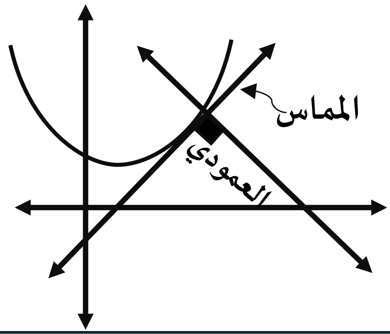
معادلتا المماس و العمودي

معادلة المماس عند نقطة $(س_1 ، ص_1)$	معادلة العمودي عند نقطة $(س_1 ، ص_1)$
$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} =$ ميل المماس (م)	$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} =$ ميل العمودي $\left(\frac{-1}{م}\right)$



١ أوجد معادلتي المماس و العمودي للمنحنى : $س^2 + ص^2 - ٤س + ٢ص = ٢٠$

عند النقطة $(-١ ، ٣)$ الواقعة عليه.

الحل

بالاشتقاق: $٢س + ٢ص \frac{دص}{دس} - ٤ + ٢\frac{دص}{دس} = ٠$

بالتعويض: $-٢ + ٦\frac{دص}{دس} - ٤ + ٢\frac{دص}{دس} = ٠$ $\therefore ٨\frac{دص}{دس} = ٦$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$ $\therefore$ ميل المماس $= \frac{٣}{٤}$

معادلة المماس

ميل المماس $= \frac{٣}{٤}$

$\therefore \frac{ص - ٣}{س + ١} = \frac{٣}{٤}$

$٣س + ٣ = ٤ص - ١٢$

$\therefore \boxed{٣س - ٤ص + ١٥ = ٠}$ ميل المماس

معادلة العمودي

ميل العمودي $= \frac{-٤}{٣}$

$\therefore \frac{ص - ٣}{س + ١} = \frac{-٤}{٣}$

$٣ص - ٩ = -٤س - ٤$

$\therefore \boxed{٤س + ٣ص - ٥ = ٠}$ ميل العمودي

❷ أوجد معادلتى المماس و العمودي للمنحنى : $\text{س}^2 + ٥\text{س ص} + \text{ص}^2 = ٧$

عند النقطة $(-١ ، -١)$ الواقعة عليه.

الحل

بالاشتقاق: $٢\text{س} + ٥\text{ص} + ٥\text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

بالتعويض: $-٢ - ٥ - ٥ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٢ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

∴ $٧ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٧$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١$ ∴ ميل المماس $= -١$

<u>معادلة المماس</u>

$\frac{\text{ص}+١}{\text{س}+١} = -١$

∴ $\text{ص} + ١ = -\text{س} - ١$

∴ $\boxed{\text{ص} + \text{س} + ٢ = ٠}$ معادلة المماس

<u>معادلة العمودي</u>

$\frac{\text{ص}+١}{\text{س}+١} = ١$

∴ $\text{س} + ١ = -\text{ص} + ١$

∴ $\boxed{\text{ص} - \text{س} = ٠}$ معادلة العمودي

❸ أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات و المماس و العمودي عليه للمنحنى:

$\text{س}^2 + ٤\text{ص}^2 = ٢٠$ عند النقطة $(٢ ، ٢)$

الحل

بالاشتقاق: $٢\text{س} + ٨\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

بالتعويض: $١٤ + ١٦ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٤}{١٦} = \frac{-١}{٤}$ ميل المماس

<u>معادلة المماس</u>

$\frac{\text{ص}-٢}{\text{س}-٢} = \frac{-١}{٤}$

∴ $٤\text{ص} - ٨ = -\text{س} + ٢$

∴ $\boxed{\text{س} + ٤\text{ص} - ١٠ = ٠}$ ← المماس

<u>معادلة العمودي</u>

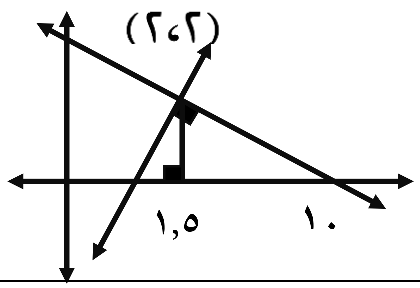
$\frac{\text{ص}-٢}{\text{س}-٢} = ٤$

∴ $٤\text{س} - ٨ = \text{ص} - ٢$

∴ $\boxed{٤\text{س} - \text{ص} - ٦ = ٠}$ ← العمودي

مساحة $\Delta = \frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times ٨,٥ \times ٢ = ٨,٥$ وحدة مربعة



④ أوجد معادلتى المماس و العمودي للمنحنى : $\text{ص} = ٢\text{س} - \text{ظتا}\,\text{س}$

عند النقطة التي تقع على المنحنى و إحداثيها السينى يساوي $\frac{\pi}{٤}$

الحل

بالاشتقاق: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ + \text{قتا}^٢\text{س}$

بالتعويض: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ + \text{قتا}^٢\,٤٥ = ٤$

$\therefore \text{س} = \frac{\pi}{٤}$

$\therefore \text{ص} = ٢ \times \frac{\pi}{٤} - \text{ظتا}\,٤٥$

$\therefore \text{ص} = \frac{\pi}{٢} - ١$

النقطة : $\left(\frac{\pi}{٤} \text{ ، } \frac{\pi}{٤} - ١\right)$

<u>معادلة المماس</u>

$$\frac{\text{ص} - \frac{\pi}{٢} + ١}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = ٤$$

$$٤\text{س} - \pi = \text{ص} - \frac{\pi}{٢} + ١$$

$$\therefore \boxed{٤\text{س} - \text{ص} - \frac{\pi}{٢} - ١ = ٠} \leftarrow \text{المماس}$$

<u>معادلة العمودي</u>

$$\frac{\text{ص} - \frac{\pi}{٢} + ١}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = \frac{-١}{٤}$$

$$٤\text{ص} - ٢\pi + ٤ = -\text{س} + \frac{\pi}{٤}$$

$$\therefore \boxed{\text{س} + ٤\text{ص} - \frac{٩\pi}{٤} + ٤ = ٠} \leftarrow \text{العمودي}$$

⑤ أوجد معادلة المماس للمنحنى : $\text{ص} = \frac{\text{ظاس}}{١ - \text{ظا}^٢\text{س}}$ عند النقطة التي إحداثيها السينى

يساوي $\frac{\pi}{٣}$

الحل

$$\text{ص} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢\text{ظاس}}{١ - \text{ظا}^٢\text{س}} = \frac{١}{٢}\,\text{ظا}\,٢\text{س}$$

بالاشتقاق: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^٢\,٢\text{س}$ (ميل المماس)

إذا كانت: $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore \text{ص} = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

بالتعويض: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\, ١٢٠ = ٤$

النقطة: $\left(\frac{\pi}{٣} ، -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \right)$

$\therefore \text{ص} = \frac{\text{ص} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\text{س} - \frac{\pi}{٣}} = ٤$

$\therefore ٤\text{س} - \frac{٤\pi}{٣} = \text{ص} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore \boxed{٤\text{س} - \text{ص} - \frac{٤\pi}{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٠}$ ← معادلة المماس

❻ أوجد معادلتي المماس و العمودي للمنحنى : $\text{ص} = ٣ + \text{قاس}$
عند النقطة التي تقع على المنحنى و إحداثيها السيني يساوي $\frac{٢\pi}{٣}$

الحل

بالاشتقاق: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قاس ظاس}$

بالتعويض: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}\, ١٢٠ \times \text{ظا}\, ١٢٠$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢ \times -\sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

<u>معادلة المماس</u>

$\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}} = ٢\sqrt{٣}$

$٢\text{س} - \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}\pi = \text{ص} - ١$

$\therefore \boxed{٢\text{س} - \text{ص} - \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}\pi + ١ = ٠}$

←المماس

$\therefore \text{س} = \frac{٢\pi}{٣}$

$\therefore \text{ص} = ٣ + \text{قا}\, ١٢٠ = ١$

النقطة: $\left(\frac{٢\pi}{٣} ، ١ \right)$

<u>معادلة العمودي</u>

$\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}} = \frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$

$٢\sqrt{٣}\,\text{ص} - ٢\sqrt{٣} = -\text{س} + \frac{٢\pi}{٣}$

$\therefore \boxed{\text{س} + ٢\sqrt{٣}\,\text{ص} - ٢\sqrt{٣} - \frac{٢\pi}{٣} = ٠}$

←العمودي

❼ أوجد معادلة العمودي للمنحنى : $ص = س|س|$ عند النقطة $(-٢ ، -٤)$

الحل

$ص = س \times -س \quad \therefore ص = -س^{٢}$

بالاشتقاق: $\frac{دص}{دس} = -٢س$

بالتعويض: $\frac{دص}{دس} = ٤ \quad \therefore$ ميل المماس $= ٤ \quad \therefore$ ميل العمودي $= \frac{-١}{٤}$

معادلة العمودي: $\frac{ص + ٤}{س + ٢} = \frac{-١}{٤} \quad \therefore ٤ص + ١٦ = -س - ٢$

$\therefore \boxed{س + ٤ص + ١٨ = ٠}$ ← معادلة العمودي

❽ أوجد معادلة المماس و العمودي للمنحنى : $س \,جاص + ص \,جاس = \pi$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢})$ على المنحنى.

الحل

بالاشتقاق: $جاص + س \,جتاص \,\frac{دص}{دس} + \frac{دص}{دس} \,جاس + ص \,جتاس = ٠$

بالتعويض: $جا ٩٠ + \frac{\pi}{٢} \times جتا ٩٠ \,\frac{دص}{دس} + \frac{دص}{دس} \times جا ٩٠ + \frac{\pi}{٢} \times جتا ٩٠ = ٠$

$١ + \frac{دص}{دس} = ٠ \quad \therefore \frac{دص}{دس} = -١ \quad \therefore$ ميل المماس $= -١$

<u>معادلة المماس</u>

$\frac{ص - \frac{\pi}{٢}}{س - \frac{\pi}{٢}} = -١$

$\therefore ص - \frac{\pi}{٢} = -س + \frac{\pi}{٢}$

$\therefore \boxed{س + ص - \pi = ٠}$ ← المماس

<u>معادلة العمودي</u>

$\frac{ص - \frac{\pi}{٢}}{س - \frac{\pi}{٢}} = ١$

$\therefore ص - \frac{\pi}{٢} = س - \frac{\pi}{٢}$

$\therefore \boxed{ص - س = ٠}$ ← العمودي

⑨ مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى : $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$

حيث $\text{س} > ٠$ عند أي نقطة عليه و محوري الإحداثيات تساوي .... وحدة مربعة.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

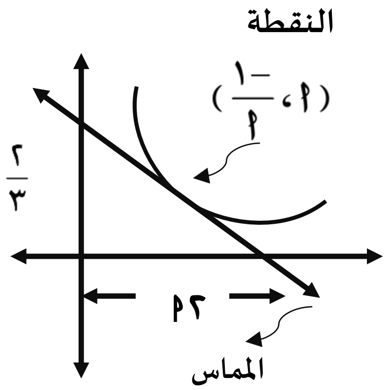
الحل

$\text{ص} = \text{س}^{-١}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{س}^{-٢} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

∴ ميل المماس $= \frac{-١}{\text{أ}^{٢}}$ ∴ $\frac{\text{ص} - \frac{١}{\text{أ}}}{\text{س} - \text{أ}} = \frac{-١}{\text{أ}^{٢}}$

∴ $\text{أ}^{٢}\text{ص} - ٢ = -\text{س} + \text{أ}$

∴ $\boxed{\text{س} + \text{أ}^{٢}\text{ص} - ٢\text{أ} = ٠}$ ← معادلة المماس



بوضع: $\text{ص} = ٠$ ∴ $\text{س} = ٢\text{أ}$

بوضع: $\text{س} = ٠$ ∴ $\text{ص} = \frac{٢}{\text{أ}}$

∴ مساحة $\Delta = \frac{١}{٢} \times ٢\text{أ} \times \frac{٢}{\text{أ}}$

$= ٢$ وحدة مربعة

⑩ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $٣\text{ص}^{٢} - ٦\text{ص} + ٢\text{س}^{٢} = ٠$ و التي عندها المماس لهذا المنحنى يكون موازيًا لمحور السينات.

