Lista 1

1) a. Melhor caso: O(n)

- Checa cada elemento da lista 1x
- módulo e counter são constantes
- sempre executa nx, independentemente da entrada

b. Caso médio: O(n)

- não importa a entrada, executará nx

c. Pior caso: O(n)

- Sempre passará nx pelo array

2) a. Melhor caso

b. Caso médio

c. Pior caso

Nesse caso teremos $O(n^3)$ para todos os casos.
A complexidade será cúbica já que o algoritmo deverá multiplicar e adicionar sempre o mesmo número de vezes, independentemente da entrada

LISTA 1

3) ~~b~~) Ordenação por inserção

a)

1	2	3	4	5
3	5	2	8	9

n=5

i = 2

chave = A $[\overset{i}{2}]$ = 5

j = 1   A[j] = 3

i = 3

Chave = A [3] = 2

j = 2   A [j] = 5 → A [j] > A[i] →

3	2	5	8	9

→

2	3	5	8	9

↓   A[j] = 3 | A[i] = 5

j = 1 → j = 0 Para

c) A complexidade de pior caso é $O(n^2)$ → Como chegou na função pra calcular a complexidade? Ele vai cobrar?

d) A complexidade de melhor caso é $O(n)$

4) b) Ordenação trocando os elementos de posição, Bubble sort.

a)

1	2	3	4	5
3	5	2	8	9

n=5

i=1

j = 5

A[j] = 9

A[j-1] = 8

3	5	2	8	9

j = 4

A[j] = 8

A[j-1] = 2

3	5	2	8	9

j = 3   A[j] = 2   A[j] < A[j-1] ↕

A[j-1] = 5

3	2	5	8	9

j = 2

A[j] = 2

A[j-1] = 3

2	3	5	8	9

i = 2

j = 5

2	3	5	8	9

↗ Precisa demonstrar o i várias e várias vezes

c e d)

O melhor e o pior caso são $O(n^2)$

↓

Tem 2 for e é o produto de 2 somatórios.

i e j percorrem em direções opostas o vetor n

~~T[illegible]~~

- Tem que percorrer o i inteiro

LISTA 1

5\. i) $2n^3 + n^4 - 1 = O(?) \rightarrow O(n^5)$ → não é o mais apertado → $O(n^4)$

ii) $2^n + 5\log n + n^2 = O(2^n)$

iii) $\log_{10} n + \log_3 10 = O(\log_{a} n)$

iv) $n + n\log n + \log n = O(n \log n)$

v) $4^n + 2^n + n = O($[illegible](2^n) → usa o 2 pq é a classe padrão, o valor da base não importa → O Márcio pede $O(4^n)$ ↑

6\. i) $2n^3 - n^4 - 1 = O(n^4)$

ii) $2n + 5\log n + n^2 = O(2^n)$ ↑ mesma

iii) $O(\log n)$

iv) $O(n \log n)$

v) $O(2^n)$

7\. i) $2n^3 + n^4 - 1 = o(n^5)$

ii) $2^n + 5\log n + n^2 = o(3^n)$

iii) $\log_{10} n + \log_3 10 = o(n)$

iv) $n + n\log n + \log n = o(n^2)$

v) $4^n + 2^n + n = o(5^n)$

8\. i) $2n^3 + n^4 - 1 = \Omega(n^4)$

ii) $2^n + 5\log n + n^2 = \Omega(2^n)$

iii) $\log_{10} n + \log_3 10 = \Omega(\log n)$

iv) $n + n\log n + \log n = \Omega(n \log n)$

v) $4^n + 2^n + n = \Omega(4^n)$

9\. i) $2n^3 + n^4 - 1 = \Omega(n^3)$

ii) $2^n + 5\log n + n^2 = \Omega(2^{n/2})$

iii) $\log_{10} n + \log_3 10 =$ [illegible] $\Omega(1)$ — ?

iv) $n + n\log n + \log n = \Omega(n)$

v) $4^n + 2^n + n = \Omega(3^n)$

10. i) $2n^3 + n^4 - 1 = \Theta(n^4)$

ii) $2^n + 5\log n + n^2 = \Theta(2^n)$

iii) $\log_{10}{}^{n} + \log_3 10 = \Theta(\log n)$

iv) $n + n\log n + \log n = \Theta(n\log n)$

v) $4^n + 2^n + n = \Theta(4^n)$

Θ deve ser $O(f(n))$ e $\Omega(f(n))$

Exemplo:

$$7n^3 + 100n^2 - 20n + 6 = O(n^3)$$
$$= \Omega(n^3)$$
$$\Downarrow$$
$$\Theta n^3$$

Prova

11. i) Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ então $f(n) = O(h(n))$

