Instruções gerais: A clareza e concisão das respostas também é objeto de avaliação. A **complexidade** dos algoritmos fornecidos **será levada em consideração** durante a avaliação, assim, quanto mais eficiente seu algoritmo, melhor.

- 1. Para cada afirmação abaixo, diga se é "verdadeira", "falsa" ou "não se pode afirmar nem negar". Em seguida, justifique.
 - (a) Não existe algoritmo polinomial para CLIQUE.
 - (b) Pode existir um problema em NP que não é NP-difícil.
 - (c) Não se conhece algoritmo de tempo polinomial para nenhum problema em NP.
 - (d) Pode existir um problema NP-difícil que não pertence a NP.
- 2. Você já se viu em uma situação onde precisava de uma ferramenta que provavelmente só usaria uma vez e mesmo assim acabou comprando-a? Todo mundo passa por isso! Uma empresa está tentando evitar que isso aconteça, ajudando pessoas a economizar, além de contribuir para o meio ambiente, uma vez que menos ferramentas são produzidas desnecessariamente, economizando energia e recursos naturais.

Para estruturar o negócio, algumas simulações precisam ser feitas. Em uma delas, foi preciso resolver um determinado problema, mas os desenvolvedores ainda não conseguiram escrever um algoritmo eficiente para resolvê-lo. Alguns deles estão desconfiando que o problema é NP-difícil. Sua tarefa é mostrar que, de fato, este é o caso.

No problema em questão, há um conjunto de n pessoas $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e de m ferramentas $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$. Cada pessoa, precisa de um certo conjunto ferramentas para realizar uma tarefa. Para cada pessoa p_i , existe um conjunto $N_i \subseteq F$, descrevendo quais ferramentas são necessárias para a pessoa p_i . Dado um inteiro k, a pergunta é: é possível selecionar k pessoas de forma que nenhuma ferramenta seja necessária para duas pessoas diferentes? Mais formalmente, chamaremos este problema de Ferramenta se o definiremos conforme a seguir.

FERRAMENTAS

Entrada: Inteiros n, m e k, os conjuntos P, F e uma família de conjuntos N_1, \ldots, N_n , conforme descrito acima. Pergunta: É possível selecionar k pessoas distintas, de forma que nenhuma ferramenta seja usada por mais de uma das pessoas selecionadas?

Em relação a este problema, resolva os itens abaixo.

- (a) Mostre que Ferramentas pertence a NP.
- (b) Forneça uma redução polinomial para mostrar que FERRAMENTAS é NP-difícil. Você pode reduzir de qualquer problema NP-difícil visto em aula, mas o professor reduziria de CONJUNTO INDEPENDENTE.
- (c) O tamanho da instância construída é polinomial no tamanho da instância de origem? Justifique.
- 3. **Bônus** Forneça um algoritmo polinomial para resolver FERRAMENTAS no caso em que $|N_i| \le 2$, para todo i e que cada ferramenta só aparece na lista de, no máximo, 2 pessoas. Recomenda-se que você só resolva esta questão depois de já ter resolvido todo o resto da prova, pois ela vale poucos pontos.