Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação
Exame de Qualificação 1º Estágio
1º Semestre de 2013

Área: Teoria: Estrutura de Dados, Projeto e Análise de Algoritmos, Técnicas de Programação, Pesquisa e Ordenação

Em 12/03/2013, 10:00 horas

Prova individual sem consulta com duração de 2 horas

Observações:

1. A prova deve ser resolvida no próprio caderno de questões.
2. As questões desta prova estão nas páginas seguintes, as quais estão numeradas de 1 a 12.
3. Faz parte da prova a interpretação das questões. Caso você ache que falta algum detalhe nos enunciados ou nos esclarecimentos, você deverá fazer as suposições que achar necessárias e escrever essas suposições juntamente com as respostas.
4. **Todas** as respostas devem ser justificadas.
5. Somente serão corrigidas respostas legíveis.
6. Não se esqueça de escrever seu nome abaixo.

Desejamos a você uma boa prova!

A COPEQ

Atenção: Esta prova contém um total de 6 (seis) questões, das quais você deve fazer 4 (quatro). Marque abaixo as questões que devem ser consideradas para avaliação:

1 2 3 4 5 6 (selecione até quatro)

Nome: ____________________

Assinatura: ____________________

Questão 1

a) Sejam as funções $f(n)$ e $g(n)$ assintoticamente não negativas. Usando as definições básicas da notação Θ, prove que: $\Theta(f(n) + g(n)) = max(f(n), g(n))$

b) Sejam as funções $f(n)$ e $g(n)$ assintoticamente não negativas e considere que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$. Pode-se afirmar que $f(n) + g(n) = \Omega(g(n))$?

Questão 2

Considere o seguinte problema: dado um vetor A com n números inteiros, encontre o maior e menor elementos do vetor.

a) Implemente um **algoritmo recursivo** Maxmin **usando o paradigma de divisão e conquista** para resolver esse problema.

b) No seu algoritmo, quantas chamadas do seu procedimento recursivo são feitas para um vetor de tamanho $n = 2^K$? Qual é o tamanho máximo da pilha de execução?

c) Qual a complexidade do seu algoritmo? Para isso, **determine e resolva a equação de recorrência** para o seu algoritmo.

Questão 3

Você foi contratado por uma distribuidora de grãos para otimizar o sistema de despacho de encomendas. As encomendas são sempre em kilos, não havendo frações, e devem ser colocadas em caixas com capacidades para 1, 10 e 25 kilos. As caixas devem ser sempre preenchidas completamente e o seu objetivo é utilizar o mínimo de caixas possível, pois a companhia transportadora cobra por peso e por número de volumes transportados. Pede-se:

a) Apresente um algoritmo de tentativa e erro para resolver o problema.

b) O problema tem sub-estrutura ótima? Prove.

c) Apresente um algoritmo guloso para resolver o problema. O algoritmo guloso proposto garante a solução ótima? Justifique.

d) Apresente um algoritmo de programação dinâmica para resolver o problema.

Questão 4

Considere um grafo conectado, não direcionado e não ponderado $G =< N, E >$, onde N é um conjunto de nós e $E \subseteq NxN$ é um conjunto de arestas. Dados dois nós quaisquer m, $n \in N$, define-se $cMin(m, n)$ como o caminho mínimo de m para n.

a) Proponha um algoritmo eficiente que, dado um nó n_0, retorna uma lista de nós de G de acordo com a distância desses nós a n_0. Isto é, se m precede n na lista, então $cMin(n_0, m)$ $\leq cMin(n_0, n)$.

b) Analise a complexidade do algoritmo proposto no item anterior.

c) Proponha uma modificação para esse algoritmo que leve em consideração um peso inteiro para cada aresta. A lista de saída deve ser ordenada de acordo com o $pMin(n_0, m)$, onde o último representa o peso total do caminho mínimo de n_0 para m. Essa modificação não precisa gerar um algoritmo eficiente.

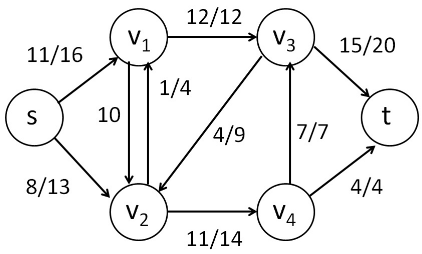
d) Analise a complexidade do algoritmo proposto no item anterior.

Questão 5

Responda se as questões abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando as suas respostas.

a) Seja P um caminho mínimo de um vértice s para outro vértice t em um grafo. Se o peso de cada aresta no grafo for acrescido de 1, P ainda será o menor caminho de s para t.

b) O valor do fluxo entre os cortes ({s,v_2,v_4} ,{v_1,v_3,t}) no grafo abaixo é 23.



c) O algoritmo de Kruskal utiliza a ideia de componentes conectados para encontrar a árvore geradora mínima de um grafo, e executa em O(ElogV) se implementado utilizando estruturas de dados tais com conjuntos disjuntos.

d) Para descobrir se um um grafo direcionado é acíclico, basta executar uma busca em largura.

Questão 6

Considere que um problema Π_1 seja NP-Completo enquanto um problema Π_2 pode ser resolvido em tempo polinomial. Considere ainda que o símbolo $\leq_p$ represente uma redução polinomial, ou seja, $Q \leq_p R$ significa que o problema Q pode ser reduzido ao problema R por uma transformação polinomial de sua entrada. Responda se as questões abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando as suas respostas.

a) Seja SAT o clássico *Problema da Satisfabilidade*. Podemos afirmar que $SAT \leq_p \Pi_1$.

b) Se $\Pi_2 \leq_p \Pi_1$ então $P = NP$.

c) Seja Π_3 um problema que queremos analisar. Se $\Pi_1 \leq_p \Pi_3$, podemos afirmar que Π_3 é NP-Completo.

d) Você quer desenvolver em seu doutorado um algoritmo polinomial para resolver de forma exata Π_1 mas, infelizmente, isso é impossível.