2017/2

Projeto e Análise de Algoritmos

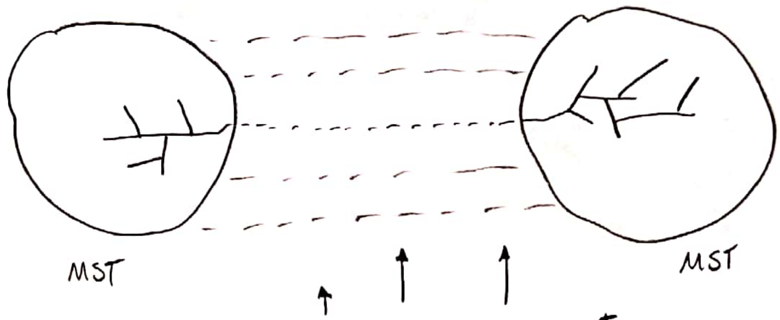
Teoria dos Grafos

Prova 1 (12 pontos)

Questão 1 (5 pontos):
Seja G=(V,E) um grafo com peso positivo nas arestas e T uma árvore geradora mínima de G.

a) Descreva um método o mais eficiente possível para computar uma nova árvore geradora mínima de G depois de que uma aresta e={u, v} de T seja apagada. Justifique a corretude do seu algoritmo.
b) Analise a complexidade dos algoritmos assumindo uma implementação com lista de adjacências tanto para G como para T.
e também de G

a)



1. pegamos uma aresta de menor custo dessas e sabemos que ela será parte da MST e gera nova árvore.

Por substrutura ótima as árvores que ficam são ótimas.
Pego uma subárvore qualquer e aplico o teorema.

E pela escolha gulosa podemos conectar com custo mínimo se existir nova árvore. Pode ser que não exista.

1 b)

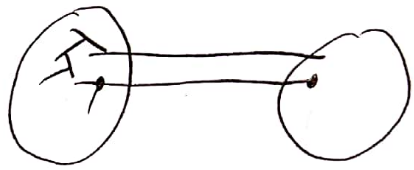
BFS para determinar os vértices da subárvore (ou DFS)

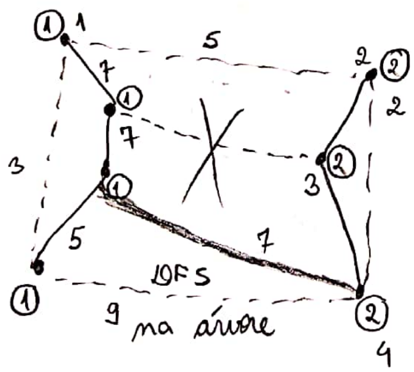
Verifica a outra extremidade de cada aresta

Se ela está fora da árvore "A" ela pode se conectar, pois pertence a B.

Se ambas estiverem no mesmo grupo não são candidatas, pois formariam ciclo

Buscaremos o mínimo dos candidatos (custo)





A1 e A2

DFS no 7: componente é do grupo 2 ? sim Cortado!

DFS no 6. 6 é da mesma árvore.

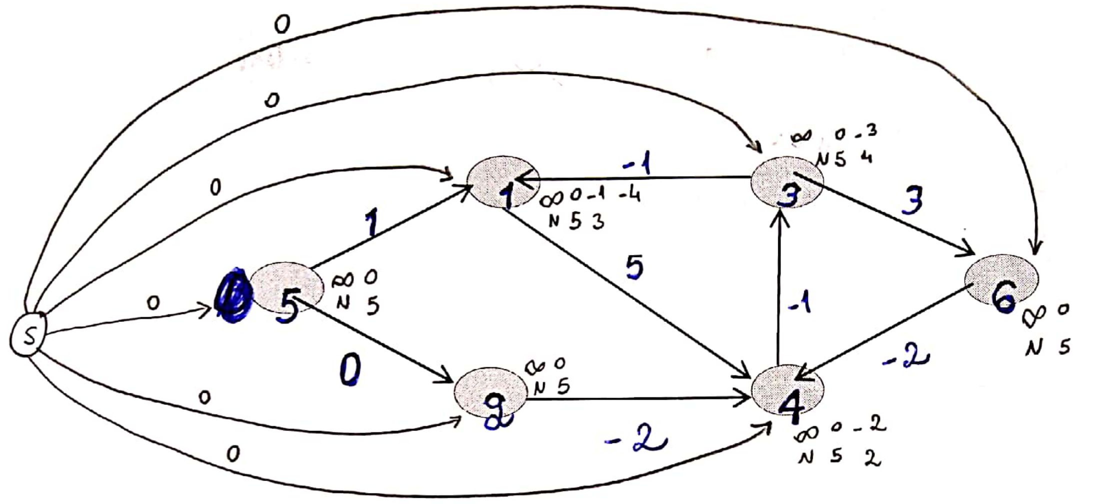
DFS no 5. 5 é do grupo 2 ? sim → logo, o custo é 7

Questão 2 (5 pontos):

a) O grafo abaixo tem arestas de peso negativo. Obtenha novos pesos para cada arco de forma tal que os caminhos mínimos entre qualquer par de vértices não sejam alterados e todos os pesos fiquem não negativos.

b) Descreva o algoritmo utilizado no ponto (a) e faça a sua escolha uma das seguintes dois questões:
b) 1) Prove que os caminhos mínimos não são alterados.
b) 2) Prove que os custos de todos os arcos ficam não negativos. } escolher uma

(1,4) v v v v
(2,4) v e v v
(3,1) v e e v
(3,6) v v v v
(4,3) v e v v
(5,1) v v v v
(5,2) v v v v
(6,4) v v v v
(s,1) e v v v
(s,2) e v v v
(s,3) e v v v
(s,4) e v v v
(s,5) e v v v
(s,6) e v v v
não mudou mais



