Projeto e Análise de Algoritmos
2024.2

FLUXO

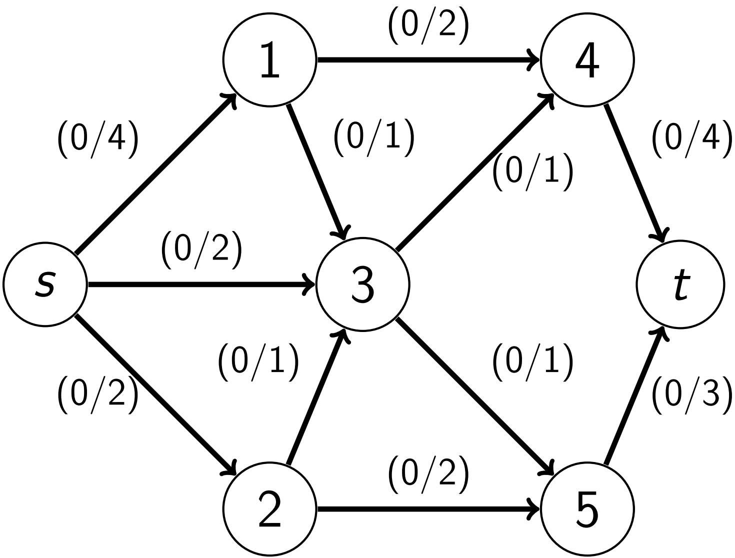
Prof. Marcio Costa Santos DCC/UFMG

Fluxo em Rede

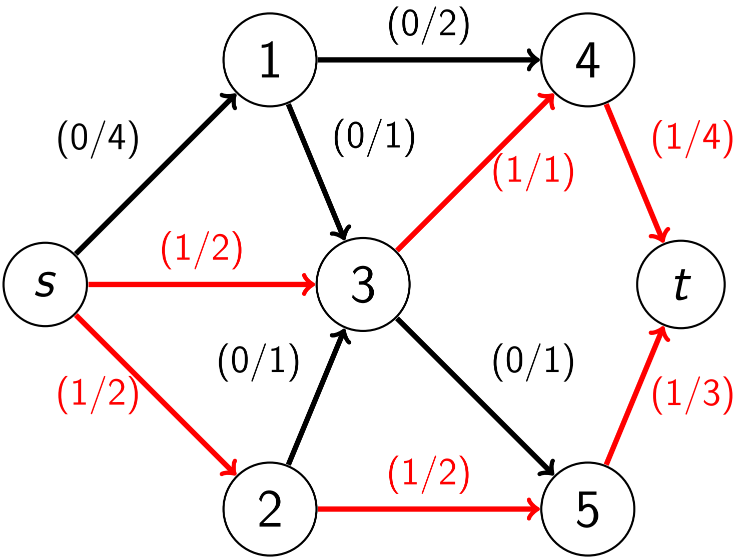
- Rede: é um grafo direcionado $G = (V, A)$ com dois vértices particulares s(fonte) e t(sumidouro); e capacidades $c_{uv} \geq 0$ em seus arcos.
- Fluxo: é uma função nos arcos do grafo tal que:
  i. $f(uv) \leq c_{uv}$ para todo $uv \in A(G)$;
  ii. $\sum_{u \in V(G)} f(vu) = \sum_{u \in V(G)} f(uv)$ para todo $V(G) - \{s, t\}$
- Definimos o valor do fluxo f, $|f|$, como sendo

$$|f| = \sum_{u \in V(G)} f(su)$$

Rede - Exemplo



Fluxo na Rede - Exemplo



Problema de Fluxo Máximo

- Dado uma rede, com s e t conhecidos.
- Na rede, temos apenas um dos arcos uv ou vu. Não temos arcos em ambos os sentidos.
- Desejamos determinar um fluxo f que tenha valor máximo

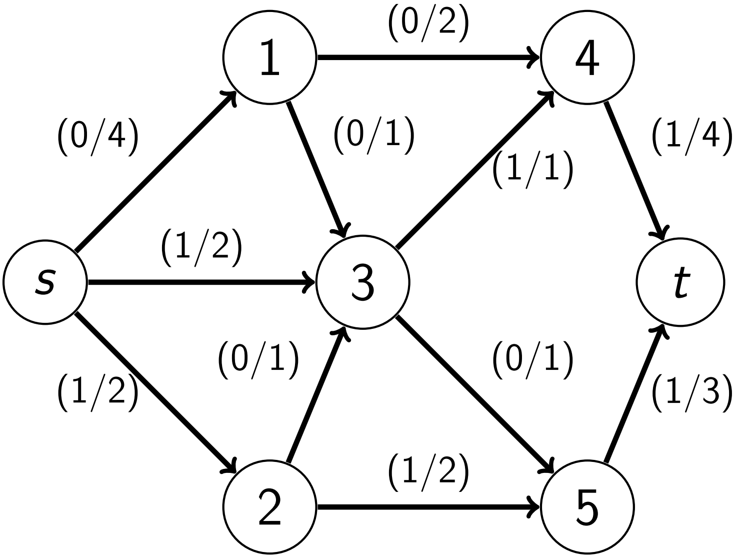
Ford-Fulkerson

- Vamos encontrar caminhos para passar o fluxo.
- Vamos procurar caminhos pela rede que permitem passar mais fluxo de s a t.
- Caminhos Aumentantes.
- Para isso vamos precisar de alguns conceitos...

