Algorithmique et Programmation 2

Recherche d'éléments et tri de liste

Licences Informatique et Mathématiques
1ère année

Semestre 2

Université Gustave Eiffel
INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE ET D'INFORMATIQUE GASPARD-MONGE

Rappel du cours précédent

Chercher un élément dans une liste non triée de taille n peut se faire par *recherche exhaustive*

- Complexité $O(n)$
- Sans autre hypothèse on ne peut pas faire mieux

Rappel du cours précédent

Chercher un élément dans une liste *triée* de taille n peut se faire par *recherche binaire* (ou *dichotomie*)

- Complexité $O(\log n)$ (exponentiellement plus rapide !!)
- Sans autre hypothèse on ne peut pas faire mieux

Rappel du cours précédent

Conclusion : si on a besoin de chercher fréquemment, on a intérêt à trier (ou à maintenir les données triées)

- Si ce n'est pas trop coûteux !
- D'où l'intérêt d'algorithmes *efficaces*

Section 1

Intermède : nombre de chiffres d'un nombre

Nombre de chiffres d'un nombre

Soit n un entier positif écrit en base 10.
Combien de chiffres a-t-il ?

- Un nombre à k chiffres est compris entre 10^{k-1} et $10^k - 1$
- Le nombre de chiffres de n est donc le plus petit k tel que $10^{k-1} \leq n \leq 10^k - 1$
- Comment calculer ce nombre ?

Nombre de chiffres d'un nombre

Soit n un entier positif écrit en base 10.
Combien de chiffres a-t-il ?

- Un nombre à k chiffres est compris entre 10^{k-1} et $10^k - 1$
- Le nombre de chiffres de n est donc le plus petit k tel que $10^{k-1} \leq n \leq 10^k - 1$
- Comment calculer ce nombre ?
  - On essaie tous les k un par un, ou bien...

Nombre de chiffres d'un nombre

Soit n un entier positif écrit en base 10.
Combien de chiffres a-t-il ?

- Un nombre à k chiffres est compris entre 10^{k-1} et $10^k - 1$
- Le nombre de chiffres de n est donc le plus petit k tel que $10^{k-1} \leq n \leq 10^k - 1$
- Comment calculer ce nombre ?
  - On essaie tous les k un par un, ou bien...
  - On utilise la fonction $\log_{10}$ (logarithme en base 10)

Proposition : Tout nombre entier positif n en base 10 a exactement $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$ chiffres

Nombre de chiffres d'un nombre

Soit n un entier positif écrit en base 10.
Combien de chiffres a-t-il ?

- Un nombre à k chiffres est compris entre 10^{k-1} et $10^k - 1$
- Le nombre de chiffres de n est donc le plus petit k tel que $10^{k-1} \leq n \leq 10^k - 1$
- Comment calculer ce nombre ?
  - On essaie tous les k un par un, ou bien...
  - On utilise la fonction $\log_{10}$ (logarithme en base 10)

Proposition : Tout nombre entier positif n en base 10 a exactement $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$ chiffres

Proposition (bis) : Tout nombre entier positif n peut être divisé au plus $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$ fois par 10 avant d'obtenir 0

Conversion en binaire

Exercice / rappel : Écrire une fonction (itérative ou récursive) `binaire(n)` recevant un entier positif n et renvoyant son écriture en binaire sous la forme d'une liste de `0` et de `1`.
Quelle est la complexité de la fonction ?

Conversion en binaire

Binaire, version itérative

```python
def binaire(n):
    res = []
    while n != 0:
        n, r = n // 2, n % 2
        res.append(r)
    res.reverse()
    return res
```

Conversion en binaire

Binaire, version récursive

```
def binaire(n):
    if n == 0:
        return []
    else:
        n, r = n // 2, n % 2
        res = binaire(n)
        res.append(r)
        return res
```

Nombre de chiffres d'un nombre

Soit n un entier positif écrit en base b.
Combien de chiffres a-t-il ?

- Un nombre à k chiffres est compris entre b^{k-1} et $b^k - 1$
- Le nombre de chiffres de n est donc le plus petit k tel que $b^{k-1} \leq n \leq b^k - 1$

Proposition : Tout nombre entier positif n en base b a exactement $\lfloor \log_b(n) \rfloor + 1$ chiffres

Nombre de chiffres d'un nombre

Soit n un entier positif écrit en base b.
Combien de chiffres a-t-il ?

