

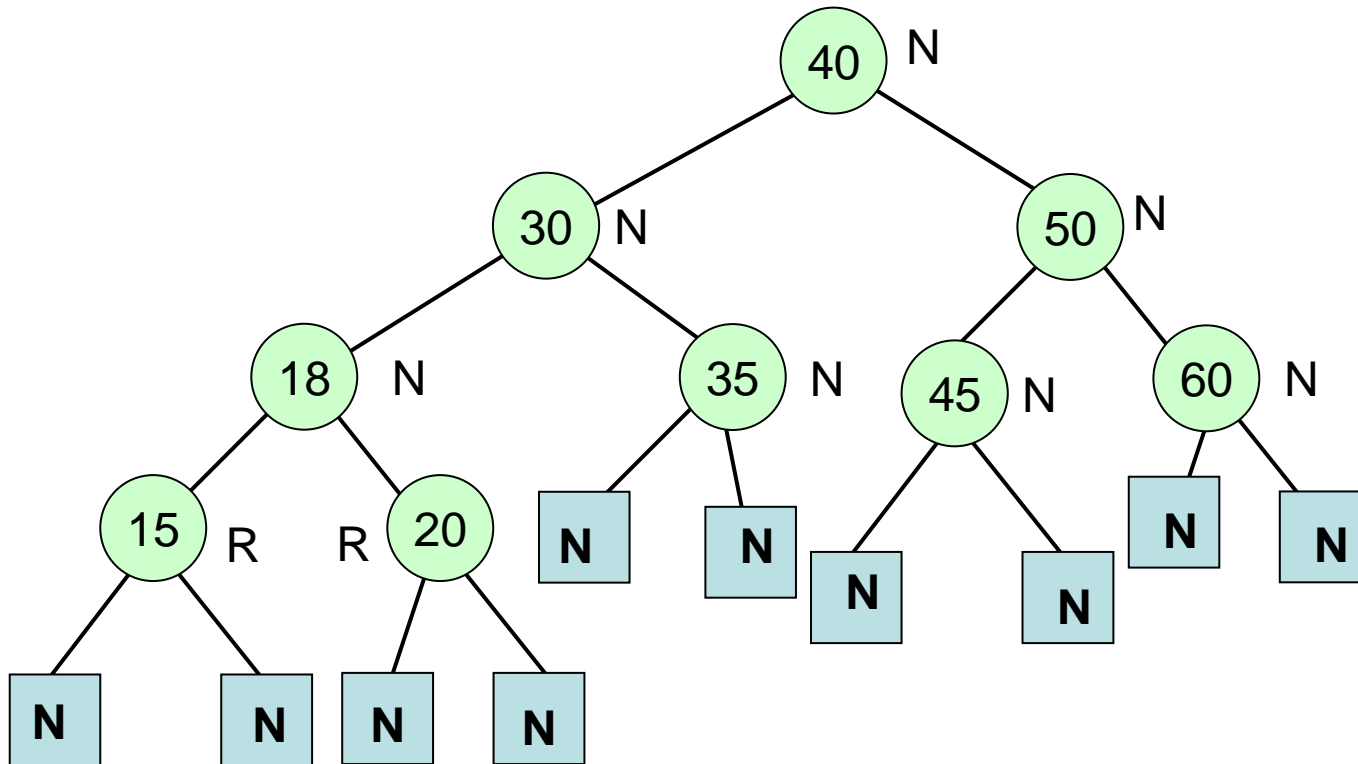
Inclusão em Árvore Rubro-Negra

Considere q um nó a ser inserido em T rubro-negra.

q ocupará o lugar de um nó externo e serão criados dois nós externos.

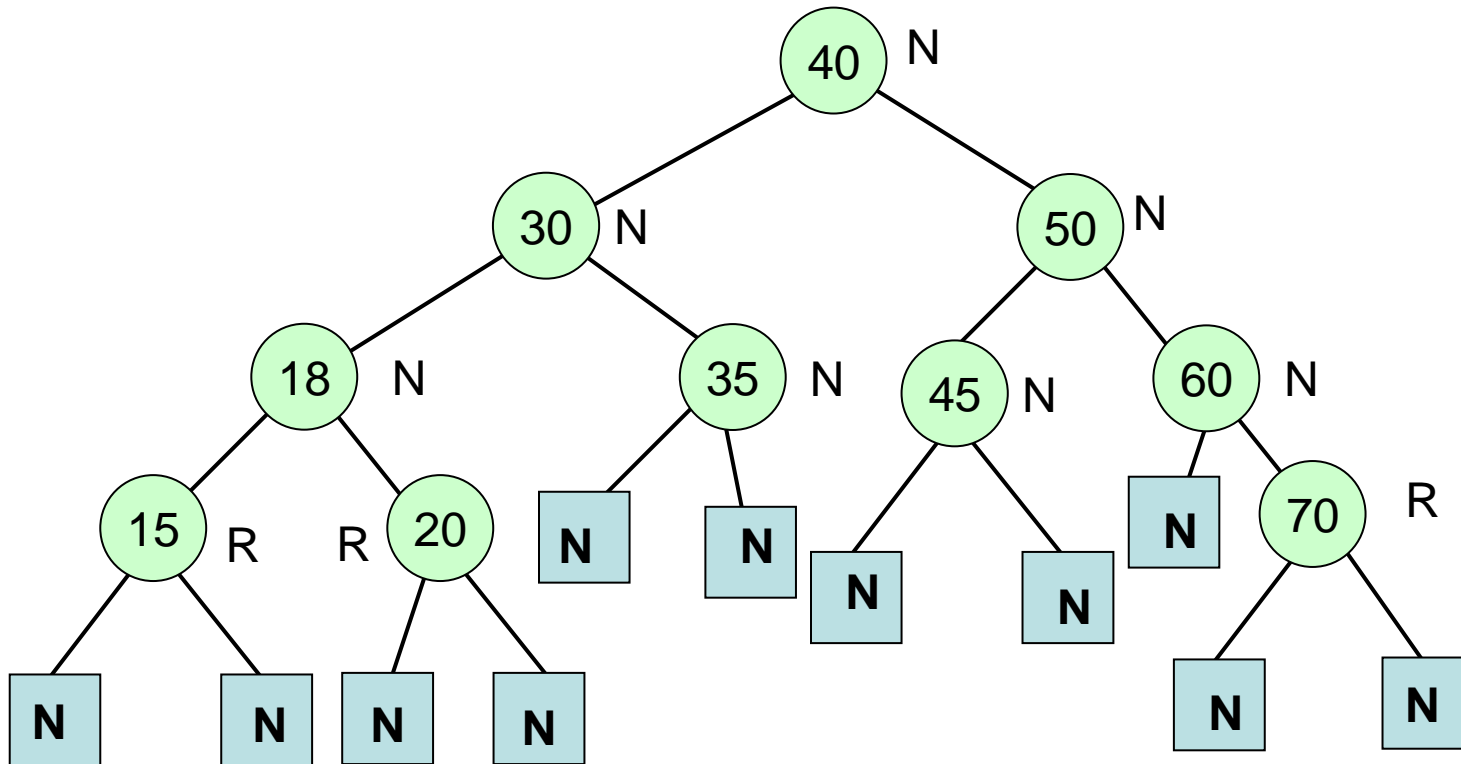
O algoritmo atribui cor R a q e N aos seus filhos externos.