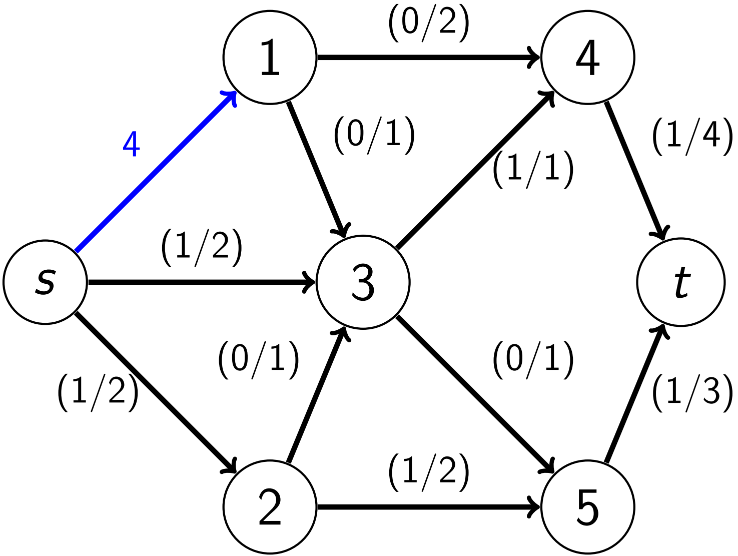
Ford-Fulkerson

- Capacidade Residual: Dado uma rede $G = (V, A)$ e um fluxo f, vamos definir a capacidade residual c_{uv}^f de um arco uv como sendo:
  - Se $uv \in A$: $c_{uv} - f(uv)$.
  - Se $vu \in A$: $f(vu)$.
  - No restante dos casos 0.
- Rede Residual: Dado uma rede $G = (V, A)$ e um fluxo f, vamos definir a rede residual $G_f = (V, A_f)$ como sendo:
  - $V_f = V$;
  - $A_f = \{uv | c_{uv}^f > 0\}$

