Equações de Recorrência

Equações de Recorrência

- Equações de Recorrência: definição.
- Solução de Equações de Recorrência:
  - Método da Substituição Repetida.
  - Método da Árvore de Recursão.
  - Técnica da Equação Característica aplicada a:
    - Recorrências Homogêneas.
    - Recorrências Não-homogêneas.
  - Mudança de Variável.
  - Método Mestre.

Equações de Recorrência: Definição

- Funções recorrentes:
  – são aquelas que se auto-referenciam.
  – são capazes de descrever funções recursivas.
  – são essenciais para o cálculo da complexidade de algoritmos recursivos.

$$f(n) = \begin{cases} 0, n = 0 \\ n + f(n-1), n \neq 0 \end{cases}$$

Método da Substituição Repetida

Método da Substituição Repetida

- Dois passos:
  - Adivinhar a forma da solução.
  - Empregar indução matemática para encontrar constantes e mostrar que a solução funciona.
- O nome do método se deve ao fato de substituir a forma adivinhada na função durante a aplicação da hipótese de indução para valores pequenos.

Método da Substituição Repetida

$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

$T(n) \in O(n \lg n)$? Ou seja, mostrar que $T(n) \leq cn \lg n$

1º mostrar que é a válido para todo $m < n$, em particular $m = \lfloor n/2 \rfloor$

$\therefore T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)$.

Substituindo …

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq 2(c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)) + n \\
&\leq cn \lg(n/2) + n \\
&= cn \lg n - cn \lg 2 + n \\
&= cn \lg n - cn + n \\
&\leq cn \lg n
\end{aligned}
$$

Método da Substituição Repetida

- Caso base:
  - Escolha de $n_0 = 2$.
  - Se $T(1) = 1 \rightarrow T(2) = 4$ e $T(3) = 5$.
  - Escolhe *c* tal que $T(2) \leq c2\lg 2$ e $T(3) \leq c3\lg 3$.
    - $c \geq 2$.

Método da Substituição Repetida

$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$

$T(n) \in O(n)$? Ou seja, mostrar que $T(n) \leq cn$

1º mostrar que é a válido para todo $m < n$, em particular $m = \lfloor n/2 \rfloor$

$\therefore T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c\lfloor n/2 \rfloor$.

Substituindo …

$T(n) \leq 2(c\lfloor n/2 \rfloor) + 1$

$$= cn + 1$$

$cn + 1 \leq cn$? Erro

Método da Substituição Repetida

$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$

$T(n) \in O(n)$? ou seja, mostrar que $T(n) \leq cn - d, d \geq 0$

1º mostrar que é a válido para todo $m < n$, em particular $m = \lfloor n/2 \rfloor$

$\therefore T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c\lfloor n/2 \rfloor - d.$

Substituindo …

$T(n) \leq 2(c\lfloor n/2 \rfloor - d) + 1$

$$= cn - 2d + 1$$

$$\mathrm{cn} - 2d + 1 \leq \mathrm{cn} - d$$

$$d \geq 1$$

Método da Substituição Repetida

$$T(n) = \begin{cases} 1 & para \;\; n = 1 \\ n + 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) & para \;\; n > 1 \end{cases}$$

$T(n) = n + 2T(n/2)$

$T(n) = n + 2T(n/2)$

$= n + 2(n/2 + 2T(n/4))$

$= n + n + 4T(n/4)$

$= n + n + 4(n/4 + 2T(n/8))$

$= n + n + n + 8T(n/8)$

$\ldots = in + 2^iT(n/2^i)$

$= kn + 2^kT(1)$

$= n\lg n + nT(1) = \Theta(n\lg n)$

Método da Substituição Repetida

- Exercícios
  - $T(n) = 2T(n/2) + 1$, se $n>1$ e $T(n) = 1$, se $n = 1$
  - Hanoi
    - $T(n) = 2T(n-1) + 1$, se $n>1$ e $T(n) = 1$, se $n = 1$

