

MAT282 — Laboratorio de Modelación

Optimización y visualización de la planificación óptima de
una red eléctrica de tres nodos a lo largo de un día

Profesor: Julio Deride.
Especialista: Nicolás Hernández.
Alumnos: Vicente Moreno,
Martina Blanco.



Índice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción al problema | 3 |
| 2 | Teoría matemática del problema | 4 |
| 2.1 | Definición matemática del problema | 4 |
| 2.2 | El problema en contexto | 5 |
| 2.3 | Simplificaciones a considerar en el modelo | 6 |
| 3 | Análisis del problema simplificado | 7 |
| 3.1 | Forma de las soluciones (parte 1) | 7 |
| 3.2 | Simetría de las soluciones | 8 |
| 3.3 | Forma de las soluciones (parte 2) | 9 |
| 3.4 | Forma de las soluciones (parte 3) | 10 |
| 4 | Modelamiento del problema | 12 |
| 4.1 | Resolución del problema mediante un algoritmo | 12 |
| 4.2 | Modelamiento de la red eléctrica de Chile a lo largo de un día | 12 |
| 5 | Resultados del Modelo | 14 |
| 5.1 | Resultados | 14 |
| 5.2 | Análisis de los gráficos | 15 |
| 5.2.1 | Discusión sobre las formas de la solución | 15 |
| 5.2.2 | Planificación de la red eléctrica en el transcurso de un día | 16 |
| 6 | Conclusiones y trabajo futuro | 17 |
| 7 | Metodología de trabajo | 19 |
| 8 | Anexo | 20 |
| 9 | Bibliografía | 20 |

1 Introducción al problema

En la sociedad actual, una problemática que tiene que resolver cada país, ciudad o pueblo es la forma de obtener energía eléctrica de la manera más económica pero sustentable posible. Cada una de estas ubicaciones tiene su propia producción eléctrica y demandas que satisfacer a lo largo de un día. Además, estas ubicaciones pueden interactuar entre sí en una red eléctrica, enviando y/o recibiendo flujo eléctrico. Como en cada zona hay distintas demandas, producciones internas, costo de producción de energía eléctrica y hay pérdidas asociadas al transmitir energía, es complicado coordinar todas las ubicaciones para minimizar el costo total de la red eléctrica completa. Este trabajo resuelve esta problemática en una red eléctrica reducida a tres ubicaciones, que tienen su propia producción eléctrica y demandas que satisfacer, inspirada en la red eléctrica de Chile.

El objetivo principal de este trabajo es modelar la red eléctrica chilena a lo largo de un día, para obtener una planificación a realizar para satisfacer las demandas al menor costo posible. Para esto, se consideraron como los tres agentes principales en la red eléctrica chilena el Norte, Centro y Sur de Chile, donde cada una de estas zonas se le asignaron producciones y demandas de energía eléctrica basados en datos reales. Un factor considerado en este trabajo son las diversas tecnologías productoras de energía presentes en cada una de estas zonas. Además, se diferenciaron las tecnologías presentes en cada zona de acuerdo al recurso medioambiental que utilizan para generar energía eléctrica, donde distinguimos las tecnologías solares, en base de carbón y en base de gas.

Para lograr este objetivo, se desarrolló un código en Python que resuelve este problema y entrega, mediante gráficos y datos, información relevante para la planificación óptima de la red durante el día. Este código está basado en un algoritmo que fue modelado matemáticamente, y demostrado a ser un algoritmo muy rápido que encuentra una solución óptima de este problema. Para poder aplicar este modelo a este algoritmo, se asumió linealidad en trozos de las funciones de costo y de las pérdidas en cada flujo. Además, se modelaron diversos factores basados en datos públicos de la red eléctrica chilena, tales como: los costos de producir energía, las tecnologías productoras de energía, las pérdidas sujetas a cada flujo, y las demandas y capacidad de producción en cada zona.

Con este código y modelo, se realizó una simulación de la red eléctrica chilena a lo largo de un día, resolviendo la problemática cada 5 minutos desde las 0:00 hasta las 23:55. Los resultados del modelamiento se acercan al comportamiento de la vida real de esta red, como los flujos principales utilizados y las zonas con mayor tendencia a recibir y/o enviar energía. Además, por el enfoque en implementar el algoritmo previamente mencionado, el programa logra construir la planificación a lo largo del día y entregar datos numéricos casi instantáneamente.

La motivación para el desarrollo de este trabajo es la visualización de la información sobre la producción y la demanda de la energía eléctrica, y el análisis que es posible extraer de las soluciones gráficas de este problema. Además, aunque este trabajo está centrado en analizar la red eléctrica chilena, es aplicable para cualquier red eléctrica de tres nodos. El código en Python creado en este trabajo considera la posibilidad de ser aplicado en otros contextos, y trata de facilitar el uso de modelos distintos al considerado.

Comparación con la literatura: En la tesis *Estudio de Problemas de Optimización y Equilibrio sobre una Red de Producción Eléctrica*, se estudia la red eléctrica que se plantea en este trabajo y se plantea el algoritmo ocupado en este proyecto, también basándose en la red eléctrica chilena.

Además, la tesis profundiza en variantes del problema de tres nodos, añadiendo nodos satelitales a los tres nodos principales, también describiendo un algoritmo de resolución general para estos problemas.

Los datos para modelar las demandas en cada zona, el aporte de cada tecnología en cada zona y las funciones de costo están basadas en un ejemplo explícito de la red eléctrica chilena del artículo *Pollution Regulation for Electricity Generators in a Transmission Network*, donde se estudia el problema de la red eléctrica como un juego estocástico diferencial de Stackelberg en tiempo continuo.

2 Teoría matemática del problema

2.1 Definición matemática del problema

Para poder definir el problema de producción en una red eléctrica, se necesita un conjunto finito no vacío que va a representar las ubicaciones que necesitan ser abastecidas con energía. Este conjunto se puede representar como nodos en un grafo dirigido, y lo llamaremos I . Además, se necesita un conjunto que liste todas las posibles direcciones de envío entre nodos. Este conjunto se puede representar en un grafo como todos los arcos dirigidos entre nodos de I , que llamaremos E .

A cada nodo $i \in I$ se le puede asignar un límite de producción de energía y una demanda a satisfacer, que se denominarán Q_i y D_i respectivamente. Además, es útil considerar la colección de todos los arcos entrantes y todos los arcos salientes del nodo i , que denominarán E_i y S_i respectivamente.

Las variables que se quieren obtener para resolver este problema son la producción en cada nodo $i \in I$, y los flujos de energía que transmitir entre nodos para cada conexión $j \in E$. Estas variables serán q_i y ϕ_j respectivamente, y la agrupación de estos se denotará (q, ϕ) . En el grafo, se puede asociar directamente a q_i con su nodo respectivo y a ϕ_j a su arco respectivo.

Finalmente, se necesitan funciones que representen el costo de producción y pérdida de envío. Primero, para cada nodo $i \in I$ se define como el **costo asociado a la producción de energía en un nodo** como $c_i : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Esta función recibe una producción q_i y entrega un valor monetario asociado. Además, se define la **función de pérdida** como $r : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, que recibe un flujo ϕ_j y devuelve un valor menor a este, representando la energía perdida en el flujo.

Con estas definiciones, es posible construir el problema de optimización de producción en una red eléctrica al menor costo posible. Como función objetivo se tendrá la minimización de la suma de los costos asociados a la producción, para obtener el menor costo posible a lo largo de todas las zonas. Para las restricciones de este problema, hay que asegurar que las demandas sean satisfechas en cada nodo y que las variables estén en su rango adecuado. Las variables de producción en cada nodo q_i no deben sobrepasar el límite de producción de energía Q_i . Además, las variables de producción q_i y las variables de flujo ϕ_j deben ser no negativas, dada su naturaleza.

