Ponto Extra 2: 09/12/2024 - Divide-and-conquer: Quiz 5 - Mediana das medianas para uma divisão por 7

Suppose that we divide n elements into $\lfloor n/5 \rfloor$ groups of r elements each, and use the median-of-medians of these $\lceil n/r \rceil$ groups as the pivot. For which r is the worst-case running time of select $O(n)$?

a. $r = 3$
b. $r = 7$
c. Both a and b
d. Neither a nor b

$C(n) \leq C(\lfloor n/5 \rfloor) + C(n - 3\lfloor n/10 \rfloor) + \frac{11}{5}n$

Achar a constante que dá certo para $R = 7$

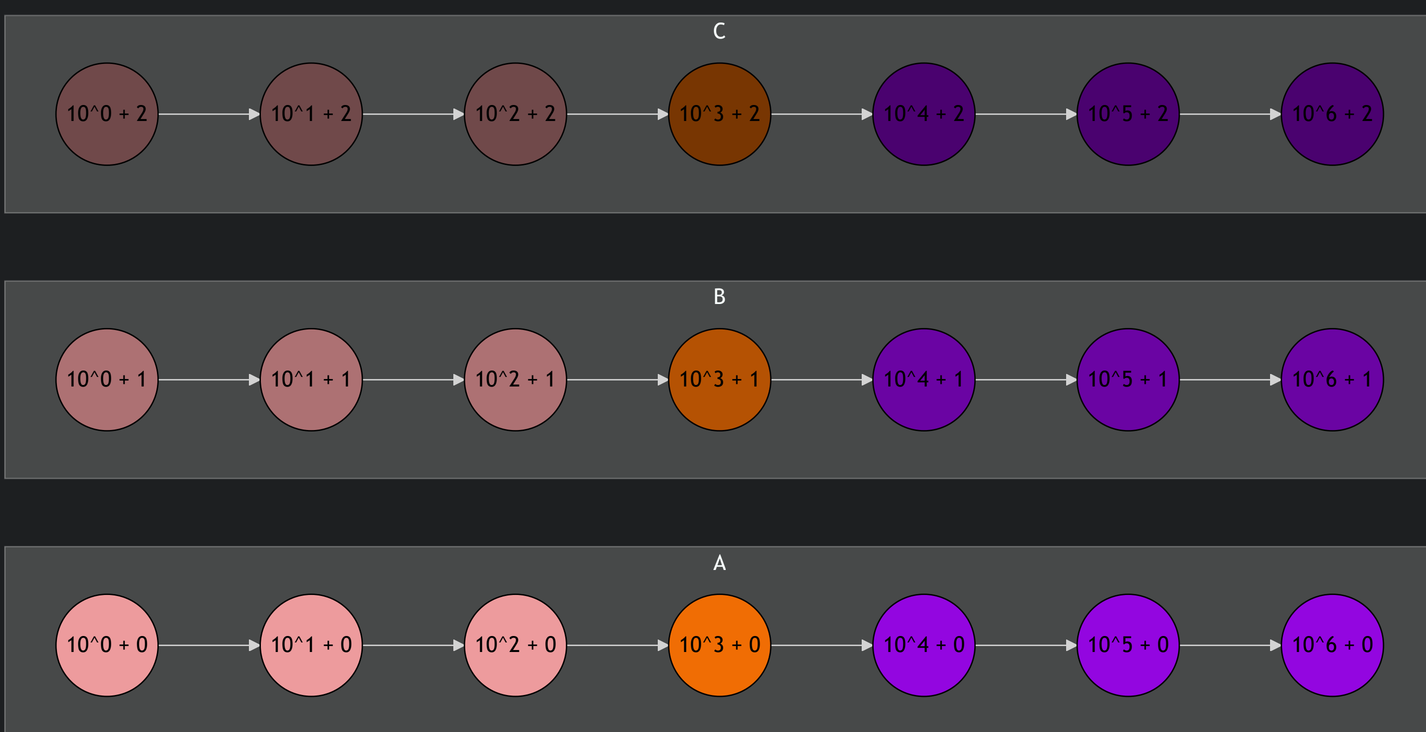
Quando consideramos 5 elementos, temos as seguintes 3 partes: $C(n) \leq X_5 + Y_5 + Z_5$

