 15e?]
- Schelling's focal point [8c]
- "Social-Welfare maximizing": [2]
- Matriz de payoffs
    - Construir: [15a]
    - Avaliar: [15b]
- Dominância de estratégias
    - Dominante: [4a]
    - Dominada: [11]
    - Fracamente dominada: [12a]

1. Say whether the following claim is true or false, and provide a brief (1-3 sentence) explanation for your answer

Claim: If player A in a two-person game has a dominant strategy s_A, then there is a pure strategy Nash equilibrium in which player A plays s_A and player B plays a best response to S_A.

- **Resposta 1:** Verdadeiro. Se considerarmos que a estratégia S_A é estritamente dominante para o jogador A, logo, não haverá outra estratégia para o jogador A que resulte em maior payoff, isso independentemente da escolha do jogador B. Sendo assim, o jogador B deve escolher a melhor resposta para a estratégia S_A. Com isso, há um Equilíbrio de Nash de Estratégia Pura.

2. Consider the following statement

> In a Nash equilibrium of a two-player game each player is playing an optimal strategy, so the two player's strategies are social-welfare maximizing.

Is this statement correct or incorrect? If you think it is correct, give a brief (1-3 sentence) explanation for why. If you think it is incorrect, give an example of a game discussed in Chapter 6 that shows it to be incorrect (you do not need to spell out all the details of the game, provided you make it clear what you are referring to), together with a brief (1-3 sentence) explanation.

- **Resposta 2:** A afirmação é incorreta. Um exemplo disso é o Dilema do Prisioneiro, onde ambos os jogadores têm uma estratégia dominante de trair o outro, resultando em um equilíbrio de Nash. No entanto, essa escolha não maximiza o bem-estar social, pois ambos os jogadores teriam um resultado melhor se cooperassem. Portanto, a estratégia ótima para cada jogador não leva ao resultado socialmente ótimo.
  - **Dúvidas:**
    - O que seria "social-welfare maximizing"? É o mesmo que "Pareto Dominante"?
      - **Resposta:** Não. O termo "social-welfare maximizing" é maximizar a soma dos payoffs dos jogadores. O Pareto Dominante é quando não há como melhorar o payoff de um jogador sem piorar o payoff do outro jogador.
    - A estratégia ótima é a que maximiza o payoff de cada jogador?
      - **Resposta:** Supõe-se que sim.

3. Find all pure strategy Nash equilibria in the game below. In the payoff matrix below the rows correspond to player A's strategies and the columns correspond to player B's strategies. The first entry in each box is player A's payoff and the second entry is player B's payoff

3	$B : L$	$B : R$
$A : U$	1, **2**	**3**, **2**
$A : D$	**2**, **4**	0, 2

- **Resposta 3:** O equilíbrio de Nash de estratégia pura é $\{(D, L), (U, R)\}$.
  - **Justificativa:**
    - L Domina fracamente R pois os payoffs de L são pelo menos tão bons quanto os resultados de R; sendo assim, o jogador B jogará L; Sabendo disso, o jogador A escolherá a opção que lhe render maior payoff, dada a escolha de L, sendo essa a estratégia D.
    - E no caso do (U, R), caso o A jogue U, pro B tanto faz se ele jogar L ou R. E se B jogar R, a melhor estratégia de A é jogar U.

4. Consider the two-player game with players, strategies and payoffs described in the following game matrix

4	$B : L$	$B : M$	$B : R$
$A : t$	0, **3**	**6**, 2	1, 1
$A : m$	2, **3**	0, 1	**7**, 0
$A : b$	**5**, **3**	4, 2	3, 1

Figure 6.28: Payoff Matrix

(a) Does either player have a dominant strategy? Explain briefly (1-3 sentences)

- **Resposta 4a:** O jogador A não tem uma estratégia dominante. Já o jogador B tem uma estratégia dominante, que é L, pois essa estratégia domina estritamente as outras duas, M e R, visto que seus payoffs são sempre maiores que as alternativas. Como então o jogador B jogará L, o jogador A escolherá a melhor resposta para essa estratégia, que é b, mesmo que isso não seja uma estratégia dominante para si.

(b) Find all pure strategy Nash equilibria for this game

- **Resposta 4b:** O equilíbrio de Nash de estratégia pura é $\{(b, L)\}$.

