

1) Responda formalmente as seguintes perguntas:

(a) Descreva o princípio da indução matemática fraca

Para provar que  $P(n)$  é verdadeiro para todos inteiros positivos  $n$ , onde  $P(n)$  é uma função proposicional, completamos os passos BASE e PASSO INDUTIVO

→ CASO BASE: verificar que  $P(1)$  é verdadeiro

→ PASSO INDUTIVO: mostrar que  $P(k) \rightarrow P(k+1)$  é verdadeiro para todos inteiros positivos  $k$ .

$$[P(1) \wedge \forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n P(n)$$

(b) Descreva o princípio de indução matemática forte

SOMELHANTE À INDUÇÃO FRACA, MAS ADICIONAMOS QUE TODAS AS AFIRMAÇÕES SOBRE  $P(i)$ , SENDO  $i = 1, 2, \dots, k$ , SÃO VERDADEIRAS.

(c) Explique a principal diferença entre a indução fraca e a forte

$$[P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1), k > 0$$

(d) Explique o que é o princípio de boa Ordenação

É uma propriedade que afirma que TODO conjunto não-vazio de inteiros, não-negativos tem um elemento "menor"

2) Seja  $P(n)$  a afirmação de que  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , 1 para  $n$  positivo e inteiro

(a) Quanto é a afirmação  $P(1)$ ? (b) Mostre que  $P(1)$  é verdadeiro, comp. passo base

$$P(1) = 1^2 = 1 \rightarrow \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1$$

(c) Qual é a hipótese da indução?

$$\times \text{ Se } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1 \text{ é verdadeiro, } \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = 1 \text{ também é}$$

$$K(K+1)(2K+1) \cdot \frac{1}{6} = 1^2 + 2^2 + \dots + K^2$$

(d) O que você precisa demonstrar ~~em um~~ <sup>no</sup> PASSO INDUTIVO?

Precisamos demonstrar uma generalização da afirmação. Se  $P(k)$  é verdadeiro, logo  $P(k+1)$  também o é.

(e) Complete o passo indutivo

$$1^2 + 2^2 + \dots + K^2 + (K+1)^2 = (K+1) \cdot (K+2) \cdot (2(K+1)+1) \cdot \frac{1}{6}$$

(f) Explique por que os passos acima mostram que a fórmula é verdadeira  $\forall n \in \mathbb{N}^+$

Como completamos os passos da indução matemática, a fórmula é verdadeira.



① Demonstre que  $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge \neg p_n, \forall n \geq 1$

De Morgan:  $\neg(p_1 \vee p_2) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2$  (caso base)  
 $\neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \equiv \neg((p_1 \vee p_2) \vee p_3)$   
 $\equiv \neg(p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_3$   
 $\equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$

Generalizando:  $\neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_k)$   
 $\neg((p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_k) \vee p_{k+1}) \equiv \neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_k) \wedge \neg p_{k+1}$   
 $\equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \dots \wedge \neg p_k \wedge \neg p_{k+1}$

Logo, a afirmação é verdadeira.

⑧ Seja  $P(n)$  a proposição "uma postagem de  $n$  centavos pode ser formada utilizando apenas selos de 3 e 5 cents". Por Ind. forte, illustre que ela é verdadeira para  $n \geq 8$

(a) Mostre que  $P(8), P(9)$  e  $P(10)$  são verdadeiros

$$\begin{aligned} P(8) &= a \cdot 3 + b \cdot 5 \rightarrow a=1, b=1 \\ P(9) &= a \cdot 3 + b \cdot 5 \rightarrow a=3, b=0 \\ P(10) &= a \cdot 3 + b \cdot 5 \rightarrow a=0, b=2 \end{aligned}$$

(b) Qual a hipótese indutiva da demonstração?

c, d, e  $\rightarrow$   $\left. \begin{matrix} P(k+1) \\ P(k+2) \\ P(k+3) \end{matrix} \right\}$  CAIM EM UM DOS TRÊS CASOS ACIMA VISTO QUE O MENOR VALOR DE SELO É 3, PARA  $n \geq 8$ ,  $\forall n$  ISTO PORQUE É "CÍCLICO", 11 usa  $8 \rightarrow a=a+1$ ; 12 usa  $9 \rightarrow a=a+1$ ; 13 usa  $10 \rightarrow a=a+1$ ;  
 (b)  $P(k+1) = a \cdot 3 + b \cdot 5$

⑨ Indução forte  $\rightarrow$  provar que  $n \in \mathbb{N}^{*+}$  pode ser escrito como  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k$