الحل

بالاشتقاق: $٦\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٦ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢\text{س} = ٠$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}(٦\text{ص} - ٦) = -٢\text{س}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س}}{٦\text{ص} - ٦}$

∵ المماس // محور السينات

∴ ميل المماس = صفر

∴ $\frac{-٢\text{س}}{٦\text{ص} - ٦} = ٠$ ∴ $\boxed{\text{س} = ٠}$

∴ $٣\text{ص}^{٢} - ٦\text{ص} = ٠ \quad (\div ٣)$

∴ $\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} = ٠$ ∴ $\text{ص}(\text{ص} - ٢) = ٠$

∴ $\boxed{\text{ص} = ٠}$ أو $\boxed{\text{ص} = ٢}$

النقط هي : (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٢)

⑪ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $س^{٢} + ٣سص + ص^{٢} = ٥$ و التي عندها المماس لهذا المنحنى يصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل

بالاشتقاق: $٢س + ٣ص + ٣س\frac{ءص}{ءس} + ٢ص\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس}(٣س + ٢ص) = -٢س - ٣ص$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢س - ٣ص}{٣س + ٢ص}$ $\qquad \therefore \frac{-٢س - ٣ص}{٣س + ٢ص} = -١$

$\therefore -٢س - ٣ص = -٣س - ٢ص$ $\qquad \therefore \boxed{س = ص}$

$\therefore س^{٢} + ٣س^{٢} + س^{٢} = ٥$

$\therefore ٥س^{٢} = ٥$ $\qquad \therefore س^{٢} = ١$

$\therefore \boxed{س = \pm ١}$ $\qquad \therefore \boxed{ص = \pm ١}$

∴ النقط هي : $(١ ، ١)$ ، $(-١ ، -١)$

ميل المماس = ظاهـ

∴ميل المماس = ظا١٣٥

ميل المماس = -١

⑫ (مصر ٢٠٠٤ - ٢٠١١) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $س^{٢} + سص + ص^{٢} = ٣$ و التى عندها المماس للمنحنى موازيًا لمحور الصادات.

الحل

بالاشتقاق: $٢س + ص + س\frac{ءص}{ءس} + ٢ص\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\frac{ءص}{ءس}(س + ٢ص) = -٢س - ص$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢س - ص}{س + ٢ص}$ $\qquad \therefore \frac{-٢س - ص}{س + ٢ص} = \frac{١}{٠}$

ميل // محور الصادات
ميله غير معرف

الميل = $\frac{١}{٠}$

$\therefore س + ٢ص = ٠$ $\qquad \therefore \boxed{س = -٢ص}$

$\therefore (-٢ص)^{٢} - ٢ص \times ص + ص^{٢} = ٣$ $\qquad \therefore ٣ص^{٢} = ٣$ $\qquad \therefore ص^{٢} = ١$

$\therefore \boxed{ص = \pm ١}$ $\qquad \therefore \boxed{س = \mp ٢}$ $\qquad$ ∴ النقط هي : $(-٢ ، ١)$ ، $(٢ ، -١)$

⑬ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $ص = \frac{ظاس}{٢}$ و عندها يكون المماس موازيًا المستقيم $س - ص + ٣ = ٠$ حيث $٠ < س < ٢\pi$

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢} \text{قا}^٢ \frac{س}{٢}$ ميل المستقيم $= ١$ ميل المماس $= ١$

$\therefore \frac{١}{٢} \text{قا}^٢ \frac{س}{٢} = ١$ $\therefore \text{قا}^٢ \frac{س}{٢} = ٢$ $\therefore \text{جتا}^٢ \frac{س}{٢} = \frac{١}{٢}$ $\therefore \text{جتا} \frac{س}{٢} = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\text{جتا} \frac{س}{٢} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (١) (٤)

$\therefore \frac{س}{٢} = ٤٥$ أو $\frac{س}{٢} = ٣١٥^\circ$

$س = ٩٠^\circ = \frac{\pi}{٢}$ ، $ص = ١$ ، $\left(\frac{\pi}{٢} ، ١\right)$

$س = ٦١٥$ مرفوض

$\text{جتا} \frac{س}{٢} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ (٢) ١٣٥° ، (٣) ٢٢٥°

$\therefore \frac{س}{٢} = ١٣٥^\circ$ أو $\frac{س}{٢} = ٢٢٥^\circ$

$س = ٢٧٠^\circ$ ، $س = \frac{٣\pi}{٢}$ ، $ص = -١$ ، $\left(\frac{٣\pi}{٢} ، -١\right)$

$س = ٤٥٠^\circ$ مرفوض

النقط هى : $\left(\frac{\pi}{٢} ، ١\right)$ ، $\left(\frac{٣\pi}{٢} ، -١\right)$

⑭ (مصر ٢٠٠٢)

أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $س^٢ + ص^٢ = ٨$ و التي يكون عندها المماس للمنحنى عموديًا على المستقيم $ص = ٤ - س$

الحل

$\cancel{٢}س + \cancel{٢}ص \frac{دص}{دس} = ٠$ $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$

ميل المستقيم $= -١$

$\therefore$ ميل المماس $= ١$

الميل $= \frac{١}{٠}$

$\therefore \frac{-س}{ص} = ١$ $\qquad \therefore \boxed{ص = -س}$

$\therefore س^٢ + (-س)^٢ = ٨ \qquad \therefore ٢س^٢ = ٨ \qquad \therefore س^٢ = ٤$

$\therefore \boxed{س = \pm ١} \qquad \therefore \boxed{ص = \mp ٢}$ $\qquad \therefore$ النقط هي : (٢، −٢)، (−٢، ٢)

⑮ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $ص^٢ - س^٢ = ٧$ و التي عندها المماس يصنع زاوية جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل

$\cancel{٢}ص \frac{دص}{دس} - \cancel{٢}س = ٠$

$\frac{دص}{دس} = \frac{س}{ص} \qquad \therefore \frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤} \qquad \therefore \boxed{س = ص}$

$\therefore س^٢ + ٣س^٢ + س^٢ = ٥$

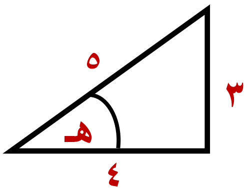
$\therefore ٥س^٢ = ٥ \qquad \therefore س^٢ = ١$

$\therefore \boxed{س = \pm ١} \qquad \therefore \boxed{ص = \pm ١}$

$\therefore$ النقط هي : (١، ١)، (−١، −١)

$جتاهـ = \frac{٤}{٥}$

$\therefore ظاهـ = \frac{٣}{٤} \leftarrow$ ميل المماس



$٣ص = ٤س \qquad \therefore \boxed{ص = \frac{٤}{٣}س} \qquad \therefore \left(\frac{٤}{٣}س\right)^٢ - س^٢ = ٧$

$\therefore \frac{١٦}{٩}س^٢ - س^٢ = ٧ \qquad \therefore \frac{\cancel{٧}}{٩}س^٢ = \cancel{٧} \qquad \therefore \frac{١}{٩}س^٢ = ١$

$\therefore س^٢ = ٩ \qquad \therefore \boxed{س = \pm ٣} \qquad \therefore \boxed{ص = \pm ٤}$

$\therefore$ النقط هي : (٣، ٤)، (−٣، −٤)

⑯ (مصر ٢٠٠١) إذا كان ميل المماس للمنحنى : $ص^٢ = س - ١$ يساوي $\frac{-١}{٢}$ فأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

بالاشتقاق: $٢ص \frac{دص}{دس} = ٠ \qquad \therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢ص}$

∵ ميل المماس = $\frac{-١}{٢}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-١}{٢}$ ∴ $\frac{١}{٢\text{ص}} = \frac{-١}{٢}$

∴ $٢\text{ص} = -٢$ ∴ $\text{ص} = -١$ ∴ $\text{س} = ٢$ ∴ النقطة: (٢ ، -١)

معادلة المماس: $\frac{\text{ص}+١}{\text{س}-٢} = \frac{-١}{٢}$ ∴ $٢\text{ص} + ٢ = -\text{س} + ٢$

∴ $\boxed{\text{س} + ٢\text{ص} = ٠}$ ← معادلة المماس

⑰ (مصر ٢٠١٤) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : $\text{س ص} = ٨$ اللذان يوازيان المستقيم $\text{ص} + ٢\text{س} = ٩$

الحل

بالاشتقاق: $\text{ص} + \text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{ص}}{\text{س}}$

ميل المستقيم = -٢

ميل المماس = -٢

∴ $\frac{-\text{ص}}{\text{س}} = -٢$ ∴ $٢\text{س} \times \text{س} = ٨$

∴ $٢\text{س}^٢ = ٨$ ∴ $\text{س}^٢ = ٤$

∴ $\boxed{\text{س} = \pm ٢}$ ∴ $\boxed{\text{ص} = \pm ٤}$

∴ النقط هى : (٢ ، ٤) ، (-٢ ، -٤)

معادلة المماس

$\frac{\text{ص} - ٤}{\text{س} - ٢} = -٢$

∴ $\text{ص} - ٤ = -٢\text{س} + ٤$

∴ $\boxed{٢\text{س} + \text{ص} - ٨ = ٠}$

معادلة المماس

$\frac{\text{ص} + ٤}{\text{س} + ٢} = -٢$

∴ $\text{ص} + ٤ = -٢\text{س} - ٤$

∴ $\boxed{٢\text{س} + \text{ص} + ٨ = ٠}$

⑱ (مصر ٢٠٠٧) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : $\text{ص} = \text{س}^٣ - ٣\text{س} + ٥$ و العمودين على المستقيم $\text{س} + ٩\text{ص} = ١$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^٢ - ٣$ ∴ $٣\text{س}^٢ - ٣ = ٩$

∴ $٣\text{س}^٢ = ١٢$ ∴ $\text{س}^٢ = ٤$ ∴ $\boxed{\text{س} = \pm ٢}$

ميل المستقيم = $\frac{-١}{٩}$

∴ ميل المماس = ٩

معادلة المماس

$\text{س} = ٢ \therefore \text{ص} = ٧ \qquad (٢ ، ٧)$

$$\frac{\text{ص} - ٧}{\text{س} - ٢} = ٩$$

$\therefore ٩\text{س} - ١٨ = \text{ص} - ٧$

$\therefore \boxed{٩\text{س} - \text{ص} - ١١ = ٠}$

معادلة المماس

$\text{س} = -٢ \therefore \text{ص} = ٣ \qquad (-٢ ، ٣)$

$$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} + ٢} = ٩$$

$\therefore ٩\text{س} + ١٨ = \text{ص} - ٣$

$\therefore \boxed{٩\text{س} - \text{ص} + ٢١ = ٠}$

١٩ إذا كان المماس للمنحنى : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٥٠$ يصنع مثلثا متساوي الساقين مع محوري الإحداثيات في الربع الأول. أوجد معادلة هذا المماس.