5. Consider the following two-player game in which each player has three strategies

5	$B : L$	$B : M$	$B : R$
$A : U$	1, 1	2, 3	1, **6**
$A : M$	**3**, 4	**5**, **5**	**2**, 2
$A : D$	1, **10**	4, 7	0, 4

Find all the (pure strategy) Nash equilibria for this game.

- **Resposta 5:** O equilíbrio de Nash de estratégia pura é $\{(M, M)\}$.
  - **Explicação:** Inicialmente marquei em negrito todas as melhores respostas de cada jogador. Ex.: Caso B jogue L, o jogador A deverá jogar M para maximizar seu payoff. Se A jogar D, o jogador B deverá jogar L para maximizar seu payoff. E assim por diante. Com isso, o único equilíbrio de Nash é quando ambos os jogadores jogam M.

6. In this question we will consider several two-player games. In cach payoff matrix below the rows correspond to player A's strategies and the columns correspond to player B's strategies. The first entry in each box is player A's payoff and the second entry is player B's payoff

(a) Find all pure (non-randomized) strategy Nash equilibria for the game described by the payoff matrix below.

6a	$B : L$	$B : R$
$A : U$	2, 15	4, **20**
$A : D$	**6**, 6	**10**, **8**

- **Resposta 6a:** O equilíbrio de Nash de estratégia pura é $\{(D, R)\}$.

    - **Explicação:** Em (D, R), ambos estão jogando suas melhores respostas à estratégia do outro.
    - **Observação:** R é uma estratégia estritamente dominante para o jogador B.

(b) Find all pure (non-randomized) strategy Nash equilibria for the game described by the payoff matrix below.

6b	$B: L$	$B: R$
$A: U$	**3**, **5**	**4**, 3
$A: D$	2, 1	1, **6**

- **Resposta 6b:** O equilíbrio de Nash de estratégia pura é $\{(U, L)\}$.
    - **Observação:** U é uma estratégia estritamente dominante para o jogador A.

(c) Find *all* Nash equilibria for the game described by the payoff matrix below.

6c	$B: L$	$B: R$
$A: U$	1, 1	**4**, **2**
$A: D$	**3**, **3**	2, 2

> **Hint:** This game has a both pure strategy equilibria and a mixed strategy equilibrium. To find the mixed strategy equilibrium let the probability that player A uses strategy U be p and the probability that player B uses strategy L be q. As we learned in our analysis of matching pennies, if a player uses a mixed strategy (one that is not really just some pure strategy played with probability one) then the player must be indifferent between two pure strategies. That is the strategies must have equal expected payoffs. So, for example, if p is not 0 or 1 then it must be the case that $1(q) + 4(1-q) = 3(q) + 2(1-q)$ as these are the expected payoffs to player A from U and D when player B uses probability q.

- **Resposta 6c:** Os equilíbrios de Nash de estratégia pura são: $\{(D, L), (U, R)\}$. E o equilíbrio de Nash de estratégia mista é: $(\sigma_A, \sigma_B) = ((\frac{1}{2}U, \frac{1}{2}D), (\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}R))$.
- **Calculando Equilíbrio de Nash de Estratégia Mista:**
    - Para encontrar o equilíbrio de estratégia mista, precisamos igualar os payoffs esperados de cada jogador para cada estratégia. Primeiro consideremos a probabilidade dos payoffs esperados para o jogador A, considerando que q é a probabilidade de B jogar L e $1-q$ é a probabilidade de B jogar R.
        - $1(q) + 4(1-q) = 3(q) + 2(1-q)$

- $q + 4 - 4q = 3q + 2 - 2q$
- $4 - 2 = 3q - 2q + 3q$
- $2 = 4q$
- $q = \frac{1}{2}$
- $1 - q = \frac{1}{2}$

- Agora calculando para o jogador B, onde p é a probabilidade de A jogar U e $1 - p$ é a probabilidade de A jogar D.
  - $1(p) + 3(1 - p) = 2(p) + 2(1 - p)$
  - $p + 3 - 3p = 2p + 2 - 2p$
  - $3 - 2 = 2p - 2p + 2p$
  - $1 = 2p$
  - $p = \frac{1}{2}$
  - $1 - p = \frac{1}{2}$
- Sendo assim, a estratégia mista de Nash é
  - $(\sigma_A, \sigma_B) =$
  - $((p, 1 - p), (q, 1 - q)) =$
  - $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$

7. In this question we will consider several two-player games. In each payoff matrix below the rows correspond to player A's strategies and the columns correspond to player B's strategies. The first entry in cach box is player A's payoff and the socond entry is player B's payoff

(a) Find all Nash equilibria for the game described by the payoff matrix below,

7a	$B : L$	$B : R$
$A : U$	**1**, 1	3, **2**
$A : D$	0, 3	**4**, **4**

- **Resposta 7a:**
  - **Equilíbrio de Nash de Estratégia Pura:** $\{(D, R)\}$.

