Lista de Exercícios de PAA - Módulo 4 - 2025.1
Prof. Vinicius Fernandes dos Santos

---

1. Dizemos que uma clique é par se seu número de elementos é par. Considere o seguinte problema: dado um grafo G e um inteiro k, determinar se existe uma clique par de tamanho pelo menos k.
   (a) Mostre que este problema está em NP.
   (b) Mostre que este problema é NP-difícil.
   (c) Este problema é NP-completo?
2. No problema Caminho Hamiltoniano é dado um grafo e deve-se determinar se existe um caminho que passa por todos os vértices, sem repetição. Mostre que este problema é NP-completo, através de uma redução de Ciclo Hamiltoniano. Não esqueça de mostar que o problema está em NP.
3. Considere o problema de determinar se existe um caminho simples (sem repetição de vértices) com pelo menos k arestas entre dois vértices a e b de um grafo. Prove que esse problema é NP-Completo usando o fato de Caminho Hamiltoniano é NP-Completo.
4. Mostre que o problema de satisfatibilidade onde cada cláusula possui exatamente 4 literais (4-SAT) é um problema é NP-difícil. Você pode fazer sua redução a partir de SAT, de 3-SAT ou de algum problema envolvendo grafos.
5. Esta questão trata das classes de problema P, NP e NP-difícil. Você deve responder cada uma das perguntas abaixo de forma sucinta, mas justificando suas respostas e, se for o caso, mencionar um exemplo de problema.
   (a) Pode existir um problema em NP que não é NP-difícil?
   (b) Pode existir um problema em P que não está em NP?
   (c) Pode existir um problema NP-difícil que faça parte de P?
   (d) Pode existir um problema que esteja em NP e NP-difícil ao mesmo tempo?
   (e) Suponha que Π seja um problema NP-difícil e que exista uma transformação de tempo exponencial de um problema Π' para Π. Podemos concluir alguma coisa sobre a complexidade de Π'?
   (f) Suponha que Π seja um problema NP-difícil e que exista uma transformação de tempo exponencial de Π para um problema Π'. Podemos concluir alguma coisa sobre a complexidade de Π'?
6. Para cada uma das afirmações abaixo, diga se é verdadeira ou falsa e justifique. A justificativa é a parte mais importante.
   (a) Não existe algoritmo polinomial para Clique.
   (b) Suponha que Π seja um problema NP-difícil, mas não pertença a NP. A existência de uma transformação polinomial de Π para um outro problema Π' não implica que Π' seja NP-difícil.
   (c) Suponha que Π seja um problema NP-difícil que não pertença a NP. Não é possível afirmar se Π pertence ou não a P.
7. No problema das jarras de água, temos duas jarras de capacidades distintas C_1 e C_2. As jarras não possuem nenhuma marcação de quantidade, assim, as operações possíveis são:
   - Encher totalmente uma jarra.
   - Esvaziar completamente uma jarra.
   - Colocar o conteúdo de uma jarra em outra (até a jarra original esvaziar ou até a jarra de destino ficar totalmente cheia).

   No problema das jarras de água, há também uma quantidade Q que se deseja alcançar. Por exemplo, se as jarras possuem capacidades 3 e 4, e se deseja alcançar a quantidade 1, esta pode ser obtida enchendo-se a segunda jarra (de capacidade 4) e depois colocando-se o conteúdo da segunda jarra na primeira: quando a primeira jarra se encher, sobrará a quantidade desejada na segunda jarra.

   Este problema pode ser resolvido com busca em largura, criando-se um nó para cada par de valores (i, j) com $0 \leq i \leq C_1$ e $0 \leq j \leq C_2$ e adicionando-se arestas (direcionadas) quando um nó pode ser alcançado a partir do outro. Desta forma, basta verificar de algum nó da forma (Q, j) ou (i, Q) pode ser alcançado, quando começamos uma busca no nó (C_1, C_2).
   (a) Qual a complexidade deste algoritmo?
   (b) Com base neste algoritmo, é possível afirmar que este problema pertence a P?

Lista de PAA - Módulo 4

Thales Henrique Silva

Julho 2025

1.

a) Dado um certificado (conjunto de vértices), verifique se o tamanho do conjunto é par. Verifique também se de fato existe uma aresta entre todos os vértices, o que pode ser feito em tempo polinomial consultando a matriz/lista de adjacência do grafo

b)

$$Clique \leq_p Clique - Par$$

Seja uma instância (G, k) de Clique. Se k era par, faça $G' = G$ e $k' = k$. Veja que trivialmente, se a instância original era 'SIM', a instância transformada também será 'SIM' (e vice-versa).

Mas se k era ímpar, faça $k' = k+1$ e crie um grafo G' tal que seja adicionado um vértice universal conectado a todos os outros.

Se G tem uma clique de tamanho ímpar k, por construção G terá uma clique de tamanho par $k + 1$ ao adicionar o novo vértice.

Se G' tem uma clique de tamanho par k', então, de acordo com a construção, G também terá uma clique de tamanho k' ou $k' - 1$ (caso o novo vértice estiver na instância, basta removê-lo).

Todos esses passos são feitos em tempo polinomial.

c) Sim, pois NP-Completo = NP e NP-difícil.

2. O problema está em NP: dado uma instância do problema $< G >$, em que G é um grafo, um certificado consiste num conjunto S de vértices. Verifique se cada par consecutivo de vértices u e v em S de fato forma uma aresta em G. Verifique ao final se todos os vértices de G foram visitados exatamente uma vez. Se todas essas etapas foram realizadas, então o conjunto S forma um caminho hamiltoniano em G. Caso contrário, não. Isso pode ser feito em tempo polinomial.