Inclusão em Árvore Rubro-Negra

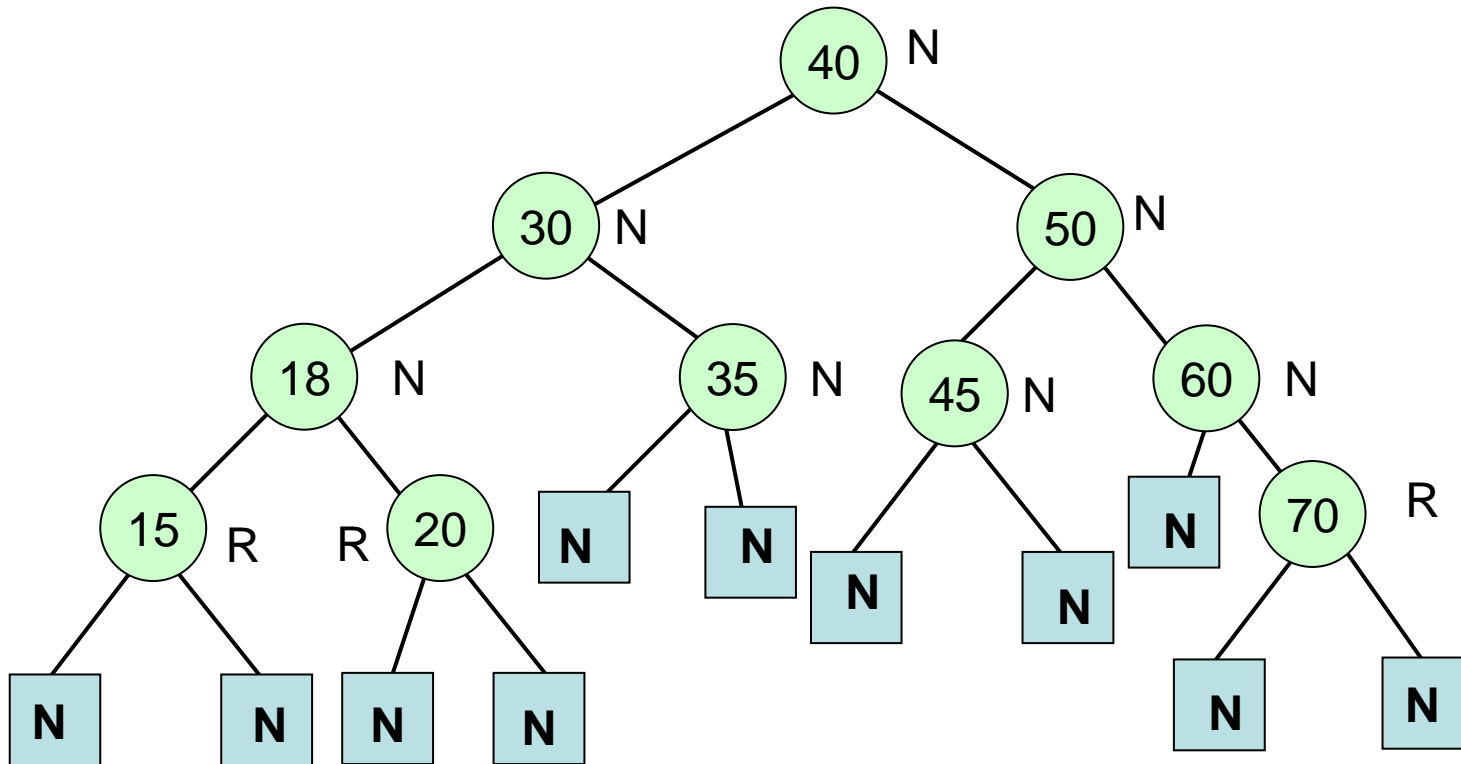


Inserção do nó 70

Inclusão em Árvore Rubro-Negra

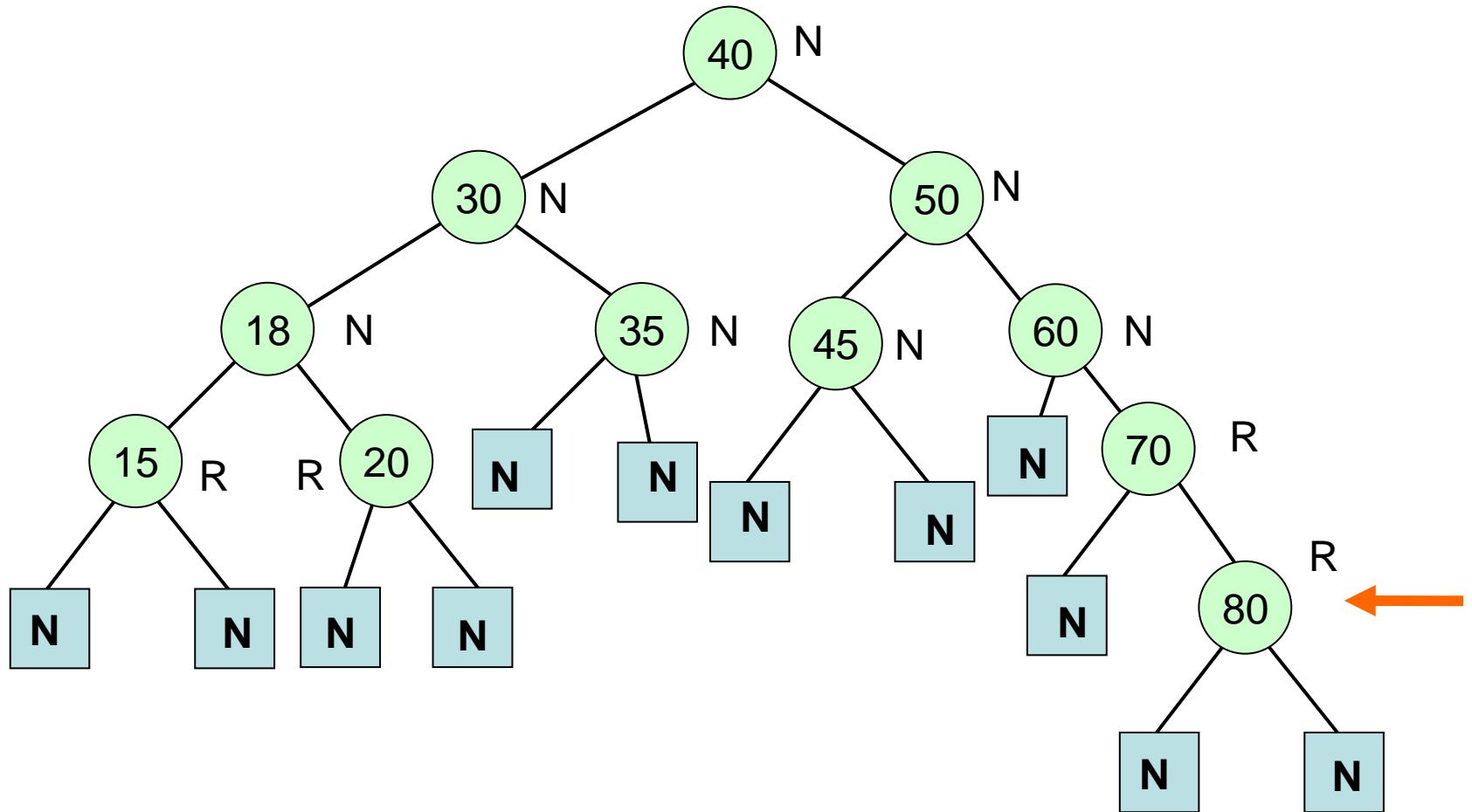


Inclusão em Árvore Rubro-Negra



Inserção do nó 80

Inclusão em Árvore Rubro-Negra



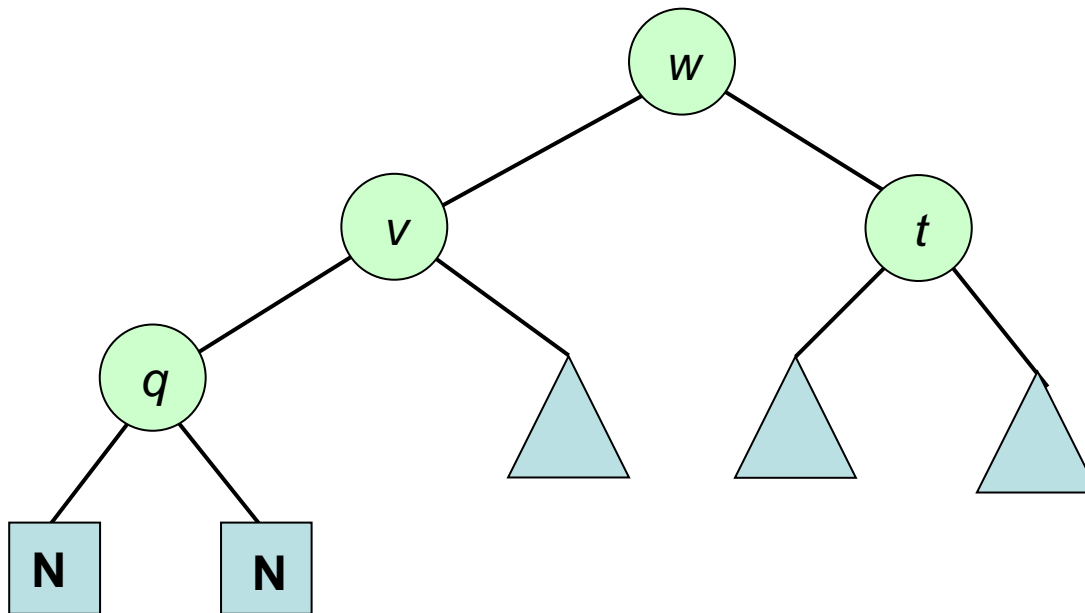
Inclusão em Árvore Rubro-Negra

CONDIÇÕES

1. Se v é nó externo, então $\text{cor}(v) = N$. **OK**
 2. Todos os caminhos de um nó v a seus descendentes externos possui o mesmo número de nós negros. **OK**
 3. Se $\text{cor}(v) = R$ e $v \neq \text{raiz}$, então $\text{cor}(\text{pai}(v)) = N$. **?**
-

Inclusão em Árvore Rubro-Negra

Considere v , w e t , o pai, o avô e o tio de q .



Inclusão em Árvore Rubro-Negra

Caso 1. v é N

T^* é rubro-negra. **FIM !!!**

Caso 2. v é R.

Se v é raiz de T^* , então trocar sua cor para N.

FIM!!!

Senão, v possui pai w . Examinamos a cor do irmão de v .

Inclusão em Árvore Rubro-Negra

Caso 2.1. t é R

Troca-se a cor dos seguintes nós:

v e $t \rightarrow N$

$w \rightarrow R$

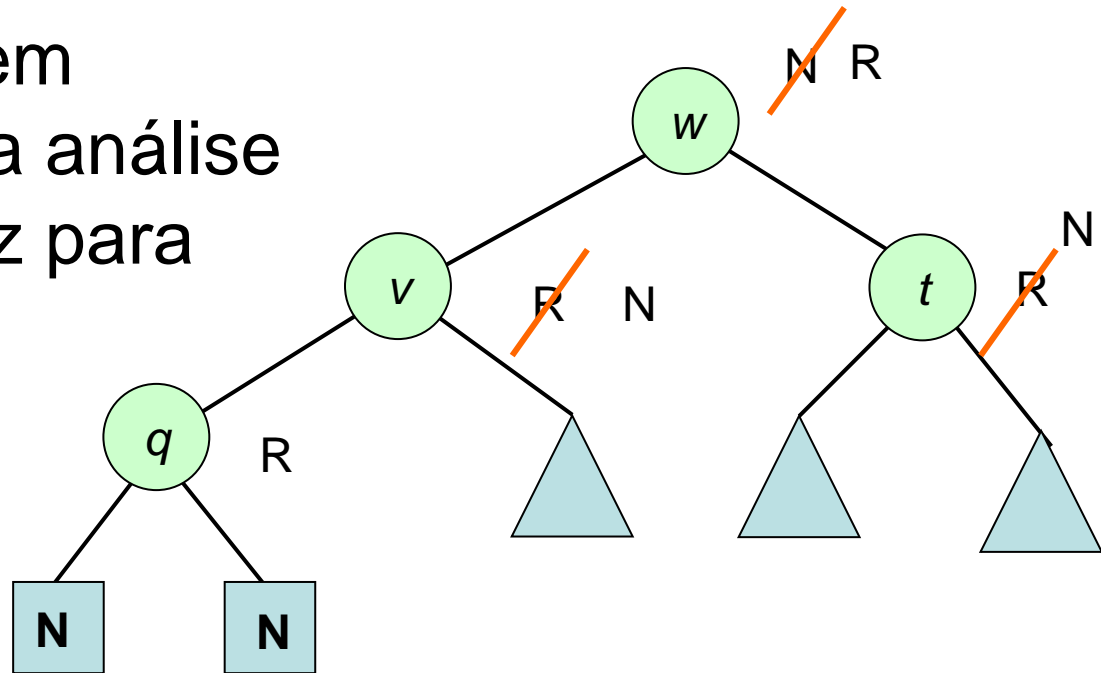
OBS.