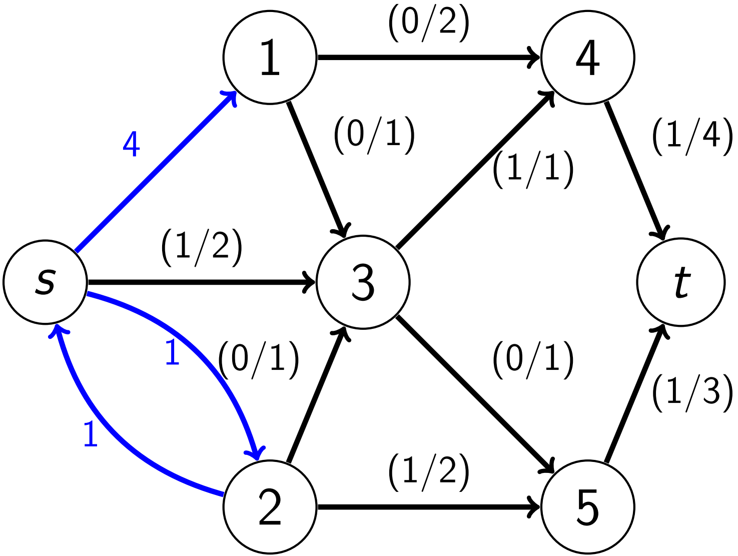
Exemplo de Rede Residual



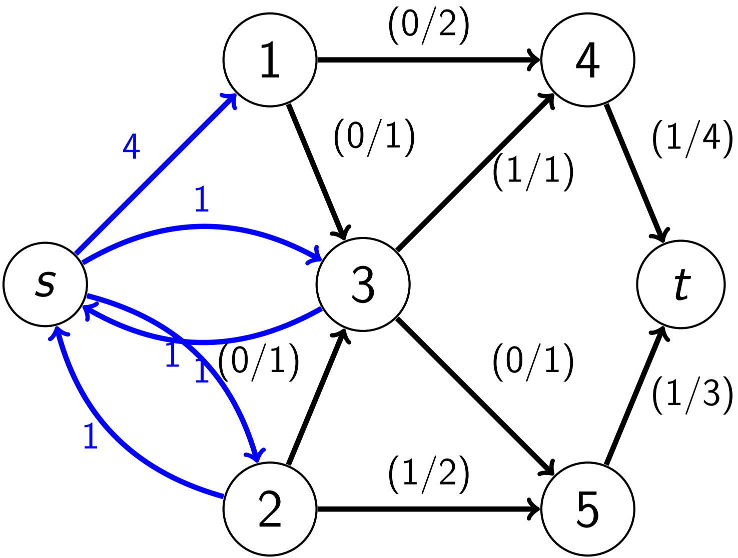
Exemplo de Rede Residual



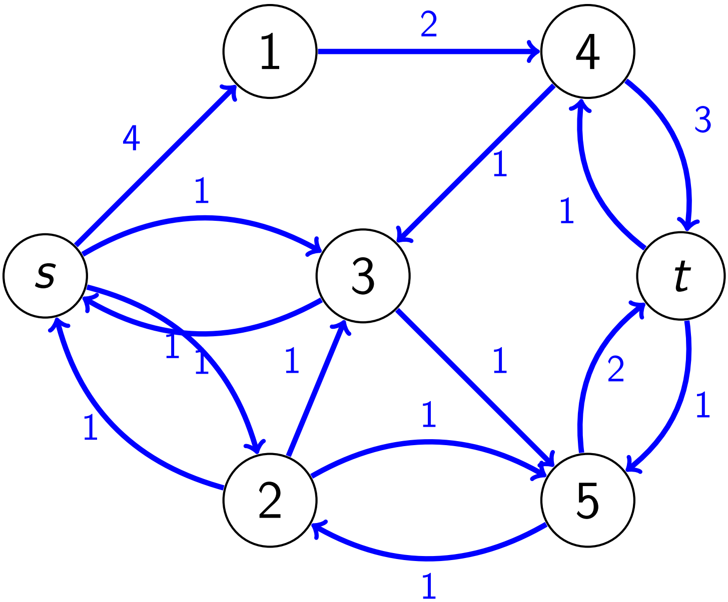
Exemplo de Rede Residual



Exemplo de Rede Residual



Exemplo de Rede Residual



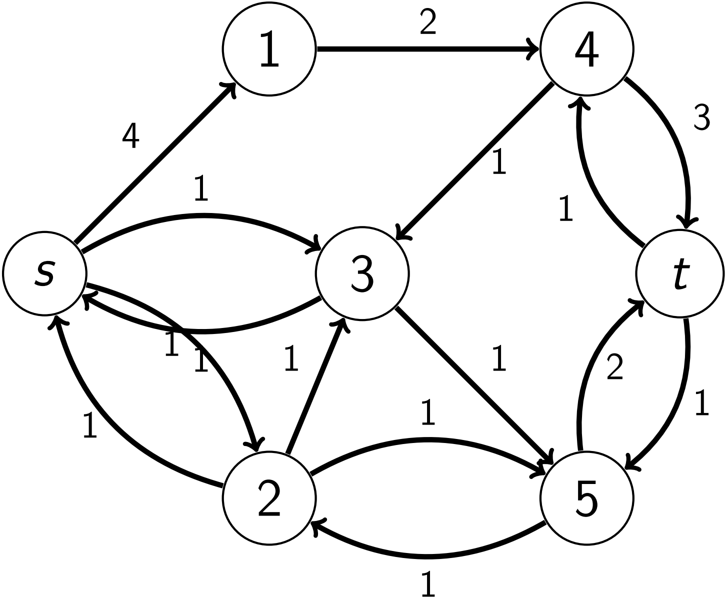
Caminho Aumentante

- É um caminho de s até t na rede residual.
- Capacidade Residual: Dado um caminho p é o máximo de fluxo que podemos enviar por p.

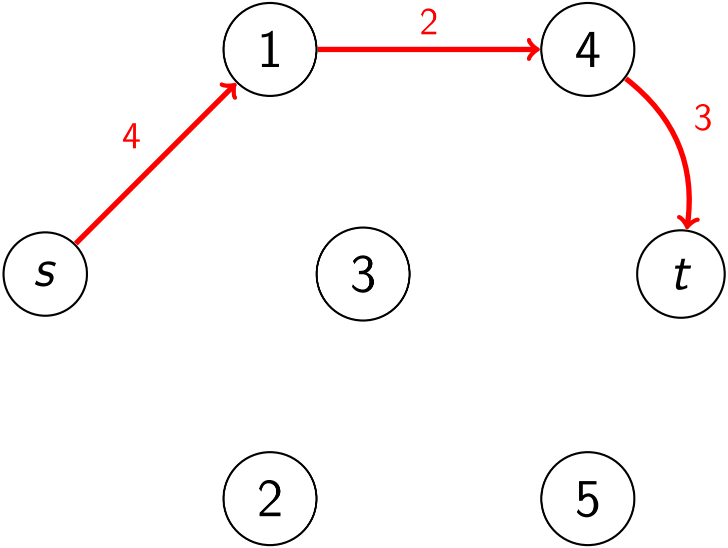
$$c^f(p) = \min\{c^f_{uv} \mid uv \in p\}$$

- Podemos mandar um fluxo de valor $c^f(p)$ por p.

