DCC/ICEx/UFMG — Prof. Phablo F. S. Moura
PAA - Projeto e Análise de Algoritmos — **Segunda Prova**
2020.1 — 09/09/2020

Aluno:	**Matrícula:**

Instruções:

(i) Esta prova possui 2 página(s). Confira se sua prova está completa.

(ii) Respostas devem ser escritas com caneta (azul ou preta) e as páginas contendo as repostas devem ser numeradas. Escreva seu nome na primeira página das respostas.

(iii) Um único PDF deve ser enviado contendo as suas respostas.

(iv) Não é permitido se comunicar com colegas.

(v) Não é permitido fazer consultas na Internet.

(vi) É permitido consultar o livro-texto do curso, suas anotações e notas de aula do professor.

(vii) A clareza e concisão das respostas também é objeto de avaliação.

---

1. Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $u \in V$ um vértice de G. Suponha que uma busca em profundidade seja realizada a partir de u e denote por T a árvore geradora de G (enraizada em u) que é produzida ao término dessa busca. Suponha agora que uma busca em largura seja realizada a partir do mesmo vértice u e que a mesma árvore T seja produzida. Mostre que $G = T$. (Em outras palavras, se T é ao mesmo tempo uma árvore de busca em profundidade e uma árvore de busca em largura com raiz u, então G não pode conter qualquer outra aresta que não pertença a T). **[5 pts.]**

2. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com n vértice, m arestas, e com pesos positivos (todos distintos) $w\colon E \to \mathbb{Z}_{>}$ nas suas arestas. Para toda árvore geradora $T = (V, E')$ de G, definimos a aresta de *gargalo* de T como a aresta de maior peso em T. Uma árvore geradora T de G é uma *árvore de gargalo mínimo* se não existe árvore geradora T' de G que possui aresta de gargalo com peso menor que o peso da aresta de gargalo de T.

   (a) Demonstre que toda árvore geradora mínima de G é uma árvore de gargalo mínimo de G. **[4 pts.]**

   (b) Projete um algoritmo que, dada um entrada (G, w), devolve uma árvore de gargalo mínimo de G em tempo $O(m \log n)$. [Dica: você pode usar os algoritmos vistos nas aulas como sub-rotina]. **[1 pts.]**

3. Dados um grafo direcionado $G = (V, E)$ com pesos nos arcos $w\colon E \to \mathbb{R}$ e sem ciclo negativo, e um vértice $s \in V$. Seja $k = \max\{|E(P_v)|\colon v \in V \text{ e } P_v \text{ é um caminho de peso mínimo de } s \text{ a } v\}$, onde $E(P_v)$ é o conjunto de arcos no caminho P_v. Sugira uma simples mudança no algoritmo de Bellman-Ford (descrito abaixo) que o permite terminar em $k + 1$ iterações o *loop* da linha 5 sem que o valor de k seja conhecido a priori. Explique porque seu algoritmo funciona. **[4 pts.]**

Algorithm 1: Bellman-Ford(G, w, s)

1 **for** $v \in V(G)$ **do**
2     $dist(v) \leftarrow \infty$
3     $pred(v) \leftarrow NIL$
4 $dist(s) \leftarrow 0$
5 **for** $i = 0, \ldots, |V| - 1$ **do**
6   **for** $uv \in E$ **do**
7   **if** $dist(v) > dist(u) + w(u, v)$ **then**
8             $dist(v) \leftarrow dist(u) + w(u, v)$
9             $pred(v) \leftarrow u$
10 **return** *dist, pred*

---

4. Considere a rede com fonte s e sumidouro t, e o fluxo de s a t nessa rede que são ilustrados na Figura 1. A capacidade de cada arco aparece como um número próximo ao arco, e o número dentro do quadrado corresponde ao fluxo passando pelo arco. (Arco sem número dentro do quadrado não possuem qualquer fluxo passando por ele.)

   (a) Qual é o valor desse fluxo? Esse é um fluxo máximo de s a t ? **[1 pts.]**

   (b) Encontre um (s, t)-corte de capacidade mínima nessa rede e calcule sua capacidade. **[2 pts.]**

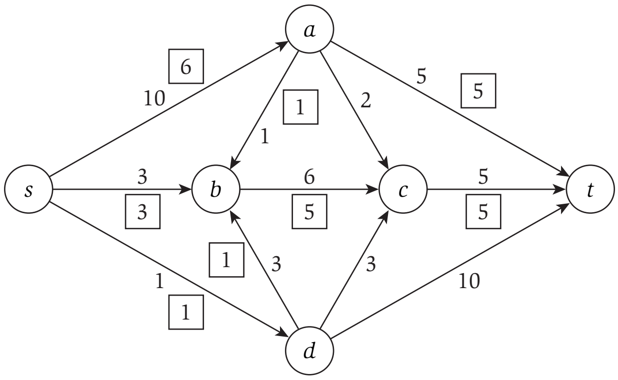

Figura 1: Rede com um fluxo.

5. Demonstre ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação.

   Seja $G = (V, E)$ uma rede com fonte s, sumidouro t e capacidades inteiras e positivas $c \colon E \to \mathbb{Z}_{>}$. Seja (A, B) um corte mínimo (com respeito às capacidades $\{c(e) \colon e \in E\}$) que separa s e t. Suponha que adicionamos 1 à capacidade de cada arco. Então, (A, B) ainda é um (s, t)-corte mínimo com respeito a essas novas capacidades $\{c(e) + 1 \colon e \in E\}$. **[3 pts.]**