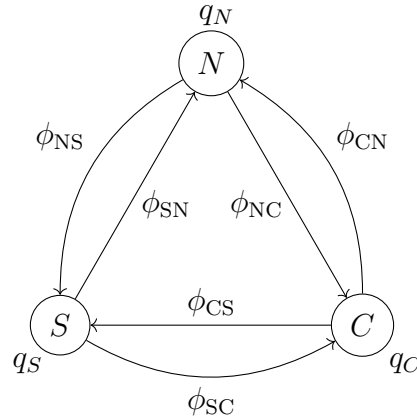
Para que las demandas sean satisfechas, hay que asegurarse que la energía neta en cada nodo resulte igual a su demanda. La energía neta que tiene cada nodo estará dada por su producción interna, sumado con todos los flujos entrantes (menos la energía perdida en el flujo), restado con los flujos salientes de energía. Así, el problema general de producción en una red eléctrica se puede representar como el siguiente sistema de optimización:

$$\begin{aligned}
& \min_{(q, \phi)} \sum_{i \in I} c_i(q_i) \\
& \text{s.a.} \quad q_i + \sum_{e \in E_i} (\phi_e - r(\phi_e)) - \sum_{s \in S_i} \phi_s = D_i, \quad \forall i \in I \\
& \quad q_i \in [0, Q_i], \quad \forall i \in I \\
& \quad \phi_j \geq 0, \quad \forall j \in E
\end{aligned}$$

2.2 El problema en contexto

En el caso de Chile, se pueden distinguir tres zonas principales productoras de energía. Estas zonas son el Norte, Centro y Sur de Chile, y cada una de estas zonas tiene distintas capacidades de producción y distintas demandas diarias. Una labor importante del ISO es manejar la producción y flujo de energías entre estas tres zonas diariamente, asegurándose de satisfacer las demandas de cada zona al menor costo posible.

Este problema es el mismo teóricamente al problema de producción en una red eléctrica, si se considera que la red eléctrica solamente tiene tres nodos. Así, se puede crear un grafo con nodos representando estas tres zonas, llamados N, S, C (representando el Norte, Sur y Centro de Chile respectivamente). Este problema de producción se puede visualizar en el siguiente grafo:



Grafo 1: Forma simplificada del problema de producción con 3 nodos.

Es importante notar que, en Chile, hay principalmente tres tipos de tecnologías productoras de energía, que están presentes en cada zona mencionada anteriormente. Estas las podemos clasificar con respecto a la forma en la que extraen energía del medioambiente, y son respectivamente las energías: solares, en base de carbón y en base de gas. Para simplificar el lenguaje, en este trabajo se va a hablar sobre cada una de estas tecnologías como energía: solar, a carbón y a gas.

En general, la energía solar es más económica que la energía a carbón, y la energía a carbón es más económica que la energía a gas. Además, una vez instalada la tecnología solar, el costo de producir este tipo de energía es básicamente nulo.

Un factor importante que considerar es que la energía solar no emite gases contaminantes al medioambiente, mientras que la energía a carbón y a gas emiten. La contaminación emitida tiene

un costo asociado medioambiental, proporcional al volumen de estos gases. La energía a gas tiende a emitir menos gases contaminantes que la energía a carbón, pero el costo medioambiental no es suficientemente grande como para volver la energía a gas más económica que la energía a carbón.

Estas tecnologías juegan un rol principal en la producción de energía en cada zona. Dado que es más eficiente económicamente usar las tecnologías con menor costo primero, siempre se termina agotando totalmente la energía solar, luego la energía a carbón y finalmente la energía a gas (mientras sea necesario producir esta energía). Esto resulta bastante útil, puesto que ayuda a comprender mejor la forma que tendría la función asociada al costo de producción c_i , $\forall i \in I$.

2.3 Simplificaciones a considerar en el modelo

Para poder manejar este problema, se asumió que las funciones de costo de producción en cada nodo son estrictamente crecientes. Esto resulta intuitivo, puesto que uno esperaría que producir más energía implicaría un mayor costo. Además, se consideró que la función de pérdida al enviar energía de un nodo a otro es una función lineal, que se le puede asociar un factor de pérdida $r \in [0, 1]$. Este factor representaría la fracción de la energía total que se pierde al transmitir energía de una zona a otra, para todo posible flujo direccional en el grafo.

Con estas consideraciones, se puede aplicar el modelo teórico del problema de producción en una red eléctrica a este contexto con estas simplificaciones. Así, el sistema de optimización de la red chilena puede modelarse con el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{(q, \phi)} \quad & c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C) \\ \text{s.a.} \quad & q_N + (1 - r)(\phi_{SN} + \phi_{CN}) - (\phi_{NS} + \phi_{NC}) = D_N, \\ & q_S + (1 - r)(\phi_{NS} + \phi_{CS}) - (\phi_{SN} + \phi_{SC}) = D_S, \\ & q_C + (1 - r)(\phi_{SC} + \phi_{NC}) - (\phi_{CS} + \phi_{CN}) = D_C, \\ & q_N \in [0, Q_N], \\ & q_S \in [0, Q_S], \\ & q_C \in [0, Q_C], \\ & \phi_{NS}, \phi_{SN}, \phi_{SC}, \phi_{CS}, \phi_{NC}, \phi_{CN} \geq 0. \end{aligned}$$

Donde las variables q_N, q_S, q_C representan la cantidad de energía a producir en cada nodo, y las variables $\phi_{NS}, \phi_{SN}, \phi_{SC}, \phi_{CS}, \phi_{NC}, \phi_{CN}$ representan la energía a enviar entre zonas para satisfacer las demandas. Notemos que este problema de optimización depende de nueve variables.

En la siguiente sección se va a analizar la forma de las soluciones de este problema de optimización, para simplificarlo. En las siguientes secciones, este trabajo menciona como “**problema P**” a este problema de optimización reducido que representa el problema de producción en la red eléctrica chilena.

3 Análisis del problema simplificado

3.1 Forma de las soluciones (parte 1)

Empezemos a analizar la forma que tienen las soluciones del problema P. Para esto, definamos conceptos que nos ayudaran a reducir el problema. Como notación, si $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, entonces para x una variable tendremos que $((x_i), i \in C) = (x_{c_1}, x_{c_2}, \dots, x_{c_n})$.

(i) **Punto factible:** Llamaremos un par ordenado (q, ϕ) un punto factible de P si:

$$q = ((q_i), i \in I) \quad \phi = ((\phi_j), j \in E)$$

y cada coordenada cumple con las restricciones del problema P.

(ii) **Solución:** Diremos que un punto factible (q, ϕ) es solución de P si minimiza la función objetivo:

$$\forall (q', \phi') \text{ punto factible, } \sum_{i \in I} c_i(q_i) \leq \sum_{i \in I} c_i(q'_i)$$

Primero, notemos que la función objetivo del problema P solamente depende de las producciones $q_i, i \in I$. Esto significa que si se encuentran dos puntos factibles de P con distintas producciones en cada nodo, se pueden “comparar” los puntos factibles viendo su valor en la función objetivo. Esto motiva la siguiente proposición:

■ **Proposición 1.** Sean (q^1, ϕ^1) y (q^2, ϕ^2) puntos factibles de P tales que $q_i^1 \leq q_i^2, \forall i \in I$. Si existe $j \in I$ tal que $q_j^1 < q_j^2$, entonces (q^2, ϕ^2) no es solución de P.