- **Equilíbrio de Nash de Estratégia Mista:** Inexistente. Visto que ao calcularmos as probabilidades para tornar o jogador B indiferente às escolhas, encontrou-se uma contradição, o que indica que essa possibilidade é indexistente.
  - Calculando o equilíbrio de estratégia mista (q é a probabilidade de B jogar L, p é a probabilidade de A jogar U):
    - Para o jogador A:
      - $1(q) + 3(1-q) = 0(q) + 4(1-q)$
      - $q + 3 - 3q = 0 + 4 - 4q$
      - $3 - 4 = -4q + 2q$
      - $-1 = -2q$
      - $q = \frac{1}{2}$
      - $1 - q = \frac{1}{2}$
    - Para o jogador B:
      - $1(p) + 3(1-p) = 2(p) + 4(1-p)$
      - $p + 3 - 3p = 2p + 4 - 4p$
      - $3 - 4 = 2p - 4p + 3p - p$
      - $-1 = 0$
      - Não há solução para p.

(b) Find all Nash equilibria for the game described by the payoff matrix below (include an explanation for your answer).

7b	$B : L$	$B : R$
$A : U$	**5**, 6	0, **10**
$A : D$	4, **4**	**2**, 2

> **Hint:** This game has a mixed strategy equilibrium. To find the equilibrium let the probability that player A uses strategy U be p and the probability that player B uses strategy L be q. As we learned in our analysis of matching pennies, if a player uses a mixed strategy (one that is not really just some pure strategy played with probability one) then the player must be indifferent between two pure strategies. That is, the strategies must have equal expected payoffs. So, for example, if p is not 0 or 1 then it must be the case that $5q + 0(1—q) = 4q + 2(1—q)$ as these are the expected payoffs to player A from U and D when player B uses probability q.

- **Resposta 7b:**
  - **Equilíbrio de Nash de Estratégia Pura:** Inexistente.
    - **Justificativa:** Se $A : U$, então a melhor resposta é $B : R$; se $B : R$, a melhor resposta é $A : D$; se $A : D$, a melhor resposta é $B : L$; e se $B : L$, a melhor resposta

é $A : U$. Logo, não há um equilíbrio de Nash de estratégia pura.

- **Equilíbrio de Nash de Estratégia Mista:** $(\sigma_A, \sigma_B) = ((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$.
  - Calculando o equilíbrio de estratégia mista (q é a probabilidade de B jogar L, p é a probabilidade de A jogar U):
    - Para o jogador A:
      - $5(q) + 0(1-q) = 4(q) + 2(1-q)$
      - $5q = 4q + 2 - 2q$
      - $5q = 2 + 2q$
      - $3q = 2$
      - $q = \frac{2}{3}$
      - $1 - q = \frac{1}{3}$
    - Para o jogador B:
      - $6(p) + 4(1-p) = 10(p) + 2(1-p)$
      - $6p + 4 - 4p = 10p + 2 - 2p$
      - $2p + 4 = 8p + 2$
      - $2 = 6p$
      - $p = \frac{1}{3}$
      - $1 - p = \frac{2}{3}$
    - Logo, o equilíbrio de estratégia mista é $(\sigma_A, \sigma_B) = ((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$.

8. Consider the two-player game described by the payoff matrix below

8	$B : L$	$B : R$
$A : U$	**1**, **1**	0, 0
$A : D$	0, 0	**4**, **4**

(a) Find all pure-strategy Nash equilibria for this game

- **Resposta 8a:** Estratégias Puras que são Equilíbrios de Nash: $\{(U, L), (D, R)\}$
  - **Raciocínio:** olhando como A, se o B jogar L, não há escolha melhor do que U; Olhando como B, se o A jogar U, não há escolha melhor do que L; O mesmo raciocício se aplica para o par (D, R). Logo, ambos os pares são equilíbrios de Nash de estratégia pura.