Exemplo de Caminho Aumentante



Exemplo de Caminho Aumentante

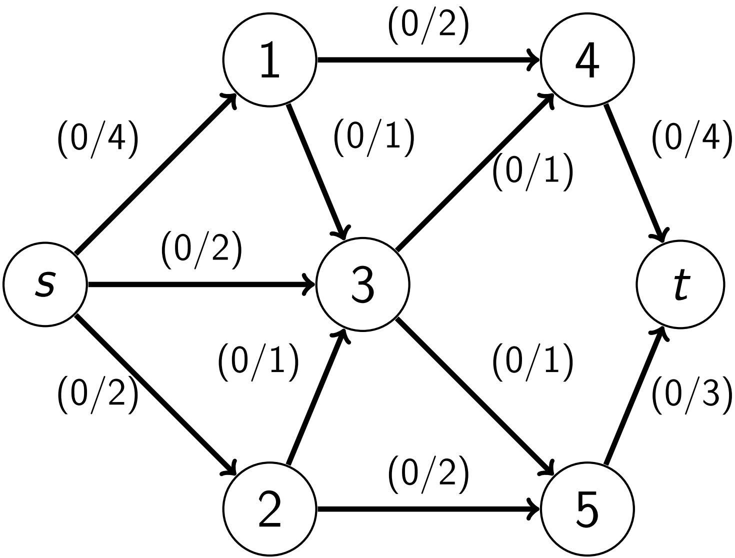


Ford-Fulkerson

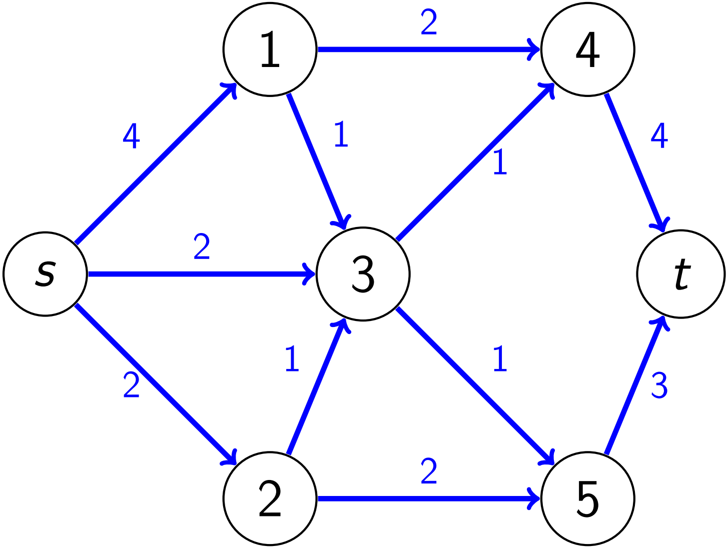
$f \leftarrow \emptyset$;
Compute G_f;
enquanto $\exists$ *caminho aumentante* p **faça**
  Compute $c^f(p)$;
  Aumente f de $c^f(p)$;
  Atualize G_f;
fim
retorna $|f|$