(1) e (2) valem

(3) Refazer a análise
caso $w \neq \text{raiz}$ para

$q \leftarrow w$

Máximo
 $O(\log n)$ vezes



Inclusão em Árvore Rubro-Negra

Caso 2.2. t é N

Caso 2.2.1

q é filho esquerdo de v

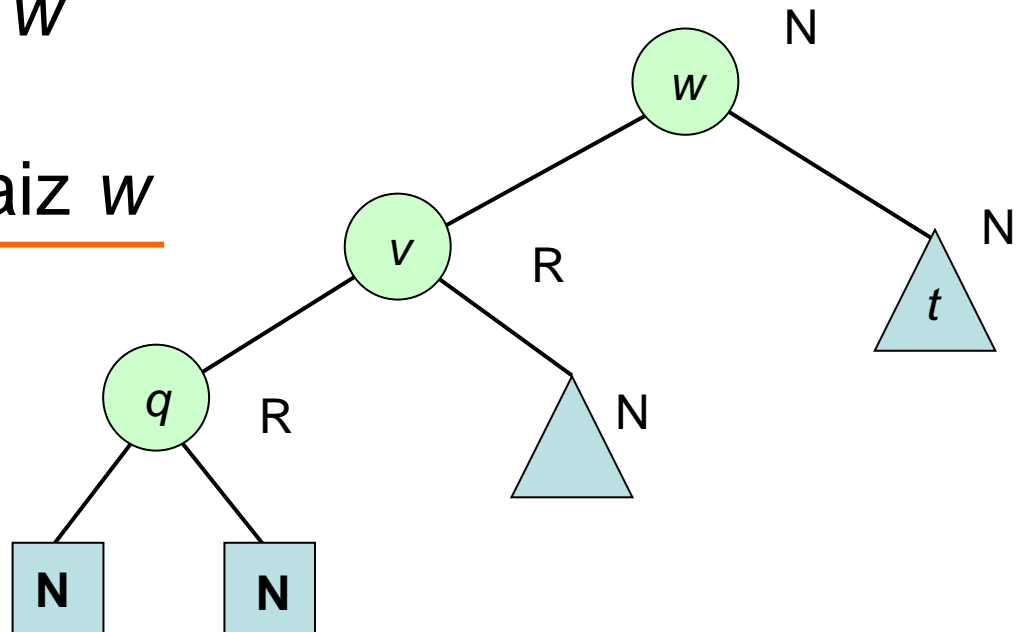
v é filho esquerdo de w

Aplicar rot. dir. com raiz w

Trocar as cores:

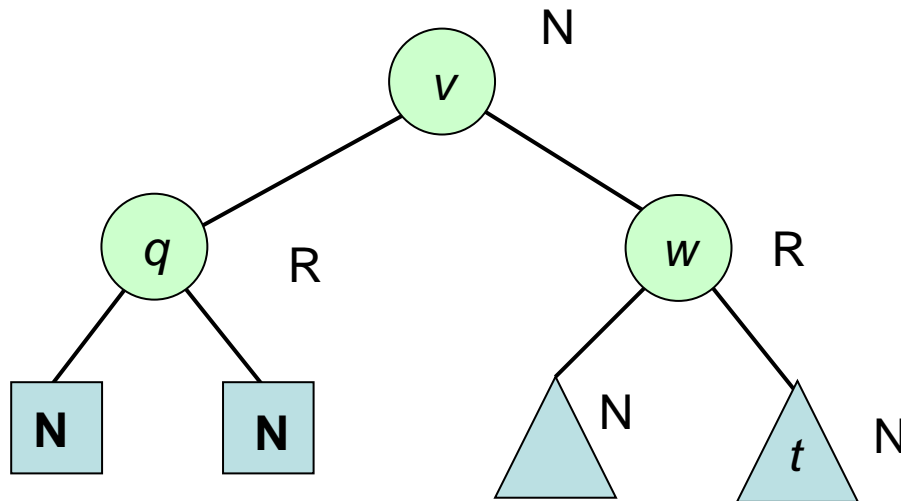
$v \rightarrow N$

$w \rightarrow R$



Inclusão em Árvore Rubro-Negra

Caso 2.2.1



A árvore torna-se RN (Máximo 1 vez)

Inclusão em Árvore Rubro-Negra

Caso 2.2. t é N

Caso 2.2.2

q é filho esquerdo de v

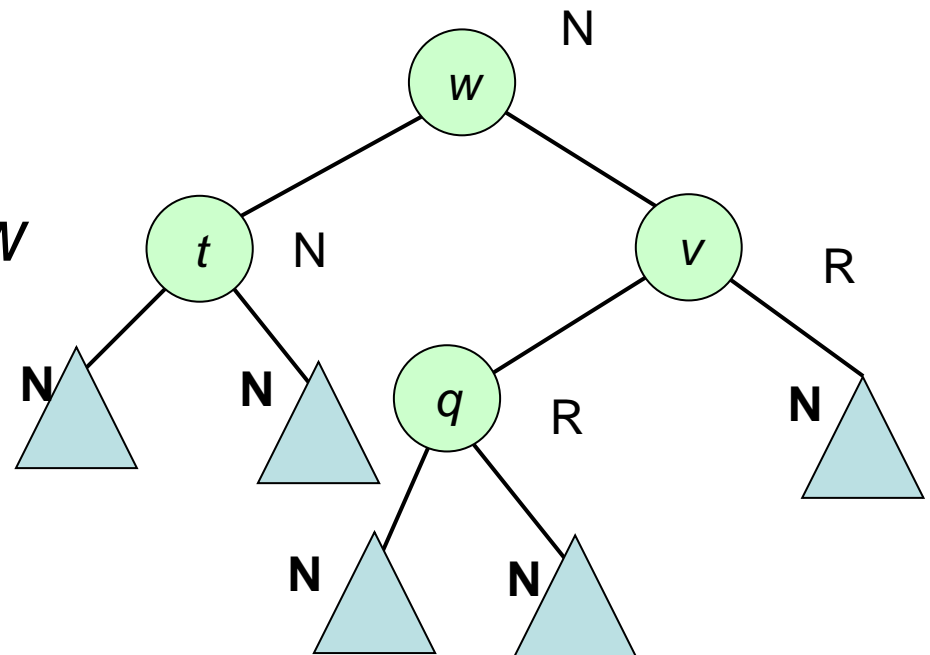
v é filho direito de w

Rot. Dup. Esq. com raiz w

Trocar as cores:

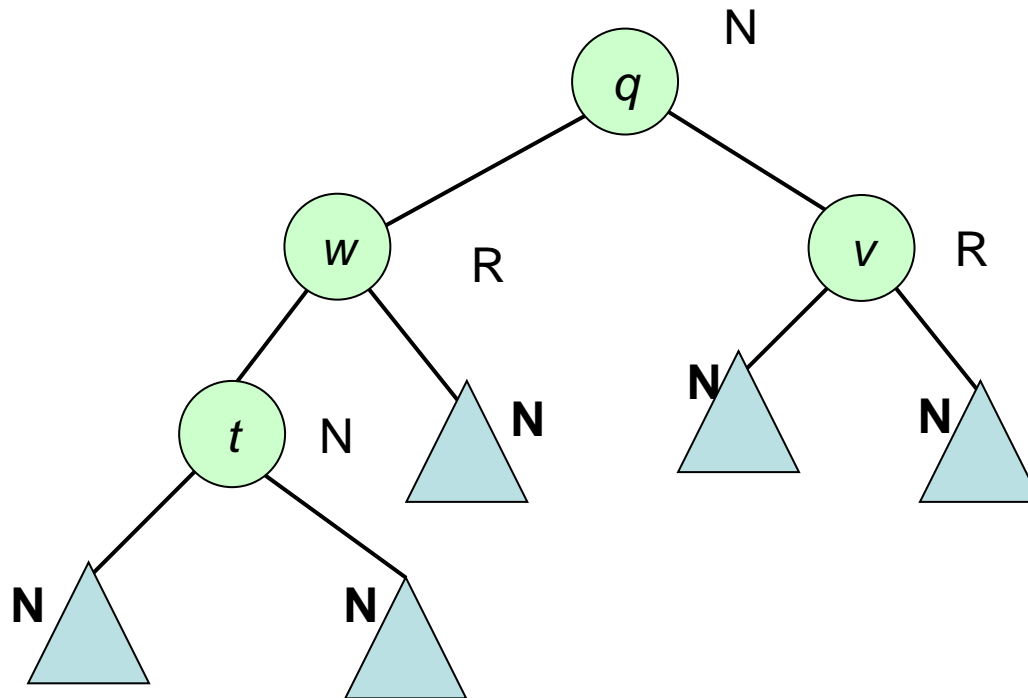
$q \rightarrow N$

$w \rightarrow R$



Inclusão em Árvore Rubro-Negra

Caso 2.2.2



A árvore torna-se RN (Máximo 1 vez)

Implementação da Inclusão

nó	chave	esq	dir	cor
----	-------	-----	-----	-----

x – chave

ptv – ponteiro para o nó corrente da busca

ptw – ponteiro para o pai de v

ptr – ponteiro para o avô de v

a – controla as chamadas do procedimento $rota()$ que faz as rotações. O procedimento só é executado se $a = 1$.

Implementação da Inclusão

Algoritmo ins-RN(x , ptv , ptw , ptr , a)

Onde

x – chave a ser inserida

ptv – nó corrente da busca

ptw – nó pai

ptr – nó avô

a – controla as chamadas do procedimento rota
que somente será executado se $a = 1$.

No caso 2.1, o valor de a será 0.