(b) This game also has a mixed-strategy Nash equilibrium; find the probabilities the players use in this equilibrium, together

with an explanation for your answer

- **Resposta 8b:** Para encontrar o equilíbrio de estratégia mista, precisamos igualar os payoffs esperados de cada jogador para cada estratégia. Consideremos que p é a probabilidade de A jogar U e q é a probabilidade de B jogar L.
  - Jogador A:
    - $U: 1(q) + 0(1-q) = D: 0(q) + 4(1-q)$
    - $q = 4 - 4q$
    - $5q = 4$
    - $q = \frac{4}{5}$
    - $1 - q = \frac{1}{5}$
  - Jogador B:
    - $L: 1(p) + 0(1-p) = R: 0(p) + 4(1-p)$
    - $p = 4 - 4p$
    - $5p = 4$
    - $p = \frac{4}{5}$
    - $1 - p = \frac{1}{5}$
  - Logo, o equilíbrio de estratégia mista é $(\sigma_A, \sigma_B) = ((\frac{4}{5}U, \frac{1}{5}D), (\frac{4}{5}L, \frac{1}{5}R))$.
  - **Explicação:** Esses valores encontrados para p e q são os valores que tornam os jogadores indiferentes entre as duas estratégias. Isso significa que, se um jogador jogar com essas probabilidades, o outro jogador não terá incentivo para mudar sua estratégia, já que seus payoffs esperados serão os mesmos para ambas as estratégias. Portanto, esse é o equilíbrio de Nash de estratégia mista.

(c) Keeping in mind Schelling's focal point idea from Chapter 6, what equilibrium do you think is the best prediction of how the game will be played? Explain.

- **Relembrando:** Schelling's focal point é uma ideia que sugere que, em situações de incerteza, as pessoas tendem a escolher soluções que são mais "naturais" ou "salientes" para elas. Isso pode ser influenciado por fatores culturais, sociais ou contextuais.
- **Resposta 8c:** De forma objetiva, é notório que o equilíbrio de Nash de estratégia pura (D, R) é o mais provável de ocorrer, pois é o resultado que maximiza os payoffs de ambos os jogadores.

9. For each of the following two player games find all Nash equilibria. In each payoff matrix below the rows correspond to player A's strategies and the columns correspond to player B's strategies. The first entry in

each box is player A's payoff and the second entry is player B's payoff

a)	$B : L$	$B : R$
$A : U$	**8**, 4	**5**, **5**
$A : D$	3, 3	4, **8**

b)	$B : L$	$B : R$
$A : U$	**0**, 0	-1, **1**
$A : D$	-1, **1**	**2**, -2

- **Resposta 9:**
  - **a)**
    - **Equilíbrio de Nash de Estratégia Pura:** $\{(U, R)\}$.
    - **Equilíbrio de Nash de Estratégia Mista:** Inexistente.
      - **Justificativa:** Tanto o jogador A tem a estratégia estritamente dominante U quanto o jogador B tem a estratégia estritamente dominante R, assim resultando no equilíbrio de Nash de estratégia pura (U, R). Como ambos os jogadores, independente do oponente têm uma estratégia estritamente dominante, não é possível encontrar um equilíbrio de estratégia mista.
  - **b)**
    - **Equilíbrio de Nash de Estratégia Pura:** Inexistente.
      - **Justificativa:** Existe um ciclo de melhores respostas entre os jogadores, onde A jogando U leva B a jogar R, e B jogando R leva A a jogar D, e assim por diante. Portanto, não há um equilíbrio de Nash de estratégia pura.
    - **Equilíbrio de Nash de Estratégia Mista:** $(\sigma_A, \sigma_B) = ((\frac{1}{4}U, \frac{3}{4}D), (\frac{3}{4}L, \frac{1}{4}R))$.
      - **Cálculo:**
        - Para encontrar o equilíbrio de estratégia mista, precisamos igualar os payoffs esperados de cada jogador para cada estratégia. Consideremos que p é a probabilidade de A jogar U e q é a probabilidade de B jogar L.
        - Jogador A:
          - $U : 0(q) + -1(1 - q) = D : -1(q) + 2(1 - q)$
          - $-1 + q = -q + 2 - 2q$
          - $4q = 3$

        - $q = \frac{3}{4}$
        - $1 - q = \frac{1}{4}$
    - Jogador B:
        - $L: 0(p) + 1(1-p) = R: 1(p) + (-2(1-p))$
        - $0 + 1 - p = p - 2 + 2p$
        - $4p = 1$
        - $p = \frac{1}{4}$
        - $1 - p = \frac{3}{4}$
    - Logo, o equilíbrio de estratégia mista é $(\sigma_A, \sigma_B) = ((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}))$.