Método da Substituição Repetida

Visão do crescimento

$$f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + k \longrightarrow O(\log n)$$

$$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + k \longrightarrow O(n)$$

$$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + n \longrightarrow O(n \log n)$$

$$f(n) = 4f\left(\frac{n}{2}\right) + k \longrightarrow O(n^2)$$

Método da Substituição Repetida

Visão do crescimento

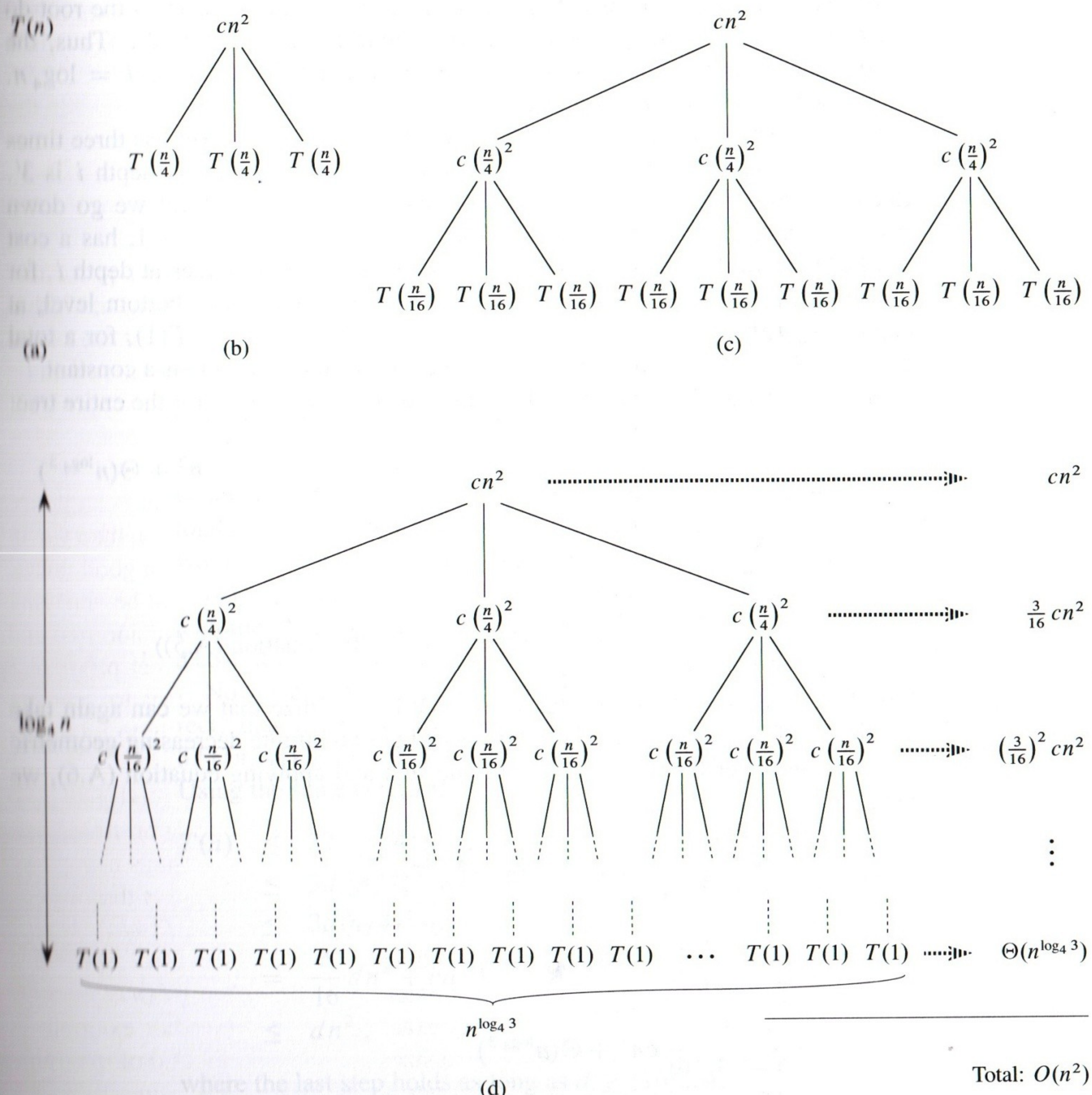
$$f(n) = 4f(\frac{n}{2}) + n^2 \longrightarrow O\left(n^2 \log n\right)$$

$$f(n) = 4f(\frac{n}{2}) + n^3 \longrightarrow O\left(n^3\right)$$

Método da Árvore de Recursão

Método da Árvore de Recursão

- Maneira direta de obter um bom palpite, ou mesmo resolver a recorrência.
- Árvore de recursão
  - nó: custo de um único subproblema.
- Exemplo:
  - $T(n) = cn^2 + 3T(n/4)$