Nos outros casos $a = 2$ (rota não será mais executado)

Chamada inicial (x , ptv , λ , λ , 1)

Implementação da Inclusão

Algoritmo ins-RN(x , ptv , ptw , ptr , a)

Se $ptv = \text{externo}$, então

ocupar (ptv)

$ptv.esq \leftarrow ptw.dir \leftarrow \text{externo}$

$ptv.chave \leftarrow x$; $ptv.cor \leftarrow R$

se $ptr = \text{externo}$ então

$ptv.cor \leftarrow N$; $ptr \leftarrow ptv$

senão

se $x < ptw.chave$, então $ptw.esq \leftarrow ptv$

senão $ptw.dir \leftarrow ptv$

Implementação da Inclusão

Senão

se $x \neq p_{tv}.chave$, então

se $x < p_{tv}.chave$, então

$p_{tq} \leftarrow p_{tv}.esq$

senão $p_{tq} \leftarrow p_{tv}.dir$

ins-RN($x, p_{tq}, p_{tv}, p_{tw}, a$)

se $a = 1$, então $rota(p_{tq}, p_{tv}, p_{tw}, p_{tr}, a)$

senão se $a = 0$, então $a \leftarrow 1$

senão

“inserção inválida”

Implementação da Inclusão

Procedimento $\text{rota}(ptq, ptv, ptw, ptr, a)$

$a \leftarrow 2$

se $ptv.cor = R$ então

se cor do tio = R

caso 2.1

$a \leftarrow 0$

senão

$ptw.cor = R$

casos 2.2

$ptr.iz.cor \leftarrow N$

Exercícios em Árvore Rubro-Negra

1. Desenhar a árvore rubro-negra obtida pela sequência de inserções das chaves 19, 18, 16, 15, 17, 2, 6 nessa ordem.
 2. Desenhe a árvore binária de busca completa de altura 3 com as chaves $\{1, 2, \dots, 15\}$. Adicione os nós externos e colora os nós de 3 maneiras diferentes, tais que $NN(r) = 2, 3$ e 4.
 3. Considere que os nós de uma árvore RN possuem mais um campo ponteiro para o pai. Escreva o algoritmo de inserção em árvore RN, considerando este novo ponteiro.
-

Remoção em Árvore Rubro-Negra

Remover o nó

Caso cor do nó removido = R, FIM.

Caso contrário

Atribuir NN ao filho do nó removido.

Subir na árvore para eliminar um N dos dois NN

Obs1: O filho do nó removido é único ou é um nó externo.

Obs2: Caso NN esteja na raiz, remover um N.

Remoção em Árvore Rubro-Negra

Considere q o nó com rótulo NN, v pai de q e w irmão de q

Caso 1. w é R

Então w tem filhos N.

Atribuir cor N a w e cor R a v

Executar uma rotação a esquerda (direita) com raiz v .

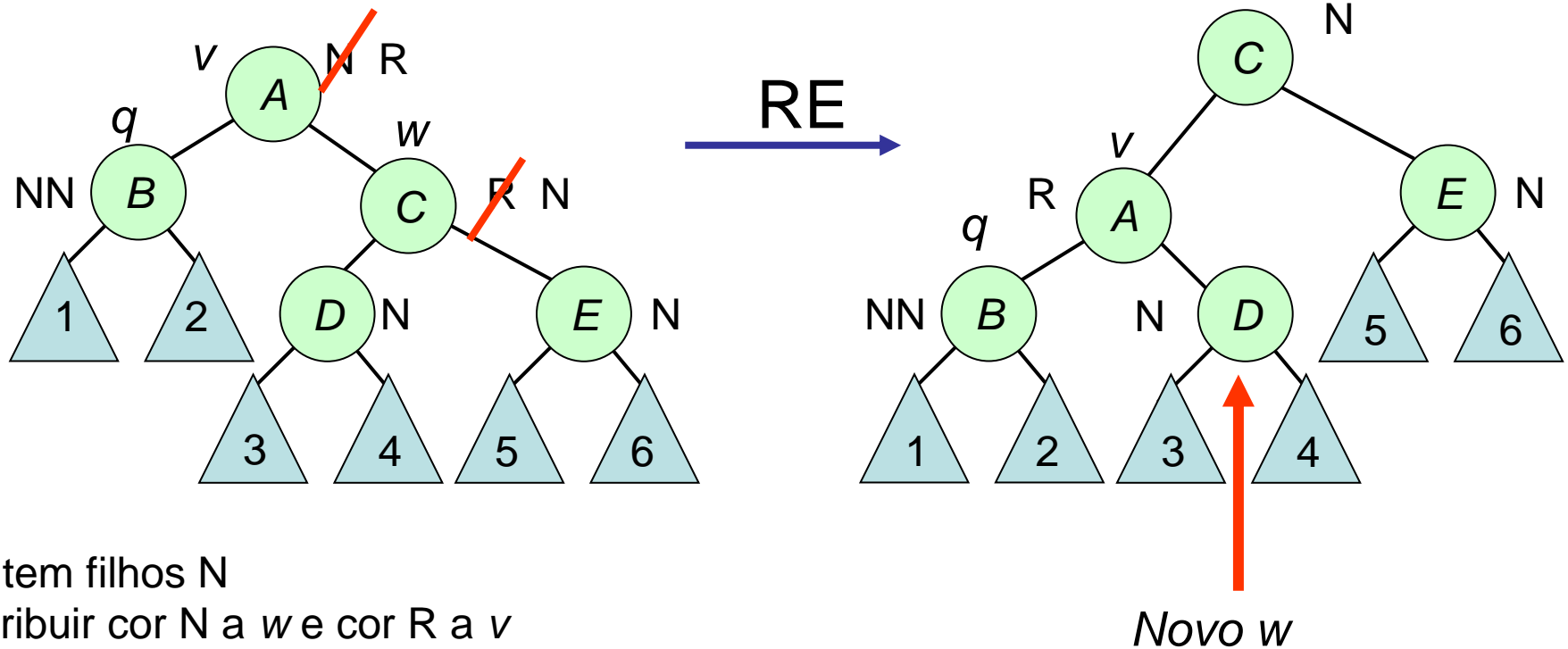
O novo irmão de q é um dos antigos filhos de w e tem cor N.

O caso 1 é, portanto, convertido em um dos casos a seguir.

Remoção em Árvore Rubro-Negra

Considere q o nó com rótulo NN, v pai de q e w irmão de q

Caso 1



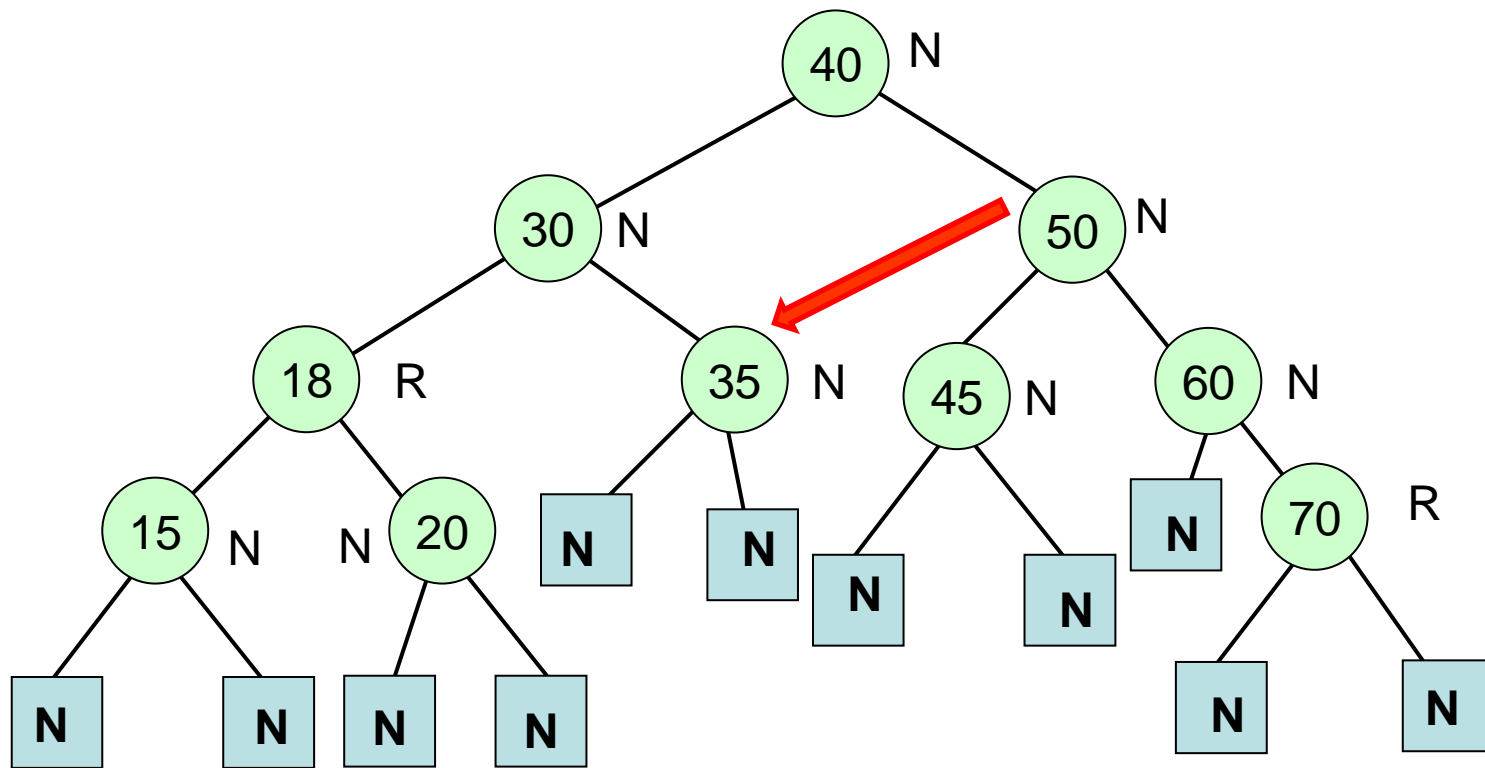
w tem filhos N

Atribuir cor N a w e cor R a v

Executar uma rotação a esquerda (direita)
com raiz v .

