① O que é uma definição recursiva? Quais seus elementos essenciais?

É uma definição em que definimos um objeto em termos de si mesmo. Seus elementos essenciais são: o passo base e o recursivo. O passo base verifica a função em zero, e o passo recursivo dá uma regra para encontrar um valor para a função a partir dos valores dos seus menores inteiros.

② Encontre $f(1), f(2), f(3), f(4)$ se $f(n)$ for definido recursivamente ~~por~~ $f(0)=1$

(a) $f(n+1)=f(n)+2$ $f(0)=1 \to f(1)=3 \to f(2)=5 \to f(3)=7 \to f(4)=9$

(b) $f(n+1)=3f(n)$ $f(0)=1 \to f(1)=3 \to f(2)=9 \to f(3)=27 \to f(4)=81$

(c) $f(n+1)=2^{f(n)}$ $f(1)=2 \to f(2)=4 \to f(3)=16 \to f(4)=2^{16}=65536$

(d) $f(n+1)=f(n)^2+f(n)+1$ $f(1)=3 \to f(2)=13 \to f(3)=183 \to f(4)=33673$

③ Encontre $f(2), f(3), f(4)$ e $f(5)$ se n for definido recursivamente por $f(0)=-1$, $f(1)=2$

(a) $f(n+1)=f(n)+3f(n-1) \to f(2)=-1 ; f(3)=5 ; f(4)=2 ; f(5)=17$

(b) $f(n+1)=\frac{f(n-1)}{f(n)} \to f(2)=-\frac{1}{2} ; f(3)=-4 ; f(4)=\frac{1}{8} ; f(5)=-32$

④ Dê uma definição recursiva para a sequencia $\{a_n\}$, $n=1,2,3,\ldots$ se

(a) $a_n=6n$ $a_0=0 \to f(n+1)=f(n)+6$

(b) $a_n=2n+1 \to f(n+1)=2f(n)+1$, $a_0=1$

(c) $a_n=10^n \to f(0)=1$; $f(n+1)=f(n)\cdot 10$

(d) $a_n=5 \to f(0)=5$; $f(n+1)=f(n)$

⑤ (a) Generalização da conjunção $\begin{cases} \bigwedge_{i=1}^{0} p_i = ?, \\ \bigwedge_{i=1}^{n} p_i = ?, \; n \geq 1 \end{cases}$

~~$f(n+1)=f(n)\wedge f(n+1)$~~

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i = p_n \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} p_i$$

b) Disjunção - $\begin{cases} \bigvee_{i=1}^{0} p_i = ? \\ \bigvee_{i=1}^{n} p_i = ? \end{cases}$

⑥ Dê uma definição recursiva de:

(a) O conjunto dos números inteiros pares

$f(0) = 0 \quad f(n) = f(n-1) + 2$

(b) O conjunto dos inteiros positivos congruentes a 2 módulo 3

$f(0) = 2 \quad f(n) = f(n-1) + 3$

(c) O conjunto dos inteiros positivos não divisíveis por 5 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11

$$f(n) = \begin{cases} f(n-1)+1, & \text{se mod 5 de } f(n) \neq 0 \\ f(n-1)+2, & \text{se } f(n) \bmod 5 = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ ou $$f(n+1) = \begin{cases} f(n)+1, & \text{se } f(n+1) \bmod 5 \neq 0 \\ f(n)+2, & \text{se } '' = 0 \end{cases}$$

⑦ Seja S um subconjunto dos pares ordenados de inteiros, definido recursivamente por – Passo base: $(0,0) \in S$; Passo recursivo: Se $(a,b) \in S$, então $(a, b+1) \in S$, $(a+1, b+1) \in S$, e $(a+2, b+1) \in S$.

(a) Liste os elementos de S produzidos pelas quatro primeiras aplicações da def. rec.