T(n)
(a)
cn²
T(n/4) T(n/4) T(n/4)
(b)
cn²
c(n/4)² c(n/4)² c(n/4)²
T(n/16) T(n/16) T(n/16) T(n/16) T(n/16) T(n/16) T(n/16) T(n/16) T(n/16)
(c)
cn²
c(n/4)² c(n/4)² c(n/4)²
c(n/16)² c(n/16)² c(n/16)² c(n/16)² c(n/16)² c(n/16)² c(n/16)² c(n/16)² c(n/16)²
log₄ n
T(1) T(1) T(1) T(1) T(1) T(1) T(1) T(1) T(1) T(1) … T(1) T(1) T(1)
n^(log₄ 3)
cn²
3/16 cn²
(3/16)² cn²
Θ(n^(log₄ 3))
Total: O(n²)
(d)

Método da Árvore de Recursão

- Tamanho do subproblema de um nó na profundidade i é $n/4^i$.
- $n = 1 \rightarrow n/4^i = 1$, $i = \log_4 n$.

- Número de nós na profundidade i é 3^i.
- Para $i = \log_4 n$:
  - Número de nós na profundidade i é $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

Método da Árvore de Recursão

$$T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \ldots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \theta(n^{\log_4 3})$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \theta(n^{\log_4 3})$$

$$T(n) = \frac{(3/16)^{\log_4 n} - 1}{(3/16) - 1} cn^2 + \theta(n^{\log_4 3})$$

$$T(n) < \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \theta(n^{\log_4 3})$$

$$T(n) < \frac{16}{13} cn^2 + \theta(n^{\log_4 3})$$

$$T(n) = O(n^2)$$

Método da Árvore de Recursão

- Exercícios
  - $T(n) = 2T(n/2) + n$
  - $T(n) = 2T(n/3) + 1$

Técnica da Equação Característica

Técnica da Equação Característica

- Pode ser aplicada a recorrências homogêneas ou não-homogêneas.

Recorrências Homogêneas

- Recorrências da forma:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$$

são ditas recorrências homogêneas lineares com coeficientes constantes:

- Lineares porque não contêm termos da forma; $t_{n-i} t_{n-j}, t_{n-i}^2$
- Homogêneas porque a combinação linear dos diversos t_{n-i} é igual a zero;
- Com coeficientes constantes porque os termos a_i são constantes.

Recorrências Homogêneas

- Seqüência de Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,...):

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \Rightarrow f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

- É uma recorrência linear homogênea com constantes: $k = 2, a_0 = 1, a_1 = a_2 = -1$

Recorrências Homogêneas

- Combinação linear de soluções também é uma solução.
- Suponha que f_n, g_n sejam duas soluções para a equação $a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$
- Seja a combinação linear $cf_n + dg_n$, então:

$$a_0(cf_n + dg_n) + a_1(cf_{n-1} + dg_{n-1}) + \ldots + a_k(cf_{n-k} + dg_{n-k}) = 0$$

$$c(a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \ldots + a_k f_{n-k}) + d(a_0 g_n + a_1 g_{n-1} + \ldots + a_k g_{n-k}) = 0$$

$$c \times 0 + d \times 0 = 0$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Homogêneas

- Passos para encontrar equação característica:
  - Substitui-se t_n por x^n em $a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$, obtendo:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_k x^{n-k} = 0$$

  - Essa equação é satisfeita se x = 0 ou se:

$$\boxed{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0} \longrightarrow \text{Equação característica}$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Homogêneas

$$\boxed{p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k} \longrightarrow \text{Polinômio característico}$$

- Sabe-se que:

$$p(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - r_i)$$

onde r_i são as únicas soluções para $p(x) = 0$.