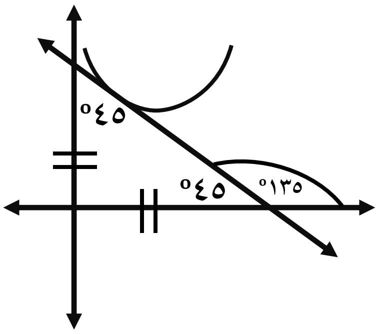
الحل ميل المماس $= \text{ظا}١٣٥ = -١$

$\cancel{٢}\text{س} + \cancel{٢}\text{ص} \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

$\therefore \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{-\text{س}}{\text{ص}} \qquad \therefore \dfrac{-\text{س}}{\text{ص}} = -١ \qquad \therefore \boxed{\text{س} = \text{ص}}$

$\therefore \text{س}^٢ + \text{س}^٢ = ٥٠ \qquad \therefore ٢\text{س}^٢ = ٥٠ \qquad \therefore \text{س}^٢ = ٢٥$

$\therefore \boxed{\text{س} = \pm ٥} \qquad \therefore \boxed{\text{ص} = \pm ٥}$



∴ النقط هي : (٥ ، ٥) ، (−٥ ، −٥) مرفوضة

$\dfrac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٥} = -١ \qquad \text{ص} - ٥ = -\text{س} + ٥$

$\therefore \boxed{\text{س} - \text{ص} - ١٠ = ٠}$ ← معادلة المماس

٢٠ (مصر ٢٠١٢) أوجد بدلالة النسبة التقريبية π معادلة المماس للمنحنى:

$\text{ص} = \text{جتا}(\text{س} + \text{ص})$ و الذي ميله $\dfrac{-١}{٢}$ حيث $٠ \leq \text{س} \leq \pi$

الحل

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \left(١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) \times -\text{جا}(\text{س} + \text{ص})$$

$$\therefore \frac{-١}{٢} = \left(١ + \frac{-١}{٢}\right) \times -\text{جا}(\text{س} + \text{ص})$$

ميل المماس $= \dfrac{-١}{٢}$

$\therefore \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{-١}{٢}$

$\therefore \dfrac{-١}{٢} = \dfrac{-١}{٢} \text{جا}(\text{س} + \text{ص}) \qquad \therefore \text{جا}(\text{س} + \text{ص}) = ١ \qquad \therefore \text{س} + \text{ص} = ٩٠ = \dfrac{\pi}{٢}$

∴ $ص = جتا ٩٠ = صفر$ ∴ $س = \frac{\pi}{٢}$ ، $ص = ٠$ ∴النقطة: $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

المعادلة: $\frac{ص}{س - \frac{\pi}{٢}} = \frac{-١}{٢}$ ∴ $٢ص = -س + \frac{\pi}{٢}$

∴ $٢ص + س - \frac{\pi}{٢} = ٠$ $(×٢)$ ∴ $\boxed{٢س + ٤ص - \pi = ٠}$

⑳ أثبت أن المنحنين : $ص = ٢س^٢ + س + ١$ ، $ص = س^٢ - س$ متماسان و أوجد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة التماس.

الحل

بحل المعادلتين معًا لإيجاد نقط التقاطع :

$٢س^٢ + س + ١ = س^٢ - س$ ∴ $س^٢ + ٢س + ١ = ٠$

$(س + ١)(س + ١) = ٠$ ∴ $\boxed{س = -١}$ ، $\boxed{ص = ٢}$

∴نقطة التقاطع: $(-١ ، ٢)$

$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{للأول} = ٤س + ١$ | $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{الثاني} = ٢س - ١$

$م_{١ للأول} = -٣$ | $م_{٢ للثاني} = -٣$

∵ $م_١ = م_٢$ عند النقطة $(-١ ، ٢)$ ∴ هي نقطة تماس

المعادلة:

$\frac{ص - ٢}{س + ١} = -٣$ ∴ $ص - ٢ = -٣س - ٣$

∴ $\boxed{٣س + ص + ١ = ٠}$ ← معادلة المماس المشترك

⑲ (مصر ٢٠٠٠) أوجد معادلة العمودي على المنحنى الذي معادلته : $ص = \sqrt{٦ - س}$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $ص = س$

الحل

لإيجاد نقط التقاطع بين المنحنى و المستقيم نحل المعادلتين معًا: $س = \sqrt{٦ - س}$

∴ $س^٢ = ٦ - س$ ∴ $س^٢ + س - ٦ = ٠$ ∴ $(س + ٣)(س - ٢) = ٠$

$س = -٣$ مرفوضة | $س = ٢$ $ص = ٢$ ∴النقطة $(٢ ، ٢)$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{٢\sqrt{٦ - \text{س}}}$$

∴ ميل المماس $= \frac{-١}{٢ \times ٢} = \frac{-١}{٤}$ ∴ ميل العمودي $= ٤$ ∴ $٢\text{س}^{٢} = ٥٠$

<u>معادلة العمودي</u>: $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٢} = ٤$ ∴ $٤\text{س} - ٨ = \text{ص} - ٢$ ∴ $\boxed{٤\text{س} - \text{ص} - ٦ = ٠}$

٢٣ أوجد معادلة العمودي للمنحنى : $\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥$ عند كل من نقطتي تقاطعه مع الدائرة : $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + \text{ص}^{٢} = ٢٥$

الحل

$\text{ص} = \underline{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} + ٥ \leftarrow (١)$ $\underline{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} + \text{ص}^{٢} = ٢٥ \leftarrow (٢)$

من (١): $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = \text{ص} - ٥$ نعوض في (٢)

∴ $\text{ص}^{٢} + \text{ص} - ٥ = ٢٥$ ∴ $\text{ص}^{٢} + \text{ص} - ٣٠ = ٠$ $(\text{ص} + ٦)(\text{ص} - ٥) = ٠$

$\text{ص} = -٦$	$\text{ص} = ٥$
∴ $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = -١١$	$\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ٠$ $\text{س}(\text{س} - ٣) = ٠$
∴ $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ١١ = ٠$ مرفوض	$\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٣$

∴النقط هي: $(٠ ، ٥)$ ، $(٣ ، ٥)$

<u>بالاشتقاق</u>: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} - ٣$

عند $\text{س} = ٠$ $(٠ ، ٥)$	عند $\text{س} = ٣$ $(٣ ، ٥)$
	$\text{م}_{٢} = ٣$
∴ميل العمودى $= \frac{١}{٣}$	ميل العمودى $= \frac{-١}{٣}$
$\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$	∴ $٣\text{ص} - ١٥ = -\text{س} + ٣$
∴ $\text{س} = ٣\text{ص} - ١٥$	∴ $\boxed{\text{س} + ٣\text{ص} - ١٨ = ٠}$
∴ $\boxed{\text{س} - ٣\text{ص} + ١٥ = ٠}$	

٢٤ (مصر ٢٠٠٩) أوجد معادلتى العمودين على المنحنى :

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - \text{س} + ٢\text{ص} - ٢ = ٠$ عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات.

الحل

عند نقط التقاطع مع محور السينات نضع : $\boxed{\text{ص} = ٠}$

$\therefore \text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ = ٠$ $\qquad \therefore (\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) = ٠$ $\qquad \boxed{\text{س} = ٢}$ ، $\boxed{\text{س} = -١}$

∴نقطتى التقاطع مع محور السينات: (٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

بالاشتقاق: $٢\text{س} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ١ + ٢\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}(٢\text{ص} + ٢) = -٢\text{س} + ١ \qquad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\text{س} + ١}{٢\text{ص} + ١}$

عند (٢ ، ٠) $\qquad م_{١} = -٣$

∴م العمودى $= \frac{١}{٣}$

$\frac{\text{ص}}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{٣} \qquad \therefore \text{س} - ٢ = ٣\text{ص}$

$\therefore \boxed{\text{س} - ٣\text{ص} - ٢ = ٠}$ ←معادلة العمودي

عند (−١ ، ٠) $\qquad م_{٢} = -٣$

∴ميل العمودى $= \frac{١}{٣}$

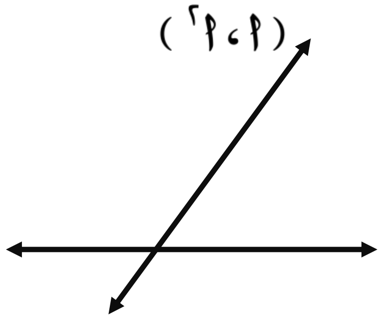
$\frac{\text{ص}}{\text{س} + ١} = \frac{١}{٣} \qquad \therefore \text{س} + ١ = ٣\text{ص}$

$\therefore \boxed{\text{س} - ٣\text{ص} + ١ = ٠}$ ←معادلة العمودي

٢٥ (مصر ٢٠١٣) إذا كان المماس للمنحنى : $\text{ص} = \text{س}^{٢}$ يمر بالنقطة (٣،٥) فأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

بالاشتقاق: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$



عند النقطة (أ ، أ²) : م المماس = ٢أ $\qquad$ م المماس $= \frac{\text{أ}^{٢} - ٥}{\text{أ} - ٣}$

$\therefore \frac{\text{أ}^{٢} - ٥}{\text{أ} - ٣} = ٢\text{أ} \qquad \therefore ٢\text{أ}^{٢} - ٦\text{أ} = \text{أ}^{٢} - ٥$

$\therefore \text{أ}^{٢} - ٦\text{أ} + ٥ = ٠ \qquad (\text{أ} - ٥)(\text{أ} - ١) = ٠$

أ = ٥ $\qquad$ النقطة (٥ ، ٢٥)

الميل = ١٠

$\frac{\text{ص} - ٢٥}{\text{س} - ٥} = ١٠$

أ = ١ $\qquad$ النقطة (١ ، ١)

الميل = ٢

$\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ١} = ٢$

$\therefore$ ١٠س − ٥٠ = ص − ٢٥	$\therefore$ ٢س − ٢ = ص − ١
$\therefore$ $\boxed{\text{١٠س − ص − ٢٥ = ٠}}$	$\therefore$ $\boxed{\text{٢س − ص − ١ = ٠}}$

(١٦) إذا كان المنحنيان: $(س - أ)^٢ + ص^٢ = ١٨$ ، $(س + أ)^٢ + ص^٢ = ١٨$

متقاطعان على التعامد فإن: أ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (ج) ±٣ (د) ±٣$\sqrt{٢}$

الحل من (١): $(س - أ)^٢ = ١٨ - ص^٢$ من (٢): $(س + أ)^٢ = ١٨ - ص^٢$

$\therefore (س - أ)^٢ = (س + أ)^٢$ $\cancel{س^٢} - ٢أس + أ^٢ = \cancel{س^٢} + ٢أس + أ^٢$

$\therefore -٤أس = ٠$ $\therefore \boxed{س = ٠}$ $\therefore أ^٢ + ص^٢ = ١٨$ $\therefore \boxed{ص^٢ = ١٨ - أ^٢}$

باشتقاق المعادلتين (١) ، (٢):

$\cancel{٢}(س - أ) + \cancel{٢}ص \frac{دص}{دس} = ٠$	$\cancel{٢}(س + أ) + \cancel{٢}ص \frac{دص}{دس} = ٠$
$\frac{دص}{دس} = \frac{-س + أ}{ص}$	$\frac{دص}{دس} = \frac{-س - أ}{ص}$

$\because$ المنحنيان يتقاطعان على التعامد $\therefore \left(\frac{دص}{دس}\right)_{\text{للأول}} \times \left(\frac{دص}{دس}\right)_{\text{للثاني}} = -١$

$\therefore \frac{-س + أ}{ص} \times \frac{-س - أ}{ص} = -١$ ، $\boxed{س = ٠}$ $\therefore \frac{-أ^٢}{ص^٢} = -١$

$\therefore ص^٢ = أ^٢$ $\because ص^٢ = ١٨ - أ^٢$ $\therefore أ^٢ = ١٨ - أ^٢$

$\therefore ٢أ^٢ = ١٨$ $\therefore أ^٢ = ٩$ $\therefore \boxed{أ = \pm ٣}$

(١٧) معادلة المماس للمنحنى: $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ عند النقطة (أ جتاهـ ، ب جاهـ) هي....