Dem: Como para todo $i \in I$ cada función c_i es estrictamente creciente, tendremos que $c_i(q_i^1) \leq c_i(q_i^2)$ y $c_j(q_j^1) < c_j(q_j^2)$. Entonces $\sum_{i \in I} c_i(q_i^1) < \sum_{i \in I} c_i(q_i^2) \implies (q^2, \phi^2)$ no es solución de P. □

Este primer criterio permite ver la forma que tienen las soluciones de P, puesto que se pueden “descartar” puntos factibles de P de ser soluciones si cumplen con ciertos patrones. Si a partir de un punto factible de P es posible construir otro cuyas producciones cumplan con la Proposición 1, entonces se sabrá que ese punto no puede ser óptimo.

Así, se puede considerar como primer patron el “**envío mútuo**”. Supongamos que en una solución factible existen dos nodos tales que se mandan flujo mutuamente, es decir, se envía y recibe flujo en cada nodo al mismo tiempo. Esto intuitivamente no es óptimo, puesto que el flujo neto que entraría en cada nodo es la resta del flujo entrante del saliente, y habrían pérdidas cuando $r > 0$. Esto se captura en la siguiente proposición.

■ **Proposición 2.** Sea (q, ϕ) un punto factible de P tal que $\exists i, j \in I, \phi_{ij}, \phi_{ji} > 0$. Entonces, (q, ϕ) no es solución de P.

Dem: Sea $\alpha > 0$ y $\delta = \alpha \min\{\phi_{ij}, \phi_{ji}\} > 0$. Definamos (q', ϕ') tal que:

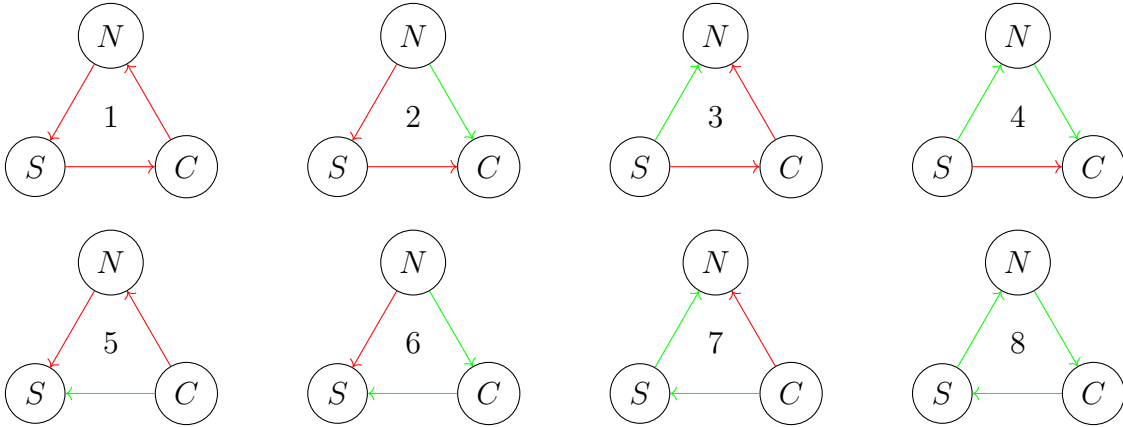
$$\begin{aligned} q'_k &= q_k & \forall k \neq i, j & & \phi'_{kl} &= \phi_{kl} & \forall (k, l) \neq (i, j), (j, i) \\ q'_i &= q_i - \delta & & & \phi'_{ij} &= \phi_{ij} - \delta \\ q'_j &= q_j - \delta & & & \phi'_{ji} &= \phi_{ji} - \delta \end{aligned}$$

Podemos escoger α lo suficientemente pequeño para que $\phi'_{ij}, \phi'_{ji} \geq 0$ y también $0 \leq q'_k \leq q_k \leq Q_k$. Notemos que para la primera restricción de P:

$$\begin{aligned} q'_i + (1-r)\phi'_{ji} - \phi'_{ij} &= q_i - \delta r + (1-r)\phi_{ji} - \phi_{ij} + \delta r = q_i + (1-r)\phi_{ji} - \phi_{ij} \\ q'_j + (1-r)\phi'_{ij} - \phi'_{ji} &= q_j - \delta r + (1-r)\phi_{ij} - \phi_{ji} + \delta r = q_j + (1-r)\phi_{ij} - \phi_{ji} \end{aligned}$$

Como $\phi'_{ij}, \phi'_{ji} \notin E_k, S_k$ para todo $k \neq i, j$, se puede verificar que (q', ϕ') es punto factible de P. Por la Proposición 1, tenemos que (q, ϕ) no es solución de P. \square

Con estos se han simplificado bastante las configuraciones de las soluciones del problema P. Toda solución de P cumplirá que entre cada par de nodos solo existe un flujo dirigido. Esto reduce efectivamente la cantidad de flujos a calcular a la mitad, y como se está estudiando el caso particular de 3 nodos, tendremos que existen 8 grafos distintos que representan las orientaciones de los flujos de las posibles soluciones. Si $I = \{N, S, C\}$, se puede visualizar esto con los siguientes grafos:

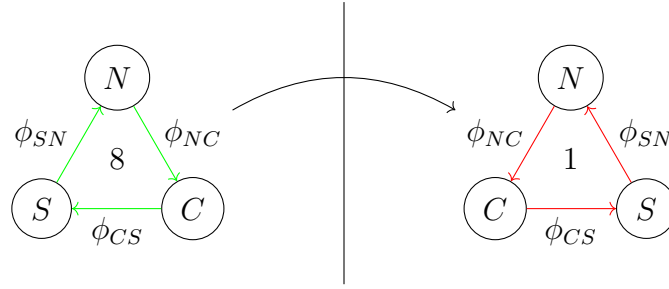


En estos grafos, representamos el flujo antihorario con rojo y el flujo horario con verde. Vamos a hablar de la similitud de estos grafos en referencia a su numero asignado, para obtener distintos sub-problemas de P que son más fáciles de analizar por separado.

3.2 Simetría de las soluciones

Notemos que los grafos 2-3-5 y 4-6-7 son similares bajo rotaciones, y los grafos 1-8 son similares bajo reflexión. Además, si el grafo 2 es reflejado bajo la línea de simetría entre N y el punto medio de S-C, obtendremos un grafo similar al grafo 6. Esto significa que los grafos 2-3-4-5-6-7 son similares entre si, y entonces, se tendrán dos tipos de grafos intrínsecamente distintos entre si.

Entonces, si se puede resolver el problema 1, mediante un algoritmo ALG_1 que recibe los parametros de los conjuntos I_1, E_1 en el orden $ALG_1(N, S, C, \phi_{NS}, \phi_{SC}, \phi_{CN})$, se podrá resolver el problema 8 con ALG_1 , puesto que son grafos similares. Notemos que, bajo una reflexión:



Entonces, $\text{ALG}_1(N, C, S, \phi_{NC}, \phi_{CS}, \phi_{SN})$ resuelve al grafo 8. Similarmente, se puede definir un segundo algoritmo ALG_2 , que resuelve al grafo 2 con una permutación de los parametros, en el orden $\text{ALG}_2(N, S, C, \phi_{NS}, \phi_{SC}, \phi_{NC})$. Por lo mencionado anteriormente, ALG_2 también resuelve a los grafos 3-4-5-6-7 dada su similaridad con el grafo 2.