- Portanto: $p(r_i) = 0$, $x = r_i$ é solução da equação característica e r_i^n é solução da recorrência.
- Uma vez que toda combinação linear de soluções é também uma solução: $t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Homogêneas

- Considere a recorrência:

$$t_n = \begin{cases} 0, n = 0 \\ 5, n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2}, c.c. \end{cases}$$

- Reescrevendo a recorrência: $t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0$
- O polinômio característico é:
- $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$, onde $r_1 = -1; r_2 = 4$
- Então, a solução geral é da forma:

$$t_n = c_1(-1)^n + c_2 4^n$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Homogêneas

- A partir das condições iniciais em:

$$t_n = \begin{cases} 0, n = 0 \\ 5, n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2}, c.c. \end{cases}$$

obtemos:

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad n = 0$$

$$-c_1 + 4c_2 = 5 \quad n = 1$$

- Resolvendo essas equações obtemos $c_1 = -1$ e $c_2 = 1$. Portanto:

$$t_n = 4^n - (-1)^n$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Homogêneas

Exercício

Solucione a recorrência a seguir, correspondente à seqüência de Fibonacci, utilizando a técnica da equação característica para recorrências homogêneas.

$$f_n = \begin{cases} n, n = 0; n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2}, c.c. \end{cases}$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Homogêneas

- Polinômio característico com raízes múltiplas (repetidas):
  - Há soluções que não podem ser obtidas pela combinação linear de soluções.
  - Brassard e Bratley (1995) mostram que, para *l* raízes, cada uma com multiplicidade m_i, $i = 1,...,l$:

$$t_n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} n^j r_i^n$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Homogêneas

- Considere a recorrência:

$$t_n = \begin{cases} n, n = 0,1,2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3}, c.c. \end{cases}$$

- Reescrevendo... $t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-3} = 0$
- O polinômio característico é:
- $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$, onde:
- $r_1 = 1; m_1 = 1; r_2 = 2; m_2 = 2$
- Então, a solução geral é da forma:

$$t_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Homogêneas

- A partir das condições iniciais em:

$$t_n = \begin{cases} n, n = 0,1,2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3}, c.c. \end{cases}$$

obtemos:

$c_1 + c_2 = 0 \quad n = 0$

$c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1 \quad n = 1$

$c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 2 \quad n = 2$

- Resolvendo essas equações obtemos $c_1 = -2$, $c_2 = 2$ e $c_3 = -1/2$. Portanto:

$$t_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n \quad \rightarrow \quad t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Homogêneas

Exercício

- Resolva a recorrência

$$t_n = \begin{cases} n, n = 0,1,2 \\ 6t_{n-1} - 12t_{n-2} + 8t_{n-3}, c.c. \end{cases}$$

Recorrências Não-homogêneas

- Recorrências não-homogêneas:
  - A combinação linear não é igual a zero.
  - Não se garante mais que qualquer combinação linear das soluções é uma solução.
  - 1º Caso:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{t-k} = b^n p(n)$$

  - 2º Caso (generalização):

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{t-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \ldots$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Não-homogêneas

- Considere a recorrência: $t_n - 2t_{n-1} = 3^n$
- Neste caso, *b* = 3, *p*(*n*) = 1, *d* = 0.
- Artifícios matemáticos para obtenção de equação homogênea:
  – Multiplica a recorrência por 3: $3t_n - 6t_{n-1} = 3^{n+1}$

  – Substitui *n* por *n*-1: $3t_{n-1} - 6t_{n-2} = 3^n$

  – Subtrai da equação original: $t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Não-homogêneas

$$t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0$$

- Polinômio característico:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

- Forma geral das soluções:

$$t_n = c_1 2^n + c_2 3^n$$

Considerar condições iniciais da equação original para o cálculo das constantes!!!

$$\boxed{t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0 \quad \neq \quad t_n - 2t_{n-1} = 3^n}$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Não-homogêneas

- Condição inicial da equação original:

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n \longrightarrow t_1 = 2t_0 + 3$$

- Forma geral de solução encontrada:

$$t_n = c_1 2^n + c_2 3^n$$

- Cálculo das constantes:

$c_1 + c_2 = t_0 \quad n = 0$

$2c_1 + 3c_2 = 2t_0 + 3 \quad n = 1$

- Resolvendo o sistema: $c_1 = t_0 - 3$ e $c_2 = 3$.
- Logo, a solução geral é: $t_n = (t_0 - 3)2^n + 3^{n+1}$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Não-homogêneas

- Brassard e Bratley (1995) mostram que, para recorrências da forma:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{t-k} = b^n p(n)$$

é suficiente adotar o seguinte polinômio característico:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k)(x-b)^{d+1}$$

- Como pode ser observado no exemplo anterior:

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n \longrightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Técnica da Equação Característica: Recorrências Não-homogêneas

- Analogamente, para o caso:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{t-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \ldots$$

- Brassard e Bratley (1995) mostram que o polinômio característico pode ser obtido como a seguir:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k)(x - b_1)^{d_1+1}(x - b_2)^{d_2+1} \ldots$$

- A resolução de equações de recorrência para este caso segue o mesmo procedimento adotado para recorrências não-homogêneas até o momento.

Técnica da Equação Característica: Recorrências Não-homogêneas

Exercício

Encontre a solução geral da seguinte recorrência:

$$t_n - 2t_{n-1} = (n+5)3^n,\ n \geq 1;\ t_0 = 1$$

Solução de Equações de Recorrência: Mudança de Variável

Mudança de variável

- Recorrências mais complicadas podem ser solucionadas por meio de mudança de variável.
- $T(n) \rightarrow$ termo de uma recorrência geral;
- $t_i \rightarrow$ termo de nova recorrência obtida por mudança de variável;

Mudança de variável

- Considere a recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 3T(n/2) + n, n > 1 \end{cases}$$ e *n* é potência de 2

- Substituindo *n* por 2^i, temos:

$$t_i = T(2^i) = 3T(2^{i-1}) + 2^i \rightarrow 3t_{i-1} + 2^i$$

- Reescrevendo...: $t_i - 3t_{i-1} = 2^i$
- Polinômio característico: $(x-3)(x-2)$
- Portanto, todas as soluções são da forma:

$$t_i = c_1 3^i + c_2 2^i$$

Mudança de variável

$$t_i = c_1 3^i + c_2 2^i$$

$T(2^i) = t_i$; $T(n) = t_{lgn}$, quando $n = 2^i$

$$T(n) = c_1 3^{lgn} + c_2 2^{lgn} = c_1 n^{lg3} + c_2 n$$

Mudança de variável

Exercício

Considere a recorrência $T(n) = 4T(n/2)+n^2$, quando n é uma potência de 2 e $n \geq 2$.

Solucione essa equação de recorrência pelo método de substituição de variável.

Mudança de variável

- Considere a recorrência (divisão e conquista):

$$T(n) = lT(n/b) + cn^k, n > n_0$$

em que: $n_0 \geq 1$, $l \geq 1$, $b \geq 2$ e $k \geq 0$.

- Quando n/n_0 é uma potência de b, a mudança de variável mais apropriada seria: $n = b^i n_0$
- Sendo assim...

$$t_i = T(b^i n_0) = lT(b^{i-1} n_0) + c(b^i n_0)^k$$

$$t_i = lt_{i-1} + cn_0^k b^{ik}$$

$$t_i - lt_{i-1} = (cn_0^k)(b^k)^i$$

Mudança de variável

Forma: $B^i.p(i)$;
$B = b^k$; $p(i) = 1 = i^0$

$$T(n) = lT(n/b) + cn^k, n > n_0 \Rightarrow t_i - lt_{i-1} = (cn_0^k)(b^k)^i$$

- Resolvendo a equação de recorrência não-homogênea:

$$t_i = c_1 l^i + c_2 (b^k)^i$$

Polinômio característico:
$(x-l)(x-b^k)$

- Como: $i = \log_b(n/n_0)$, então:

$x^{\log y} = y^{\log x}$

$$T(n) = c_1 l^{(\log_b(n/n_0))} + c_2 (b^k)^{(\log_b(n/n_0))}$$

$$T(n) = c_1 (n/n_0)^{(\log_b l)} + c_2 (n/n_0)^{(\log_b b^k)}$$

$$T(n) = c_1 (n/n_0)^{(\log_b l)} + c_2 (n/n_0)^k$$

$$T(n) = \frac{c_1}{n_0^{\log_b l}}(n)^{(\log_b l)} + \frac{c_2}{n_0^k}(n)^k$$

$$T(n) = c_3 n^{\log_b l} + c_4 n^k$$

Mudança de variável

- Substituindo $T(n) = c_3 n^{\log_b l} + c_4 n^k$ na recorrência original, temos:

$$cn^k = T(n) - lT(n/b)$$

$$cn^k = c_3 n^{\log_b l} + c_4 n^k - l(c_3 (n/b)^{\log_b l} + c_4 (n/b)^k)$$

$$cn^k = \left(1 - \frac{l}{b^k}\right) c_4 n^k$$

$$- \frac{l c_3 n^{\log_b l}}{l^{\log_b b}} - \frac{l c_4 n^k}{b^k}$$

$$c_4 = \frac{c}{1 - \frac{l}{b^k}}$$

Mudança de variável

- Substituindo $T(n) = c_3 n^{\log_b l} + c_4 n^k$ na recorrência original, temos:

$$cn^k = T(n) - lT(n/b)$$

$$cn^k = \cancel{c_3 n^{\log_b l}} + c_4 n^k - l(c_3(n/b)^{\log_b l} + c_4(n/b)^k)$$

$$c\cancel{n^k} = \left(1 - \frac{l}{b^k}\right) c_4 \cancel{n^k}$$

$$\cancel{-\frac{l c_3 n^{\log_b l}}{l^{\log_b b}}} - \frac{l c_4 n^k}{b^k}$$

$$c_4 = \frac{c}{1 - \frac{l}{b^k}}$$

Mudança de variável

- Temos: $T(n) = c_3 n^{\log_b l} + c_4 n^k$ e $c_4 = \dfrac{c}{1 - \dfrac{l}{b^k}}$

$l < b^k$
$\log_b l < \log_b b^k \; (= k)$

- Se $l < b^k$: $c_4 > 0$; $k > \log_b l$; $c_4 n^k$ é o termo dominante da equação. Portanto, $T(n) \in \Theta(n^k)$.

- Se $l > b^k$: $c_4 < 0$; $c_3 > 0$ ($T: \aleph \rightarrow \Re^+$); $k < \log_b l$; $c_3 n^{\log_b l}$ é o termo dominante da equação. Portanto, $T(n) \in \Theta(n^{\log_b l})$.

Mudança de variável

- Temos: $T(n) = c_3 n^{\log_b l} + c_4 n^k$ e $c_4 = \dfrac{c}{1 - \dfrac{l}{b^k}}$

- Se l = b^k: solução encontrada não se aplica, pois temos raízes múltiplas. Assim:

  $t_i = c_5 (b^k)^i + c_6 i (b^k)^i \qquad i = \log_b (n / n_0)$

  $T(n) = c_7 n^k + c_8 n^k \log_b (n / n_0)$

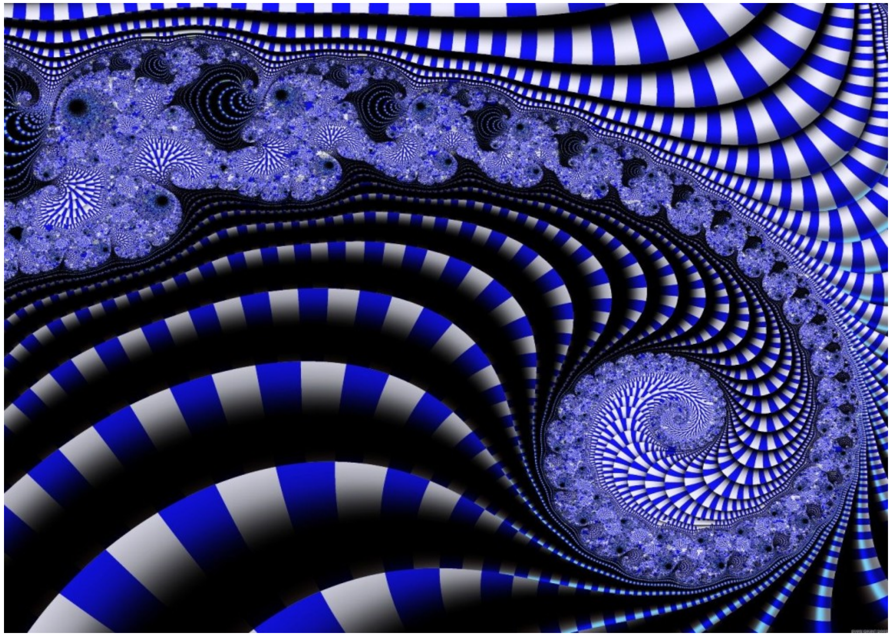
- Como $c_8 > 0$, $cn^k \log_b n$ é o termo dominante. Então, T(n) é Θ ($n^k \log n$).