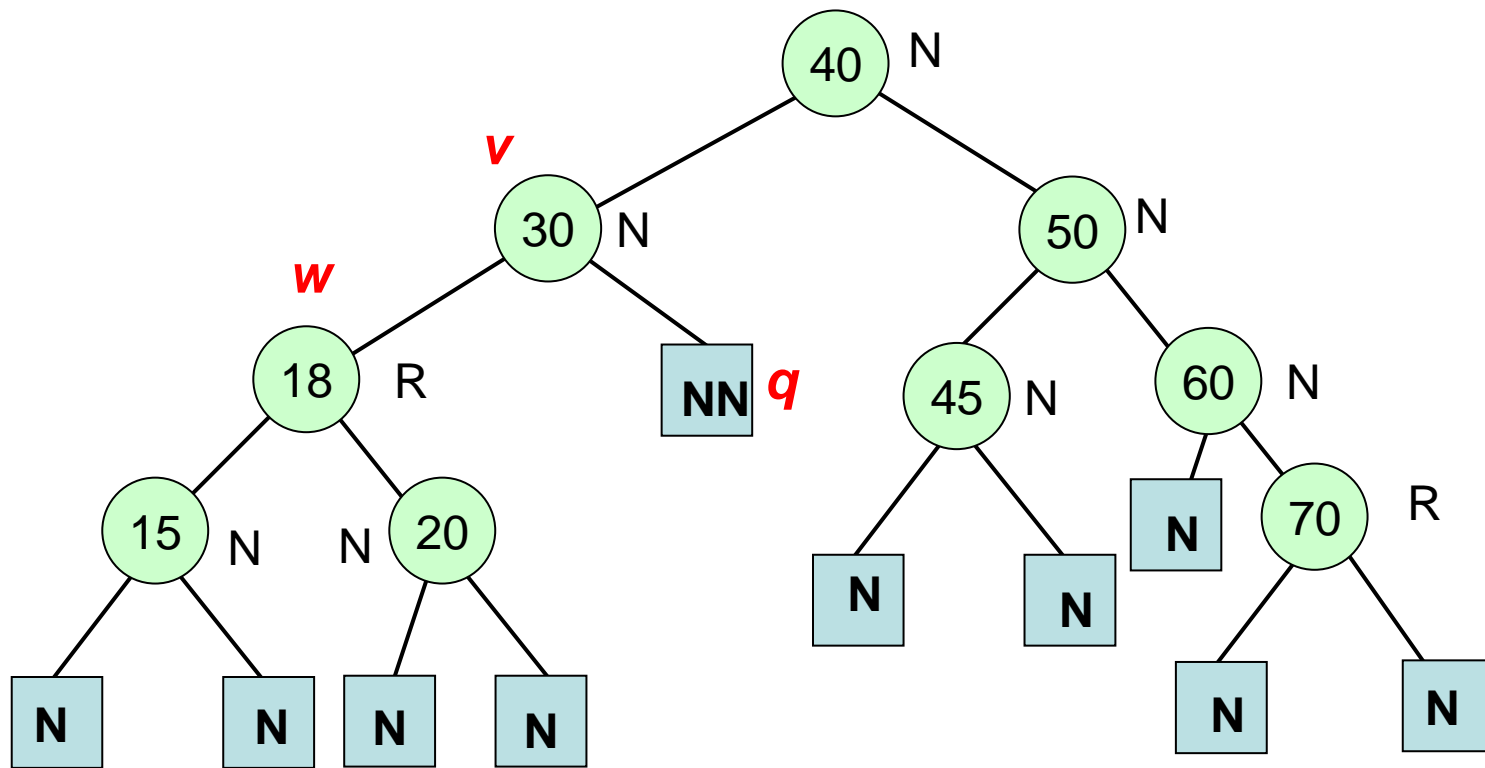
Remoção em Árvore Rubro-Negra

Exemplo Caso 1. Remoção da chave 35



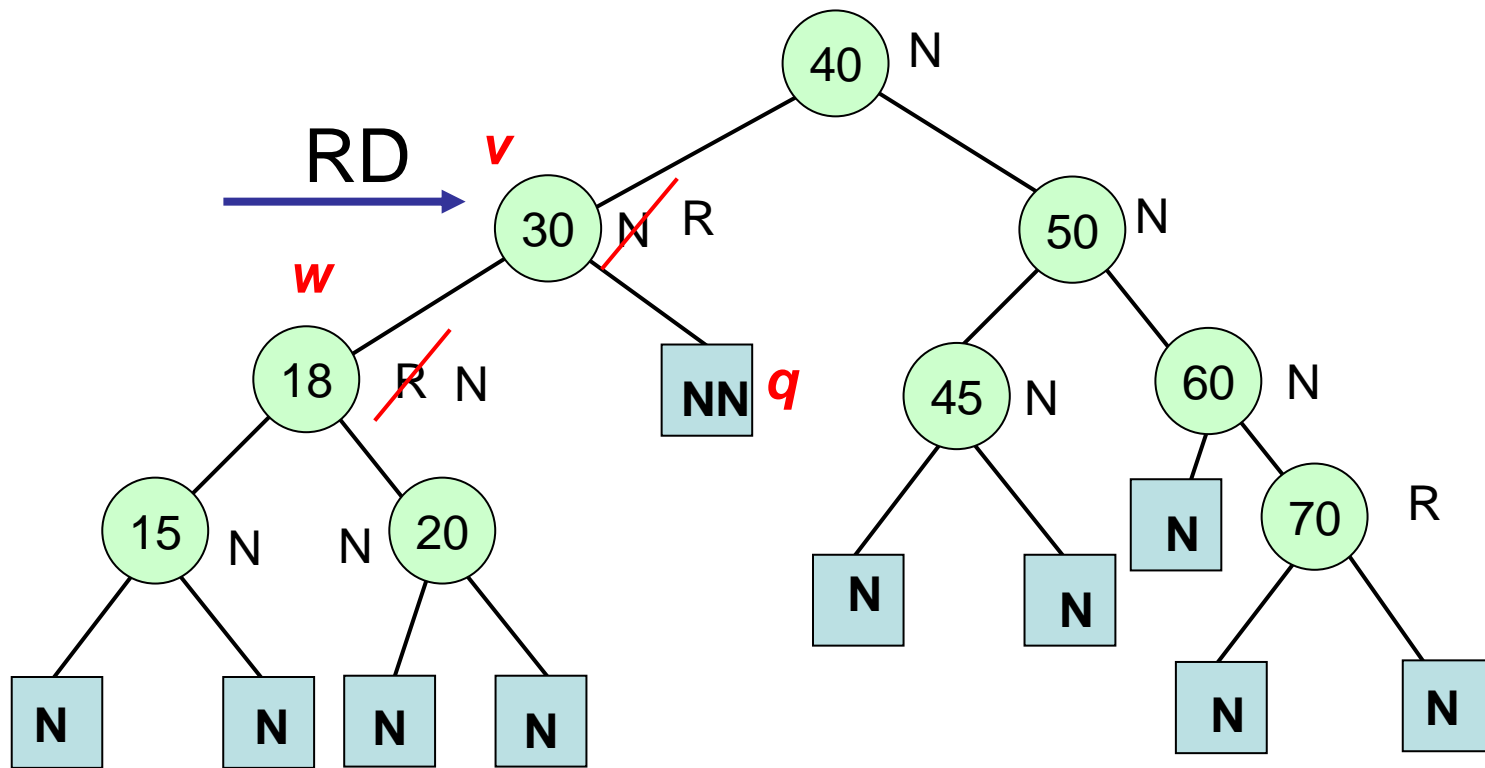
Remoção em Árvore Rubro-Negra

Exemplo Caso 1. Remoção da chave 35



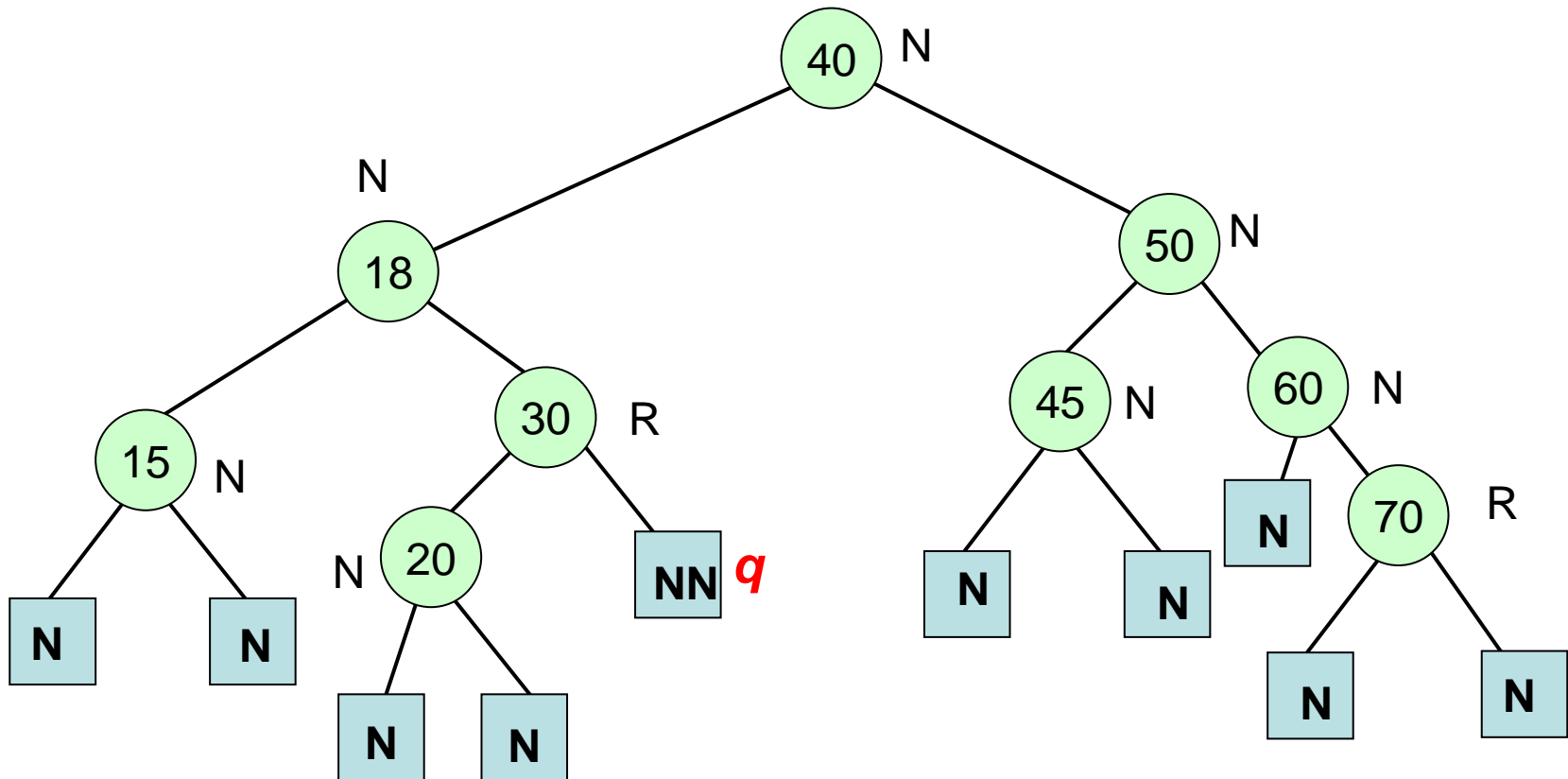
Remoção em Árvore Rubro-Negra

Exemplo Caso 1.