Así, se puede resolver el problema P mediante los algoritmos ALG_1 y ALG_2 , y llamaremos a sus respectivos sub-problemas P_1 y P_2 respectivamente. Si hacemos este mismo proceso con todos los grafos, tendremos la siguiente tabla que muestra la relación entre cada grafo y su algoritmo respectivo para resolver el problema P:

| | Algoritmo |
|---------|--|
| Grafo 1 | $\text{ALG}_1(N, S, C, \phi_{NS}, \phi_{SC}, \phi_{CN})$ |
| Grafo 2 | $\text{ALG}_2(N, S, C, \phi_{NS}, \phi_{SC}, \phi_{NC})$ |
| Grafo 3 | $\text{ALG}_2(S, C, N, \phi_{SC}, \phi_{NC}, \phi_{NS})$ |
| Grafo 4 | $\text{ALG}_2(S, N, C, \phi_{SN}, \phi_{NC}, \phi_{SC})$ |
| Grafo 5 | $\text{ALG}_2(C, N, S, \phi_{NC}, \phi_{NS}, \phi_{SC})$ |
| Grafo 6 | $\text{ALG}_2(N, C, S, \phi_{NC}, \phi_{CS}, \phi_{NS})$ |
| Grafo 7 | $\text{ALG}_2(C, S, N, \phi_{CS}, \phi_{SN}, \phi_{CM})$ |
| Grafo 8 | $\text{ALG}_1(N, C, S, \phi_{NC}, \phi_{CS}, \phi_{SN})$ |

Como ahora se tienen dos sub-problemas P_1 y P_2 que en conjunto forman al problema P, se podrán analizar cada uno de ellos de forma separada, considerando las definiciones de ALG_1 y ALG_2 mencionadas anteriormente. Las formas explícitas de P_1 y P_2 se pueden ver en las ecuaciones 3.1 y 3.2 respectivamente en el anexo de este informe.

3.3 Forma de las soluciones (parte 2)

Para el subproblema P_1 es claro ver el fenómeno del “**flujo circular**”. En esta situación, no se tiene el fenómeno del envío mútuo directamente. Eso si, al utilizar todos los flujos, se tendría que cada nodo entrega y recibe energía en una cadena, similar al envío mutuo. Esto intuitivamente tampoco es óptimo, puesto que siempre habrá energía neta que fluye entre nodos y no se utiliza en ellos. Esto se captura con la siguiente proposición:

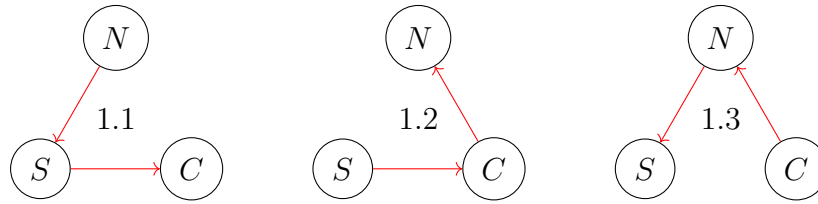
■ **Proposición 3.** Sea (q, ϕ) un punto factible de P_1 tal que $\forall e \in E, \phi_e > 0$. Entonces, (q, ϕ) no es solución de P.

Dem: Sea $\alpha > 0$ y $\delta = \alpha \min\{\phi_{NS}, \phi_{SC}, \phi_{CN}\} > 0$. Definamos (q', ϕ') tal que:

$$\begin{aligned} q'_N &= q_N - \delta r & q'_S &= q_S - \delta r & q'_C &= q_C - \delta r \\ \phi'_{NS} &= \phi_{NS} - \delta & \phi'_{SN} &= \phi_{SN} - \delta & \phi'_{CN} &= \phi_{CN} - \delta \end{aligned}$$

Podemos escoger α suficientemente pequeño para que cumpla con las restricciones de P_1 . Así, (q', ϕ') es un punto factible de P_1 , y por la Proposición 1, tendremos que (q, ϕ) no es solución de P_1 . \square

Esta proposición es muy importante, puesto que implica que toda solución de P_1 debe tener un flujo nulo. Esto significa que, para el grafo 1, una solución de P_1 tiene la forma:



Podemos notar que cada uno de los grafos 1.1-1.2-1.3 son similares bajo rotaciones. Además, el grafo 1.1 es idéntico al grafo 2, si el flujo $\phi_{NC} = 0$. Esto significa que, todo grafo de una solución de P_1 calza con un grafo de P_2 .

Como los problemas P_1 y P_2 tienen la misma función a optimizar y las restricciones son las mismas bajo la condición que un flujo sea igual a 0, P_1 es un subproblema de P_2 . Esto significa que ALG_1 está contenido en ALG_2 , y por tanto, solo necesitamos P_2 para resolver P. Finalmente, como el problema P es la unión de P_1 y P_2 , el problema P_2 es equivalente al problema P. Por lo tanto, ALG_2 resuelve al problema P.

Este análisis garantiza que si se tiene un algoritmo que resuelva el problema reducido P_2 , se puede resolver el problema P en su totalidad con el mismo algoritmo, bajo similitudes y reflexiones de los nodos y flujos.

3.4 Forma de las soluciones (parte 3)

En el problema $P \equiv P_2$, ocurre un fenómeno que se denominará “**doble envío**”. Para explicar este fenómeno, se pueden ver forma de los grafos de las soluciones del problema P_2 .

Notemos el caso particular del Sur. Si el Sur no puede cubrir su propia demanda, es intuitivo que no debería enviar energía al Centro y debería recibir energía del Norte. Así mismo, si el Sur puede cubrir su propia demanda, puede enviar energía al centro y no necesitaría recibir energía del Norte.

Esta intuición significaría que un punto factible donde se use el flujo Norte-Sur y el flujo Sur-Centro al mismo tiempo no sería óptimo. Se podría argumentar que al ocupar estos dos flujos al mismo tiempo, se envía de forma neta energía del Norte al Centro sujeto a una doble pérdida. Eso si, ese flujo neto pudo haber enviado directamente del Norte al Centro con una sola pérdida de energía. La siguiente proposición deja en evidencia esta intuición:

■ **Proposición 4.** Sea (q, ϕ) un punto factible de P_2 tal que $\phi_{NS}, \phi_{SC} > 0$. Entonces, (q, ϕ) no es solución de P.

Dem: Notemos que la primera restricción de P_2 nos dice que

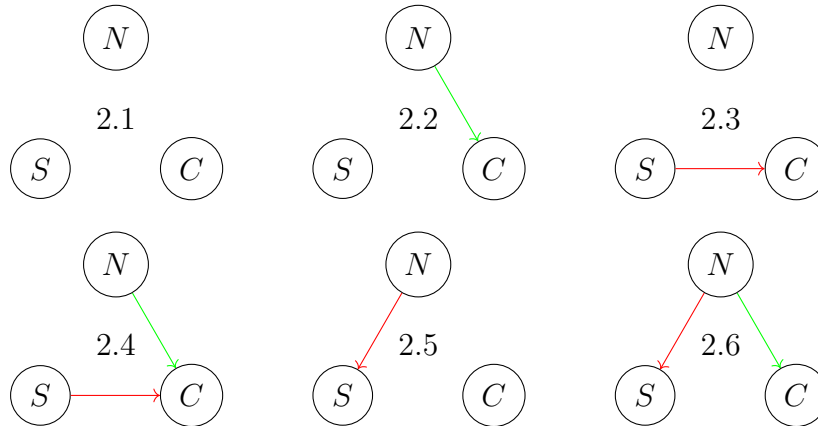
$$q_N = D_N + \phi_{NS} + \phi_{NC} \implies q_N > D_N$$