(أ) $\frac{س \text{ جتاهـ}}{أ} + \frac{ص \text{ جاهـ}}{ب} = ١$ (ب) $\frac{س \text{ جاهـ}}{أ} + \frac{ص \text{ جتاهـ}}{ب} = ١$

(ج) $\frac{س \text{ جتاهـ}}{ب} + \frac{ص \text{ جاهـ}}{أ} = ١$ (د) $\frac{س \text{ جاهـ}}{ب} + \frac{ص \text{ جتاهـ}}{أ} = ١$

الحل $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ $(\times أ^٢ب^٢)$ $\therefore$ ب^{٢}س^٢ + أ^{٢}ص^٢ = أ^{٢}ب^٢

بالاشتقاق: $\cancel{٢}ب^{٢}س + \cancel{٢}أ^{٢}ص \frac{دص}{دس} = ٠$ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-ب^{٢}س}{أ^{٢}ص}$

∴ ميل المماس $= \frac{-ب^{\cancel{٢}} \times \cancel{أ}\ جتاهـ}{أ^{\cancel{٢}} \times \cancel{ب}\ جاهـ} = \frac{-ب\ جتاهـ}{أ\ جاهـ}$

∴ معادلة المماس: $= \frac{ص - س\ جاهـ}{س - أ\ جتاهـ} = \frac{-ب\ جتاهـ}{أ\ جاهـ}$

∴ $أ\ جاهـ ص - أب جا^{٢}هـ = -ب\ جتاهـ س + أب\ جتا^{٢}هـ$

∴ $ب\ جتاهـ س + أ\ جاهـ ص = أب جا^{٢}هـ + أب\ جتا^{٢}هـ$

$ب\ جتاهـ س + أ\ جاهـ ص = أب\ \underset{}{\cancel{(جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ)}}^{(١)}$ $(\div أب)$

∴ $\boxed{\frac{س جتاهـ}{أ} + \frac{ص\ جاهـ}{ب} = ١}$

٢٨ (مصر ٢٠١٥) إذا كان العمودي للمنحنى: $ص = ٤ - س^{٢}$ عند النقطة $(١ ، ٣)$ يقطع المنحنى مرة أخرى عند جـ ، أوجد معادلة المماس عند النقطة جـ

الحل $\frac{دص}{دس} = -٢س$ عند النقطة $(١ ، ٣)$ ميل المماس $= -٢$

∴ ميل العمودي $= \frac{١}{٢}$

نوجد معادلة العمودي: $\frac{ص - ٣}{س - ١} = \frac{١}{٢}$ ∴ $س - ١ = ٢ص - ٦$

∴ $\boxed{س - ٢ص + ٥ = ٠}$ معادلة العمودي

لإيجاد نقط تقاطع العمودي مع المنحنى : $س - ٢(٤ - س^{٢}) + ٥ = ٠$

$س - ٨ + ٢س^{٢} + ٥ = ٠$ ∴ $٢س^{٢} + س - ٣ = ٠$ ∴ $(٢س + ٣)(س - ١) = ٠$

$س = \frac{-٣}{٢}$ ، $ص = \frac{٧}{٤}$ | $س = ١$ ، $ص = ٣$

ميل المماس عندها $= ٣$ ∴ $\frac{ص - \frac{٧}{٤}}{س + \frac{٣}{٢}} = ٣$

$\therefore$ ٣س $+ \frac{٩}{٢} =$ ص $- \frac{٧}{٤}$ $\qquad (\times ٤)$

$\therefore$ ١٢س $+ ١٨ =$ ٤ص $- ٧$ $\qquad \therefore \boxed{١٢س - ٤ص + ٢٥ = ٠}$

(٢٩) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى: $ص = س + \frac{١}{س}$ اللذين يوازيان المستقيم :

$\overrightarrow{ر} = (٥ ، ٠) + ك (١ ، -٣)$

الحل

ميل المستقيم $= -٣$

$\therefore$ ميل المماس $= -٣$

$ص = س + س^{-١}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ١ - س^{-٢} = ١ - \frac{١}{س^٢}$

$\therefore ١ - \frac{١}{س^٢} = -٣$

$\therefore \frac{١}{س^٢} = ٤$ $\qquad \therefore س = \pm \frac{١}{٢}$ $\qquad \therefore ص = \pm \frac{٥}{٢}$

النقط هى : $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{-١}{٢} ، \frac{-٥}{٢}\right)$

ميل المماس $= -٣$

$\frac{ص - \frac{٥}{٢}}{س - \frac{١}{٢}} = -٣$

$\therefore ص - \frac{٥}{٢} = -٣س + \frac{٣}{٢}$

$\therefore \boxed{٣س + ص - ٤ = ٠}$ (١)

ميل المماس $= -٣$

$\frac{ص + \frac{٥}{٢}}{س - \frac{١}{٢}} = -٣$

$\therefore ٣س + \frac{٣}{٢} = ص + \frac{٥}{٢}$

$\therefore \boxed{٣س - ص - ١ = ٠}$ (٢)

٣٠ في الشكل المقابل:

إذا كان المستقيم ل مماس للمنحنى :

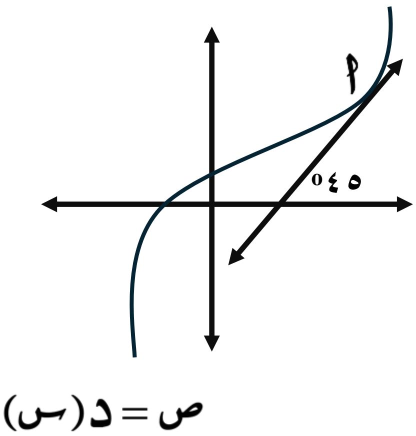
ص = د(س) عند النقطة **أ(٤، ١)**،

كان: **هـ(٢س − ٥) = ٥س + س ٠ د (س)**

فإن : **هـ´(٧) = ...**

أ ٨ ب ٥

جـ ٤ د ١



٣١ في الشكل المقابل:

إذا كان المستقيم ل يمس المنحنى : **ص = د(س)** عند

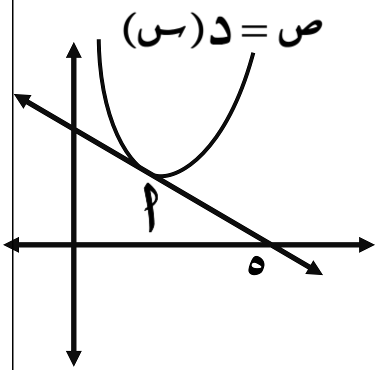
النقطة **أ(٢، ٣)**، كان: **هـ(س) = س د (٣س − ٤)**

فإن معادلة المماس للمنحنى :

هـ(س) عند **س = ٢** هي ......

أ س+٣ص−٤=٠ ب ٣س+ص−١٢=٠

جـ س+ص+١٢=٠ د ٣س+٣ص+٨=٠



٣٢ في الشكل المقابل:

إذا كان المستقيم ل مماسا للدالة عند النقطة جـ و

يقطع محور السينات في النقطة **أ(−٤ ، ٠)**، و كانت

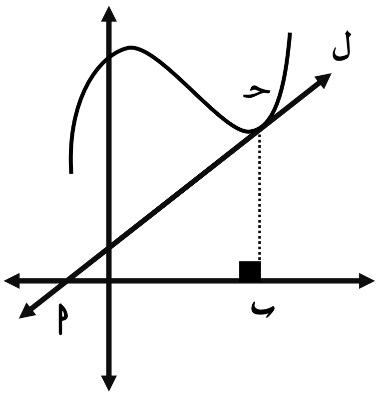
ب(٤ ، ٠) ، كانت:

د(٤) + د´(٤) = ٩

فإن: مساحة **Δأ ب جـ** = ...وحدة مربعة

أ ٢٤ ب ٢٨

جـ ٣٢ د ٣٢



٣٣ في الشكل المقابل:

إذا كان المستقيم ل مماس لمنحنى الدالة : ص = د(س)

عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي −٢، كان:

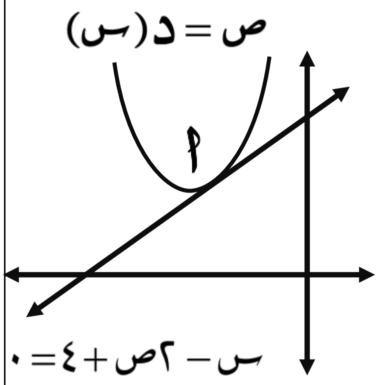
هـ(س) = س × $[$د(س)$]^{٢}$

فإن معادلة المماس للمنحنى :

هـ(س) عند س = −٢ هي ......

(أ) س+٤ص+١=٠ (ب) ٤س − ص +١ = ٠

(جـ) س+ص+٤=٠ (د) س − ص +٢ = ٠



٣٤ في الشكل المقابل:

إذا كان المستقيم ل يمس منحنى الدالة : ص = د(س)

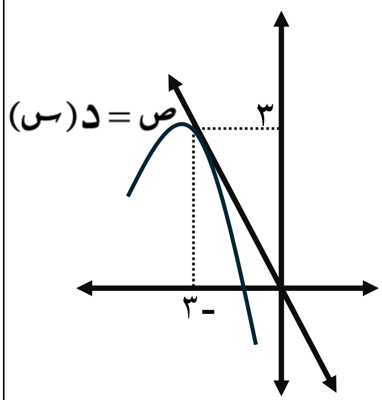
عند النقطة (−٣، ٣)، كان:

$$\text{هـ(س)} = \text{س}\ \frac{\text{د(٢−س)}}{\text{س−٢}}$$

فإن : هـ′(٥) = ...

(أ) صفر (ب) −٢

(جـ) ٢ (د) ٣



٣٥ المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما : س = $\text{ن}^{٢}$ + ٢ ، ص = $\text{ن}^{٣}$ +١

أوجد معادلتي المماس و العمودي للمنحنى عند ن = ١

الحل

عند ن = ١ س = ٣ ، ص = ٢ ∴ النقطة (٣، ٢)

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \text{٢ن} \quad ، \quad \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \text{٣ن}^{٢} \quad ، \quad \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \frac{\text{٣ن}^{٢}}{\text{٢ن}} = \frac{\text{٣ن}}{٢}$$

$$\left[\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right]_{\text{ن}=١} = \frac{٣}{٢} \qquad \therefore \text{ميل المماس} = \frac{٣}{٢}$$

معادلة المماس

$$\frac{\text{ص}-٢}{\text{س}-٣}=\frac{٣}{٢}$$

$$٣\text{س}-٩=٢\text{ص}-٤$$

$$\therefore \boxed{٣\text{س}-٢\text{ص}-٥=٠}$$

معادلة العمودي

$$\frac{\text{ص}-٢}{\text{س}-٣}=\frac{-٢}{٣}$$

$$٣\text{ص}-٦=-٢\text{س}+٦$$

$$\therefore \boxed{٢\text{س}+٣\text{ص}-١٢=٠}$$

(٣٦) أوجد معادلتي المماس و العمودي للمنحنى $\text{س}=\text{قا}^{٢}\theta-١$ ، $\text{ص}=\text{ظا}\theta$ عند $\theta=\frac{-\pi}{٤}$

الحل

عند $\theta=\frac{-\pi}{٤}$: $\text{س}=١$ ، $\text{ص}=-١$ $\therefore$ النقطة $(١، -١)$

$$\frac{\text{د}\text{س}}{\text{د}\theta}=٢\,\text{قا}\theta\times\text{قا}\theta\,\text{ظا}\theta \quad،\quad \frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\theta}=\text{قا}^{٢}\theta \quad،\quad \frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\theta}=٢\,\text{قا}^{٢}\theta\,\text{ظا}\theta$$

$$\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}}=\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\theta}\times\frac{\text{د}\theta}{\text{د}\text{س}}=\frac{\cancel{\text{قا}^{٢}\theta}}{٢\,\cancel{\text{قا}^{٢}\theta}\,\text{ظا}\theta}=\frac{١}{٢\,\text{ظا}\theta}$$

$$\left[\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}}\right]_{\theta=\frac{-\pi}{٤}}=\frac{-١}{٢}$$

معادلة المماس

$$\frac{\text{ص}+١}{\text{س}-١}=\frac{-١}{٢}$$

$$\therefore \text{س}-١=-٢\text{ص}-٢$$

$$\therefore \boxed{\text{س}+٢\text{ص}+١=٠}$$

معادلة العمودي

$$\frac{\text{ص}+١}{\text{س}-١}=٢$$

$$\therefore ٢\text{س}-٢=\text{ص}+١$$

$$\therefore \boxed{٢\text{س}-\text{ص}-٣=٠}$$

المعدلات الزمنية المرتبطة

(مقدمة) المعدلات الزمنية المرتبطة تقوم بدراسة العلاقة بين كميات تتغير بتغير الزمن ويجب إيجاد علاقة رياضية تربط بين هذه المتغيرات ثم الاشتقاق بالنسبة للزمن (ن) ثم نوجد المطلوب في المسألة.