Remoção em Árvore Rubro-Negra

Exemplo Caso 1.



Remoção em Árvore Rubro-Negra

Caso 2. w é N

Caso 2.1. Os filhos de w são N.

Tira-se um **N** de q e de w , deixando q com um N e w com cor R.

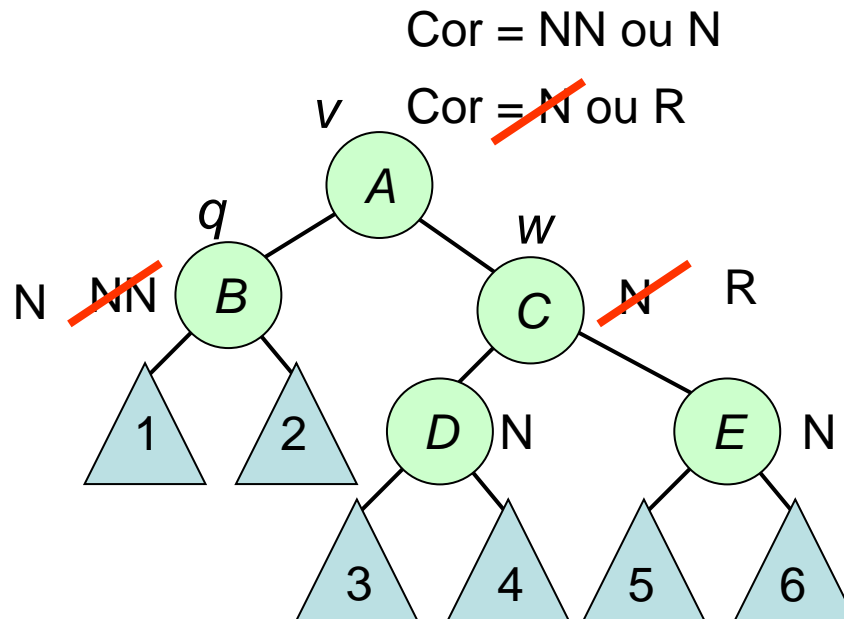
Atribui-se o outro N a v , pai de q e w .

Faz q receber v e continua.

OBS. Se o algoritmo veio do caso 1, então a cor do pai de q e w é R. Portanto, sua cor é trocada para N e o algoritmo termina.

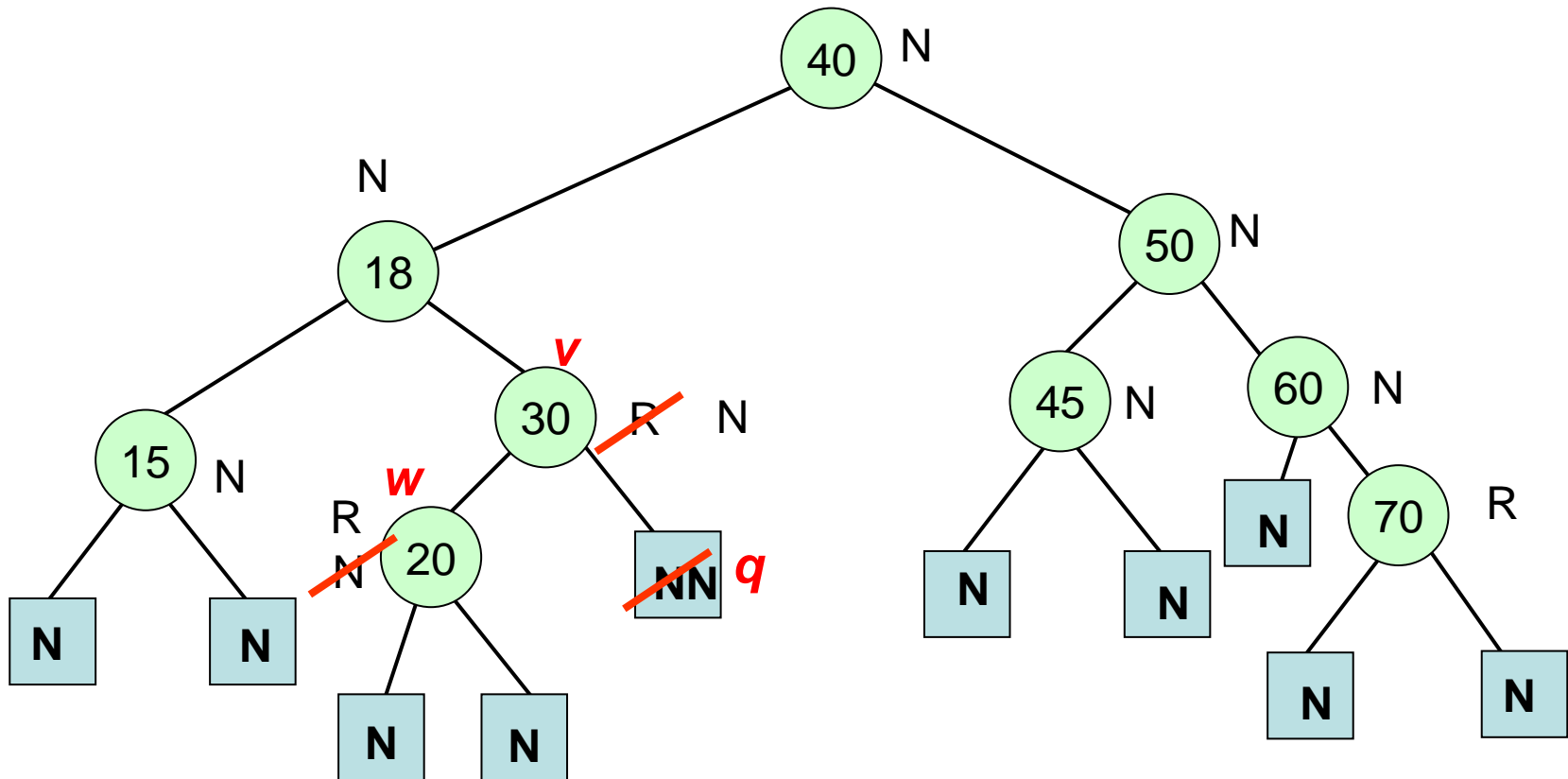
Remoção em Árvore Rubro-Negra

Caso 2.1



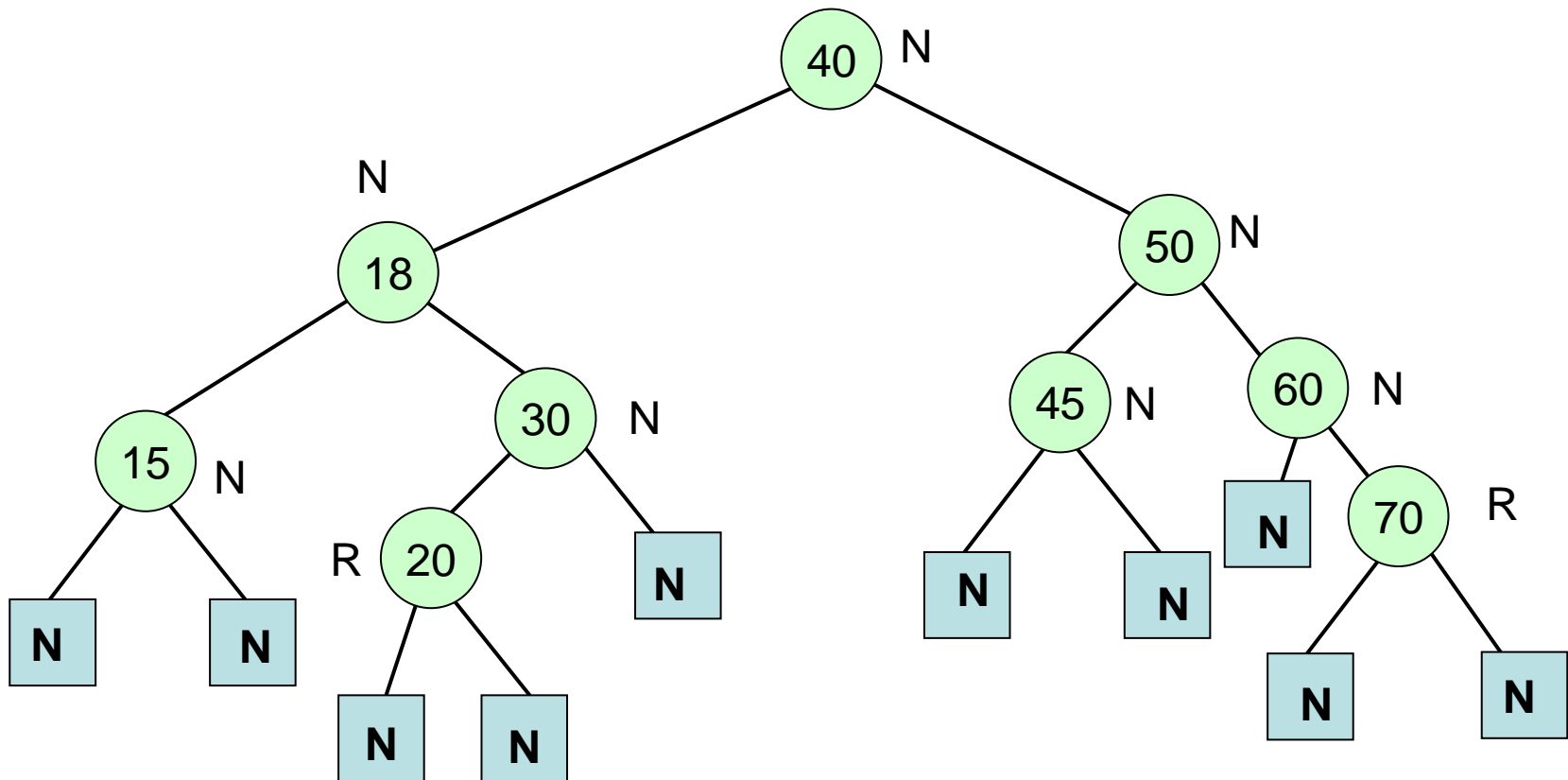
Remoção em Árvore Rubro-Negra

Exemplo Caso 2.1.