$\{(0,1), (1,1), (2,1)\} \in S$ (1ª)

$\{(0,2), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2)\} \in S$ (2ª)

$\{(0,3), (1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3)\} \in S$ (3ª)

$\{(0,4), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4), (7,4), (8,4)\} \in S$ (4ª)

(b) Utilize indução estrutural para mostrar que $a \leq 2b$ quando $(a,b) \in S$

Caso base: $(0,0)$ é verdadeiro, pois $a \leq 2b$ $(0 \leq 0)$

Pela afirmação "se $(a,b) \in S$, então $\{(a, b+1), (a+1, b+1), (a+2, b+1)\} \in S$

Como b pode crescer 1 unidade enquanto a não, a afirmação $a \leq 2b$ é V

Como os 2 crescem à mesma taxa $(a+1, b+1)$, a af. $a \leq 2b$ é V

Como a e b crescem com taxa crescente, a 2x mais que b, $a \leq b$ é V

⑧ Dê uma definição recursiva para cada um dos conjuntos de pares ordenados de inteiros positivos -

(a) $S = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}^+, a+b \text{ é par}\}$

↳ a+b é par se "a XOR b" for par, logo a e b são par OU a e b são ímp

$f(0,0) = 0$
↳ caso base

$$S = \begin{cases} f(a+1, b+1) = f(a,b) + (2,2) \\ f(a+2, b) = f(a,b) + (2,2) \\ f(a, b+2) = f(a,b) + (2,2) \end{cases}$$

(b) $S = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}^+, a \text{ ou } b \text{ é ímpar}\}$

Se a ou b forem ímpar, isto significa 3 situações:

a é ímpar e b é par
a é par e b é ímpar
a é ímpar e b é ímpar

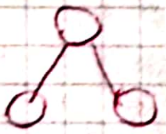
$f(0,1) = 0$
$f(1,0) = 0$
$f(1,1) = 0$

$\rightarrow f(a,b) = f(a+1, b+1) + (2,2)$
↳ se (a, b) estiverem nas condições

⑨ Defina uma recursão para o reverso de uma string

⑩ Use indução estrutural para mostrar que $n(T) \geq 2h(T)+1$, para uma árvore binária completa

Caso base:



~~Passo~~

~~Hipótese: $K \geq 2h+1$~~

$h = 1$

$n(T) = 3$

$n(T) \geq 2 \cdot h(T) + 1 \rightarrow$ VERDADEIRO

$$N(T) = N(T-1) * 2 - \sum_{K=2}^{T-1} N(T-K)$$

⑪ Dê um algoritmo recursivo para encontrar o mínimo de um conjunto finito de números inteiros, considerando o fato de que o mínimo de n números inteiros é o menor entre o último inteiro da lista e o mínimo dos primeiros n-1 elementos da lista. Exiba como seu algoritmo encontra o mínimo elemento do conjunto {3, 5, 1, 2, 4}

```
FUNÇÃO MINIMA_RECURSIVE (LISTA[], TAMANHO)
|  SE TAMANHO = 1
|  |  ENTÃO RETORNE LISTA[0]
|  SENÃO
|     RETORNE MÍNIMO(LISTA[TAMANHO-1], MINIMA_RECURSIVE(LISTA[], T…
FIMSE
CONJUNTO = [3, 5, 1, 2, 4]
RESULTADO = MINIMA_RECURSIVE(CONJUNTO, TAMANHO_CONJUNTO)
PRINT(RESULTADO);
```

⑫ Os números de Fibonacci, $f_0, f_1, f_2, \ldots$ são definidos recursi~~vela da~~vament como a seguir:

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ para } n = 1, 2, 3\ldots \end{cases}$$

Utilize indução estrutural para mostrar que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^n, \text{ onde } \begin{cases} \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

CASOS BASE: $n = 0$ e $n = 1$

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \checkmark$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2}$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi - \psi) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$$

HIPÓTESE DE INDUÇÃO: $f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^k \qquad f_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^{k-1}$

$\boxed{f_{k+1} = f_k + f_{k-1}}$ → PASSO INDUTIVO → PARA MOSTRAR QUE É VÁLIDO PARA $n = k+1$

$$f_{k+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^k\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^{k-1}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\varphi^k + \varphi^{k-1}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\psi^k + \psi^{k-1}\right)$$

Como $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \varphi^{k-1}$ e $\psi^{k+1} = \psi^k + \psi^{k-1}$, temos:

$$\boxed{f_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\psi^{k+1}}$$

É VERDADEIRO