

## Prova 1 - 14 de junho de 2021

### QUESTÃO 1

Leia as instruções abaixo com atenção:

- Responda à esta questão a caneta, em papel branco.
- Fotografe ou escaneie a página com sua resposta, e submeta seu pdf na Tarefa (ou Assignment) desta questão.
- **O prazo limite para recebimento de qualquer questão será as 16h00. Questões recebidas após este horário serão penalizadas, salvo apresentação de justificativa documentada.**

---

**Questão 1 da prova** (7 pontos). Considere o seguinte algoritmo.

---

**Algorithm 1** Girassol(A)

---

**Entrada:** Lista  $A = A[1 \cdots n]$ , com  $n$  inteiros,  $n \geq 1$ .

---

**Saída:** Número real.

---

```
n = A.length;  
M = A[1];  
for  $j = 2$  to  $n$  do  
  |  $M := (M * (j - 1) + A[j]) / j$  ;  
return M;
```

---

- (a) O que este algoritmo realiza na lista A?
- (b) Para demonstrar que este algoritmo realmente funciona, pode-se utilizar a técnica de indução matemática. Para tal, qual hipótese indutiva, ou loop invariante, você utilizaria?
- (c) Demonstre a parte da manutenção do loop invariante da letra (b).

## Prova 1 - 14 de junho de 2021

### QUESTÃO 2

Leia as instruções abaixo com atenção:

- Responda à esta questão a caneta, em papel branco.
  - Fotografe ou escaneie a página com sua resposta, e submeta seu pdf na Tarefa (ou Assignment) desta questão.
  - **O prazo limite para recebimento de qualquer questão será as 16h00. Questões recebidas após este horário serão penalizadas, salvo apresentação de justificativa documentada.**
- 

Questão 2 da prova (6 pontos).

- Defina uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $f(2n) \in O(f(n))$ . Demonstre que esta função satisfaz a propriedade pedida.
- Defina uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $f(2n) \notin O(f(n))$ . Demonstre que esta função satisfaz a propriedade pedida.
- Seja  $S(n)$  uma função definida recursivamente, com casos base  $S(1) = S(2) = 1$ , e recorrência  $S(n) = 3S(n-2) + 1$ .
  - Esboce a árvore de recorrência desta função.
  - Quantos níveis ela possui?
  - Qual o custo do  $k$ -ésimo nível? (conte de cima para baixo, com o primeiro nível sendo  $k = 0$ .)
  - Encontre uma função  $f(n)$ , definida explicitamente, tal que  $S(n) \in \Theta(f(n))$  (mas não precisa demonstrar por indução que funciona).

## Prova 1 - 14 de junho de 2021

### QUESTÃO 3

Leia as instruções abaixo com atenção:

- Responda à esta questão a caneta, em papel branco.
- Fotografe ou escaneie a página com sua resposta, e submeta seu pdf na Tarefa (ou Assignment) desta questão.
- **O prazo limite para recebimento de qualquer questão será as 16h00. Questões recebidas após este horário serão penalizadas, salvo apresentação de justificativa documentada.**

---

**Questão 3 da prova** (6 pontos). Uma permutação de uma lista com  $n$  elementos foi gerada de modo uniformemente aleatório. O objetivo desta questão é determinar a quantidade esperada de elementos que terminam em uma posição diferente da original.

- Seja  $X_i$  a variável indicadora de que o elemento originalmente na posição  $i$  ficou em posição diferente de  $i$ . Qual o valor esperado de  $X_i$ ?
- Seja  $X$  a variável aleatória que conta quantos elementos terminaram em posição diferente da original. Qual a relação entre  $X$  e os  $X_i$  ?
- Qual quantidade esperada de elementos que terminaram em uma posição diferente da original?

## Prova 1 - 14 de junho de 2021

### QUESTÃO 4

Leia as instruções abaixo com atenção:

- Responda à esta questão a caneta, em papel branco.
- Fotografe ou escaneie a página com sua resposta, e submeta seu pdf na Tarefa (ou Assignment) desta questão.
- **O prazo limite para recebimento de qualquer questão será as 16h00. Questões recebidas após este horário serão penalizadas, salvo apresentação de justificativa documentada.**

---

**Questão 4 da prova** (6 pontos). Suponha que realizamos uma sequência de  $n$  operações numa estrutura de dados, onde a  $k$ -ésima operação custa  $2k$  se  $k$  é potência de 2, e custa 1 caso contrário. Seja  $T(n)$  o custo das operações realizadas.

- (a) Dado  $n$ , sabemos que há apenas uma única potência de 2 entre  $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$  e  $n$ . Ache  $f(n) \in \Theta(n)$ , tal que

$$T(n) \leq T(n/2) + f(n).$$

Justifique sua escolha.

- (b) Verifique por indução que  $T(n) \leq 5n$  (se você tiver dificuldade, pode ser necessário melhorar sua escolha da  $f(n)$ ).
- (c) Em uma análise de custo amortizada, utilizando o método da contabilidade, desejamos atribuir um custo fictício para cada operação de modo que o custo total real, em qualquer momento, seja inferior ao custo fictício acumulado. Qual seria uma escolha razoável para o custo fictício de cada operação?