Remoção em Árvore Rubro-Negra

Exemplo Caso 2.1. Como veio do caso 1, FIM.



Remoção em Árvore Rubro-Negra

Caso 2. w é N

Caso 2.2. O filho esquerdo de w é R e o filho direito é N

Trocar a cor de w com seu filho esquerdo.

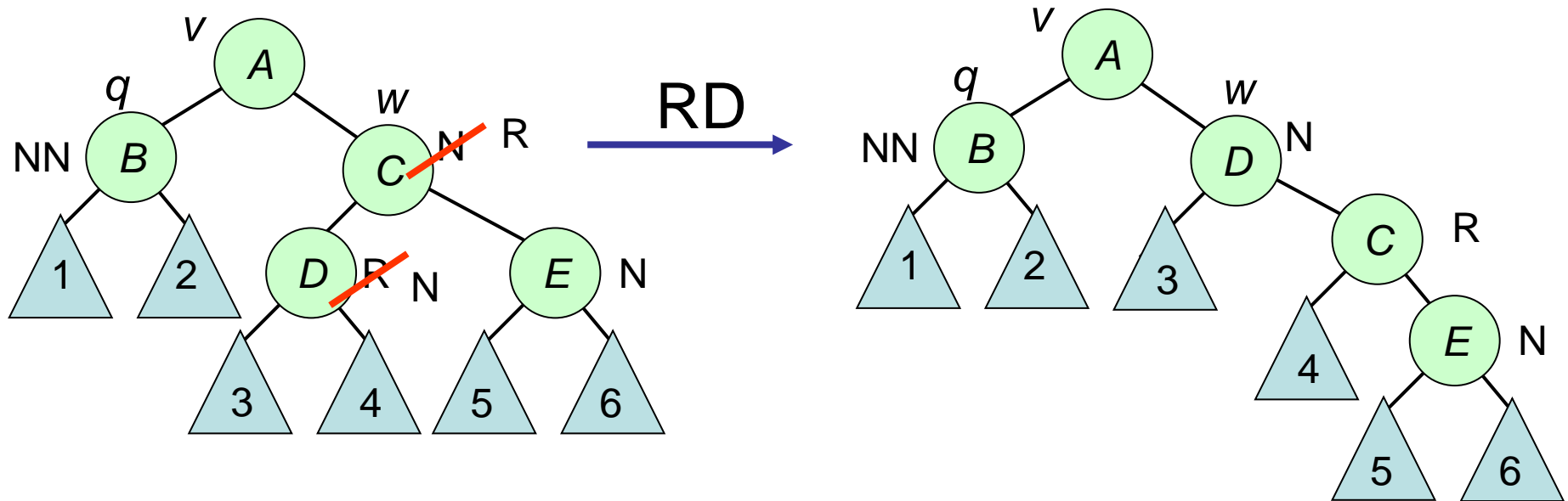
Fazer uma rotação direita com raiz w .

O novo irmão de q é um nó N com um filho direito R.