O problema é $NP{-}Hard:$ seja uma instância $< G >$ de Ciclo Hamiltoniano. Construa uma instância $< G' >$ do Caminho Hamiltoniano da seguinte forma. Escolha um vértice um vértice arbitrário v, adicione três vértices s, t, u tal que:

s conecte a v;

t conecte a todos os vizinhos de v originais em G; e

u conecte a t.

Todas as etapas são feitas em tempo polinomial.

Se G tem um ciclo hamiltoniano $(v_1, ...v_n, v_1)$, então, sem perda de generalização, $v_1 = v$, de tal forma que existe um caminho hamiltoniano $(s, v_1, ..., v_n, t, u)$ em G', de acordo com as arestas e vértices que foram adicionadas na construção.

Se G' tem um caminho hamiltoniano, ele só pode ser no formato $(s, v, ..., t, u)$, pois s e u ambos tem grau 1. Logo, o caminho deve começar em um e terminar no outro (ou vice-versa). Perceba que, qualquer que tenha sido o vértice nesse caminho que veio imediatamente antes de t, digamos, w, ele era vizinho de v em G, por causa da construção de G' que fizemos. Portanto, existe um ciclo hamiltoniano $(v, ..., w, v)$ em G. Isso conclui a demonstração.

3. Dado uma instância $G = (V, E)$ do caminho hamiltoniano, construa uma instância do outro problema da seguinte forma:

Crie um novo grafo G' a partir de G adicionando vértices a e b, ou seja, $V' = V \cup \{a, b\}$.

Conecte a em todos os vértices de V

Conecte b em todos os vértices de V

seja $k = |V| + 1$.

Se G tem um caminho hamiltoniano $(v_1, ...v_n)$, então, por construção, G' terá um caminho simples da forma $(a, v_1, ...v_n, b)$ com $k = |V| + 1$ arestas.

Se G' tem um caminho simples entre a e b no formato $(a, ..., b)$ com pelo menos $k = |V| + 1$ arestas, perceba que os vértices intermediários estavam originalmente em G. Além disso, por definição, não houve repetição de vértices, e o caminho deve necessariamente ter passado por todos os vértices de G, ou não seria possível completar o número mínimo de arestas. Portanto, esses vértices intermediários formam um caminho hamiltoniano em G. Observe também que o problema está em NP, pois, assim como na questão anterior, basta checar em tempo polinomial se um certificado (conjunto de vértices) forma um caminho simples entre dois vértices com o comprimento desejado., percorrendo-se a matriz/lista de adjacência do grafo. Isso conclui a demonstração.

4.

$$3 - SAT \leq_p 4 - SAT$$

Dado uma instância de 3-SAT, a ideia é converter cada cláusula de 3 literais em cláusulas de exatamente 4 literais de forma que a nova fórmula seja satisfazível se, e somente se, a original também for.

Dada uma cláusula de 3-SAT:

$$C = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3)$$

Criamos duas cláusulas de 4-SAT com uma nova variável auxiliar y:

$$C_1 = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee y)$$

$$C_2 = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \neg y)$$

A nova fórmula substituta será:

$$C' = C_1 \wedge C_2 = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee y) \wedge (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \neg y)$$

Veja que a adição da variável auxiliar não altera o valor lógico da cláusula. Se $y = V$:

$$\begin{aligned} C' = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee V) \wedge (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee F) \\ C' = (V) \wedge (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3) \\ C' = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3) \end{aligned}$$

As mesmas propriedades se aplicam caso $y = F$. Logo, C' é satisfazível se, e somente se, $C1$ for. Aplicando essa transformação em todas as cláusulas de uma instância do 3-SAT, o que é polinomial no número de cláusulas da entrada, obtemos uma instância correspondente do 4-SAT.

5.

a) Sim, desde que P seja diferente de NP. Mas no caso de P=NP=NP-Completo, tecnicamente os problemas em NP também seriam NP-difíceis.

b) Não, pela própria definição, $P \subseteq NP$

c) Apenas se $P = NP$, pois neste caso os problemas NP-Completo (que são NP-difíceis) estariam em P.

d) Sim, esta é a definição de NP-Completo.

e) Não. Como a redução está em tempo exponencial, isso pode ter arbitrariamente aumentado a dificuldade do problema Π', então ele pode ou não ter sido um problema originalmente fácil.

f) Não. Como a redução é arbitrária, Π' pode ser um problema fácil ou difícil. Por exemplo, podemos reduzir o SAT para o problema de decidir se um certo string é vazio. Dado uma instância de SAT, calcule todas as atribuições possíveis, e se alguma for verdadeira, retorne um string vazio. Caso contrário, retorne um string qualquer não-vazio. Veja que a entrada é satisfazível, se, e somente, a string resultante for vazia. Mas como essa redução gastou tempo exponencial, isso não diz nada sobre a classe de complexidade do outro problema.

6.

a) É a dúvida de um milhão de dólares.

b) Falso. A redução indica que o segundo problema é no mínimo tão difícil quanto o primeiro. Então, se Π é NP-Hard, Π' também é: $\Pi \leq_p \Pi'$.

c) Falso. P é um subconjunto de NP, então se Π não está em NP, necessariamente estará fora de P, mas o contrário não poderia ser afirmado. Isto é, se Π não estivesse em P, ele poderia ou não estar em NP, a depender se $P = NP$.

7.

a) O número total de vértices no grafo é limitado por $O(C_1C_2)$, e para cada vértice, há um número constante de operações que podem ser feitas, então o número de arestas também é limitado por $O(C_1C_2)$. Assim, a BFS tem complexidade $O(V + E) = O(C_1C_2)$.

b) O algoritmo é polinomial em $O(C_1C_2)$, nos valores números, mas exponencial quando consideramos o tamanho da entrada em bits $log\ C_1 + log\ C_2 + log\ Q$. Portanto, não está em P.