Sea $\alpha > 0$ y $\delta = \alpha \phi_{SC} > 0$. Podemos definir (q', ϕ') tal que:

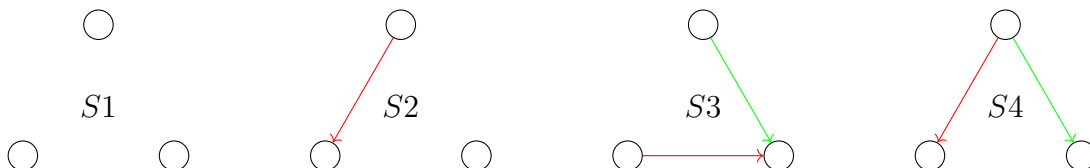
$$\begin{aligned} q'_N &= q_N - \frac{r}{1-r} \delta & q'_S &= q_S & q'_C &= q_C \\ \phi'_{NS} &= \phi_{NS} - \frac{1}{1-r} \delta & \phi'_{SC} &= \phi_{SC} - \delta & \phi'_{NC} &= \phi_{NC} + \delta \end{aligned}$$

con α suficientemente pequeño para que cumpla con las restricciones 4-5-6-7 de P_2 . Se puede verificar que (q', ϕ') es solución factible, y por la Proposición 1, (q, ϕ) no es solución. \square

Así, se tendrá que cualquier solución para P_2 , y por tanto de P, puede tener a lo mas dos flujos activos. Además, por la condición sobre los flujos Norte-Sur y Sur-Centro, las únicas posibles grafos para las soluciones de P serían:



Notemos que los grafos 2.1, 2.2 y 2.5 son similares bajo reflexiones y rotaciones. Esto dejaría solamente cuatro grafos intrínsecamente distintos los unos de los otros, y todas estas orientaciones serían posibles orientaciones de flujos de soluciones para P. Así, se tendrá que cualquier solución de P necesariamente debe tener la orientación de flujo (similar bajo rotaciones y reflexiones) a alguno de los siguientes 4 grafos:



4 Modelamiento del problema

4.1 Resolución del problema mediante un algoritmo

Previamente se habló de una forma de resolver el problema P , que involucraba resolver permutaciones de un subproblema que llamamos P_2 , y así se encontraba la solución óptima del problema P . Afortunadamente, se demostró y explicitó este mismo algoritmo en una tesis relacionada con este problema.

En la Tesis de Mariano Vazquez, sobre el Estudio de Problemas de Optimización y Equilibrio sobre una Red de Producción Eléctrica, se estudia el problema P que se estudió en este proyecto. Se describe de forma explícita, en el capítulo 2 de la tesis, un algoritmo para resolver el problema P de forma rápida. Este algoritmo garantiza obtener una solución obteniendo puntos factibles del subproblema P_2 en distintas configuraciones, para posteriormente comparar los puntos factibles y encontrar la solución con menor valor de función objetivo.

En este proyecto se consideró este algoritmo y se implementó en el lenguaje de programación Python, para resolver el caso particular del problema de producción de la red eléctrica de Chile. Este código fue programado con la intención de crear una interpolación de datos y simular este problema a lo largo de un día. En cada instante de tiempo considerado en la interpolación, resuelve el problema mediante el algoritmo previamente mencionado. Después, recopila la información y entrega datos y gráficos relevantes al problema, como las producciones, los flujos y valores de la función objetivo. Dado que el algoritmo que se consideró está caracterizado por su rapidez de encontrar la solución óptima, es posible obtener resultados de la planificación diaria casi instantáneamente, que no se obtendrían si se usara un solver típico de programación lineal para resolver toda la interpolación.

El código fue confeccionado tal que uno puede ingresar una interpolación de datos y escalar la parametrización para que se ajuste a un intervalo de tiempo arbitrario. Además, es posible ajustar la interpolación tal que tome un valor promedio que se escoja. Así, se puede definir una interpolación y el programa la escala para que tenga sentido dentro del contexto que queremos que resuelva. Un repositorio de este código se encuentra en el anexo de este trabajo.

4.2 Modelamiento de la red eléctrica de Chile a lo largo de un día

Para poder usar el algoritmo, y por tanto, el código, se necesitan modelar: las demandas a lo largo de un periodo de tiempo, las producciones de cada tecnología en cada nodo, el costo de producir energía con cada tipo de tecnología y la pérdida de energía debido al uso de flujos. En este proyecto inspiramos en datos públicos con componente aleatoria, referenciados en la bibliografía de este informe y descrito en detalle abajo:

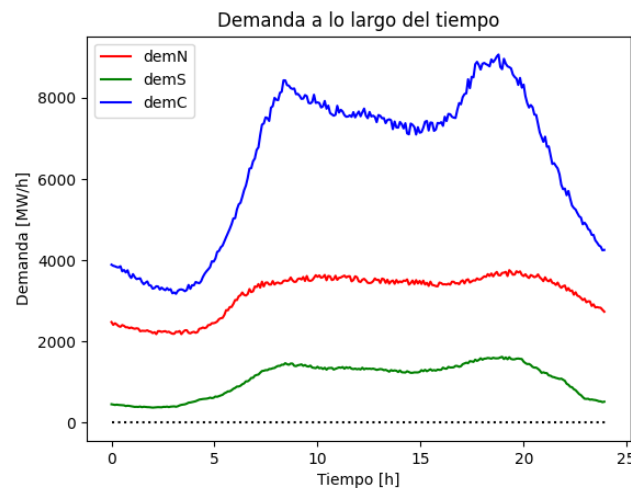
- (i) Demandas: Antes de modelar las demandas a lo largo de un día, es necesario conocer la forma de este tipo de curvas. Este comportamiento se relaciona con el comportamiento de la sociedad en el transcurso de un día, y por tanto, resulta intuitivo explicar la forma que deben tener.

Entre las 18:00 y 20:00 (las horas “peak”) las curvas alcanzan un máximo de demanda (la hora que la gente sale del trabajo), y empiezan a decaer hasta el fin del día. En la madrugada, sigue decayendo hasta alcanzar un mínimo entre las 3:00 y 5:00 (puesto que la gente se va a

dormir), y luego empieza a subir, aumentando drásticamente entre las 6:00 hasta las 8:00 (la hora que la gente se despierta). Después, la demanda se mantiene alta hasta las horas “peak”, y se repite el ciclo.

Considerando esto, se crearon tres curvas distintas de producción eléctrica para cada zona. Se seleccionaron datos cada hora (como discutimos previamente) durante el periodo de un día, que fueron interpolados linealmente tal que se tuviera un dato cada 5 minutos. A cada uno de estos puntos se le añadió un valor aleatorio que varía entre -2% y 2% del promedio de la curva interpolada, para representar una variación estandar.