- Un nombre à k chiffres est compris entre b^{k-1} et $b^k - 1$
- Le nombre de chiffres de n est donc le plus petit k tel que $b^{k-1} \leq n \leq b^k - 1$

Proposition : Tout nombre entier positif n en base b a exactement $\lfloor \log_b(n) \rfloor + 1$ chiffres

Proposition (bis) : Tout nombre entier positif n peut être divisé au plus $\lfloor \log_b(n) \rfloor + 1$ fois par b avant d'obtenir 0

Section 2

Tri de listes

Motivation

- Comme on l'a vu avec la recherche, il est important d'organiser les données d'une certaine manière
- On va maintenant voir comment trier des listes

Problème (tri)

Données : une liste `lst`.
Objectif : ordonner les éléments de `lst` de manière croissante.

Remarques :

1. On suppose que les éléments de `lst` sont comparables
2. On travaille ici sur des listes croissantes d'entiers, mais le raisonnement reste le même pour d'autres types

Le problème du tri

- Le problème du tri peut être résolu par plusieurs algorithmes d'efficacités diverses
- On va voir trois algorithmes basiques permettant de résoudre ce problème :
    1. le tri à bulle
    2. le tri par sélection
    3. le tri par insertion
- Puis quelques algorithmes plus efficaces :
    1. le tri par pivot
    2. le tri par fusion

Le tri à bulle

Algorithme : tri à bulle de `lst`

Pour chaque indice `i` de 0 à `len(lst)-1` :

- on parcourt les `n-i` derniers éléments depuis la fin
- on intervertit les éléments voisins mal ordonnés

Pourquoi ça marche :

- Après l'étape `i`, le plus petit élément parmi les `n-i` derniers remonte en position `i`
- Donc après l'étape `i`, les `i` premiers éléments de `lst` sont les plus petits et sont triés *(par récurrence)*
- Donc après la dernière étape la liste entière est triée

Le tri à bulle

```python
def tri_bulle(lst):
    n = len(lst)
    # on fait croître la portion triée
    for i in range(0, n-1):
        # on fait remonter la bulle
        # dans la portion non triée
        for j in range(n-1, i, -1):
            if lst[j-1] > lst[j]:
                # échange de voisins mal ordonnés
                lst[j-1], lst[j] = lst[j], lst[j-1]
```

Complexité du tri à bulle

- Pour chaque valeur de `i` entre 0 et n-2 :
  - `n-i-1` comparaisons dans tous les cas
  - `n-i-1` échanges au pire (0 au mieux)
- Nombre total de comparaisons dans tous les cas :

$$\sum_{i=0}^{n-2} n - i - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \in O(n^2)$$

- Nombre total d'échanges : 0 au mieux, $O(n^2)$ au pire
- Pire cas : liste décroissante, meilleur cas : liste croissante
- Amélioration possible : arrêter les comparaisons à la dernière position d'échange (Cf. exercices)

Le tri par sélection

Idée : on peut aussi échanger des éléments non adjacents !

Algorithme : tri par sélection

Pour chaque `i` entre 0 et `len(lst)-2` :

1. on cherche le plus petit élément à partir de l'indice `i`
2. on échange `lst[i]` avec cet élément

Pourquoi ça marche :

- Après l'étape `i`, on a dans les `i` premières positions de `lst` les `i` plus petits éléments de `lst` dans l'ordre
- Après la dernière étape, la liste est bien triée

Le tri par sélection

```python
def indice_min(lst, i):
    position = i
    minimum = lst[i]
    for p in range(i + 1, len(lst)):
        if lst[p] < minimum:
            minimum = lst[p]
            position = p
    return position
```

```python
def tri_selection(lst):
    for i in range(len(lst)-1):
        p = indice_min(lst, i)
        lst[i], lst[p] = lst[p], lst[i]
```

Complexité du tri par sélection

- Pour chaque valeur de `i` entre 0 et n-2 :
  - `n-i-1` comparaisons dans `indice_min`
  - `1` échange dans tous les cas
- Nombre total de comparaisons dans tous les cas :

$$\sum_{i=0}^{n-2} n-i-1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \in O(n^2)$$

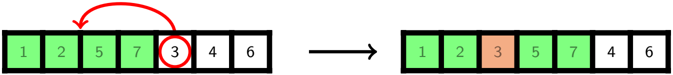
- Nombre total d'échanges : $n-1$ dans tous les cas
- Pas de pire ni de meilleur cas
  (complexité indépendante du contenu de la liste)