Algoritmo 1: Ford-Fulkerson

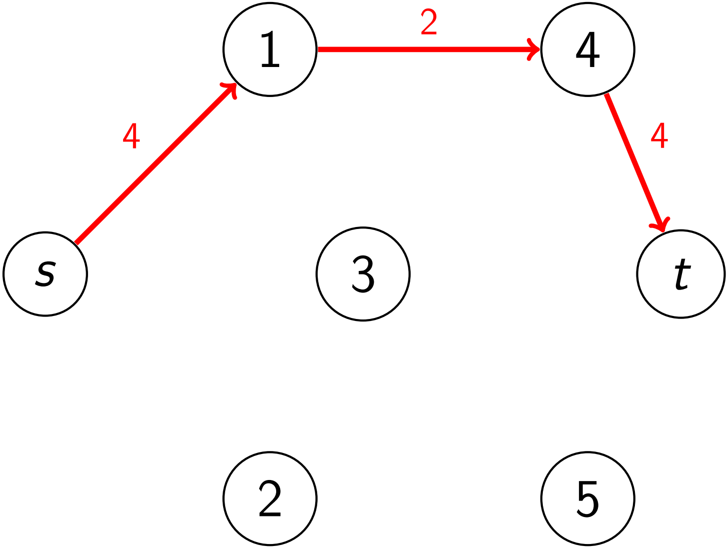
Ford-Fulkerson - Exemplo



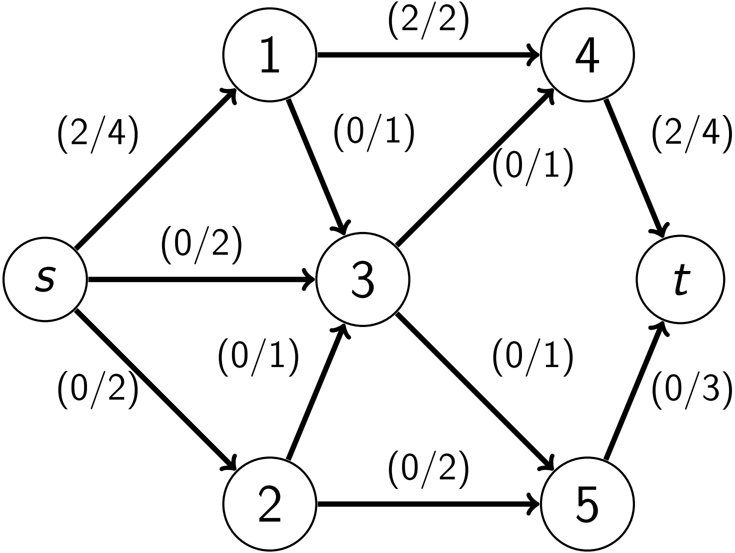
Ford-Fulkerson - Exemplo



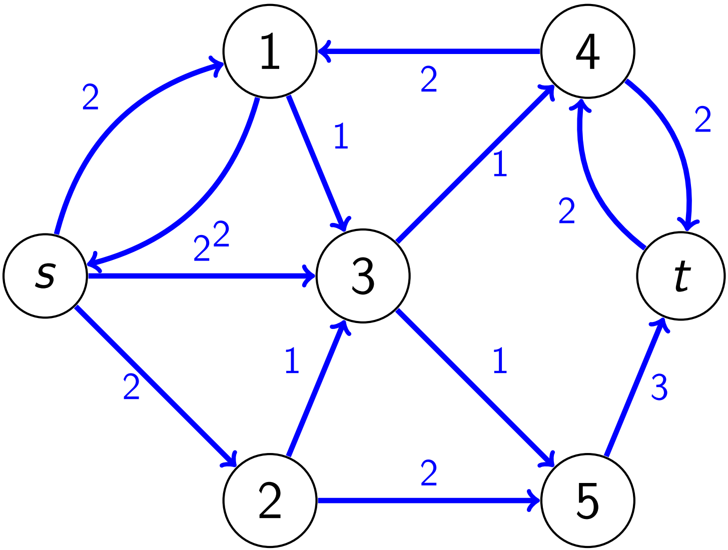
Ford-Fulkerson - Exemplo



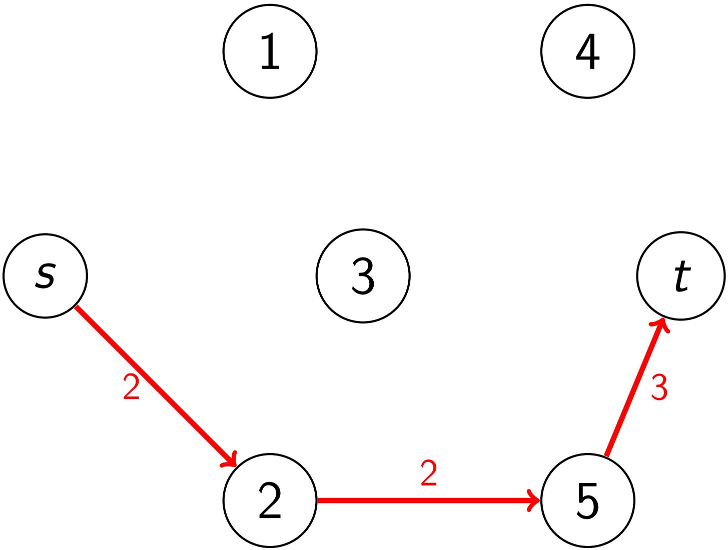
Ford-Fulkerson - Exemplo



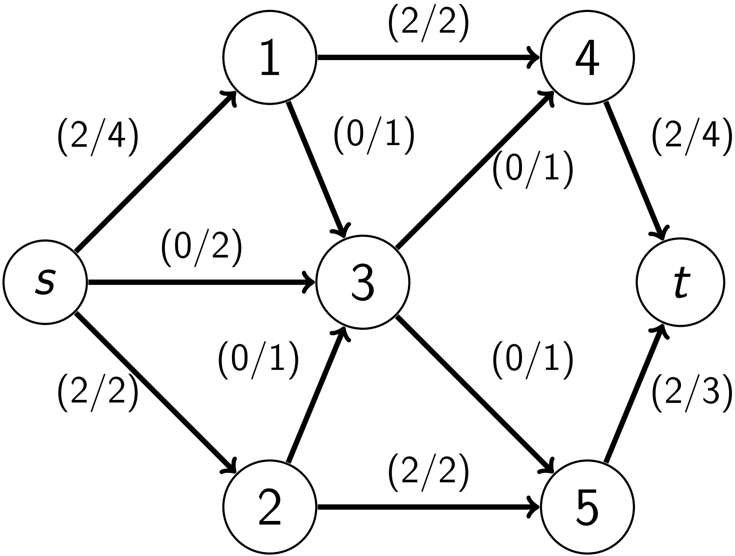
Ford-Fulkerson - Exemplo



