INSTRUÇÕES

(a) As respostas devem estar na prova no espaço designado para tal.

(b) A interpretação das questões faz parte da prova. Explique as suposições que fizer.

(c) Não é permitido o uso de material de consulta.

Nome:

Matrícula:

Questão 1 (4 pontos) (Grafos) Considere a seguinte sugestão para um algoritmo de busca: Vamos ordenar todos os vértices em ordem crescente de grau e visitamos os vértices seguindo esta ordem. Este algoritmo é apresentado abaixo:

Algoritmo 1: Visita Maior

Data: Grafo $G = (V, E)$
para todo $v \in V$ **faça**
  calcule $d(v)$;
  $visitados[v] = BRANCO$;
Ordene os vértices de G em ordem crescente de grau;
para todo $v_i \in V$ *segundo a ordem de graus* **faça**
  $visitados[v] = PRETO$;

Considere que a complexidade de ordenar os vértices segundo seu grau é $O(n \log n)$

a) Qual a complexidade desse algoritmo quando o grafo é representado como uma lista de adjacências.

b) Qual a complexidade desse algoritmo quando o grafo é representado como uma matriz de adjacências.

Questão 2 (4 pontos) (DFS e BFS) Um aluno da UFMG desenvolveu uma nova estrutura de dados para representar um grafo. Ele não explicou como a estrutura é implementa, mas garante que podemos fazer todas as operações usuais em grafos e que elas tem as seguintes complexidades:

Verificar se uma aresta está ou não no grafo : $\Theta(\log n)$;

Recuperar uma lista com a vizinhaça de um vértice : $\Theta(\log n)$;

a) Qual a complexidade do algoritmo de busca em largura com essa nova estrutura usada para representar o grafo de entrada?

b) Qual a complexidade do algoritmo de busca em profundidade com essa nova estrutura usada para representar o grafo de entrada?

Questão 3 (4 pontos) (Caminho Mínimo) Assuma que nós modificamos a maneira como calculamos o peso de um caminho. Ao invés de somar os pesos das arestas do caminho, nós consideramos agora apenas a arestas mais pesada daquele caminho. Ou seja, o peso de uma caminho é dado pela aresta mais pesada do caminho. Neste contexto, dada uma **ÁRVORE** ponderada $T = (V, E)$ com pesos $w(u, v)$ positivos em suas arestas. Apresente um algoritmo para determinar os caminhos mínimos entre todos vértices e um vértice fixo s com essa nova regra de cálculo de peso.

Questão 4 (4 pontos) (Árvore Geradora Mínima) Considere o seguinte problema: Um construtor de rodovias deve construir vias para interligar n cidades. Ele dispõe da distância entre cada par de cidades $d(v,u)$ em quilômetros e possui também uma função $f(u,v)$ que representa o preço de pavimentar cada quilômetro entre as cidades u e v. O construtor deseja garantir que exista um caminho entre quaisquer duas cidades e que as rodovias construídas tenham o menor custo possível.

a) Como podemos modelar esse problema como um problema em grafos?

b) Apresente um algoritmo para resolver esse problema. Lembre-se que você pode usar os algoritmos vistos em sala e apenas indicar as possíveis modificações neles.

Questão 5 (4 pontos) (Fluxo) Considere uma rede $G = (V, A)$ com capacidades $c(u, v)$ para todos os arcos. Sejam f_1 e f_2 dois fluxos sobre esta rede e defina a *subtração* de dois fluxos $f_1 - f_2$ como sendo

$$(f_1 - f_2)(u, v) = \max\{0, f_1(u, v) - f_2(u, v)\}$$

Prove ou refute: A subtração de dois fluxos é um fluxo válido. Caso a afirmação seja falsa, explique qual a restrição é violada.