PARA  $N$  PAR, TEMOS QUE:

CASO BASE:  $n=2 \rightarrow n=2^1 \checkmark$

HIPÓTESE:  $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \dots + a_k \cdot 2^k$   
 $\rightarrow a_0 = 0$   
 $\rightarrow a_1, a_2, \dots, a_k$  podem ser 0 ou 1

PASSO INDUTIVO:  $n = a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{k+1} \cdot 2^{k+1}$

PARA  $N$  ÍMPAR:

CASO BASE:  $n=1 \rightarrow n=2^0 \checkmark$

$n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \dots + a_k \cdot 2^k$   
 $\rightarrow a_0 = 1$   
 $\rightarrow a_1, a_2, \dots, a_k$  podem ser 0 ou 1

$n = 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \dots + a_{k+1} \cdot 2^{k+1}$

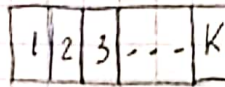
Se dividirmos qualquer  $n$  por 2, necessariamente teremos, sendo  $2^a$  o maior valor possível menor que  $n$ , vamos encontrar resto 0, se fizermos sucessivamente



⑩ Indução forte  $\Rightarrow$  para qualquer barra de  $n$  quadradinhos são necessárias exatamente  $n-1$  quebras para separar todos os quadradinhos

Caso base:  $n=1 \rightarrow$  A fileira tem 1 chocolate, não precisa quebrar ( $q=0$ )

Hipótese:  $q = k-1$

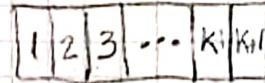


Quebra 1: entre 1 e 2

Quebra 2: entre 2 e 3

Quebra  $K-1$ : entre  $K-1$  e  $K$

PASSO INDUTIVO:  $q = K$



Quebra  $K$ : entre  $K$  e  $K+1$

Como uma quebra começa entre 1 e 2 (n e seu sucessor), temos  $n-1$  quebras necessárias.

⑪ O Passo indutivo é falso, pois se adotarmos um  $k$  igual ao número de habitantes da terra, logo todas teriam a mesma cordelinhos, o que sabemos que não é verdade.



PASSO BASE:  $P(1) \Rightarrow 1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$

$$1 = 2! - 1$$

$$1 = 1$$

HIPÓT. INDUTIVA:  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$

PASSO INDUTIVO:  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$

$$(k+1)! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$$

$$(k+1)! \cdot (1 + (k+1)) = (k+2)! - 1$$

$$(k+1)! \cdot (k+2) = (k+2)! - 1$$

$$(k+2) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$$

④ Encontre uma fórmula para  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$  examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de  $n$  e demonstre que a fórmula está correta.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 2$$

$\log(2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n}) \Rightarrow$  NÃO É UMA ABORDAGEM QUE VÁ RESOLVER

$$\sum_{i=1}^n 2^{-i} \Rightarrow \begin{aligned} i=1 &\rightarrow \sum = \frac{1}{2} \\ i=2 &\rightarrow \sum = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ i=3 &\rightarrow \sum = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ i=4 &\rightarrow \sum = \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \end{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^n 2^{-i} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

⑤ Demonstre que  $2^n > n^2$ , para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 5$

$$\frac{2^n}{n^2} > 1$$

Caso base:  $n=5$

$$\frac{2^5}{5^2} > 1 \Rightarrow \frac{32}{25} > 1 \quad \checkmark$$

HIPÓTESE:  $\frac{2^k}{k^2} > 1$

PASSO INDUTIVO:  $\frac{2^{k+1}}{(k+1)^2} > 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot 2^k}{k^2 + 2k + 1} > 1$

$$\frac{2^{k+1}}{(k+1)^2} > 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot 2^k}{k^2 + 2k + 1} > 1$$

⑥ Demonstre que 5 divide  $n^5 - n$  sempre que  $n$  é inteiro não negativo

$$n^5 - n = 5 \cdot a, a \in \mathbb{N}^+ \quad P(0) \rightarrow \frac{0^5 - 0}{5} = 0 \quad \checkmark \quad (\text{Base Step})$$

$$k^5 - k = 5a \rightarrow (k+1)^5 - (k+1) = 5a$$

$$P(1) \rightarrow \frac{1^5 - 1}{5} = 0 \quad \checkmark$$

$$k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 = 5a \quad P(2) \rightarrow \frac{2^5 - 2}{5} = \frac{32 - 2}{5} = 6 \quad \checkmark$$

$(k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) = 5a \rightarrow$  Se  $k^5 - k = 5a$ , a 2ª parcela também leva a hipótese verdadeira