فمثلا: إذا كان لدينا علاقة بين عدة متغيرات ولتكن : ف ، س ، ص مثل : $\text{ف}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2$

بإيجاد مشتقة الطرفين بالنسبة للزمن (ن)

$$\therefore 2\text{ف}\,\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = 2\text{س}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + 2\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$$

$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ معدل تغير $\boxed{\text{ف}}$ بالنسبة للزمن (ن) أو السرعة.

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ معدل تغير $\boxed{\text{س}}$ بالنسبة للزمن (ن) أو سرعة الإحداثي السيني.

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ معدل تغير $\boxed{\text{ص}}$ بالنسبة للزمن (ن) أو سرعة الإحداثي الصادي.

(ص)

خطوات حل المسألة:

❶ تقرأ المسألة بعناية قراءة متأنية لتحديد الثوابت والمتغيرات.

❷ نعطى كل متغير رمز مناسب بخلاف الزمن (ن)

❸ نحدد العلاقة التي تربط بين المتغيرات حسب معطيات المسألة :

(حجم ، مساحة ، محيط ، مساحة جانبية ، مساحة كلية ، .....)

❹ نشتق العلاقة بالنسبة للزمن ونعوض فنجد المطلوب.

ملحوظة هامة:

إذا كان المتغير $\boxed{\text{س}}$

يتزايد	يبتعد	يتمدد	يصب	يتراكم	⟵	موجب
يتناقص	يقترب	ينكمش	يتسرب	ينصهر	⟵	سالب

ملحوظة هامة جدا: ممكن أحسب الزمن لو معايا الطول أو العرض أو...... ، معايا معدل تغيره بالنسبة للزمن بالقانون:

ملحوظة هامة جدا: لو عايز تخلى المتغيرات مرتبطة بالزمن تعتمد على القانون (١)

الطول النهائي = الطول الابتدائي ± المعدل × الزمن

فمثلا:

❶ إذا كان طول ضلع عند لحظة معينة يساوى ٥ سم ويزيد بمعدل ٢ سم في الثانية فإن طول الضلع عند أى لحظة زمنية هيكون طول الضلع = $\boxed{٥+٢\times ن}$

❷ إذا كان طول ضلع عند أى لحظة معينة يساوى ٥ سم وينقص بمعدل ١ سم/ث فإن طول الضلع عند أى لحظة زمنيه هيكون : طول الضلع = $\boxed{٥-١\times ن}$

❶ تتحرك نقطة على المنحنى : $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٦ص + ٣ = ٠$ وكان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (١ ، ٢) يساوى ٣ فإن معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن عند نفس النقطة يساوي ....

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) −٩

الحل $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٦ص + ٣ = ٠$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن: $٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} + ٤ \frac{دس}{دن} - ٦ \frac{دص}{دن} = ٠$

عندما : $س = ١$ ، $ص = ٢$ ، $\frac{دس}{دن} = ٣$

$\therefore ٢\times١\times٣ + ٢\times٢\times \frac{دص}{دن} + ٤\times٣ - ٦\times \frac{دص}{دن} = ٠$

$\therefore ٦ + ٤ \frac{دص}{دن} + ١٢ - ٦ \frac{دص}{دن} = ٠$

$\therefore -٢ \frac{دص}{دن} = -١٨ \qquad \therefore \boxed{\frac{دص}{دن} = ٩}$ $\therefore$ الإجابة هي (جـ)

❷ تتحرك نقطة على المنحنى : $س^٢ - س ص + ص^٢ = ٩$ فإن إحداثيات النقطة التي يكون عندها سرعتها في اتجاه المحور السيني ضعف سرعتها في اتجاه المحور الصادي هى ...

(أ) (٠ ، ٣) (ب) (٠ ، −٣) (جـ) (٠ ، ٣)،(٠ ، −٣) (د) (٣ ، ٠)،(−٣ ، ٠)

الحل $س^٢ - س ص + ص^٢ = ٩$ بالاشتقاق بالنسبة للزمن

$٢س \frac{دس}{دن} - ص \times \frac{دس}{دن} - س \times \frac{دص}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} = ٠ \qquad \because \frac{دس}{دن} = ٢ \times \frac{دص}{دن}$

$\therefore ٢س \times ٢ \cancel{\frac{دص}{دن}} - ٢ \times \cancel{\frac{دص}{دن}} \times ص - س \cancel{\frac{دص}{دن}} + ٢ص \cancel{\frac{دص}{دن}} = ٠$

$\therefore$ ٤س − ٢ص ص′ − س + ٢ص ص′ = ٠ $\therefore$ ٣س = ٠ $\therefore$ $\boxed{\text{س} = ٠}$

نعوض في معادلة المنحنى:

$\therefore$ ص^{٢} = ٩ $\therefore$ ص = ±٣ $\therefore$النقط: (٠، ٣)، (٠، −٣) $\therefore$ الإجابة هى (جـ)

٣ تتحرك نقطة (س، ص) على المنحنى : س^{٢} + ص^{٢} + ٢س − ٤ص = ٢٧
أوجد موضع هذه النقطة في اللحظة التي يكون عندها معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن مساويًا مُعدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن.

الحل

٢س $\frac{\text{دس}}{\cancel{\text{دن}}}$ + ٢ص $\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{دن}}}$ + ٢ $\frac{\text{دس}}{\cancel{\text{دن}}}$ − ٤ $\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{دن}}}$ = ٠

$\because$ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ $\therefore$ ٢س + ٢ص + ٢ − ٤ = ٠ $\therefore$ ٢س + ٢ص − ٢ = ٠ (÷٢)

س + ص − ١ = ٠ $\therefore$ $\boxed{\text{ص} = ١ - \text{س}}$

نعوض في معادلة المنحنى:

$\therefore$ س^{٢} + (١ − س)^{٢} + ٢س − ٤(١ − س) = ٢٧

$\therefore$ س^{٢} + ١ $\cancel{− ٢س}$ + س^{٢} $\cancel{+ ٢س}$ − ٤ + ٤س − ٢٧ = ٠

$\therefore$ ٢س^{٢} + ٤س − ٣٠ = ٠ (÷٢) س^{٢} + ٢س − ١٥ = ٠

(س + ٥)(س − ٣) = ٠

س = −٥ ص = ٦ | س = ٣ ص = −٢

الموضع هو: (−٥، ٦)، (٣، −٢)

٤ تتحرك نقطة (س، ص) على المنحنى : ص = س^{٣} − ٣س + ٥ فإذا كان الإحداثي السيني للنقطة فى أى لحظة زمنية يتعين بالعلاقة: س = $\frac{١}{٢}\sqrt{\text{ن}}$ + ٣ حيث ن ≥ ٠ فأوجد معدل تغير الإحداثي الصادي للنقطة بالنسبة للزمن عندما ن = ٤

الحل

ص = س^{٣} − ٣س + ٥ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ٣س^{٢} $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ − ٣ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ ← (١)	س = $\frac{١}{٢}\sqrt{\text{ن}}$ + ٣ عندما ن = ٤:

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \text{٣} \times \text{١٦} \times \frac{\text{١}}{\text{٨}} - \text{٣} \times \frac{\text{١}}{\text{٨}}$

$= \text{٦} - \frac{\text{٣}}{\text{٨}} = \text{٥}\frac{\text{٥}}{\text{٨}} = \frac{\text{٤٥}}{\text{٨}}$ وحدة رسم

$\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٢} + \text{٣} = \text{٤}$

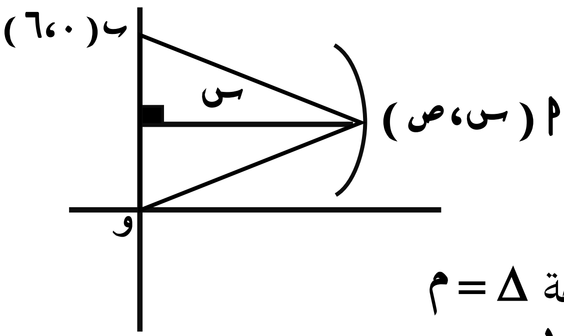
$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{ن}}}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}\sqrt{\text{ن}}}$

$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{١}}{\text{٨}}$ نعوض في (١)

٥ تتحرك النقطة **أ(س ، ص)** على منحنى الدالة : **$\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} + \text{س}$** بحيث $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \text{٢}$ وحدة/ث ، أو جد معدل التغير في مساحة المثلث **أ و ب** حيث (و) نقطة الأصل ، النقطة **ب(٠ ، ٦)** في اللحظة التي يكون فيها الإحداثي السيني للنقطة المتحركة يساوي ٣

الحل



مساحة $\Delta = \text{م}$

$\text{م} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٦} \times \text{س}$

$\therefore \text{م} = \text{٣س}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \text{٣} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \leftarrow (\text{١})$

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \text{٣} \times \frac{\text{١}}{\text{١٤}} = \frac{\text{٣}}{\text{١٤}}$ وحدة مربعة / ث

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} + \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \text{٣س}^{\text{٢}} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\text{٢} = \text{٣} \times \text{٩} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\text{٢} = \text{٢٨} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{٢}}{\text{٢٨}} = \frac{\text{١}}{\text{١٤}}$

و نعوض في (١)

❻ سقط حجر في ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد نصف قطرها بمعدل ٢سم/ث ، أوجد معدل الزيادة فى مساحة سطح الموجة في نهاية ١٠ ثوان.

الحل

$\text{م} = \pi\ \text{نق}^{٢}$ $\quad \therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi\ \text{نق}\ \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

في نهاية ١٠ ثوان: $\text{نق} = ٢ \times ١٠ = ٢٠$ سم

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢ \times \pi \times ٢٠ \times ٢ = ٨٠\pi$ سم^{٢}/ث

❼ (مصر ٢٠٠٩) (٢) سقط حجر في ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٢,١ سم/ث فإذا كان معدل الزيادة فى مساحة سطح الموجة في نهاية ن ثانية من البداية ٢٧٧,٢ سم^{٢}/ث فأوجد قيمة ن .

الحل

$\text{م} = \pi\ \text{نق}^{٢}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi\ \text{نق}\ \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$٢٧٧,٢ = ٢\pi\ \text{نق} \times ٢,١$

$\therefore \text{نق} = \frac{٢٧٧,٢}{٤,٢\pi}$

$\therefore \text{نق} = ٢١$ سم

$\text{ن} = \frac{\text{نق}}{\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}} = \frac{٢١}{٢,١}$

$\therefore \boxed{\text{ن} = ١٠\ \text{ث}}$

❽ بقعة ضوئية دائرية تزداد في الإشعاع محتفظة بشكلها الدائرى بمعدل ٤ سم^{٢}/ث ، أوجد المعدل الذى يزداد به طول نصف قطرها عندما يكون مساحتها ٩π سم^{٢}.

الحل

$\text{م} = \pi\ \text{نق}^{٢}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi\ \text{نق}\ \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \leftarrow (١)$

$\therefore ٤ = ٢\pi \times ٣ \times \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$\therefore \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{٤}{٦\pi} = \frac{٢}{٣\pi}$ سم/ث

<u>عندما تكون:</u>

المساحة $= ٩\pi$ سم

$\therefore \cancel{\pi}\ \text{نق}^{٢} = ٩\ \cancel{\pi}$

$\therefore \text{نق}^{٢} = ٩$

$\therefore \boxed{\text{نق} = ٣}$

نعوض في (١)

٩ إذا كان ع المساحة المحصورة بين دائرتين متحدتى المركز نصفى قطريهما : نو١ ، نو٢ حيث: نو٢ > نو١ ، أوجد معدل تغير ع بالنسبة للزمن عند اللحظة التي عندها نو١ = ٤ سم ، يتزايد بمعدل ٠,٢ سم/ث ، نو٢ = ٧ سم ، يتناقص بمعدل ٠,١ سم/ث .