* a) Algoritmo Johnson: (origem - destino)

Passos:
* colocar vértice artificial com custo zero
rodar Bellman Ford
gerar grafos com novos custos

cálculo dos pesos novos após Bellman Ford

$\hat{w} = P(u) - P(v) + w$
(1,4) = -4 - (-2) + 5 = 3
(2,4) = 0 - (-2) + (-2) = 0
(3,1) = -3 - (-4) + (-1) = 0
(3,6) = -3 - 0 + 3 = 0
(4,3) = -2 - (-3) + (-1) = 0
(5,1) = 0 - (-4) + 1 = 5
(5,2) = 0 - 0 + 0 = 0
(6,4) = 0 - (-2) + (-2) = 0

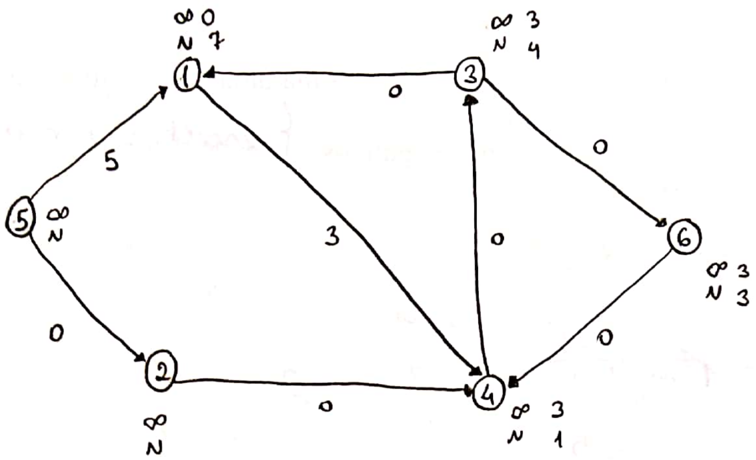
Aqui provamos b.2)

b) visto em sala

* b) Johnson - passos detalhados:

1. Crie um vértice artificial s ligando-o em todos os vértices.
2. Executar o Bellman-Ford a partir de s.
3. Calcular peso do menor caminho $\hat{w} = w + h(u) - h(v)$.
4. Inicialize uma matriz de adjacência $n \times n$ (M).
5. Rodar Dijkstra n vezes e atualizar M recalculando os pesos W.

2) b) 1



Dijkstra

Inicial

$Q = V$

$u = \min(Q)$

$S = \{5, 2, 1, 4$

		1	2	3	4	5	6
→	1	0	∞	3	3	∞	3
	2		0				
	3			0			
	4				0		
→	5	5	0	0	0	0	0
	6						0

Questão 3 (5 pontos):

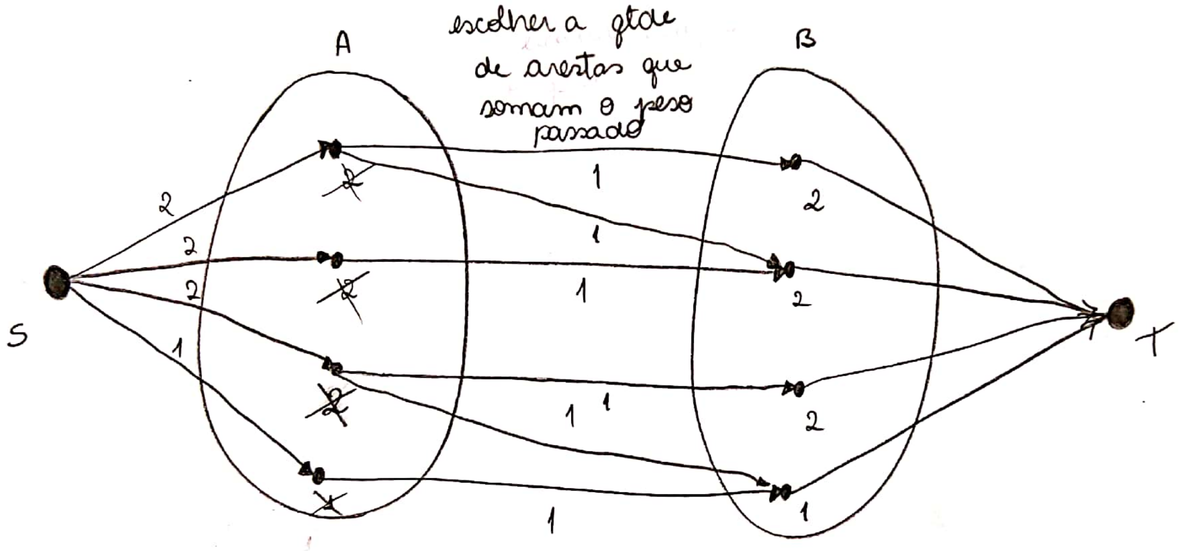
NP difícil

No problema do máximo subgrafo com grau limitado (MSGL) temos um grafo não orientado ponderado nos vértices. O problema consiste em encontrar o máximo subgrafo de G (em número de arestas) tal que o grau de cada vértice não supere seu peso.

Um grafo bipartido é um grafo tal que o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos A e B de forma tal que todas as arestas liguem um vértice de A com um vértice de B.

Mostre como o MSGL para grafos bipartidos pode ser resolvido usando fluxo máximo. Assuma que os conjuntos A e B são dados. Justifique a corretude de seu método.

Dica: Comece criando um vértice artificial s com arcos saindo dele para todos os arcos de A. Não se esqueça de definir a orientação e a capacidade de cada arco.



orientação A → B

fluxo 1 selecionada no final

fluxo 0 não selecionadas