

**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação**  
**Exame de Qualificação 1º Estágio**  
**2º Semestre de 2012**

**Área: Teoria: Estrutura de Dados, Projeto e Análise de Algoritmos, Técnicas de Programação, Pesquisa e Ordenação**

Em 14/08/2012, 10:00 horas

Prova individual sem consulta com duração de 2 horas

**Observações:**

1. A prova deve ser resolvida no próprio caderno de questões.
2. As questões desta prova estão nas páginas seguintes, as quais estão numeradas de 1 a 12.
3. Faz parte da prova a interpretação das questões. Caso você ache que falta algum detalhe nos enunciados ou nos esclarecimentos, você deverá fazer as suposições que achar necessárias e escrever essas suposições juntamente com as respostas.
4. **Todas** as respostas devem ser justificadas.
5. Somente serão corrigidas respostas legíveis.
6. Não se esqueça de escrever seu nome abaixo.

Desejamos a você uma boa prova!

A COPEQ

---

**Atenção:** Esta prova contém um total de 6 (seis) questões, das quais você deve fazer 4 (quatro). Marque abaixo as questões que devem ser consideradas para avaliação:

1    2    3    4    5    6    (selecione até quatro)

Nome: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

## Questão 1

Para cada uma das notações  $\Theta$ ,  $O$ ,  $\Omega$ , prove se ela é:

- a) Transitiva.
- b) Simétrica.

.

## Questão 2

Considere um vetor com  $n$  números inteiros dos quais os  $m$  primeiros são iguais 0 e os números restantes são diferentes de 0.

- a) Implemente um algoritmo recursivo cujo pior caso tenha complexidade logarítmica ( $O(\log(n))$ ) para determinar o valor de  $m$ .
- b) Para comprovar a complexidade do seu algoritmo, determine e resolva a sua equação de recorrência.

.

### Questão 3

Compare as estruturas de dados *Árvore Binária de Pesquisa* e *Heap* com relação ao custo de realizar as operações abaixo. Em sua análise, considere que a estrutura foi inicialmente preenchida com  $n$  elementos fornecidos em ordem aleatória.

- a) Inserir um novo elemento.
- b) Retirar o maior elemento.
- c) Pesquisar por um elemento qualquer.
- d) Imprimir todos os elementos em ordem crescente.

.

## Questão 4

A Amazon quer instalar um centro de distribuição no Brasil e contratou você como consultor. Ela te forneceu um mapa com a malha aérea brasileira (mapa com aeroportos, voos e tempo de voo entre cada cidade) e quer saber qual a cidade onde ela deve instalar o seu centro. Duas métricas diferentes interessam à Amazon: minimizar o tempo médio de entrega e minimizar o tempo máximo de entrega.

- a) Modele o problema utilizando grafos. Discuta duas possíveis estruturas de dados para a representação desse grafo com suas vantagens e desvantagens.
- b) Descreva um algoritmo para encontrar a cidade que minimiza o tempo médio de entrega da Amazon. Qual a complexidade do seu algoritmo? (Considere que a demanda por produtos da Amazon é uniformemente distribuída em todas as cidades do Brasil).
- c) Descreva um algoritmo para encontrar a cidade que minimiza o tempo máximo de entrega da Amazon. Qual a complexidade do seu algoritmo?
- d) Depois de testes iniciais com o algoritmo desenvolvido na letra b), a Amazon descobriu que a Demanda de produtos no Brasil não é uniformemente distribuída. Como você alteraria o seu algoritmo ou modelagem frente a essa nova situação?



.

## Questão 5

O problema de Conjunto Independente (*Independent Set*) pode ser definido da seguinte forma. Dado um grafo (conectado e não-direcionado)  $G = (V, E)$ , ache um conjunto  $I \subseteq V$  de tamanho máximo (ou de tamanho  $k$ , na versão de decisão do problema), tal que o subgrafo induzido por  $I$  em  $G$  não tenha nenhuma aresta. Sabe-se que o problema de achar um conjunto independente de tamanho  $k$  em um grafo arbitrário é NP-completo.

O problema de Cobertura de Vértices (*Vertex Cover*) pode ser definido da seguinte forma. Dado um grafo (conectado e não-direcionado)  $G = (V, E)$ , ache um conjunto  $C \subseteq V$  de tamanho mínimo (ou de tamanho  $k$ , na versão de decisão do problema), tal que para qualquer aresta  $(u, v) \in E$ , seja verdadeiro que  $u \in C$  ou  $v \in C$ . Ou seja, estamos interessados no conjunto mínimo de vértices que cubram todas as arestas.

Prove que o problema de Cobertura de Vértices (CV) é NP-completo, através de uma redução do problema de Conjunto Independente (CI).

.

## Questão 6

Considere o seguinte problema: algumas moedas estão espalhadas em um tabuleiro  $n \times n$ , cada célula contendo no máximo uma moeda. Um robô localizado na célula superior mais à esquerda deve coletar um número máximo de moedas e levá-las à célula inferior mais à direita. Em cada passo, o robô pode se mover para a célula imediatamente abaixo ou imediatamente à direita daquela em que se encontra. Ao atingir uma célula em que exista uma moeda, o robô coleta a mesma.

Construa um algoritmo de complexidade  $O(n^2)$  que dada uma configuração de tabuleiro:

- a) determine o número máximo de moedas que o robô pode coletar;
- b) determine o caminho (ou um dos caminhos, caso exista mais de um) que ele deve seguir para coletar tal número de moedas.

.