Con datos de la producción promedio de Chile el año 2019, se consideró la producción promedio de Chile a lo largo de estas 24 horas era de $10500[\text{MW/h}]$, y que el aporte energético del Norte, Sur y Centro a la red chilena es respectivamente del 30% , 10% , 60% . Entonces, con estos datos, se ponderaron las interpolaciones tales que las demandas en cada nodo fueran este mismo porcentaje de la producción total. Esta modelación se puede ver de forma clara en el siguiente gráfico, mostrando las demandas en cada zona a lo largo del tiempo:



- (ii) Producción: Para los límites de producción de cada zona, se consideró que la capacidad de producción máxima en el Norte, Sur y Centro son 6000 , 2000 y 12000 $[\text{MW/h}]$, respectivamente. Para cada una de estas zonas, el aporte de las tecnologías solares, de carbón y de gas en cada zona a la producción total se consideró respectivamente como:

| | Solar | Carbón | Gas |
|--------|-------|--------|-----|
| Norte | 30% | 30% | 40% |
| Sur | 10% | 40% | 50% |
| Centro | 20% | 10% | 70% |

- (iii) Costos: Para modelar el costo de producción en cada nodo, se puede considerar que el costo por cada megawatt de energía de las tecnologías solares, de carbón y de gas son iguales en cada zona, son respectivamente $\$0$, $\$40$, $\$80$. Así, utilizando los límites de producción en cada zona y el aporte de cada tecnología, es posible encontrar expresiones explícitas para cada función de costo en cada zona, mostradas abajo:

$$c_N(q) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } 0 \leq q < 1800 \\ 40 \cdot (q - 1800) & , \text{ si } 1800 \leq q < 3600 \\ 80 \cdot (q - 3600) + 72000 & , \text{ si } 3600 \leq q \leq 6000 \end{cases}$$

$$c_S(q) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } 0 \leq q < 200 \\ 40 \cdot (q - 200) & , \text{ si } 200 \leq q < 1000 \\ 80 \cdot (q - 1000) + 32000 & , \text{ si } 1000 \leq q \leq 2000 \end{cases}$$

$$c_C(q) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } 0 \leq q < 2400 \\ 40 \cdot (q - 2400) & , \text{ si } 2400 \leq q < 3600 \\ 80 \cdot (q - 3600) + 48000 & , \text{ si } 3600 \leq q \leq 12000 \end{cases}$$

- (iv) Pérdida de envío: Se asumió previamente que la pérdida de envío era lineal y la misma para cada flujo. Así, se consideró una pérdida del 0.5% del flujo entrante, es decir: $r(\phi) = 0.005 \cdot \phi$.

5 Resultados del Modelo

5.1 Resultados

Gracias al modelamiento matemático y el trabajo en el programa en Python, el código entrega seis gráficos, enumerados abajo, y datos numéricos

Los primeros tres gráficos que genera el código son Figura 1, Figura 2 y Figura 3 respectivamente, de acuerdo al orden que aparecen abajo de este párrafo. Estos tres grafos son las soluciones del problema P a lo largo del tiempo, que muestran respectivamente: las producciones a realizar en cada nodo, los flujos a realizar en cada arco y el valor de la función objetivo. En cada uno de estos grafos además se representa el límite de producción de cada zona con líneas punteadas.

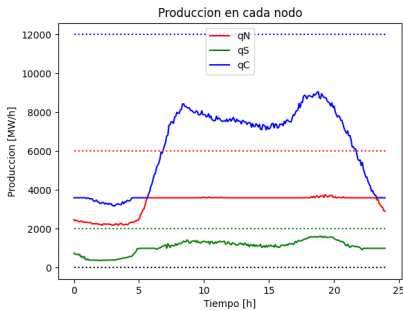


Figura 1: Producciones

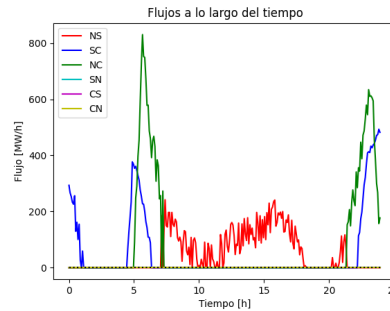


Figura 2: Flujos

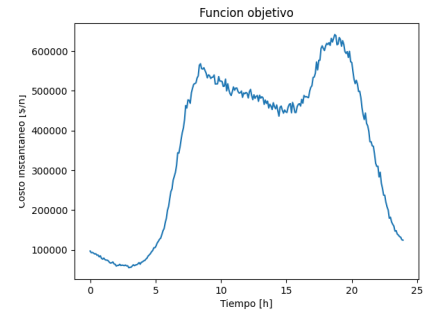


Figura 3: Función

Además, el código entrega estos tres grafos, que llamaremos Figura 4.1, Figura 4.2 y Figura 4.3, que muestran a lo largo del tiempo la demanda y la energía producida, en el Norte, Sur y Centro respectivamente. Además, cada uno de estos grafos muestra para cada nodo los límites de producción de energía acumulada para cada tecnología.

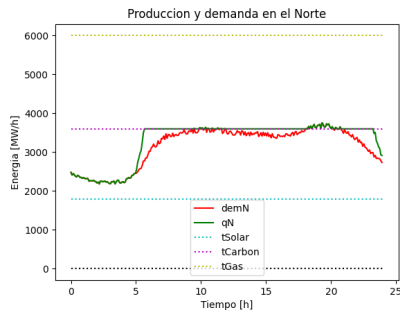


Figura 4.1: Norte

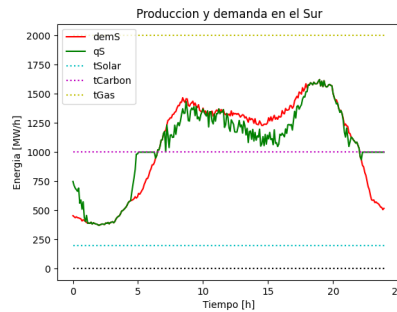


Figura 2: Sur

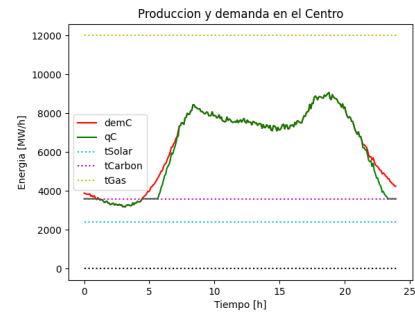


Figura 3: Centro

Finalmente, el programa entrega información relevante numérica sobre la función objetivo y los flujos a lo largo del día, como el costo total, las producciones totales y los flujos totales.

```

1  Costo total: 8767565.29 $
2  Produccion total: 255527.73 [MW]
3  Flujo total: 4433.55 [MW]
4  Energia perdida en flujo: 22.17 [MW]
5  ====Desglose producciones====
6  Produccion total Norte: 79326.11 [MW]
7  Produccion total Sur: 25791.57 [MW]
8  Produccion total Centro: 150410.05 [MW]
9  =====Desglose flujos=====
10 Flujo total NS: 1225.3 [MW]
11 Flujo total SN: 0.0 [MW]
12 Flujo total SC: 1235.01 [MW]
13 Flujo total CS: 0.0 [MW]
14 Flujo total NC: 1973.24 [MW]
15 Flujo total CN: 0.0 [MW]

```

5.2 Análisis de los gráficos

5.2.1 Discusión sobre las formas de la solución

En base a estos resultados, se puede ver que la configuración óptima de enviar flujos es similar a la configuración que se aplica en la vida real. En general, el Norte abastece al Sur y al Centro, el Sur intenta abastecer al Centro cuando puede y el Centro tiende a recibir del Norte y del Sur. Esta tendencia se evidencia con las figuras 2, 4.1, 4.2 y 4.3. Además, se puede ver que en todo momento todas las zonas agotan su energía solar, y el balance que ocurre en la red eléctrica se debe principalmente al flujo de energía producida con tecnología a carbón.

El código trata de minimizar los gastos, por lo que tratará de satisfacer la demanda agotando las tecnologías más económicas o, de no ser posible satisfacerla, acudirá a recibir energía a través de un flujo de otro nodo. Cuando ocurre un cambio de tecnología para producir energía, que es en las líneas punteadas de las figuras 4.1, 4.2 y 4.3, el gasto se vuelve más caro por unidad de energía, por la forma de las funciones de costo. Entonces, en este contexto, el código decidió que es más económico agotar las tecnologías más baratas en cada nodo antes de producir las siguientes tecnologías, y entonces, decide sobreproducir en un nodo hasta llegar a las líneas punteadas. Esto

garantiza en producir energía de forma económicamente efectiva, aunque signifique sobreproducir para compensar las pérdidas de envío.