10. In the payoff matrix below the rows correspond to player A's strategies and the columns correspond to player B's strategies. The first entry in each box is player A's payoff and the second entry is player B's payoff

10	$B: L$	$B: R$
$A: U$	**3**, **3**	1, 2
$A: D$	2, **1**	**3**, 0

(a) Find all pure strategy Nash equilibria of this game.

- **Resposta 10a:** O equilíbrio de Nash de estratégia pura é $\{(U, L)\}$.

(b) Notice from the payoff matrix above that Player A's payoff from the pair of strategies (U, L) is 3. Can you change player A's payoff from this pair of strategies to some non-negative number in such a way that the resulting game has *no* pure-strategy Nash equilibrium? Give a brief (1-3 sentence) explanation for your answer.

> Note that in answering this question, you should only change Player A's payoff for this one pair of strategies (U, L). In particular, leave the rest of the structure of the game unchanged: the players, their strategies, the payoff from strategies other than (U, L), and B's payoff from (U, L).

- **Resposta 10b:** Não é possível mudar o payoff de A em (U, L) para um número não negativo de forma que o jogo resultante não tenha um equilíbrio de Nash em estratégia pura. Isso ocorre porque recaíremos em um dos 3 casos: menor que 2 (e maior ou igual a 0), igual a 2 ou maior que 2. No primeiro, a estratégia dominante para o jogador A em que B jogue L passará a ser D, o que também recairá num equilíbrio de Nash; no segundo caso, o jogador A passará a ser indiferente entre U e D, o que aumentará a quantidade de equilíbrios de Nash; e no terceiro caso, o jogador A manterá a mesma estratégia dominante, o que também resultará em um equilíbrio de Nash.

(c) Now let's go back to the original payoff matrix from part **(a)** and ask an analogous question about player B. So we're back to the payoff matrix in which players A and B each get a payoff of 3 from the pair of strategies (U, L).

Can you change player B's payoff from the pair of strategies (U, L) to some non-negative number in such a way that the resulting game has no pure-strategy Nash equilibrium? Give a brief (1-3 sentence) explanation for your answer.

> Again, in answering this question, you should only change Player B's payoff for this one pair of strategies (U, L). In particular, leave the rest of the structure of the game unchanged: the players, their strategies, the payoff from strategies other than (U, L), and A's payoff from (U, L).

- **Resposta 10c:** Desse modo é possível sim encontrar um payoff tal que cumpra as restrições propostas (ser maior ou igual a 0) e que gere um jogo sem equilíbrios de Nash. Para isso, podemos alterar o payoff de B para valores que sejam menores que o seu payoff em (U, R), que é 2. Logo, os valores possíveis de alteração de payoff que não geram equilíbrios de Nash de Estratégia Pura são 0 e 1.

10	$B : L$	$B : R$
$A : U$	**3**, {0, 1}	1, **2**
$A : D$	2, **1**	**3**, 0

11. In the text we've discussed dominant strategies and noted that if a player has a dominant strategy we would expect it to be used. The opposite of a

dominant strategy is a strategy that is dominated. The definition of dominated is

A strategy s_i^* is *dominated* if player i has another strategy $s_i^{'}$ with the property that player i's payoff is greater from $s_i^{'}$ than from s_i^* no matter what the other players in the game do.

We do not expect a player to use a strategy that is dominated and this can help in finding Nash equilibria. Here is an example of this idea. In this game, M is a dominated strategy (it is dominated by R) and player B will not use it.

11	$B:L$	$B:M$	$B:R$
$A:U$	**2**, **4**	2, 1	**3**, 2
$A:D$	1, 2	**3**, 3	2, **4**

So in analyzing the game we can delete M and look at the remaining game

11	$B:L$	$B:R$
$A:U$	**2**, **4**	**3**, 2
$A:D$	1, 2	2, **4**

Now player A has a dominant strategy (U) and it is easy to see that the Nash equilibrium of the 2-by-2 game is (U, L). You can check the original game to see that (U, L) is a Nash equilibrium. Of course, using this procedure requires that we know that a dominated strategy cannot be used in Nash equilibrium. [Note]

> **Note:** This is actually true for any number of players. It would also help to know that if we iteratively remove dominated strategies (in any order) and analyze the reduced games we still find the Nash equilibria of the original game. This is also true, but it is a bit more complicated.