Le tri par insertion

- Au lieu d'échanger deux éléments, on pourrait tout simplement déplacer ceux qui sont “mal placés”
- Pour chaque indice `i` entre 1 et `len(lst)-1`, on insère `lst[i]` “à la bonne place” parmi les `i` premiers éléments
- Après l'étape `i`, les `i+1` premiers éléments sont triés
- Lorsque l'algorithme se termine, la liste est bien triée

Insertion d'un élément

- Pour mettre en œuvre le tri par insertion, il faut donc savoir comment effectuer les réinsertions



- On peut procéder en trois étapes :
  1. sauvegarder l'élément e à déplacer
  2. décaler les éléments d'une position de manière à créer une place libre à la destination
  3. affecter la valeur de e à la destination

Insertion d'un élément

```python
def insertion(lst, i):
    # sauvegarder l'élément à déplacer
    e = lst[i]
    # décaler les éléments plus grands
    k = i
    while k > 0 and lst[k-1] > e:
        lst[k] = lst[k-1]
        k = k - 1
    # insérer e en position k
    lst[k] = e
```

```python
def tri_insertion(lst):
    for i in range(1, len(lst)):
        insertion(lst, i)
```

Complexité du tri par insertion

- Pour chaque valeur de `i` entre `1` et `n-1` :
  - Entre 1 et `i-1` comparaisons
  - Entre 0 et `i` affectations
- Nombre de comparaisons au pire (liste décroissante) :

$$\sum_{i=0}^{n-2} n - i - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \in O(n^2)$$

- Nombre d'affectations au pire : $O(n^2)$ (calcul similaire)
- Meilleur cas : $O(n)$ sur liste croissante (aucun décalage)
- Amélioration possible : chercher la position finale de chaque élément par dichotomie sur le début de la liste (ne change pas le nombre d'affectations nécessaire)

Autres algorithmes de tris

- Les algorithmes de tri déjà présentés ont une complexité prohibitive
- On va voir maintenant des algorithmes plus performants
  1. le tri rapide
  2. le tri fusion

Echauffement : le tri pair / impair

- A titre d'échauffement, essayons de résoudre le problème suivant :

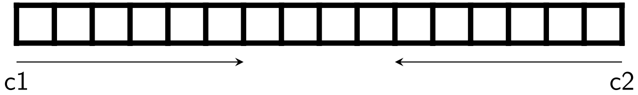
Problème (tri pair / impair)

Données : une liste `lst` de naturels
Objectif : mettre les éléments pairs de `lst` au début et les impairs à la fin

- Comment résoudre ce problème de manière efficace ?

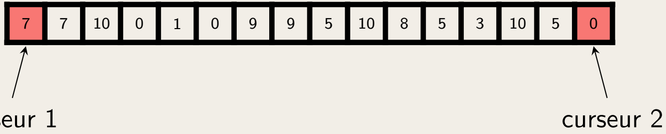
Echauffement : le tri pair / impair

- Une solution possible : parcourir la liste simultanément avec deux curseurs c1 et c2
- Les deux curseurs progressent l'un vers l'autre au départ des extrémités
- A chaque fois qu'on tombe sur un couple (`lst[c1]`, `lst[c2]`) d'éléments mal placés, on les échange



