Lista exercícios 1 - PAA   BERNARDO GUERRA P. CUNHA - 2024712317   Dec 3rd

1) Responda formalmente as seguintes perguntas.

(a) Descreva o princípio da indução matemática fraca

PARA PROVAR QUE $P(n)$ É VERDADEIRO PARA TODOS INTEIROS POSITIVOS N, ONDE $P(n)$ É UMA FUNÇÃO PROPOSICIONAL, COMPLETAMOS OS CASOS BASE E PASSO INDUTIVO

↳ CASO BASE: verificar que $P(1)$ é verdadeiro

↳ PASSO INDUTIVO: Mostrar que $P(K) \rightarrow P(K+1)$ é verdadeiro para todos inteiros positivos K.

$$[P(1) \wedge \forall k\,(P(K) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n\,P(n)$$

(b) Descreva o princípio de indução matemática forte

SEMELHANTE À INDUÇÃO FRACA, MAS AQUI ASSUMIMOS QUE TODAS AS AFIRMAÇÕES ACERCA DE $P(I)$, SENDO $I = 1, 2, \ldots, K$, SÃO VERDADEIRAS.

(c) Explique a principal diferença entre a indução fraca e a forte

$$[P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(K)] \rightarrow P(K+1)\ ,\ K > 0$$

(d) Explique o que é o princípio de boa Ordenação

É uma propriedade que afirma que ~~um~~ TODO conjunto não-vazio de inteiros, não-negativos tem um elemento "menor"

2) Seja $P(n)$ a afirmação de que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)}{(2n+1)^{-1}} \cdot \frac{1}{6}$ para n positivo e inteiro

(a) QUANTO É A AFIRMAÇÃO $P(1)$? (b) Mostre que $P(1)$ é verdadeiro, comp. passo base

$$P(1) = 1^2 = 1 \longrightarrow \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1$$

(c) Qual é a hipótese da indução?

~~Se $\frac{n(n+1)}{(2n+1)^{-1}} \cdot \frac{1}{6}$ é verdadeiro, $\frac{(n+1)(n+2)}{(2(n+1)+1)^{-1}} \cdot \frac{1}{6}$ também é~~

$$K(K+1)(2K+1) \cdot 1/6 = 1^2 + 2^2 + \ldots + K^2$$

(d) O que você precisa demonstrar ~~em um~~ no PASSO INDUTIVO?

Precisamos demonstrar uma generalização da afirmação. Se $P(K)$ é verdadeiro, logo $P(K+1)$ também o é.

(e) Complete o passo indutivo

$$1^2 + 2^2 + \ldots + K^2 + (K+1)^2 = (K+1) \cdot (K+2) \cdot \underbrace{(2(K+1)+1)}_{2K+3} \cdot 1/6$$

(f) Explique por que os passos acima mostram que a fórmula é verdadeira $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Como completamos os passos da indução matemática, a fórmula é verdadeira.

LISTA DE EXERCÍCIO 1) PAA BERNARDO GUERRA PEREIRA CUNHA - 2024712317 Dec 04

(7) Demonstre que $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n, \ \forall n \geq 1$

De Morgan: $\neg(p_1 \vee p_2) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2$ (caso base)

$\neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \equiv \neg((p_1 \vee p_2) \vee p_3)$

$\equiv \neg(p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_3$

$\equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$

Generalizando: $\neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots p_k)$

$\neg((p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots p_k) \vee p_{k+1}) \equiv \neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots p_k) \wedge \neg p_{k+1}$

$\equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \ldots \wedge \neg p_k \wedge \neg p_{k+1}$

Logo, a afirmação é verdadeira.

(8) Seja $P(n)$ a proposição "uma postagem de n centavos pode ser formada utilizando apenas selos de 3 e 5 cents". Por Ind. Forte, ilustre que ela é verdadeira para $n \geq 8$

(a) Mostre que $P(8)$, $P(9)$ e $P(10)$ são verdadeiros

$P(8) = a \cdot 3 + b \cdot 5 \rightarrow a=1, b=1$
$P(9) = a \cdot 3 + b \cdot 5 \rightarrow a=3, b=0$
$P(10) = a \cdot 3 + b \cdot 5 \rightarrow a=0, b=2$

(b) Qual a hipótese indutiva da demonstração?

c, d, e → $P(K+1)$, $P(K+2)$, $P(K+3)$ } CAEM EM UM DOS TRÊS CASOS ACIMA, VISTO QUE O MENOR VALOR DE SELO É 3, PARA $N \geq 8$, $\forall$ N. ISTO PORQUE É "CÍCLICO", 11 USA $8 \rightarrow a = a+1$; 12 USA $9 \rightarrow a = a+1$; 13 USA $10 \rightarrow a = a+1$;

(b) $P(K+1) = a \cdot 3 + b \cdot 5$

(9) Indução forte → provar que $n \in \mathbb{N}^{*+}$ pode ser escrito como $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{\ldots}$