Consider any two player game which has at least one (pure strategy) Nash equilibrium. Explain why the strategies used in an equilibrium of this game will not be dominated strategies.

- **Resposta 11:** Quando há um equilíbrio de Nash de estratégia pura, necessáriamente cada jogador está jogando sua melhor resposta à estratégia do outro jogador. Se um jogador estivesse usando uma estratégia dominada, então essa não é a sua melhor resposta, o que contradiz a definição de equilíbrio de Nash. Portanto, as estratégias usadas em um equilíbrio de Nash não podem ser dominadas.

12. In Chapter 6 we discussed dominant strategies and noted that if a player has a dominant strategy we would expect it to be used. The opposite of a dominant strategy is a strategy that is dominated. There are several possible notions of what it means for a strategy to be dominated. In this problem we will focus on weak domination

A strategy s_i^* *weakly dominated* if player i has another strategy $s_i^{'}$ with the property that:

- **(a)** No matter what the other player does, player i's payoff from $s_i^{'}$ is at least as large as the payoff from s_i^*, and
- **(b)** There is some strategy for the other player so that player i's payoff from $s_i^{'}$ is strictly greater than the payoff from s_i^*.

(a) It seems unlikely that a player would use a weakly dominated strategy, but these strategies can occur in a Nash equilibrium. Find all pure (non-randomized) Nash equilibria for the game below. Do any of them use weakly dominated strategies?

12a	$B : L$	$B : R$
$A : U$	**1**, **1**	1, **1**
$A : D$	0, 0	**2**, **1**

- **Resposta 12a:** Os equilíbrios de Nash de estratégia pura são $\{(U, L), (D, R)\}$. O equilíbrio de Nash (U, L) usa a estratégia fracamente dominada L para o jogador B, pois caso A jogue U, o jogador B se torna indiferente entre L e R, assim mesmo que R fracamente domine L, o jogador B ainda há caso em que possa escolher L e obter o mesmo payoff.

(b) One way to reason about the weakly dominated strategies that you should have found in answering the question above is to consider the following sequential game. Suppose that the players actually move sequentially, but the player to move second does not know what the player moving first chose. Player A moves first, and if he chooses U, then player B's choice does not matter. Effectively the game is over if A chooses U as no matter what B does the payoff is $(1, 1)$. If player A chooses D, then player B's move matters, and the payoff is $(0, 0)$ if B chooses L or $(2, 1)$ if B chooses R.

> Note that as B does not observe A's move the simultaneous move game with payoff matrix above is equivalent to this sequential move game.

In this game how would you expect the players to behave? Explain your reasoning.

> The players are not allowed to change the game. They play it once just as it is given above. You may reason from the payoff matrix or the story behind the game, but if you use the story remember that B does not observe A's move until after the game is over.

- **Resposta 12b:** Para esse jogo sequencial, em que A começará jogando, consideremos primeiro a seguinte linha de raciocínio do jogador B: "se A jogar U, então meus payoffs serão independentes de minha escolha. Porém, se A jogar D, então a melhor escolha pra mim é R, pois me dá um payoff maior do que L; Se pro primeiro caso é independente e pro segundo tenho preferência, logo, jogarei R". Agora, considerando o jogador A, ele terá um raciocínio semelhante: "B não terá preferência caso eu jogue U, porém, se eu jogar D, B jogará R que certamente será sua escolha final. Se eu considero que B jogará R, então minha melhor resposta é jogar D, pois assim meu payoff será 2, que é o maior possível". Portanto, o resultado final do jogo será (D, R), que é um dos equilíbrio de Nash de estratégia pura.

13. Here we consider a game with three players, named 1, 2 and 3. To define the game we need to specify the sets of strategies available to each player; also, when each of the three players chooses a strategy, this gives a triple of strategies, and we need to specify the payoff each player receives from any possible triple of strategies played. Let's suppose that player 1's strategy set is $\{U, D\}$, players 2's strategy set is $\{L, R\}$ and player 3's strategy set is $\{l, r\}$

One way to specify the payoffs would be to write down every possible triple of strategies, and the payoffs for each. A different but equivalent way to interpret triples of strategies, which makes it easier to specify the payoffs, is to imagine that player 3 chooses which of two distinct two-player games players 1 and 2 will play If 3 chooses l then the payoff matrix is

Payoff Matrix l:

l	$B:L$	$B:R$
$A:U$	**4**, **4**, **4**	0, 0, **1**
$A:D$	0, **2**, **1**	**2**, 1, 0

where the first entry in each cell is the payoff to player 1, the second entry is the payoff to player 2 and the third entry is the payoff to player 3.