الحل

$$\text{ع} = \pi\,\text{نو}_٢^{٢} - \pi\,\text{نو}_١^{٢}$$

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٢\pi\,\text{نو}_٢\,\frac{\text{ءنو}_٢}{\text{ءن}} - ٢\pi\,\text{نو}_١\,\frac{\text{ءنو}_١}{\text{ءن}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٢\pi \times ٧ \times -٠,١ - ٢ \times \pi \times ٤ \times ٠,٢$$

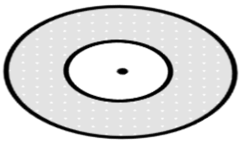
$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = -٣\pi \ \text{سم}^{٣}/\text{ث}$$

$$\text{نو}_١ = ٤$$

$$\frac{\text{ءنو}_١}{\text{ءن}} = ٠,٢$$

$$\text{نو}_٢ = ٧$$

$$\frac{\text{ءنو}_٢}{\text{ءن}} = -٠,١$$



١٠ صفحه مستوية مربعة الشكل يتمدد طول ضلعها بمعدل ٠,٤ سم ، أوجد معدل الزيادة فى مساحتها عندما يكون طول ضلعها ١٤ سم.

الحل نفرض أن طول ضلع المربع س ، مساحتها م

$$\therefore \text{م} = \text{س}^{٢} \quad \therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٢\text{س}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \quad \therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٢ \times ١٤ \times ٠,٤ = ١١,٢ \ \text{سم}^{٢}/\text{ث}$$

١١ صفيحة رقيقة على شكل مستطيل طوله ضعف عرضه تتمدد بانتظام محتفظة بشكلها بحيث يزداد طولها ٠,٠١ سم/ث . أوجد مُعدل الزيادة فى مساحتها عندما يكون عرضها ٥ سم.

الحل

نفرض أن العرض = س ، الطول = ٢س

$$\text{م} = \text{س} \times ٢\text{س} \quad \therefore \text{م} = ٢\text{س}^{٢}$$

$$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٤\text{س}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٤ \times ٥ \times ٠,٠٠٥ = ٠,١ \ \text{سم}^{٢}/\text{ث}$$

معدل تغير الطول = ٠,٠١

$$\therefore ٢ \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٠,٠١$$

$$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٠,٠٠٥$$

الحل

⑫ صفحة رقيقة معدنية مستطيلة الشكل طولها $\frac{٤}{٥}$ قطرها تنكمش بالتبريد بانتظام محتفظة بشكلها الهندسي وبنفس النسبة بين بعديها وعند لحظة زمنية ما كان طول قطر الصفحة ينكمش بمعدل ٢,٥ سم / دقيقة وفي نفس اللحظة تنكمش بمعدل ٦٠سم^{٢} / دقيقة فإن مساحة سطح الصفحة عند هذه اللحظة يساوي ....

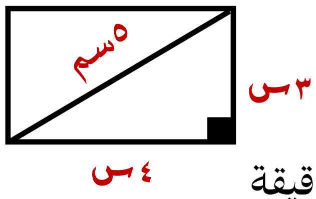
(أ) ٣٠٠ (ب) ٦٠٠ (حـ) ١٥٠٠ (ء) ٦٢٥

معدل انكماش القطر = ٢,٥

∴ ٥ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = −٢,٥

∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = −٠,٥سم / دقيقة

، $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = −٦٠ سم^{٢} / دقيقة



م = ٣س × ٤س = ١٢س^{٢}

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢٤ س $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

∴ −٦٠ = ٢٤ × س × −٠,٥

∴ س = ٥

∴ م = ١٢ × ٢٥ = ٣٠٠ سم^{٢}

⑬ قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم . تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم/ث عندما يكون العرض اسم. احسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة.

الحل

نفرض أن الطول = س ، العرض (س − ٢٠)

م = س (س − ٢٠) = س^{٢} − ٢٠س

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢س $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ − ٢٠ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢ × ١٠٠ × −٠,٠٢٥ − ٢٠ × −٠,٠٢٥ = −٤,٥ سم^{٢} / ث

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = −٠,٠٢٥

العرض = ٨٠ سم

الطول س = ١٠٠ سم

−٤,٥ سم^{٢} / ث

⑭ صفيحة رقيقة من المعدن على شكل مثلث تتمدد بانتظام بحيث يظل طول قاعدتها مساويا ثلاثة أمثال ارتفاعها ، إذا كان معدل زيادة مساحة الصفيحة ٠,٢٧ سم^{٢}/ث فأوجد معدل تغير ارتفاعها عند اللحظة التي يكون فيها ارتفاع الصفيحة ٩ سم.

الحل

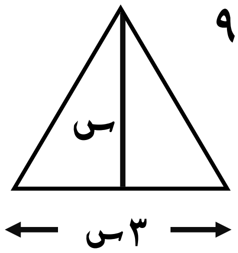
م = $\frac{١}{٢}$ × ٣س × س = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢}

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٠,٢٧

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٣\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ ∴ $٠,٢٧ = ٣ \times ٩ \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

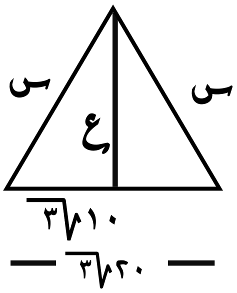
∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٠,٢٧}{٢٧} = ٠,٠١$ سم/ث

س = ٩



⑮ (مصر ١٩٩٣) مثلث متساوى الساقين طول قاعدته $٢٠\sqrt{٣}$ سم إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم / ساعة فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل من الساقين مساوياَ لطول القاعدة.

الحل



$\text{ع} = \sqrt{\text{س}^٢ - ٣٠٠}$

$\text{م}\Delta = \frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع ∴ $\text{م} = ١٠\sqrt{٣}\sqrt{\text{س}^٢ - ٣٠٠}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٠\sqrt{٣} \times \frac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^٢ - ٣٠٠}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{١٠\sqrt{٣}\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢ - ٣٠٠}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{١٠\sqrt{٣} \times ٢٠\sqrt{٣}}{\sqrt{١٢٠٠ - ٣٠٠}} \times -٣$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{٦٠٠ \times -٣}{٣٠} = -٦٠$ سم^٢ / ساعة

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -٣$ سم / ساعة

$\text{س} = ٢٠\sqrt{٣}$

⑯ (مصر ٢٠٠٣) مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه يساوى ٦سم ، قياس الزاوية بينهما (س) فإذا تغير (س) بمعدل ٢ درجة / دقيقة فإن معدل تغير مساحة المثلث عند س = ٣٠° هو .... سم^٢/د

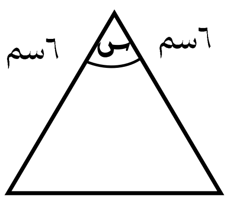
(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{١٠}$ (ب) $\frac{\pi}{١٠}$ (جـ) $٩\sqrt{٣}$ (د) ٩

الحل

$\text{م} = \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٦ \times$ جاس

$\text{م} = ١٨$ جاس

$\frac{\text{س}^ء}{\pi} = \frac{\text{س}^\circ}{١٨٠}$



$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \text{١٨ جتاس} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \text{١٨} \times \text{جتا ٣٠} \times \frac{\pi}{\text{٩٠}}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{١٠}}\ \pi$ سم²/د

$\frac{\text{دس}}{\pi} = \frac{\text{٢}}{\text{١٨٠}}$

$\text{دس} = \frac{\text{٢} \times \pi}{\text{١٨٠}} = \frac{\pi}{\text{٩٠}}$

$\text{دس} = \text{٣٠}^\circ$

⑰ (مصر ٢٠٠٤) صفحية معدنية على شكل مثلث متساوي الأضلاع تتمدد وتحتفظ بشكلها الهندسي فإذا كان معدل الزيادة في طول ضلعها ٠,١ سم/ث فأوجد طول ضلع الصفيحة في اللحظة التي يكون معدل الزيادة في مساحتها مساوياً $\sqrt{\text{٣}}$ سم²/ث .

الحل

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \text{٠,١}$ سم/ث

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \sqrt{\text{٣}}$ سم²/ث

مساحة Δ متساوي الأضلاع $= \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}}\ \text{س}^{\text{٢}}$

$\text{م} = \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}} \times \text{س}^{\text{٢}}$

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} \times \text{س} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\therefore \cancel{\sqrt{\text{٣}}} = \frac{\cancel{\sqrt{\text{٣}}}}{\text{٢}} \times \text{س} \times \text{٠,١}$

$\therefore$ ٠,٥ س = ١ $\therefore$ س = ٢٠سم $\therefore$ طول ضلع الصفيحة = ٢٠سم

⑱ صفيحة على شكل سداسي منتظم تنكمش بالبرودة وُجد أن معدل تغير طول ضلعها ٠,١ سم أوجد معدل التغير في مساحة الصفيحة عندما يكون ضلعها ١٠سم .

الحل

$\text{م} = \frac{\text{ن}}{\text{٤}} \times \text{س}^{\text{٢}} \times \text{ظتا} \frac{\text{١٨٠}}{\text{ن}}$

$\text{م} = \frac{\text{٦}}{\text{٤}} \times \text{س}^{\text{٢}} \times \text{ظتا} \frac{\text{١٨٠}}{\text{٦}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} \times \sqrt{\text{٣}}$

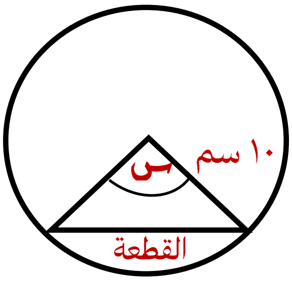
$\therefore \text{م} = \frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\ \text{س}^{\text{٢}}$ $\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \text{٣}\sqrt{\text{٣}}\ \text{س} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \text{٣}\sqrt{\text{٣}} \times \text{١٠} \times \text{٠,١} = \text{٣}\sqrt{\text{٣}}$

⑲ قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠سم ، قياس زاويتها المركزية س° و يتغير بمعدل ٣ء / دقيقة فإن معدل الزيادة فى مساحة القطعة الدائرية عند س = ٦٠° هو .... سم^{٢} / دقيقة .

(أ) ١٢٥ (ب) ٧٥ (ج) ١٥٠ (د) ٣٠٠

الحل



$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{١}{٢}\,\text{نق}^{٢}\left[\theta^{ء} - \text{جا}\,\theta\right]$$

$$= \frac{١}{٢} \times ١٠٠\left[\text{س} - \text{جا س}\right]$$

$$\therefore \text{م} = ٥٠\,(\text{س} - \text{جا س})$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٥٠\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}} - \text{جتا س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٥٠\,(٣ - \text{جتا}\,٦٠ \times ٣)$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٥٠ \times \frac{٣}{٢} = ٧٥$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣^{ء}\ /\text{د}$$

$$\text{س} = ٦٠^{\circ}$$

مسائل المجسمات

❶ (مصر ١٩٩٥) يتناقص حجم كرة بمعدل ٨π سم^{٣} / ساعة . أوجد معدل تغير مساحة سطح الكرة عند اللحظة التى يكون فيها طول نصف القطر ١٠سم .

الحل

$$\text{حجم الكرة ع} = \frac{٤}{٣}\,\pi\,\text{نق}^{٣}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٤\,\pi\,\text{نق}^{٢}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$-\cancel{٨}\,\cancel{\pi} = \cancel{٤}\,\cancel{\pi} \times ١٠٠ \times \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$\therefore \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = -٠,٠٢\ \text{سم/ساعة}$$

$$\text{مساحة الكرة م} = ٤\,\pi\,\text{نق}^{٢}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨\,\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨\,\pi \times ١٠ \times -٠,٠٢$$

$$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = -١,٦\,\pi\ \text{سم}^{٢}/\text{ساعة}$$

❷ تزداد مساحة سطح كرة بمعدل ثابت قدره ٦ سم^{٢}/ث عند اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطر الكرة ٣٠ سم فإن مُعدل الزيادة في حجم الكرة = ... سم^{٣}/ث

(أ) ١٨٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٩٠ (د) ٩٠π

الحل

$\text{م} = ٤\pi\,\text{نق}^{٢}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨\,\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$٦ = ٨ \times \pi \times ٣٠ \times \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$\therefore \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{٦}{٢٤٠\pi} = \frac{١}{٤٠\pi}$ سم/ث

$\text{ع} = \frac{٤}{٣}\,\pi\,\text{نق}^{٣}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٤\,\pi\,\text{نق}^{٢}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$\therefore \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٤\pi \times ٩٠٠ \times \frac{١}{٤٠\pi}$

$\therefore \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٩٠$ سم^{٣}/ث

❸ كرة جوفاء طولا نصفي قطريها الداخلي والخارجي في أي لحظة هما : $\text{نق}_{١}$ ، $\text{نق}_{٢}$ على الترتيب فإذا كان طول نصف قطرها الداخلي يزداد بمعدل ١ سم/ث بحيث يظل حجم مادة الكرة ثابتًا وذلك عند اللحظة التي يكون فيها $\text{نق}_{١} = ٣$ سم ، $\text{نق}_{٢} = ٩$ سم أوجد عند هذه اللحظة :

١) معدل تغير نصف قطرها الخارجي.