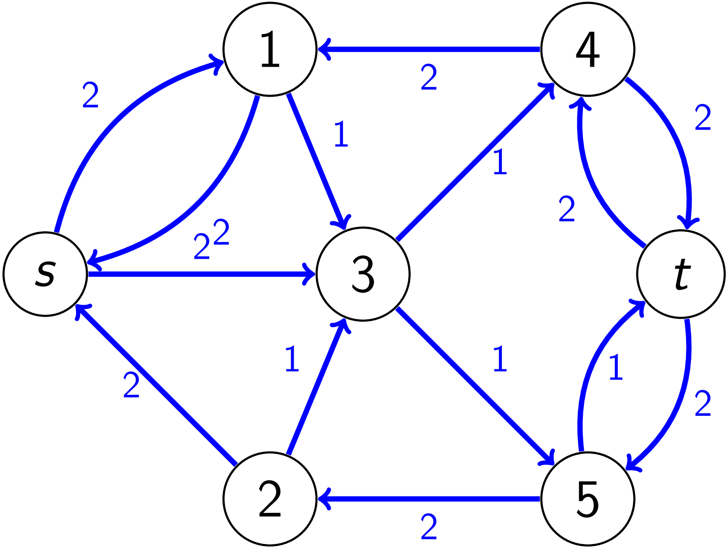
Ford-Fulkerson - Exemplo



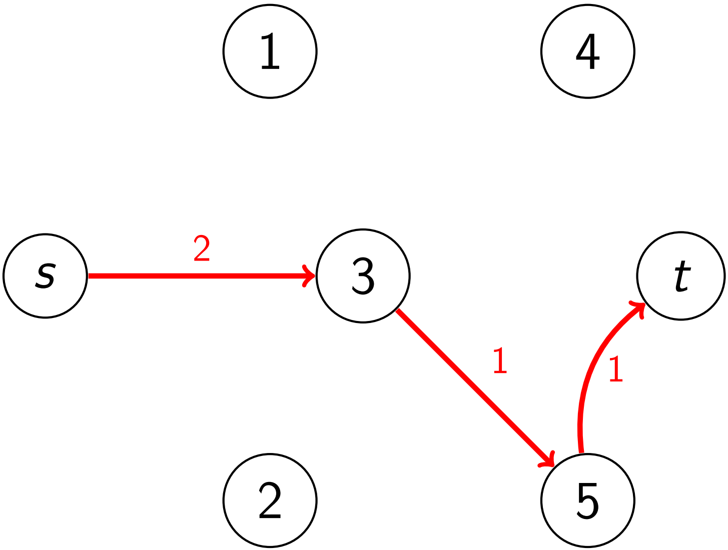
Ford-Fulkerson - Exemplo



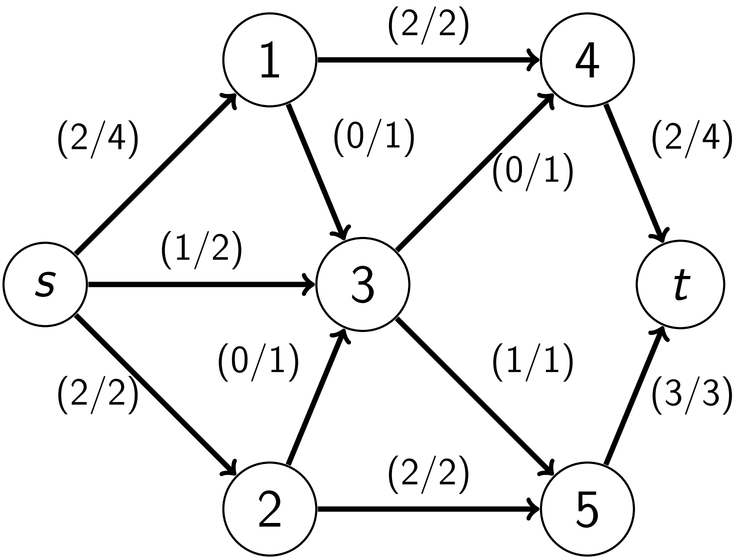
Ford-Fulkerson - Exemplo



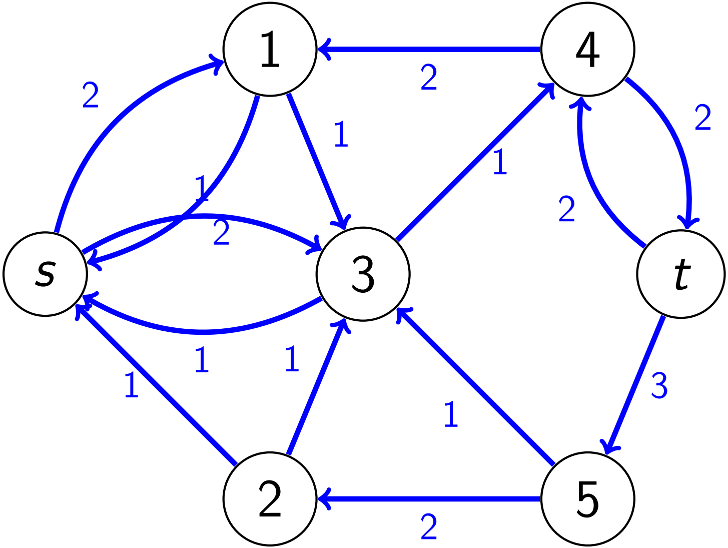
Ford-Fulkerson - Exemplo



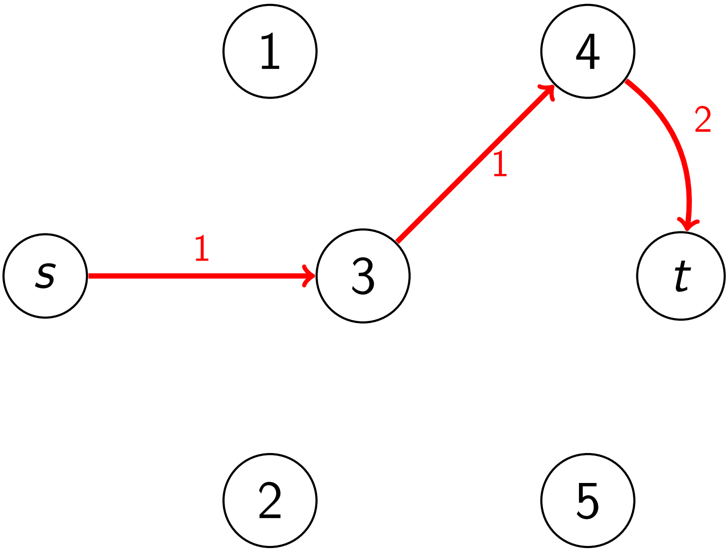
Ford-Fulkerson - Exemplo



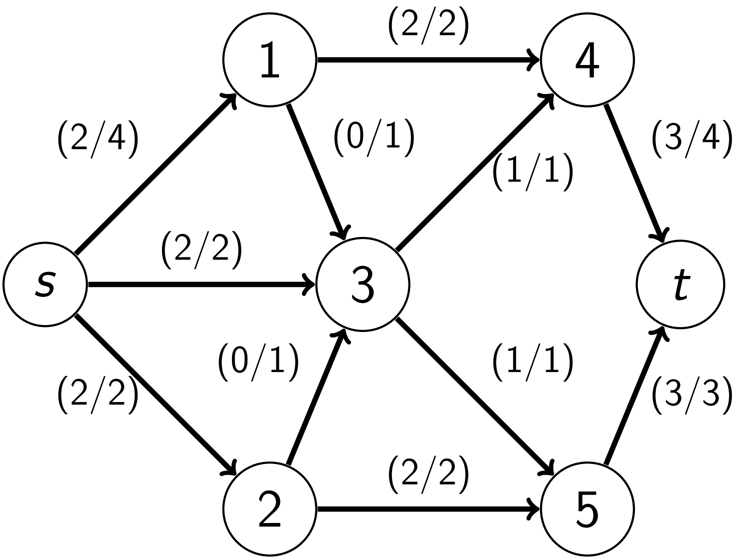
Ford-Fulkerson - Exemplo