O caso 2.2 se transforma no caso 2.3

Remoção em Árvore Rubro-Negra

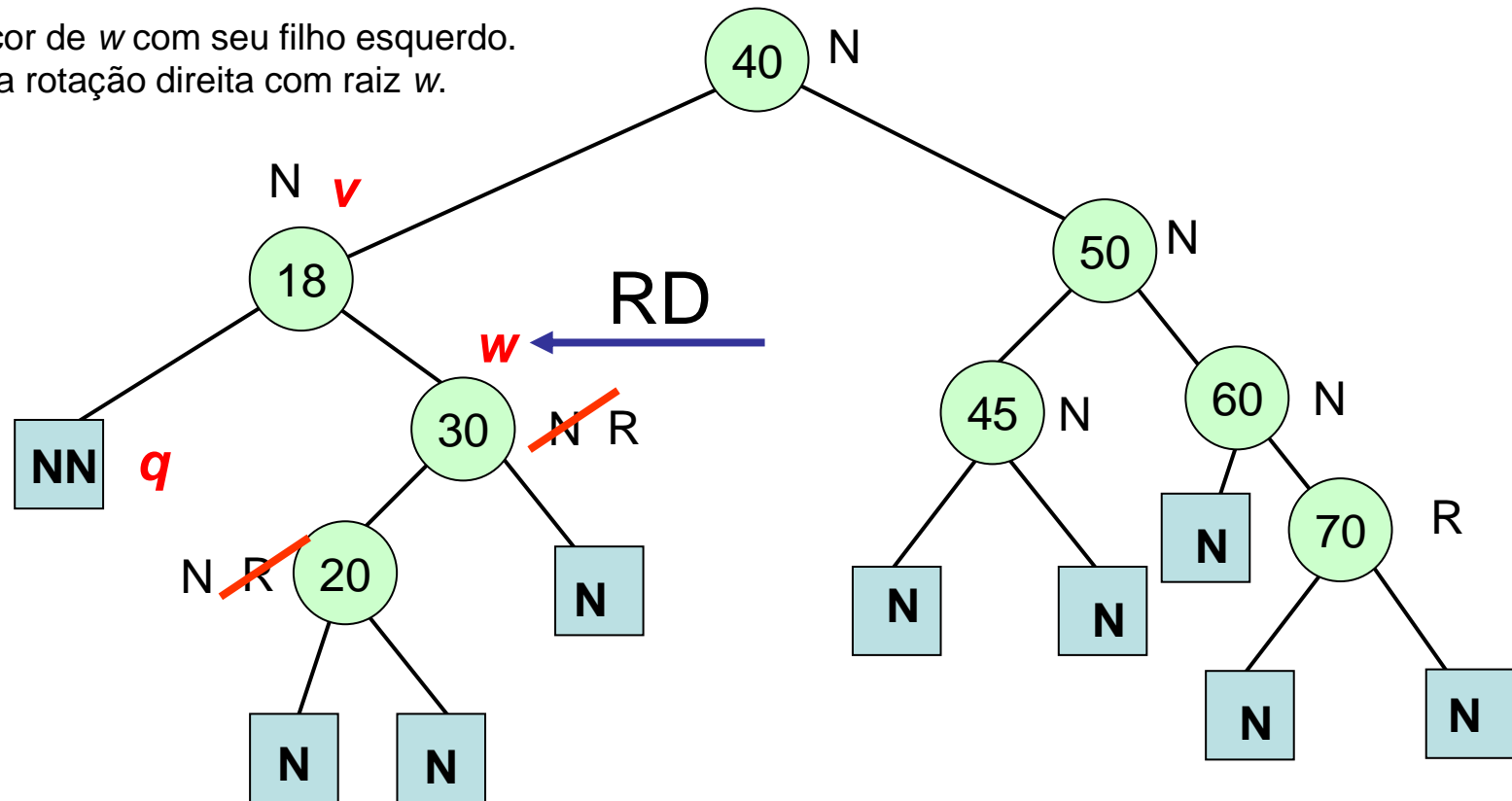
Caso 2.2



Remoção em Árvore Rubro-Negra

Exemplo Caso 2.2. Após remoção do 15

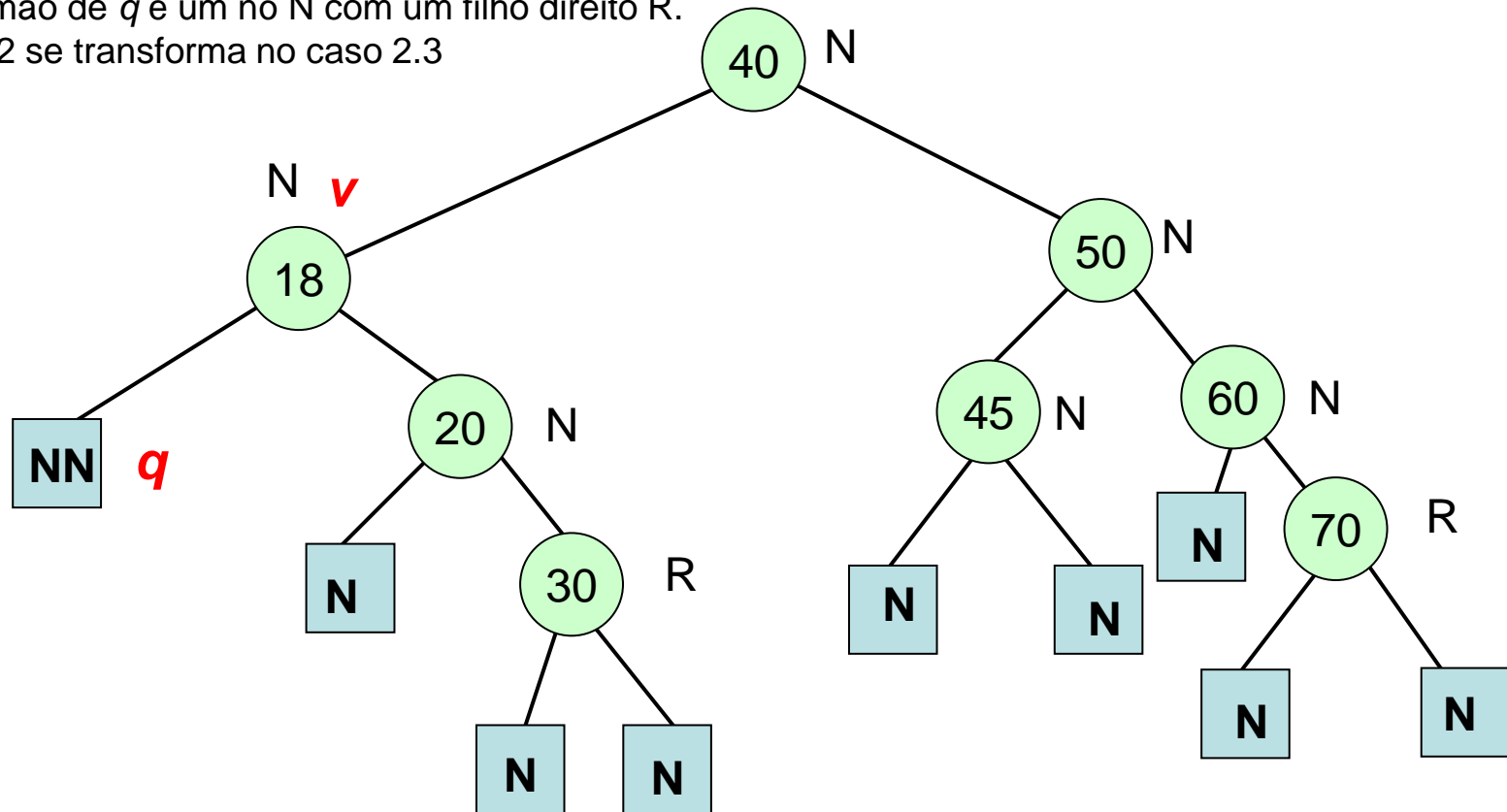
Trocar a cor de w com seu filho esquerdo.
Fazer uma rotação direita com raiz w .



Remoção em Árvore Rubro-Negra

Exemplo Caso 2.2. Prosseguir para caso 2.3

O novo irmão de q é um nó N com um filho direito R.
O caso 2.2 se transforma no caso 2.3



Remoção em Árvore Rubro-Negra

Caso 2. w é N

Caso 2.3. O filho direito de w é R

Atribuir cor de v a w .

Cor de v recebe N

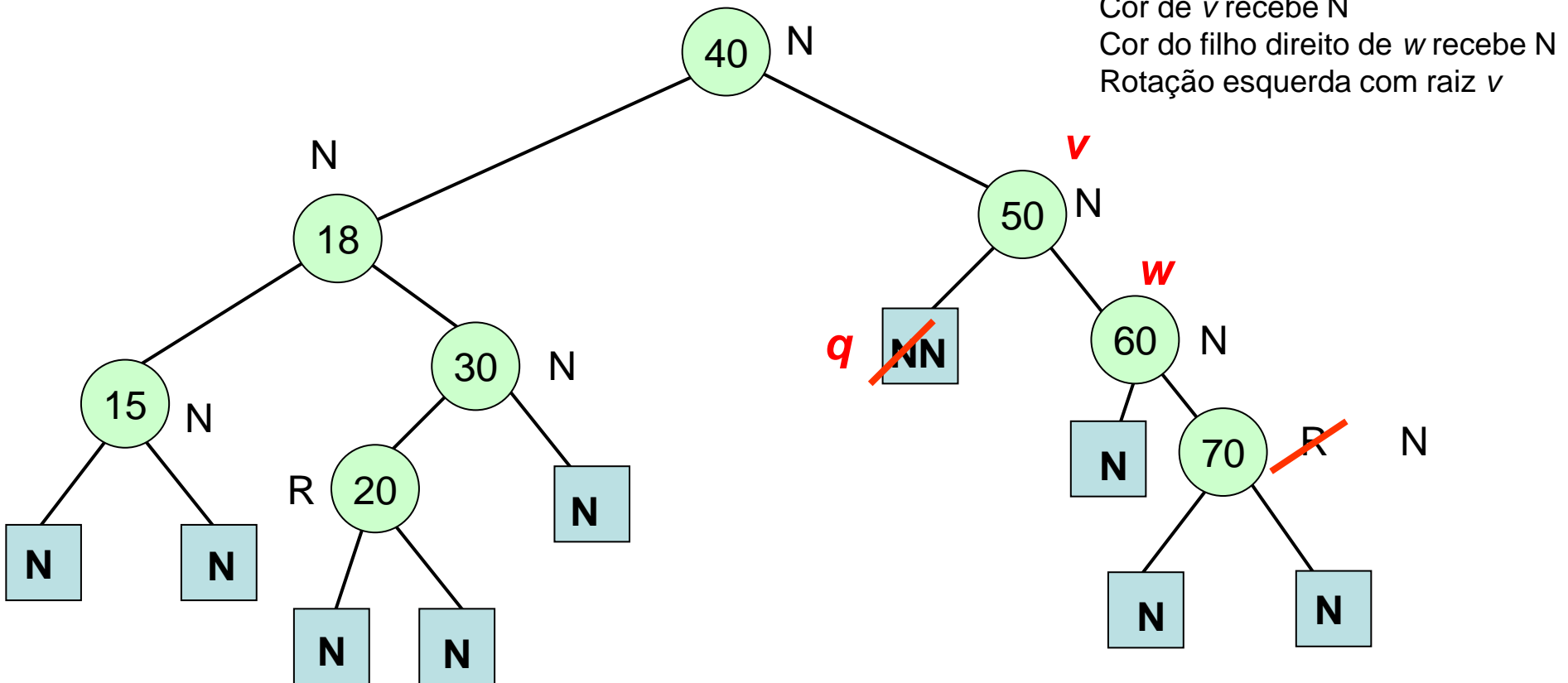
Cor do filho direito de w recebe N

Rotação esquerda com raiz v

q recebe raiz da árvore.

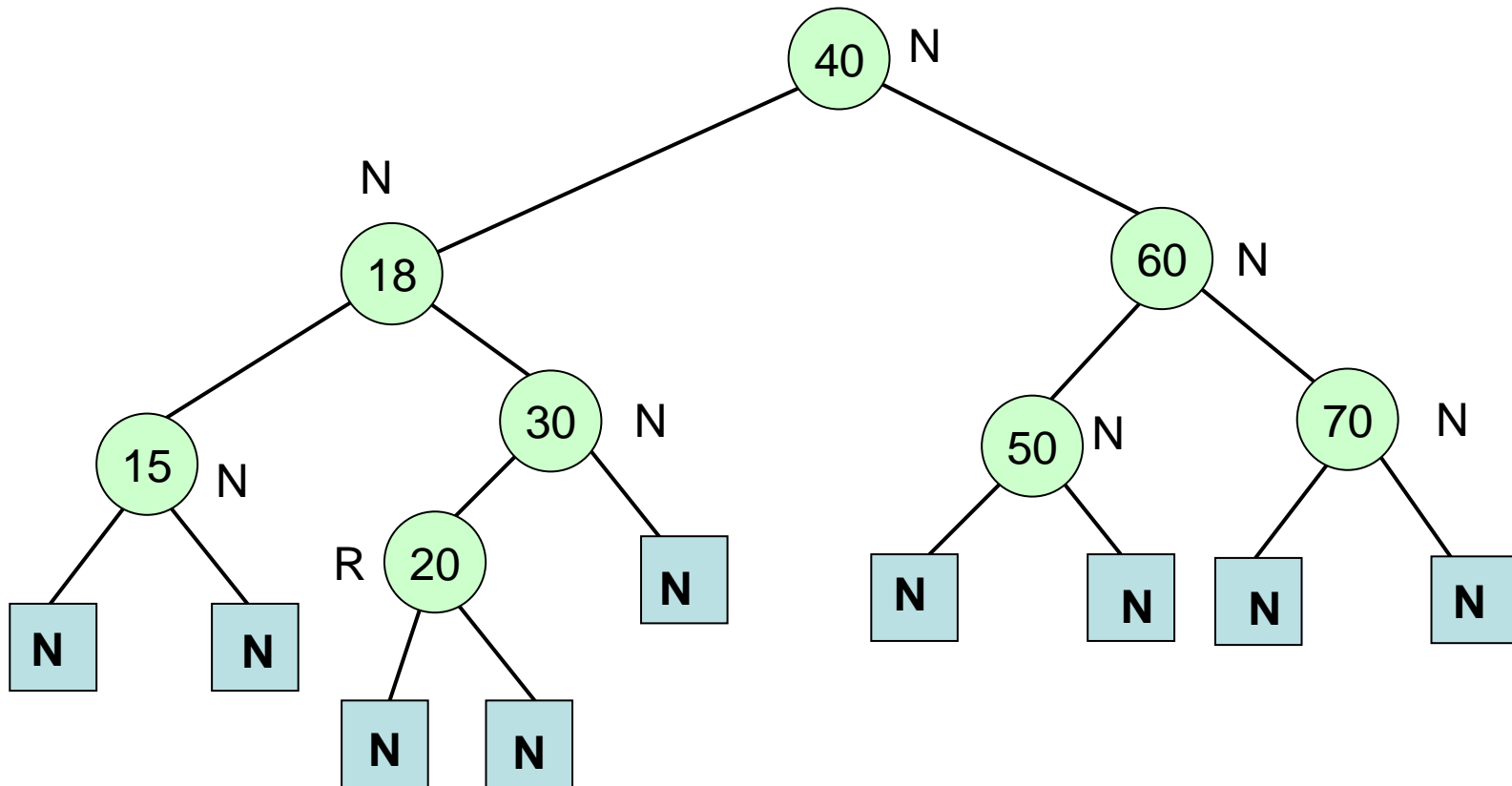
Remoção em Árvore Rubro-Negra

Exemplo Caso 2.3. Após remoção do 45



Remoção em Árvore Rubro-Negra

Exemplo Caso 2.3. FIM



Exercícios em Árvore Rubro-Negra

1. Escreva o algoritmo de remoção em árvore RN.