٢) معدل تغير مساحة سطحها الخارجي.

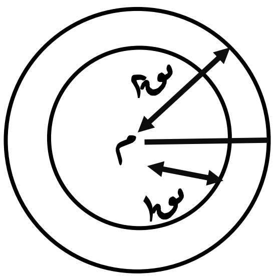
٣) معدل تغير سُمكها .

الحل

$\text{نق}_{١} = ٣$

$\text{نق}_{٢} = ٩$

$\frac{\text{دنق}_{١}}{\text{دن}} = ١$ سم/ث



$\boxed{١}$ حجم مادة الكرة ع = الحجم الخارجي – الحجم الداخلي

$\text{ع} = \frac{٤}{٣}\,\pi\,\text{نق}_{٢}^{٣} - \frac{٤}{٣}\,\pi\,\text{نق}_{١}^{٣}$

$\therefore \cancel{\frac{\text{دع}}{\text{دن}}} = ٤\,\pi\,\text{نق}_{٢}^{٢}\,\frac{\text{دنق}_{٢}}{\text{دن}} - ٤\,\pi\,\text{نق}_{١}^{٢}\,\frac{\text{دنق}_{١}}{\text{دن}}$

$\text{صفر} = \cancel{٤}\,\cancel{\pi} \times ٨١ \times \frac{\text{دنق}_{٢}}{\text{دن}} - \cancel{٤}\,\cancel{\pi} \times ٩ \times ١$

$\therefore ٩ = ٨١\,\frac{\text{دنق}_{٢}}{\text{دن}}$ $\therefore \frac{\text{دنق}_{٢}}{\text{دن}} = \frac{١}{٩}$ سم/ث

$\boxed{٢}$ مساحة السطح الخارجي $م = ٤\,\pi\,نق^٢$ $\qquad \frac{دم}{دن} = ٨\,\pi\,نق_٢\,\frac{دنق_٢}{دن}$

$$\therefore \frac{دم}{دن} = ٨\,\pi \times ٩ \times \frac{١}{٩} = ٨\,\pi \text{ سم}^٢/\text{ث}$$

$\boxed{٣}$ السمك $س = نق_٢ - نق_١$ $\qquad \therefore \frac{دس}{دن} = \frac{دنق_٢}{دن} - \frac{دنق_١}{دن}$

$$\therefore \frac{دس}{دن} = \frac{١}{٩} - ١ = -\frac{٨}{٩} \text{ سم/ث}$$

④ كرة يتغير حجمها ع بانتظام محتفظة بشكلها الكروي وعند أى لحظة زمنية ن ثانية كان طول نصف قطرها نق سم، مساحة سطحها الخارجي م سم^٢ فإن :

$\frac{دع}{دن} \times \frac{دنق}{دن} = $ ....

(أ) $\frac{١}{٤\pi} \times \left(\frac{دم}{دن}\right)^٢$ (ب) $\frac{١}{٤\pi} \times \left(\frac{دم}{دن}\right)$ (جـ) $\frac{١}{١٦\pi} \times \left(\frac{دم}{دن}\right)^٢$ (د) $\frac{١}{١٦\pi} \times \left(\frac{دم}{دن}\right)$

الحل

$$ع = \frac{٤}{٣}\,\pi\,نق^٣$$

$$\frac{دع}{دن} = ٤\,\pi\,نق^٢\,\frac{دنق}{دن} \qquad \times \left(\frac{دنق}{دن}\right)$$

$$\frac{دع}{دن} \times \frac{دنق}{دن} = ٤\,\pi\,نق^٢ \left(\frac{دنق}{دن}\right)^٢ \leftarrow (١)$$

$$م = ٤\,\pi\,نق^٢$$

$$\frac{دم}{دن} = ٨\,\pi\,نق\,\frac{دنق}{دن}$$

$$\therefore \frac{دنق}{دن} = \frac{١}{٨\pi نق} \times \left(\frac{دم}{دن}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{دنق}{دن}\right)^٢ = \frac{١}{٦٤\,\pi^٢\,نق^٢} \times \left(\frac{دم}{دن}\right)^٢ \leftarrow (٢)$$

نعوض من (٢) في (١) :

$$\therefore \frac{دع}{دن} \times \frac{دنق}{دن} = ٤\,\cancel{\pi}\,\cancel{نق^٢} \times \frac{١}{٦٤\,\pi^{\cancel{٢}}\,\cancel{نق^٢}} \left(\frac{دم}{دن}\right)^٢$$

$$\therefore \frac{دع}{دن} \times \frac{دنق}{دن} = \frac{١}{١٦\pi} \left(\frac{دم}{دن}\right)^٢$$

⑤ بالون كروي مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل **س** سم³/ث فإن معدل نقص مساحته في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطره **نق** سم يساوي .... سم²/ث.

(أ) $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ (ب) $\frac{2\text{س}}{\text{نق}}$ (ج) $\frac{\text{نق}}{\text{س}}$ (د) $\frac{2\,\text{نق}}{\text{س}}$

الحل

$$\text{ح} = \frac{4}{3}\pi\,\text{نق}^3$$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 4\pi\,\text{نق}^2\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$-\text{س} = 4\pi\,\text{نق}^2\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$\therefore \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{-\text{س}}{4\pi\,\text{نق}^2}$$

$$\text{م} = 4\pi\,\text{نق}^2$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 8\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 8\cancel{\pi}\,\cancel{\text{نق}} \times \frac{-\text{س}}{8\cancel{\pi}\,\text{نق}^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{-2\text{س}}{\text{نق}}$$

$$\therefore \text{معدل النقص في المساحة} = \frac{-2\text{س}}{\text{نق}}$$

⑥ حبل من الصلب على شكل أسطوانة دائرية قائمة يتمدد بالتسخين بحيث يزداد طوله بمُعدل ٠٫٠٠٥ سم / دقيقة ويزداد طول قطر مقطعه الدائرى بمُعدل ٠٫٠٠٢ سم / دقيقة . أوجد بدلالة π معدل تغير حجم الحبل بالنسبة للزمن عندما يكون طوله ٤٠ سم وطول قطر مقطعه ٢ سم.

الحل

$$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \pi\left[2\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \times \text{ع} + \pi\,\text{نق}^2 \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}\right]$$

$$\therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \pi\left[2 \times 1 \times 0.001 \times 40 + \pi \times 1 \times 0.005\right]$$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 0.085\,\pi\ \text{سم}^3 / \text{د}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = 0.005\ \text{سم} / \text{د}$$

$$\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = 0.001\ \text{سم} / \text{د}$$

$$\text{ع} = 40\ \text{سم}$$

$$\text{نق} = 1\ \text{سم}$$

٧ برميل أسطواني الشكل طول نصف قطره ١٠ أمتار وارتفاعه ١٨م فإذا كان معدل دخول البترول في البرميل $\frac{١٠٠٠}{\text{ل}+١}$ م^{٣}/ دقيقة حيث ل ارتفاع البترول عند أي لحظة . أوجد معدل ارتفاع البترول عندما يمتلئ نصف البرميل .

الحل

$\text{ع} = \pi \, \text{نق}^{٢} \, \text{ع}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \pi \, \text{نق}^{٢} \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ ∴ $\frac{١٠٠٠}{\text{ل}+١} = \pi \, \text{نق}^{٢} \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

نق = ١٠

ع = ١٨

عندما يمتلىء نصف البرميل : $\boxed{\text{ل} = ٩}$ ∴ $\frac{١٠٠٠}{١٠} = \pi \times ١٠٠ \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

∴ $١٠٠ = ١٠٠\pi \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ ∴ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{١}{\pi}$ سم /د.

٨ مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠٢ سم/د ، وتزداد مساحة سطحه بمعدل ٠,٧٢ سم^{٢}/د فإن مُعدل الزيادة في حجم المكعب حينئذ .... سم^{٣}/د.

(أ) ٠,٠٦ (ب) ٠,٣٦ (ج) ٠,٥٤ (د) ٠,٩٦

الحل

$\text{م} = ٦\,\text{ل}^{٢}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٢\,\text{ل} \, \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

$٠,٧٢ = ١٢ \times \text{ل} \times ٠,٠٢$

∴ $\text{ل} = \frac{٠,٧٢}{٠,٢٤} = ٣$ سم

$\text{ح} = \text{ل}^{٣}$

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٣\,\text{ل}^{٢} \, \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٣ \times ٩ \times ٠,٠٢ = ٠,٥٤$

٩ مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠١ سم / دقيقه فإذا كان معدل تغير حجمه عند لحظة ما ٧٥ سم^{٣}/ دقيقة فأوجد :

أولاً : طول ضلع المكعب عند هذه اللحظة.

ثانياً : معدل تغير مساحة سطحه عند هذه اللحظة.

الحل

$\text{ح} = \text{ل}^{٣}$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٣\,\text{ل}^{٢} \, \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

$\text{م} = ٦\,\text{ل}^{٢}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٢\,\text{ل} \, \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

$٧٥ = ٣ ل^{٢} \times ٠,٠١$

$\therefore ٠,٠٣ ل^{٢} = ٧٥$

$\therefore ل^{٢} = ٢٥٠٠ \quad \therefore ل = ٥٠$ سم

$\therefore \frac{دم}{دن} = ١٢ \times ٥٠ \times ٠,٠١$

$\frac{دم}{دن} = ٦$ سم^{٢}/د

١٠ خزان ماء مُكعب الشكل طول ضلعه ٤ سم يُصب فيه الماء بمعدل $\frac{١}{٢}$ م^{٣} / دقيقة ، فإن معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان = ... م / دقيقة.

(أ) $\frac{١}{٩٦}$ (ب) $\frac{١}{٣٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢٤}$ (د) $\frac{١}{٤٨}$

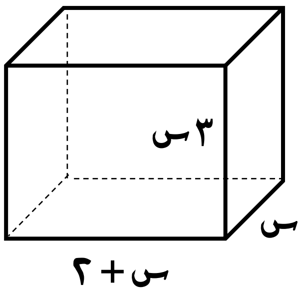
الحل

$ع = ١٦ ل \quad \therefore \frac{دع}{دن} = ١٦ \times \frac{دل}{دن} \quad \therefore \frac{١}{٢} = ١٦ \times \frac{دل}{دن}$

$\therefore \frac{دل}{دن} = \frac{١}{٣٢}$ سم / دقيقة

١١ تتمدد قطعة من المعدن على هيئة متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم، ارتفاعها ثلاثة أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل محتفظة بهذه النسب، فإذا كان الحجم يزداد بمُعدل ٠,٦ سم^{٣}/ د عندما يزداد العرض بمُعدل ٠,٠١ سم / د فأوجد أبعاد قطعة المعدن.