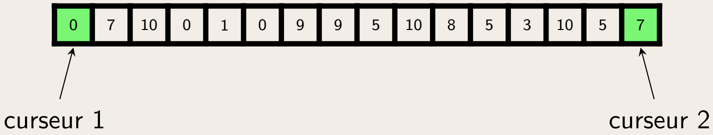
Le tri pair / impair en action

Exemple



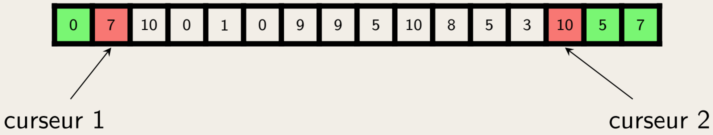
Le tri pair / impair en action

Exemple



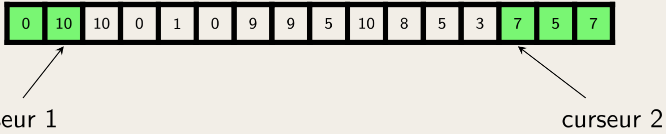
Le tri pair / impair en action

Exemple



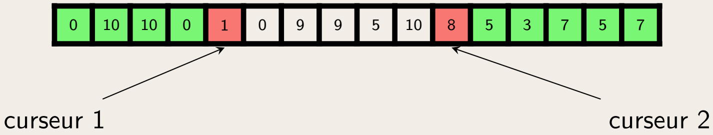
Le tri pair / impair en action

Exemple



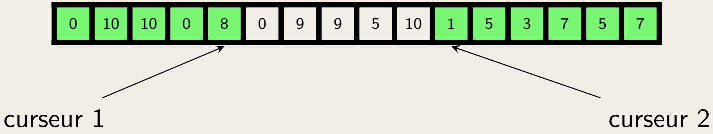
Le tri pair / impair en action

Exemple



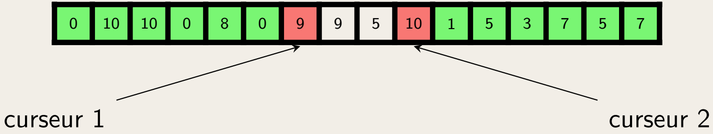
Le tri pair / impair en action

Exemple



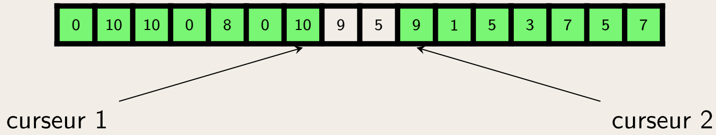
Le tri pair / impair en action

Exemple



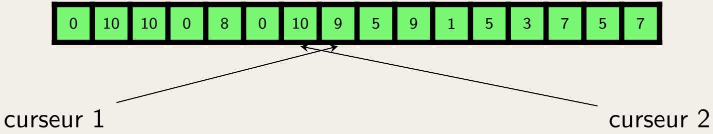
Le tri pair / impair en action

Exemple



Le tri pair / impair en action

Exemple



- L'algorithme s'arrête quand les curseurs se croisent

Le tri pair / impair en Python

```python
def pair_impair(lst):
    curseur1, curseur2 = 0, len(lst) - 1
    while curseur1 <= curseur2:
        # repérer le premier élément impair en partant du début
        while curseur1 <= curseur2 and lst[curseur1] % 2 == 0:
            curseur1 += 1

        # repérer le premier élément pair en partant de la fin
        while curseur1 <= curseur2 and lst[curseur2] % 2 != 0:
            curseur2 -= 1

        # si nécessaire, procéder à l'échange
        if curseur1 < curseur2:
            lst[curseur1], lst[curseur2] = lst[curseur2], lst[curseur1]
            curseur1 += 1
            curseur2 -= 1
```

- Complexité ?

Le tri pair / impair en Python

```python
def pair_impair(lst):
    curseur1, curseur2 = 0, len(lst) - 1
    while curseur1 <= curseur2:
        # repérer le premier élément impair en partant du début
        while curseur1 <= curseur2 and lst[curseur1] % 2 == 0:
            curseur1 += 1

        # repérer le premier élément pair en partant de la fin
        while curseur1 <= curseur2 and lst[curseur2] % 2 != 0:
            curseur2 -= 1

        # si nécessaire, procéder à l'échange
        if curseur1 < curseur2:
            lst[curseur1], lst[curseur2] = lst[curseur2], lst[curseur1]
            curseur1 += 1
            curseur2 -= 1
```

- Complexité ? Temps $O(n)$, espace $O(1)$

Généralisation

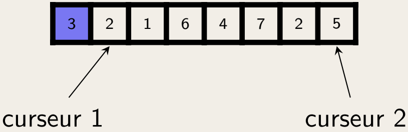
- On peut utiliser ce principe pour trier la liste
- Au lieu de se contenter de mettre les pairs au début et les impairs à la fin, on peut mettre les éléments inférieurs à une certaine valeur avant elle et les autres après elle
- Ce principe est à la base du tri rapide

Le tri rapide

- Principe du tri rapide :
  1. Sélectionner un pivot, c'est-à-dire une valeur p de référence dans la liste (par exemple la première)
  2. Partitionner la liste :
     - Toutes les valeurs inférieures à p se retrouvent avant p
     - Toutes les valeurs supérieures à p se retrouvent après p
  3. Recommencer récursivement sur les deux parties de liste (avant et après le pivot)