If 3 chooses r then the payoff matrix is

Payoff Matrix r:

r	$B:L$	$B:R$
$A:U$	**2**, 0, 0	1, **1**, **1**
$A:D$	1, 1, **1**	**2**, **2**, **2**

So, for example, if player 1 chooses U, player 2 chooses R and player 3 chooses r the payoffs are 1 for each player.

(a) First suppose the players all move simultaneously. That is, players 1 and 2 do not observe which game player 3 has selected until after they each chose a strategy. Find all of the (pure strategy) Nash equilibria for this game.

- **Resposta 13a:** Equilíbrios de Nash de estratégia pura: $\{(U, L, l), (D, R, r)\}$.
  - **Justificativa:** Precisamos fixar as escolhas dos outros jogadores para verificar se a escolha do jogador i é a melhor resposta, então assim é feito: para fixar a escolha do jogador 3, fixa apenas uma matriz de payoff; para fixar a escolha do jogador 2, fixa apenas uma coluna da matriz de payoff; e para fixar a escolha do jogador 1, fixa apenas uma linha da matriz de payoff. Para analisarmos as escolhas do jogador 3 analisaremos para cada par de linhas e colunas, qual é a melhor resposta do jogador 3.

(b) Now suppose that player 3 gets to move first and that players 1 and 2 observe player 3's move before they decide how to play. That is, if player 3 chooses the strategy r then players 1 and 2 play the game defined by payoff matrix r and they both know that they are playing this game. Similarly, if player 3 chooses the strategy l then players 1 and 2 play the game defined by payoff matrix l and they both know that they are playing this game.

Let's also suppose that if players 1 and 2 play the game defined by payoff matrix r they play a (pure strategy) Nash equilibrium for that game; and similarly, if players 1 and 2 play the game defined by payoff matrix l they play a (pure strategy) Nash equilibrium for that game. Finally, let's suppose that player 3 understands that this is how players 1 and 2 will behave.

What do you expect player 3 to do and why? What triple of strategies would you expect to see played? Is this list of strategies a Nash equilibrium of the simultaneous move game between the three players?

- **Resposta 13b:** Eu esperaria que o jogador 3 escolheria l, isso porque porque, é onde se encontra o equilíbrio de Nash de estratégia pura (U, L, l) que tem um payoff maior para o jogador 3 do que o equilíbrio de Nash de estratégia pura (D, R, r); sendo então esperado que a tripla (U, L, l) seja jogada. Sim, esse seria um dos Equilíbrios de Nash do jogo simultâneo.

14. Consider the two-player game with players, strategies and payoffs described in the following game matrix

14	$2: L$	$2: R$
$1: U$	1, **1**	**4**, 0
$1: D$	**4**, 0	3, **3**

(a) Find all of the Nash equilibria of this game.

- **Resposta 14a:**
  - **Equilíbrio de Nash de Estratégia Pura:** Inexistente.
  - **Equilíbrio de Nash de Estratégia Mista:** $(\sigma_1, \sigma_2) = ((\frac{3}{4}U, \frac{1}{4}D), (\frac{1}{4}L, \frac{3}{4}R))$.
    - **Cálculos:** Para encontrar o equilíbrio de estratégia mista, precisamos igualar os payoffs esperados de cada jogador para cada estratégia. Consideremos que p é a probabilidade de 1 jogar U e q é a probabilidade de 1 jogar L.
      - Jogador 1:
        - $U: 1(q) + 4(1-q) = D: 4(q) + 3(1-q)$
        - $q + 4 - 4q = 4q + 3 - 3q$
        - $4 - 3 = q + 3q$
        - $1 = 4q$
        - $q = \frac{1}{4}$
        - $1 - q = \frac{3}{4}$
      - Jogador 2:
        - $L: 1(p) + 0(1-p) = R: 0(p) + 3(1-p)$
        - $p + 0 = 0 + 3 - 3p$

- $p + 3p = 3$
- $4p = 3$
- $p = \frac{3}{4}$
- $1 - p = \frac{1}{4}$
- Logo, o equilíbrio de estratégia mista é $(\sigma_1, \sigma_2) = ((\frac{3}{4}U, \frac{1}{4}D), (\frac{1}{4}L, \frac{3}{4}R))$.