- $X_5 = C(\lfloor n/5 \rfloor)$
  - Onde $\lfloor n/5 \rfloor$ é o número de grupos de 5 elementos que serão comparados
- $Y_5 = C(n - 3\lfloor n/10 \rfloor)$
  - Onde $n - 3\lfloor n/10 \rfloor$ é o número de elementos que não são a mediana
  - Ele também pode ser escrito como:
    - $n - \lfloor 3n/10 \rfloor =$
    - $n - \lfloor 3/5 * n/2 \rfloor =$
      - Onde $\lfloor 3/5 * n/2 \rfloor$ é o número de elementos que são definitivamente menores, ou definitivamente maiores que a mediana das medianas
    - que representa a quantidade total de elementos removidos os elementos explicados acima.
- $Z_5 = \frac{11}{5}n$

- Onde $\frac{11}{5}n$ é o número de comparações que serão feitas para encontrar a mediana das medianas
- Também pode ser reescrito como $6 \cdot (n/5) + n$ que representa a quantidade de comparações que serão feitas para encontrar a mediana nos grupos de 5 elementos.

Então, se considerarmos $r = 7$, teremos que:

- $X_7 = C(\lfloor n/7 \rfloor)$
  - Onde $\lfloor n/7 \rfloor$ é o número de grupos de 7 elementos que serão comparados
- $Y_7 = \dots$
  - Para calcularmos este valor, seguiremos o caminho inverso:
    - Considerando que ao invés de 5 elementos, temos 7 elementos; e que, ao invés de 3 elementos garantidamente menores, temos 4 elementos garantidamente menores, teremos que:
      - $n - \lfloor (4/7) * (n/2) \rfloor =$
      - Que no formato original seria:
      - $n - 4\lfloor n/14 \rfloor$
    - Assim, concluindo que
  - $Y_7 = C(n - 4\lfloor n/14 \rfloor)$



- $Z_7 = \dots$
  - Também fazendo o caminho inverso, teremos que:

            - $\#Comp \cdot (n/7) + n$
            - Onde, $\#Comp$ é a quantidade de comparações que serão feitas para encontrar a mediana nos grupos de 7 elementos.
                - Segundo Donald Knuth:
                    - **Table 1**

                      VALUES OF $V_t(n)$ FOR SMALL n

n	$V_1(n)$	$V_2(n)$	$V_3(n)$	$V_4(n)$	$V_5(n)$	$V_6(n)$	$V_7(n)$	$V_8(n)$	$V_9(n)$	$V_{10}(n)$
1	0									
2	1	1								
3	2	3	2							
4	3	4	4	3						
5	4	6	6	6	4					
6	5	7	8	8	7	5				
7	6	8	10	10*	10	8	6			
8	7	9	11	12	12	11	9	7		
9	8	11	12	14	14*	14	12	11	8	
10	9	12	14*	15	16**	16**	15	14*	12	9

* Exercises 10–12 give constructions that improve on Eq. (11) in these cases.
** See K. Noshita, *Trans. of the IECE of Japan* **E59**, 12 (December 1976), 17–18.

                - O 4º menor elemento de um conjunto de 7 elementos pode ser encontrado com no máximo 10 comparações, então: $\#Comp = 10$
            - Assim, concluindo que
        - $Z_7 = 10 \cdot (n/7) + n$
            - $Z_7 = 10n/7 + n$
            - $Z_7 = 10n/7 + 7n/7$
            - $Z_7 = 17n/7$

Com isso, conclui-se que a recorrência para $r = 7$ é:

$$C(n) \leq C(\lfloor n/7 \rfloor) + C(n - 4\lfloor n/14 \rfloor) + 17n/7$$

Ou, mais objetivamente, a constante da parte linear é: $17/7$