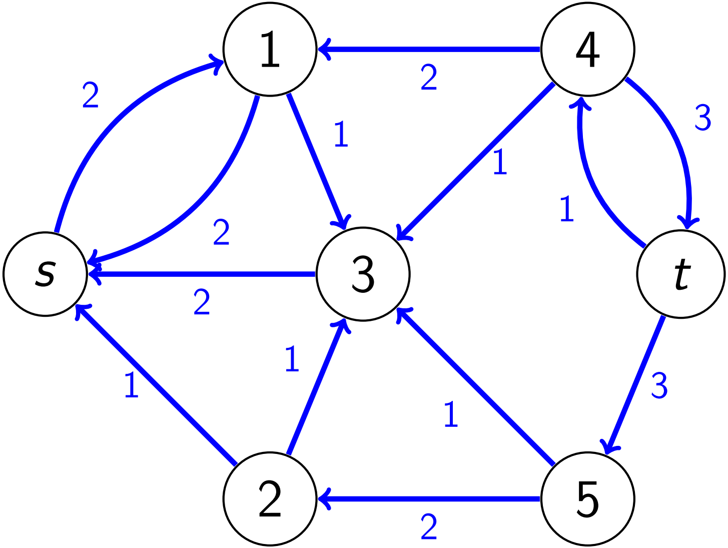
Ford-Fulkerson - Exemplo



Ford-Fulkerson - Exemplo



Ford-Fulkerson - Exemplo



Ford-Fulkerson - Complexidade

- Inicializar f: $O(m)$
- Computar G_f: $O(m)$
- Achar p: $O(n+m)$
- Calcular $c^f(p)$: $O(n)$
- Aumentar f e atualizar G_f:$O(n)$
- assumindo que nossos valores são inteiros, o laço é realizado no máximo $|f|$ vezes.