(b) In the mixed strategy equilibrium you found in part **(a)**, you should notice that player 1 plays strategy U more often than strategy D. One of your friends remarks that your answer to part **(a)** must be wrong because clearly for player 1 strategy D is a more attractive strategy than strategy U. Both U and D give player 1 a payoff of 4 on the off-diagonal elements of the payoff matrix, but D gives player 1 a payoff of 3 on the diagonal while U only gives player 1 a payoff of 1 on the diagonal. Explain what is wrong with this reasoning.

- **Resposta 14b:** O erro no raciocínio é que apenas os payoffs do jogador 1 são considerados, porém, os payoffs do jogador 1 dependerão das escolhas feitas pelo jogador 2 que por sua vez buscará maximizar seu próprio payoff. E pro jogador 2 a estratégia R resulta em um payoff maior do que a estratégia L, assim fazendo com que ele seja mais propenso a jogar R do que L, o que influenciará o jogador 1 a jogar U mais frequentemente do que D de forma que torne o jogador 2 indiferente entre L e R.

15. Two identical firms - let's call them firm 1 and firm 2 must decide simultaneously and independently whether to enter a new market and what product to produce if they do enter the market. Each firm, if it enters, can develop and produce either product A or product B. If both firms enter and produce product A they each lose ten million dollars. If both firms enter and both produce product B, they each make a profit of five million dollars. If both enter and one produces A while the other produces B, then they each make a profit of ten million dollars. Any firm that does not enter makes a profit of zero. Finally, if one firm does

not enter and the other firm produces A it makes a profit of fifteen million dollars, while if the single entering firm produces B it makes a profit of thirty million dollars

You are the manager of firm 1 and you have to choose a strategy for your firm.

(a) Set this situation up as a game with two players, firms 1 and 2, and three strategies for each firm: produce A, produce B or do not enter.

- **Resposta 15a:** A matriz de payoff para o jogo é a seguinte:

15	$2:A$	$2:B$	$2:N$
$1:A$	-10, -10	**10**, **10**	15, 0
$1:B$	**10**, **10**	5, 5	**30**, 0
$1:N$	0, 15	0, **30**	0, 0

(b) One of your employees argues that you should enter the market (although he is not sure what product you should produce) because no matter what firm 2 does, entering and producing product B is better than not entering. Evaluate this argument.

- **Resposta 15b:** o argumento do funcionário é válido, isso porque a estratégia B estritamente domina a estratégia N (para ambos os jogadores). Exemplificando: ao jogar N, independente do que o outro jogador jogar, o payoff será 0; ao jogar B, o pior payoff possível é 5, que é maior do que 0, o que confirma a intuição do funcionário.

(c) Another employee agrees with the person in part **(b)** and argues that as strategy A could result in a loss (if the other firm also produces A) you should enter and produce B. If both firms reason this way, and thus enter and produce product B, will their play of the game form a Nash equilibrium? Explain.

- **Resposta 15c:** caso as duas empresas joguem B, elas não estarão jogando um equilíbrio de Nash, pois ambas têm um incentivo unilateral para mudar sua estratégia para A, já que o payoff de A é maior do que o payoff de B (10 > 5).

(d) Find all the pure strategy Nash equilibria of this game.

- **Resposta 15d:** Os equilíbrios de Nash de estratégia pura são $\{(A, B), (B, A)\}$.

(e) Another employee of your firm suggests merging the two firms and deciding cooperatively on strategies so as to maximize the sum of profits. Ignoring whether this merger would be allowed by the regulators do you think its a good idea? Explain.

- **Resposta 15e:** A fusão das duas empresas seria uma ideia válida, pois poderia auxiliar ambas as empresas a maximizar seus lucros. Isso se considerarmos um jogo cooperativo, onde ambas as empresas poderiam se beneficiar mutuamente. Se considerarmos um jogo contínuo, duas dinâmicas me soam válidas: a primeira seria coordenar as duas empresas para que nunca produzissem o mesmo produto simultaneamente, o que garantiria um lucro de 10 milhões para ambas; a segunda seria coordenar as duas empresas para que elas alternassem na produção do produto B enquanto a outra não entrasse no mercado, o que garantiria um lucro de 30 milhões para a empresa que entrasse no mercado, e 0 para a empresa que não entrasse, porém, após 4 jogos desse tipo, as empresas teriam obtido 60 milhões, que, comparando com o lucro garantido de 40 milhões, seria um lucro maior, portanto, sendo uma estratégia preferível quanto ao lucro, mas mais arriscada.