Por este fenómeno se puede ver que hay intervalos donde en alguna zona la producción se mantiene constante, puesto que la tecnología está agotando una tecnología económica para enviar esa energía a una zona que lo necesite, en vez de tener que producir directamente energía más costosa. Un ejemplo claro de esto es la producción del Norte, que durante una gran parte del día se mantiene constante en su límite de producción de energía a carbón, decidiendo enviar la energía sobrante al Sur y al Centro, considerando las pérdidas de envío.

Es importante notar que a lo largo del día el Norte abasteció al Sur y al Centro, el Sur abasteció al Centro y el Centro no abasteció al Norte ni al Sur. Esto es lo mismo que decir que solo se utilizaron los flujos NS, SC y NC, similares a los del subproblema P_2 que analizamos en la Sección 3.2. Además, como fue demostrado previamente, las soluciones óptimas de este modelo no usan mas de dos flujos a la vez, y a lo más se utilizaron dos flujos actuando al mismo tiempo. La forma que tienen los flujos, si son vistos como grafos dirigidos, calzan bajo similitudes a los grafos S_1, S_2, S_3 y S_4 mencionados al final de la Sección 3.4.

Además, es importante notar que los cambios más bruscos en la Figura 2 ocurren en los momentos donde varía más la demanda, es decir, entre las 6:00 y las 8:00, y las 20:00 hasta las 24:00. El algoritmo encontró óptimo que el Norte sobre-produzca energía puesto a su capacidad alta de producción a carbón, dado que este límite de producción siempre está por arriba de su propia demanda. Por la demanda energética tan alta del Centro, durante el día su demanda está en casi todo momento por sobre lo que puede producir con carbón, y entonces, siempre resulta más económico que reciba energía (mientras se pueda).

5.2.2 Planificación de la red eléctrica en el transcurso de un día

Con estos resultados, se pueden analizar los distintos fenómenos que ocurren a lo largo del día. Si se analizan las producciones y de los flujos, es posible extraer conclusiones con respecto al comportamiento óptimo de la red eléctrica. A lo largo de esta sección, se detallará la cronología de distintos eventos importantes que planifica el código a lo largo del día, y se explicarán distintos comportamientos de las curvas obtenidas en los gráficos.

Se puede notar que, antes de la rampa de demanda de la mañana, el sistema se encontraba en total equilibrio usando energía solar y usando gran parte de la energía a carbón (entre las 1:00 y las 4:30h). Durante este periodo la solución óptima es no mandar flujos, puesto que las demandas de todas las zonas necesitan un gran porcentaje de energía de carbón, y ninguna zona necesita tanta demanda como para necesitar producir gas. Este equilibrio se rompe cerca de las 5:00, cuando el Centro empieza a necesitar más demanda de la que puede satisfacer sin energía a gas. Como la energía a gas es bastante más costosa que la energía a carbón, el programa encontró óptimo que el Norte y el Sur generaran parte de la energía a carbón sobrante y enviaran flujo al Centro.

Eventualmente, cerca de las 6:00, las demandas del Sur y del Centro son tan altas (para su propia producción) que no pueden ser totalmente satisfechas con la energía a carbón. Entonces, estas dos zonas empezaron a producir Gas, y el Sur para no perder energía producida con Gas, detuvo su flujo al Centro. Entretanto, el Norte todavía puede abastecerse con su tecnología a carbón, y

encuentra óptimo enviar flujo al Sur antes del Norte.

El Centro tiene tanta demanda entre las 7:00 y las 21:00 que es óptimo satisfacer su propia demanda y nunca enviar flujo a ninguna zona. El Sur se aprovecha de la energía a carbón sobrante del Norte y puede producir ligeramente bajo su demanda gran parte del tiempo. El Norte, al tener una buena capacidad de producción a carbón, puede satisfacerse a sí misma sin ningún problema solo generando carbón, exceptuando entre las 18:00 y las 20:00, es decir, la hora “peak”.

Durante la hora “peak”, todas las demandas son más altas que la capacidad de producción en cada zona con tecnología solar y a carbón, y entonces, todas se ven forzadas a agotar totalmente estas tecnologías y empezar a agotar la energía a gas. Durante este periodo, se alcanza un último equilibrio de flujos, donde la demanda es tan alta y ya se agotaron todas las tecnologías económicas que es óptimo que cada zona satisfaga por sí misma su propia demanda.

Cuando termina la hora “peak”, no se necesita producir tanta energía a gas como antes, y las tecnologías vuelven a tener el comportamiento similar a como se describió anteriormente. Esto ocurre hasta que llegan a un momento cerca de las 23:00 donde la demanda es suficientemente baja como para abastecer a todas las zonas sin necesitar usar energía a gas.

6 Conclusiones y trabajo futuro

Tras el desarrollo de lo planteado a lo largo de este informe, se lograron cumplir los objetivos principales mencionados en la introducción. Se logró modelar la red eléctrica chilena, y se logró construir un código en Python para obtener una planificación diaria para minimizar el costo total de la red eléctrica. Además, es posible extraer datos cuantitativos importantes, como la cantidad total de energía que producir y enviar entre el Norte, Sur y Centro de Chile, y el costo total de la red al usar esta planificación. La visualización de las soluciones también resultó efectiva al momento de entender la forma de la solución óptima, y ayuda a comprender mejor este tipo de modelos en acción.

El desarrollo hecho para poder usar el algoritmo del problema simplificado hace que la búsqueda de soluciones sea mucho más eficiente. Si hubiéramos ocupado un solver de programación lineal en el problema a resolver sin las soluciones, se hubiera demorado bastante el código en poder resolver todos los problemas de optimización a solucionar durante todo el día. Con este algoritmo basado en las reducciones de complejidad del problema, la resolución del problema es básicamente inmediata. Dado esto, es fácil para el código acomodarlo para modelaciones más intensivas y obtener resultados rápidos que no se pueden garantizar al usar un solver tradicional, puesto que este algoritmo se basa en propiedades de redes eléctricas que son intrínsecas de este problema en específico.

A lo largo del día, se pueden identificar distintas tendencias en cada uno de los nodos de la red eléctrica chilena, y se puede decir que cada nodo “cumplió un rol” dentro de la red eléctrica. El Norte tiene el rol de satisfacer las demandas del Sur y el Centro debido a su gran producción, y el Centro tiene el rol de recibir energía del Norte y del Sur debido a su gran demanda. El Sur varía su comportamiento de acuerdo a su propia demanda: mientras la pueda satisfacer de forma cómoda puede enviarle energía al Centro, pero si su demanda es demasiado grande le pide ayuda al Norte para satisfacerla. Esto se evidencia por el uso de los flujos Norte-Sur, Sur-Centro y Norte-Centro en la solución óptima a lo largo de todo el día, y al no ocupar los otros flujos en ningún momento.

Es importante notar que, aunque este trabajo se concentró en una red eléctrica a lo largo de un día, este trabajo podría seguir siendo aplicable a redes eléctricas de otros países y/o en márgenes de tiempo distintos a los de un día, cambiando las funciones interpoladas y trasladando el sistema de forma adecuada. Eso sí, la cronología analizada en este proyecto solamente tiene sentido en el contexto de un día, y no sería necesariamente aplicable en escalas de tiempo mayores. Es decir, el análisis cualitativo del comportamiento de las soluciones durante un día no necesariamente se traduce bien a escalas temporales menores (en una hora específica) o en escalas temporales mayores (una semana, un mes, un año, etc.).