$\exists n_0^f, c^f \rightarrow f(n) \leq c^f \cdot g(n) \quad n \geq n_0^f$

$\exists n_0^g, c^g$

$g(n) \leq c^g \cdot h(n) \quad n \geq n_0^g$

$f(n) \leq c^f g(n) \leq c^f \cdot c^g \cdot h(n) \quad n \geq n_0^f + n_0^g$

$$f(n) \leq \underbrace{\boxed{c^f \cdot c^g}}_{c} \cdot h(n) \quad n \geq \underbrace{\boxed{n_0^f + n_0^g}}_{n_0}$$

ii) $f(n) = O(f(n))$

$n_0 = 1$

$c = 2$

$f(1) \leq 2(f(1))$

$f(n) \leq 2f(n)$

Verdade para todo $n \geq n_0$

iii) Se $f(n) = \Omega(g(n))$ e $g(n) = \Omega(h(n))$ então $f(n) = \Omega(h(n))$

$\exists\, n_0^f, c^f \rightarrow f(n) \geq c^f \cdot g(n) \qquad n \geq n_0^f$

$\exists\, n_0^g, c^g \rightarrow g(n) \geq c^g \cdot h(n) \qquad n \geq n_0^g$

$f(n) \geq c^f \cdot g(n) \geq c^f \cdot c^g \cdot h(n) \qquad n \geq n_0^f + n_0^g$

$\boxed{f(n) \geq c^f \cdot c^g \cdot h(n)} \qquad n \geq n_0^f + n_0^g$

✓

iv) $f(n) = \Omega(f(n))$

$n_0 = 1$

$c = 1$

$f(1) \geq 1(f(1))$

$f(n) \geq f(n)$

$n_0 = 1$

$C = \frac{1}{10}$

$f(1) \geq \frac{1}{10}(f(1))$

$f(n) \geq \frac{1}{10} f(n)$

para todo $n \geq n_0$

v) $f(n) \neq o(f(n))$

ABSURDO:

$f(n) = o(f(n))$

$f(n) < c \cdot f(n)$

$f(1) < 2 \cdot f(1)$ ×

$n_0 = 1$

$c = 2$

Portanto verdadeiro

vi) $f(n) \neq \omega f(n)$

Portanto verdadeiro

ABSURDO:

$f(n) = \omega(f(n))$

$f(n) > c \cdot (f(n))$

$f(1) > \frac{1}{10}(f(n))$ ×

$n_0 = 1$

$C = \frac{1}{10}$

12) $n^3 \neq O(n^2)$

ABSURDO:

$n^3 = O(n^2)$

$\exists n_0, c$

$n^3 \leq c \cdot n^2 \qquad n \geq n_0$

$n \leq c$ × $\qquad n > n_0$

Portanto verdadeiro

∟ Um número que cresce ao infinito não pode ser menor que uma constante

13) $n \neq O(\log n)$

ABSURDO:

$n = O(\log n)$

$\exists n_0, c$.

$n \leq c \cdot \log n \qquad n \geq n_0$

$2^n \leq 2^{c \log n} = \overset{\textcircled{n}}{2^{\log n \cdot c}} = n^c \rightarrow$ Falso

$2^n \leq n^c \rightarrow \frac{2^n}{n^c} \leq 1$

$\frac{2^n}{n^c} \leq \frac{n^c}{n^c}$

Portanto, verdadeiro

14) Prove $\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$

$\sum_{i=1}^{n} i = O(n^2)$ // $\sum_{i=1}^{n} i = \Omega(n^2)$

$n_0 = 1$ $c = 3$

BASE: $(n_0) = 1$

$1 \leq 3 \cdot (1)^2$ ok

HIPÓTESE: $\sum_{i=1}^{k} i \leq 3k^2$ — $\underset{\downarrow \atop c}{O}(\underset{\downarrow \atop k}{n^2})$

PASSO: $\sum_{i=1}^{k+1} i \leq \underline{3(k+1)^2}$

$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \leq 3k^2 + (k+1)$ inventa algo que seja maior e provo

$\leq 3k^2 + \boxed{3}(k+1)$

$= \boxed{3}(k^2 \underset{|}{+} k + 1)$

$\leq \underline{3(k+1)^2}$ ok

Para Ω

$n_0 = 1$ $c = \boxed{\frac{1}{10}}$

BASE: $(n_0) = 1$ $1 \geq \frac{1}{10} \cdot (1)^2 \rightarrow 1 \geq \frac{1}{10}$

HIPÓTESE: $\sum_{i=1}^{k} i \geq \frac{1}{10} k^2$

Testar a hipótese:

PASSO: $\sum_{i=1}^{k+1} i \geq \frac{1}{10}(k+1)^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \geq \frac{1}{10}k^2 + (k+1)$

$\geq \frac{1}{10}k^2 + \boxed{\frac{1}{10}}(k+1)$

$= \frac{1}{10}(k^2 \underset{|}{+} k + 1)$

$\geq \frac{1}{\ }(k+1)^2$

15) Prove que $\sum^{n}_{i=1} \frac{1}{K} = \Theta(\log n)$

Limite inferior:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{x} dx = n$$

Limite superior:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \frac{1}{x} dx = 1 + n$$

logo, $\Sigma (1/k) = \Theta(\log n)$

$$c_1 \log n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq C_2 \log n$$