الحل الأبعاد في المتوازي : س ، س + ٢ ، ٣س



$ع = س \times ٣س \times (س + ٢) \qquad ع = ٣س^{٢} (س + ٢)$

$ع = ٣س^{٣} + ٦س^{٢} \qquad \therefore \frac{دع}{دن} = ٩س^{٢} \frac{دس}{دن} + ١٢س \frac{دس}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = ٠,٦ \qquad \frac{دس}{دن} = ٠,٠١$

$\therefore ٠,٦ = ٩س^{٢} \times ٠,٠١ + ١٢س \times ٠,٠١$

$٠,٠٩س^{٢} + ٠,١٢س - ٠,٦ = ٠ \qquad (\times ١٠٠)$

$٩س^{٢} + ١٢س - ٦٠ = ٠ \qquad (\div ٣)$

$٣س^{٢} + ٤س - ٢٠ = ٠ \qquad (٣س + ١٠)(س - ٢) = ٠$

$٣س = -١٠ \quad س = \frac{-١٠}{٣}$ مرفوض	$س = ٢ \quad \therefore$ الأبعاد هي : ٢ ، ٤ ، ٦ سم

⑫ متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمُعدل ١سم/د، ارتفاع متوازي المستطيلات ينقص بمعدل ٢سم/د .
أوجد في اللحظة التي يكون فيها طول ضلع القاعدة ٦ سم والارتفاع ٢٤ سم معدل الزيادة في حجم متوازي المستطيلات ثم أوجد بعد كم دقيقة من هذه اللحظة تنعدم هذه الزيادة.

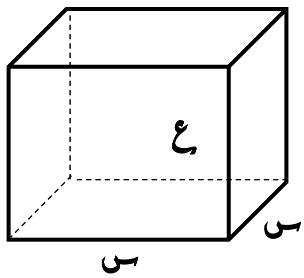
الحل

$ح = س^{٢} \times ع$

$\frac{دح}{دن} = ٢س \frac{دس}{دن} \times ع + س^{٢} \times \frac{دع}{دن}$

$\frac{دح}{دن} = ٢ \times ٦ \times ١ \times ٢٤ + ٣٦ \times -٢$

$\frac{دح}{دن} = ٢١٦$ سم^{٣}/د



$ح = (٦ + ن)^{٢} (٢٤ - ٢ن)$

$\frac{دح}{دن} = ٢(٦ + ن)(٢٤ - ٢ن) - ٢(٦ + ن)^{٢}$

عندما تنعدم الزيادة فإن : $\frac{دح}{دن} = ٠$

$٢ \cancel{(٦ + ن)} (٢٤ - ٢ن) - ٢(٦ + ن)^{\cancel{٢}} = ٠$

$٤٨ - ٤ن - ١٢ - ٢ن = ٠$

$\therefore -٦ن = -٣٦ \qquad \therefore \boxed{ن = ٦}$

بعد ٦ دقائق

⑬ متوازي مستطيلات أبعاده ٣سم ، ٤ سم ، ١٢سم إذا كان معدل تزايد بُعده الأول ٢سم/ث ، معدل تزايد بُعده الثانى ١ سم/ث و معدل تناقص بُعده الثالث ٣ سم/ث فأوجد حجم متوازي المستطيلات فى أى لحظة زمنية ن ، مُعدل تغير حجمه في نهاية ٢ث.

الحل نفرض أبعاد متوازي المستطيلات هى : $(٣ + ٢ن)$ ، $(٤ + ن)$ ، $(١٢ - ٣ن)$

$ح = (٣ + ٢ن)(٤ + ن)(١٢ - ٣ن)$ <u>الجسم عند أى لحظة زمنية :</u>

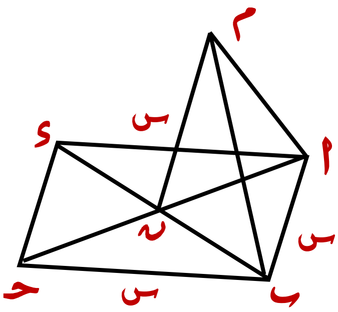
$\frac{دح}{دن} = ٢(٤ + ن)(١٢ - ٣ن) + (٣ + ٢ن)(١٢ - ٣ن) - ٣(٣ + ٢ن)(٤ + ن)$

عند $\boxed{ن = ٢}$ $\quad \frac{دح}{دن} = ٢ \times ٦ \times ٦ + ٧ \times ٦ - ٣ \times ٧ \times ٦ = -١٢$ سم^{٣}/ث

⑭ يتمدد هرم رباعي منتظم من المعدن ارتفاعه يساوي طول ضعف قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١ سم^{٣}/ث ، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته ٠,٠١ سم/ث أوجد طول ضلع قاعدته.

الحل

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع



$\therefore$ ع = $\frac{١}{٣}$ × س^{٢} × س   ع = $\frac{١}{٣}$ س^{٣}

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = س^{٢} $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\therefore$ ١ = (٠,٠١)س^{٢} $\therefore$ س^{٢} = ١٠٠ $\therefore$ س = ١٠ سم

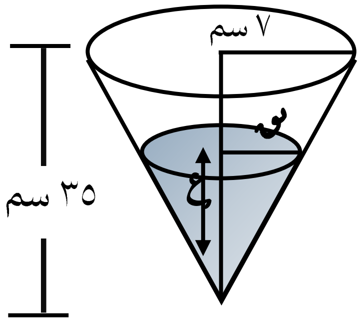
$\therefore$ طول ضلع قاعدة الهرم = ١٠ سم

⑮ قمع على هيئة مخروط دائري قائم ارتفاعه ٣٥ سم ، نصف قطر قاعدته ٧سم بحيث كان محوره رأسيًا ورأسه إلى أسفل يُصب فيه الزيت بمعدل ٥,٤ سم^{٣}/ث بينما يتسرب الزيت من ثقب عند رأسه بمعدل ٣,٢ سم^{٣}/ث فإن المعدل الذي يرتفع به الزيت في القمع عند يصل الزيت إلى ارتفاع ٢٥ سم يساوي .... سم/ث.

(أ) ٠,٠٠٧   (ب) ٠,٠١٤   (جـ) ٠,٠٢٨   (د) ٠,٠٥٦

الحل

معدل زيادة حجم الزيت في المخروط



$\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = ٥,٤ − ٣,٢ = ٢,٢ سم^{٣}/ث

من تشابه المثلثات: $\frac{٧}{\text{نق}} = \frac{٣٥}{\text{ع}}$

$\therefore$ $\frac{١}{\text{نق}} = \frac{٥}{\text{ع}}$ = $\therefore$ نق = $\frac{١}{٥}$ع

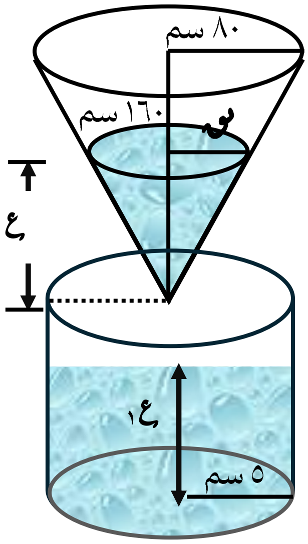
ح = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣}$ × π $\frac{١}{٢٥}$ع^{٢} × ع $\therefore$ ح = $\frac{١}{٧٥}$ π ع^{٣}

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢٥}$ π ع^{٢} $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ $\therefore$ ٢,٢ = $\frac{١}{٢٥}$ π × (٢٥)^{٢} × $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$\therefore$ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{٢,٢}{٢٥\pi}$ = ٠,٠٢٨ سم/ث

⑯ مخروط دائرى قائم رأسه لأسفل نصف قطر قاعدته ٨٠سم وارتفاعه ١٦٠ سم يتسرب منه الماء ويتجمع في وعاء أسطواني الشكل نصف قطر قاعدته ٥٠ سم . أوجد ارتفاع الماء في المخروط في اللحظة التي يكون فيها معدل هبوط الماء في المخروط مساويًا لمعدل ارتفاع الماء في الأسطوانة.

الحل



حجم المخروط $= \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع}$

من هندسة الشكل : في المخروط: $\frac{\text{نق}}{٨٠} = \frac{\text{ع}}{١٦٠}$

$\therefore \frac{\text{نق}}{١} = \frac{\text{ع}}{٢}$ $\qquad \therefore \boxed{\text{نق} = \frac{١}{٢}\text{ع}}$

$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi\left(\frac{١}{٢}\text{ع}\right)^{٢} \times \text{ع} = \frac{١}{٣} \times \pi \times \frac{١}{٤}\text{ع}^{٢} \times \text{ع}$

$\text{ح} = \frac{١}{١٢}\pi\,\text{ع}^{٣}$ $\qquad \therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{١}{٤}\pi\,\text{ع}^{٢} \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

في الأسطوانة: حجم الماء $= \pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع}_{١}$

$\therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \pi\,\text{نق}^{٢}\frac{\text{دع}_{١}}{\text{دن}}$ $\qquad \therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \pi \times ٢٥٠٠ \times \frac{\text{دع}_{١}}{\text{دن}}$

∵ حجم الماء في الأسطوانة = حجم الماء الهابط في المخروط

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ (أسطوانة) = $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ (مخروط)

$\cancel{\pi} \times ٢٥٠٠ \times \cancel{\frac{\text{دع}_{١}}{\text{دن}}} = \frac{١}{٤} \times \cancel{\pi} \times \text{ع}^{٢} \times \cancel{\frac{\text{دع}}{\text{دن}}}$ $\qquad \therefore \text{ع}^{٢} = ١٠٠٠٠$ $\qquad \therefore \boxed{\text{ع} = ١٠٠}$ سم

⑰ منشور قائم قاعدته على شكل مثلث متساوي الأضلاع يزداد طول ضلع قاعدته بمعدل ٠,٣ سم / ث ويزداد ارتفاع المنشور بمعدل ٠,٢ سم/ث . أوجد معدل تزايد حجمه في اللحظة التي يكون فيها طول ضلع القاعدة ٤سم و ارتفاع المنشور ١٢ سم .

الحل

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$\therefore \text{ح} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{س}^{٣} \times \text{ع}$

$\therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \text{ع} + \frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{س}^{٢} \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$\therefore \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٤ \times ٠,٣ \times ١٢ + \frac{\sqrt{٣}}{٤} \times ١٦ \times ٠,٢ = ٨\sqrt{٣}$ سم³/ث

(١٨) منشور قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٤ سم ويزداد بمعدل ٢سم/ث ، ارتفاعه ٨سم و ينقص بمعدل ٤ سم/ث ، فبأى معدل يزداد حجم المنشور وبعد كم ثانية يقف حجمه عن الزيادة.

الحل أولاً : بفرض أبعاد المنشور س ، س ، ع

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع $\therefore \text{ح} = \text{س}^{٢}\,\text{ع}$

$$\therefore \frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = ٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \times \text{ع} + \text{س}^{٢} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٢ \times ٤ \times ٢ \times ٨ + ١٦ \times -٤$$

$$\therefore \frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = ٦٤ \text{ سم}^{٣}\text{/ث}$$

ثانيا: بفرض أبعاد المنشور هى : $(٤+٢\text{ن})$ ، $(٤+٢\text{ن})$ ، $(٨-٤\text{ن})$

$$\therefore \text{ح} = (٤+٢\text{ن})^{٢}\,(٨-٤\text{ن})$$

$$\therefore \frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = ٢(٤+٢\text{ن}) \times ٢ \times (٨-٤\text{ن}) - ٤(٤+٢\text{ن})^{٢}$$

$$= ٤\,(٤+٢\text{ن})\,(٨-٤\text{ن}) - ٤(٤+٢\text{ن})^{٢}$$

$$= ٤\,(٤+٢\text{ن})\,(٨-٤\text{ن}-٤-٢\text{ن}) = ٤\,(٤+٢\text{ن})(٤-٦\text{ن})$$

<u>عندما يتوقف الحجم عند الزيادة :</u> $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = \text{صفر}$

$$\therefore \cancel{٤}\,(٤+٢\text{ن})(٤-٦\text{ن}) = ٠$$

$٤+٢\text{ن} = ٠$	$٤-٦\text{ن} = ٠$
$\text{ن} = -٢$ مرفوض	$٦\text{ن} = ٤$ $\quad \boxed{\text{ن} = \frac{٢}{٣}}$ ث