Para trabajos futuros relacionados, se podrían considerar diversos factores que cambiar y/o mejorar. Entre posibles aristas a los cuales llevar este trabajo, se podría considerar el impacto medioambiental de la planificación diaria que es óptima económicamente, pero no necesariamente ecológicamente. Se podría incluir un costo medioambiental a la función objetivo, que esté dado por el volumen de contaminación emitida al producir energía de carbón y de gas (puesto que la energía solar no es contaminante). De acuerdo a la forma y la importancia que se le asigne a esta función, será posible encontrar un equilibrio entre la forma más económica de manejar la red eléctrica y en minimizar los daños al medioambiente.

Además, se podría mejorar el modelo de la red eléctrica chilena utilizado en este trabajo. Se consideró constante el límite de producción, cuando en la vida real la capacidad de energía solar depende del clima, puesto que depende de que el cielo esté despejado para maximizar su producción. Esto se traduce en problemas de optimización estocástica. Por otro lado, el utilizar un tipo de tecnología podría considerar un costo base para iniciar el equipo para producir energía, que no fue considerado en la función de costo de este trabajo. Aún más, al hacer funcionar cada tecnología, puede que necesite un tiempo para estar funcionando a máxima capacidad, y esto implicaría una forma no lineal a trozos de la función de costo de producción.

Con respecto al algoritmo considerado en este proyecto, solamente sirve para redes de tres nodos. Eso sí, dentro de la tesis que especifica este algoritmo, también expresan algoritmos para redes eléctricas similares, pero con nodos satelitales añadidos. Sería posible construir un código distinto que considere estas redes con más de tres nodos basados en estos algoritmos, para lograr una mejor modelación en zonas que no sean fácilmente reducibles a tres nodos.

Un detalle importante dentro de todo este trabajo es que una planificación óptima hoy en día no necesariamente sería posible de mantener a lo largo del tiempo, debido a los cambios en regularizaciones de distintas tecnologías por el cambio climático. Un ejemplo claro serían las tecnologías en base a carbón y gas que, aunque sean eficientes para su costo y sean tecnologías principales de producción hoy en día, resultan muy contaminantes al medioambiente. Debido a esto, es posible que estas tecnologías sean restringidas para cuidar a la atmósfera, y se necesiten usar tecnologías más ecológicas pero más costosas.

7 Metodología de trabajo

Durante el semestre se realizaron siete reuniones presenciales y se mantuvo la comunicación por correo sobre avances en un ritmo semanal. Adelante se presenta una cronología de los avances en este proyecto durante el semestre, concentrándose en las fechas de reunión con nuestro especialista.

28/08: Conversación con el especialista para planificar metodología de trabajo a lo largo del semestre.

01/09: Presentación del proyecto en mas detalle y de los intereses del especialista para modelar. Se empezó a investigar sobre el modelamiento matemático del problema, y a comprender el modelo reducido del problema.

Se conversó sobre la forma que debería tener una solución del problema. Una solución no puede contener un flujo mútuo entre nodos, y por tanto, las soluciones al problema tienen un patrón gráfico que podemos usar para reducir el problema. En base a esto, se nos pidió encontrar todos los grafos de una solución del problema reducido, ver qué grafos son similares entre sí, y plantear matemáticamente el problema para cada familia de grafos similares.

15/09: Se presentaron dudas sobre el modelamiento matemático del problema, específicamente sobre la función objetivo. Nuestro especialista nos guió a reducir aún más los sub-problemas, considerando fenómenos como el flujo circular o del doble envío, y plantearlos matemáticamente. Además, se habló de la posibilidad que un problema pueda estar contenido en otro, y de un posible algoritmo para resolver los sub-problemas, y mediante simetrías, resolver el problema completo.

10/10: Se presenta un archivo en LaTeX que muestra, mediante demostraciones matemáticas, la posibilidad de un algoritmo que resuelva un problema reducido del problema original. Además, si este algoritmo es de existir, puede ser iterado con distintas configuraciones para obtener distintas soluciones, y al considerar la solución óptima de cada configuración, habremos obtenido una solución óptima del problema original.

Con este avance, nuestro especialista nos proporcionó una tesis relacionada con el problema de producción en una red eléctrica, que contiene la forma explícita del algoritmo previamente mencionado. Se nos pidió leer y comprender las partes de la tesis relacionadas con este proyecto, para posteriormente crear un código en base al algoritmo que resuelva este mismo problema.

19/10: Se presentan dudas sobre la implementación del código y que lenguaje utilizar. Se empieza a construir el código, y se realizan extensivas pruebas verificando todos los ejemplos proporcionados en la tesis y ejemplos proporcionados directamente por nuestro especialista.

Se construye el código para que pueda ser iterado múltiples veces con distintas demandas iniciales, para modelar las producciones y flujos de energía a lo largo de una jornada. Además, se trabaja en la visualización de los datos mediante gráficos.

10/11: Se hacen las últimas revisiones del código. Se trabaja principalmente en la visualización de los datos y en facilitar el uso del código para usar condiciones iniciales distintas.

20/11: Se consulta con el especialista sobre los últimos detalles del proyecto, principalmente sobre la estructura del informe, el resumen en inglés del proyecto y la presentación. Se hablan los últimos detalles que corregir para finalizar el proyecto.

8 Anexo

- **Pág 9, Sección 3.3:** Formas explícitas de los subproblemas P_1 y P_2 , respectivamente:

| Problema P_1 | Problema P_2 |
|--|--|
| $\min_{(q,\phi)} c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C)$ | $\min_{(q,\phi)} c_N(q_N) + c_S(q_S) + c_C(q_C)$ |
| s.a. $q_N + (1-r)\phi_{CN} - \phi_{NS} = D_N$ | s.a. $q_N - \phi_{NS} - \phi_{NC} = D_N$ |
| $q_S + (1-r)\phi_{NS} - \phi_{SC} = D_S$ | $q_S + (1-r)\phi_{NS} - \phi_{SC} = D_S$ |
| $q_C + (1-r)\phi_{SC} - \phi_{CN} = D_C$ | $q_C + (1-r)(\phi_{SC} + \phi_{NC}) = D_C$ |
| $q_N \in [0, Q_N]$ | $q_N \in [0, Q_N]$ |
| $q_S \in [0, Q_S]$ | $q_S \in [0, Q_S]$ |
| $q_C \in [0, Q_C]$ | $q_C \in [0, Q_C]$ |
| $\phi_{NS}, \phi_{SC}, \phi_{CN} \geq 0$ | $\phi_{NS}, \phi_{SC}, \phi_{NC} \geq 0$ |

- **Pág 12, Sección 4.1:** Repositorio GitHub del proyecto (código incluido): [link](#)

9 Bibliografía

- Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Mariano Vazquez, Estudio de Problemas de Optimización y Equilibrio sobre una Red de Producción Eléctrica, 2023.
- Comisión Nacional de Energía - Reporte Energético Financiero - Vol. N°10 - 2019:
https://www.cne.cl/wp-content/uploads/2019/10/RT_Financiero.v201910.pdf
- U.S. Energy Information Administration, Demand for electricity changes through the day, APRIL 6, 2011:
<https://www.eia.gov/todayinenergy/detail.php?id=830>
- © 2023 Society for Industrial and Applied Mathematics, Pollution Regulation for Electricity Generators in a Transmission Network, Nicolás Hernández-Santibáñez, Alejandro Jofré and Dylan Posamma.