Ford-Fulkerson - Complexidade

$$
\begin{aligned}
O(m) + O(m) + |f|(O(n+m) + O(n) + O(n)) \\
O(m) + |f|(O(n+m) + O(n)) \\
O(m) + |f|O(n+m)) \\
|f|(O(n+m))
\end{aligned}
$$

Complexidade Ford-Fulkerson-Ingênuo

$$|f|(O(n+m))$$

Ford-Fulkerson - Complexidade

- Aresta saturada: $c_u v = f(u, v)$
- Considere que vamos saturar uma aresta em cada caminho aumentante.
- Vamos usar uma busca em largura para determinar o menor caminho (em número de arestas) aumentante de s ate t.

Complexidade Ford-Fulkerson(Edmonds-Karp)

$$(O(n.m^2))$$

Corte

- Corte (S,T) numa rede $G = (V, A)$ é uma partição de V tal que $s \in S$ e $t \in T$.
- Fluxo de um corte (S,T):

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(uv) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(vu)$$

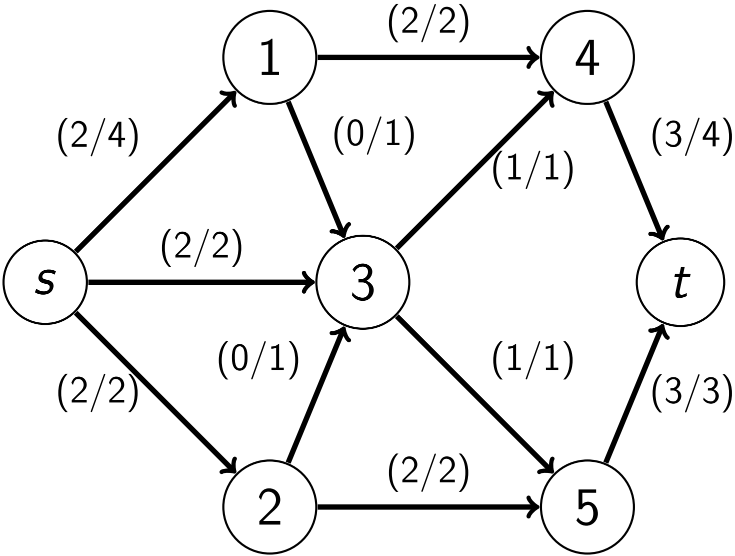
.

- Capacidade de um corte (S,T):

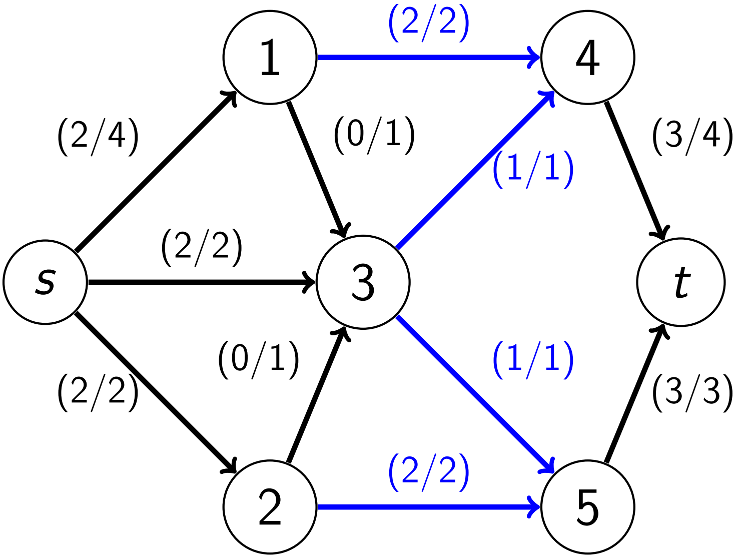
$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c_{uv}$$

.

Corte - Exemplo



Corte - Exemplo



Corte e Fluxo

Relação entre Corte e Fluxo

Dado um fluxo f qualquer e um corte (S, T) qualquer, então $f(S, T) = |f|$.

Corte e Fluxo

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s) + \sum_{v \in S - s} (\sum_{u \in V} f(v, u) - \sum_{u \in V} f(u, v))$$

$$|f| = \sum_{v \in V} \sum_{u \in S} f(u, v) - \sum_{v \in V} \sum_{u \in S} f(v, u)$$

Corte e Fluxo

$$|f| = \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(u,v) + \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(u,v)$$
$$- \sum_{v \in T} \sum_{uinS} f(v,u) - \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(v,u)$$
$$|f| = \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(u,v) - \sum_{vinT} \sum_{u \in S} f(v,u) +$$
$$+ \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(u,v) - \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(v,u)$$
$$|f| = \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(u,v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u) = f(S,T)$$

Corte e Fluxo

Relação entre Corte e Fluxo

Dado um fluxo f qualquer e um corte (S, T) qualquer, então $|f| \leq c(S, T)$.

Corte e Fluxo

$$\begin{aligned}
|f| &= f(S,T) \\
&= \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\
&\leq \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(u,v) \\
&\leq \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} c(u,v) \\
&= c(S,T)
\end{aligned}$$

Corte e Fluxo

Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Um fluxo f em uma rede $G = (V, E)$ é máximo se e somente se $|f| = c(S, T)$ para algum corte (S, T) e mais, (S, T) é um corte com capacidade mínima.