Prova 1 - 19 de dezembro de 2020

Leia as instruções abaixo com atenção:

- Responda às questões a caneta, em papel branco. Não use o verso se for um papel fino.
- Identifique com clareza a questão que está sendo respondida. Preferencialmente use páginas diferentes para questões diferentes.
- Fotografe ou escaneie as páginas ao final da prova, e submeta seu pdf na Tarefa (ou Assignment) desta prova, no Team de PAA.
- **O prazo limite para recebimento do arquivo é às 12h30. A tarefa será encerrada após este horário, e não será possível o envio de arquivo.** Recomendo veementemente que você encerre a prova as 12h, para ter tempo e calma para envio do arquivo.

Questão 1 (5 pontos)**.** Considere o seguinte algoritmo.

Algorithm 1 Girassol(A)

Entrada: Lista $A = A[1 \cdots n]$, com n inteiros, $n \geq 1$.

Saída: Número inteiro.

```
n = A.length;
key = A[1];
for j = 2 to n do
|  key = key + A[j];
return key;
```

(a) O que este algoritmo realiza na lista A?

(b) Para demonstrar que este algoritmo realmente funciona, pode-se utilizar a técnica de indução matemática. Para tal, qual hipótese indutiva, ou loop invariante, você utilizaria?

Questão 2 (6 pontos)**.** Para cada uma das afirmativas abaixo, mostre que estão corretas ou dê exemplos de funções que as tornam falsas. Suas demonstrações devem utilizar as definições formais das notações assintóticas utilizadas. Em todas as letras. assuma que $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ são funções arbitrárias tais que $f(n) \geq 0$, $g(n) \geq 0$, e $h(n) \geq 0$ para $n \geq 0$.

(a) $f(n) + g(n) \in O(\max(f(n), g(n)))$.

(b) Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $h(n) \in \Omega(f(n))$.

(c) $f(n) \in \Theta(f(n/2))$.

Questão 3 (6 pontos)**.** Considere uma função $T(n)$ definida recursivamente da seguinte forma

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + 2T(\sqrt[4]{n}) + \log(n).$$

Assuma que n é uma potência de 2 cujo expoente é uma potência de 4. Assuma que $T(2) = T(4) = 1$

(a) Faça a substituição $n = 2^m$ e reescreva a recorrência. Em seguida, crie nova função $S(m)$, que recebe m como argumento, e que seja igual a $T(n)$. Escreva a recorrência em termos desta nova função.

(b) Utilize algum dos métodos estudados (indução, árvore de recursão ou Teorema Mestre) para encontrar uma função $h(m)$, exibida explicitamente sem uso de recorrência, tal que $S(m) \in \Theta(h(m))$. Justifique apropriadamente o uso do método.

(c) Encontre função $f(n)$, definida sem uso de recorrência, tal que $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Questão 4 (5 pontos)**.** Suponha que uma permutação em um vetor de n elementos é gerada de modo uniformemente aleatório. O objetivo desta questão é descobrir qual o número esperado de elementos que terminam nas suas posições originais ou em posições imediatamente vizinhas às suas posições iniciais.

(a) Seja X_i a variável indicadora de que o elemento na posição i terminou na posição i ou em uma posição vizinha à posição i. Determine $\mathbb{E}[X_i]$, para cada i de 1 a n.

(b) Seja X a variável aleatória que, para cada permutação, retorna quantos elementos terminaram em sua posição inicial ou em uma posição vizinha à inicial. Qual a relação entre a X e as X_is?

(c) Qual o número esperado de elementos que terminam em nas suas posições originais ou em posições imediatamente vizinhas às suas posições iniciais?

(d) Considere o seguinte algoritmo, que se propõe a gerar uma permutação de uma lista com n elementos.

Algorithm 2 Permuta(A)

Entrada: Lista $A = A[1 \cdots n]$, com n inteiros, $n > 1$.

```
n = A.length;
for i = 1 to n do
    j = Random(0,2);
    if j = 2 then
        do nothing
    if j = 1 then
        swap A[i] with A[i+1];    (assuma índices cíclicos: A[0] = A[n], A[n+1] = A[1],..)
    if j = 0 then
        swap A[i] with A[i-1];
```

Este algoritmo gera uma permutação de modo uniformemente (pseudo)-aleatório da lista A? Justifique com uma demonstração, ou com um contra-exemplo.

(e) Bonus (2 pontos): qual o número esperado de elementos que terminam nas posições originais ou em posições imediatamente vizinhas às suas posições iniciais ao final da execução do algoritmo Permuta?

Questão 5 (6 pontos)**.** Suponha que realizamos uma sequência de n operações numa estrutura de dados, onde a k-ésima operação custa k se k é potência de 3, e custa 1 caso contrário. Seja $T(n)$ o custo das operações realizadas.

(a) Dado n, sabemos que há apenas uma única potência de 3 entre $(\lfloor n/3 \rfloor + 1)$ e n. Ache $f(n) \in \Theta(n)$, tal que
$$T(n) \leq T(\lfloor n/3 \rfloor) + f(n).$$
Justifique sua escolha.

(b) Verifique por indução que $T(n) \leq 3n$ (se você tiver dificuldade, pode ser necessário melhorar sua escolha da $f(n)$).

(c) Em uma análise de custo amortizada, utilizando o método da contabilidade, desejamos atribuir um custo fictício para cada operação de modo que o custo total real, em qualquer momento, seja inferior ao custo fictício acumulado. Qual seria uma escolha razoável para o custo fictício de cada operação?