PARA N PAR, TEMOS QUE:

CASO BASE: $n = 2 \rightarrow n = 2^1$ ✓

HIPÓTESE: $n = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \ldots + a_k 2^k$
→ $a_0 = 0$
→ $a_1, a_2, \ldots a_k$ podem ser 0 ou 1

PASSO INDUTIVO: $n = a_1 2^1 + a_2 2^2 + \ldots + a_{k+1} 2^{k+1}$

PARA N ÍMPAR:

CASO BASE: $n = 1 \rightarrow n = 2^0$ ✓

$n = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \ldots a_k 2^k$
→ $a_0 = 1$
→ $a_1, a_2, \ldots a_k$ podem ser 0 ou 1

$n = 2^0 + a_1 2^1 + \ldots + a_{k+1} 2^{k+1}$

Se dividirmos qualquer n por 2^a ~~sucessivamente teremos~~, sendo 2^a o maior valor possível menor que n, vamos encontrar resto 0, se fizermos sucessivamente

LISTA 1 - PAA BERN... DO GUERRA ... 2021312317 Dec 09-24

(10) Indução forte => para qualquer barra de n quadradinhos são necessárias exatamente $n-1$ quebras para separar todos os quadradinhos

Caso base: $n = 1$ → A fileira tem 1 chocolate, não precisa quebrar ($q=0$)

Hipótese: $q = K-1$

1	2	3	...	K

Quebra 1: entre 1 e 2
Quebra 2: entre 2 e 3
Quebra $K-1$: entre $K-1$ e K

Passo indutivo: $q = K$

1	2	3	...	K	K+1

Quebra K: entre K e $K+1$

Como uma quebra começa entre 1 e 2 (n e seu sucessor), temos $n-1$ quebras necessárias.

(11) O passo indutivo é falso, pois se adotarmos um K igual ao número de habitantes da terra, logo todos teriam a mesma cor de olhos, o que sabemos que não é verdade.

PASSO BASE: $P(1) \Rightarrow 1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$

$$1 = 2! - 1$$

$$1 = 1$$

HIPÓT. INDUTIVA: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots k \cdot k! = (k+1)! - 1$

PASSO INDUTIVO: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$

$$(k+1)! \cancel{-1} + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! \cancel{-1}$$

$$(k+1)! \cdot (1 + (k+1)) = (k+2)!$$

$$(k+1)! \, (k+2) = (k+2)!$$

$$(k+2)\,(k+1)! = (k+2) \cdot (k+1)!$$

④ Encontre uma fórmula para $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots 1/2^n$ examinando os valores dessa expressão para pequenos valores de n e demonstre que a fórmula está correta.

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-n} = 2^{\log(2^{-1} + 2^{-2} + \dots 2^{-n})} \Rightarrow$$ NÃO É UMA ABORDAGEM QUE VÁ RESOLVER

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \Rightarrow \begin{array}{l} i=1 \rightarrow \Sigma = 1/2 \\ i=2 \rightarrow \Sigma = 1/2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ i=3 \rightarrow \Sigma = 3/4 + \frac{1}{8} = 7/8 \\ i=4 \rightarrow \Sigma = 7/8 + \frac{1}{16} = 15/16 \end{array} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} 2^{-m} = \frac{2^m - 1}{2^m}$$

⑤ Demonstre que $2^n > n^2$, para $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$

$$\frac{2^n}{n^2} > 1$$

Caso base: $n = 5$ $\quad \frac{2^5}{5^2} > 1 \Rightarrow \frac{32}{25} > 1$ ✓

HIPÓTESE: $\frac{2^k}{k^2} > 1$

PASSO INDUTIVO: $\frac{2^{k+1}}{(k+1)^2} > 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot 2^k}{k^2 + 2k + 1} > 1$

$$\frac{2^{k+i}}{(k+i)^2} > 1 \rightarrow \frac{2^i \cdot 2^k}{k^2 + 2ki + i^2} > 1$$

⑥ Demonstre que 5 divide $n^5 - n$ sempre que n é inteiro não negativo

$n^5 - n = 5 \cdot a, \; a \in \mathbb{N}^+$ $\quad P(0) \rightarrow \frac{0^5 - 0}{5} = 0$ ✓ (Basis step)

$k^5 - k = 5a \rightarrow (k+1)^5 - (k+1) = 5a$ $\quad P(1) \rightarrow \frac{1^5 - 1}{5} = 0$ ✓

$k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + \cancel{1} - k - \cancel{1} = 5a$ $\quad P(2) \rightarrow \frac{2^5 - 2}{5} = \frac{32 - 2}{5} = 6$ ✓

$(k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) = 5a \longrightarrow$ Se $k^5 - k = 5a$, e a 2ª parcela também, logo a hipótese é verdadeira