Mudança de variável

- Resumo:

$$T(n) \in \begin{cases} \theta(n^k) & ,l < b^k \\ \theta(n^k \log n) & ,l = b^k \\ \theta(n^{\log_b l}) & ,l > b^k \end{cases}$$

Solução de Equações de Recorrência: Método Mestre



Método Mestre

- Método que resolve recorrências da forma:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

  onde $a \geq 1$ e $b > 1$ são constantes e $f(n)$ é uma função assintótica positiva.

- Relação da recorrência com problemas de divisão e conquista.

Método Mestre (Clássico...)

- Teorema Mestre (considerando a recorrência $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ apresentada), $T(n)$ pode ser limitada assintoticamente como segue:
  - Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, para alguma constante $\varepsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
  - Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
  - Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, para alguma constante $\varepsilon > 0$, e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todos os n suficientemente grandes, $T(n) = \Theta(f(n))$

Método Mestre (Variante adotada!)

- Teorema Mestre (considerando a recorrência $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ apresentada), $T(n)$ pode ser limitada assintoticamente como segue:
  - Se $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, para alguma constante ε > 0, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
  - Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$
  - Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, para alguma constante ε > 0, e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todos os n suficientemente grandes, $T(n) = \Theta(f(n))$

Método Mestre

- Há casos em que o Teorema Mestre não é aplicável.
  - f(n) é polinomialmente maior que $n^{\log_b a}$, mas a condição de regularidade não é válida (caso 3).

Método Mestre

- Considere a recorrência: $T(n) = 9T(n/3)+n$
- $a = 9$; $b = 3$; $f(n) = n$;
- $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$;
- Uma vez que $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, onde $\varepsilon = 1$, o caso 1 é aplicável e, pelo Teorema Mestre, a solução é $T(n) = \Theta(n^2)$.

Método Mestre

- Considere a recorrência:

$$T(n) = 2T(\,n/2\,) + n\log n$$

- Então:

$$f(n) = n\log n \qquad a = 2; b = 2 \qquad \log_b^a = 1$$

- Pelo caso 2:

$$n\log n \text{ é } \Theta(n^{\log_2 2}\log^1 n), \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 2}\log^{1+1} n)$$

$$T(n) = \Theta\,(n\log^2 n)$$

Método Mestre

- Considere a recorrência:

$$T(n) = T(n/3) + n\log n$$

- Então:

$$f(n) = n\log n \qquad a = 1; b = 3 \qquad \log_3^1 = 0$$

- Pelo caso 3:

$$n\log n \text{ é } \Omega(n^{\log_3 1 + \xrightarrow{} \varepsilon}) \quad 0{,}5$$

$$(n/3)\log(n/3) \leq c\, n\log n \qquad c < 1$$

$$T(n) = \Theta(n\log n)$$

Método Mestre

Exercícios

Verifique a aplicabilidade do Método Mestre às recorrências a seguir, exibindo a complexidade assintótica de $T(n)$ quando possível:

a) $T(n) = T(2n/3)+1$

b) $T(n) = 2T(n/2)+n\log n$

Referências

- CORMEN, T.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. *Introduction to Algorithms*. 2. ed. Massachusetts: The MIT Press, 2001.

- BRASSARD, G.; BRATLEY, P. *Fundamentals of algorithmics*. Prentice Hall, 1995.