Le tri rapide

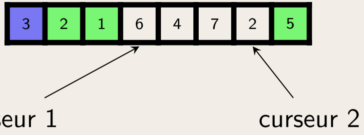
Exemple



1. On partitionne avec le premier élément comme pivot

Le tri rapide

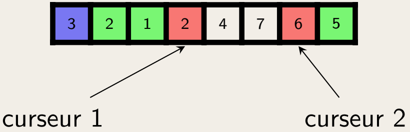
Exemple



1. On partitionne avec le premier élément comme pivot

Le tri rapide

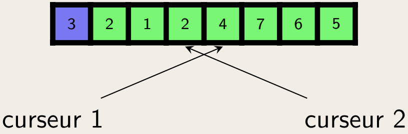
Exemple



1. On partitionne avec le premier élément comme pivot

Le tri rapide

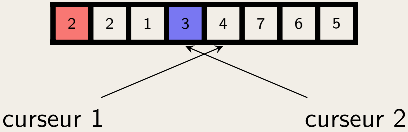
Exemple



1. On partitionne avec le premier élément comme pivot

Le tri rapide

Exemple



1. On partitionne avec le premier élément comme pivot
2. On place le pivot à la “frontière”

Le tri rapide

Exemple

2	2	1	3	4	7	6	5

1. On partitionne avec le premier élément comme pivot
2. On place le pivot à la “frontière”
3. On trie les deux zones récursivement par le même principe

Calcul de la partition

- L'algorithme est très similaire au tri pair / impair ;
  - avant : pairs à gauche, impairs à droite ;
  - maintenant : $x \leq$ p à gauche, $y >$ p à droite ;

```python
def partition(lst, debut, fin):
    curseur1, curseur2 = debut + 1, fin

    while curseur1 <= curseur2:
        while curseur1 <= curseur2 and lst[curseur1] <= lst[debut]:
            curseur1 += 1

        while lst[curseur2] > lst[debut]:
            curseur2 -= 1

        if curseur1 < curseur2:  # si nécessaire, procéder à l'échange
            lst[curseur1], lst[curseur2] = lst[curseur2], lst[curseur1]
            curseur1 += 1
            curseur2 -= 1

    lst[debut], lst[curseur2] = lst[curseur2], lst[debut]
    return curseur2  # la position finale du pivot servira plus tard
```

Le tri rapide en Python

```
def tri_rapide(lst, debut=0, fin=None):
    if fin is None:
        fin = len(lst) - 1

    if debut < fin:
        # partition entre debut et fin
        pivot = partition(lst, debut, fin)

        # tri de la zone entre debut et pivot
        tri_rapide(lst, debut, pivot - 1)

        # tri de la zone entre pivot et fin
        tri_rapide(lst, pivot + 1, fin)
```

Complexité du tri rapide

- Complexité du partitionnement : $O(n)$
- Pire cas : élément minimal ou maximal comme pivot
  - Une partie à 0 éléments, l'autre à $n-1$ éléments
  - Mêmes calculs que pour les tris naïfs : $O(n^2)$
- Cas le plus favorable : partition en deux moitiés égales
  - Nombre d'appels récursifs en $O(\log n)$
  - Au k^e niveau de récursion on partitionne environ 2^k listes de taille environ $n/2^k$, coût total $O(n)$
  - Coût total : $O(n \log n)$
- En moyenne : on peut montrer qu'on obtient $O(n \log n)$

Tri par pivot

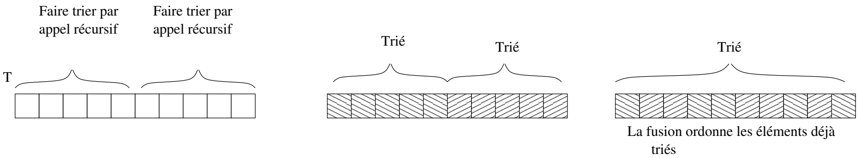
- Pire cas du tri par pivot : liste déjà triée
- Problème : en pratique cas très fréquent !
- (au moins) 2 solutions :
  - Mélanger la liste avant de commencer (`random.shuffle`, détails à suivre)
  - Choisir un pivot au hasard avant de partitionner

Le tri rapide en Python

```python
def tri_rapide(lst, debut=0, fin=None):
    if fin is None:
        fin = len(lst) - 1

    if debut < fin:
        # choix d'un pivot aléatoire et placement en debut
        pivot = random.randint(debut, fin)
        lst[debut], lst[pivot] = lst[pivot], lst[debut]

        # partition entre debut et fin
        pivot = partition(lst, debut, fin)

        # tri de la zone entre debut et pivot
        tri_rapide(lst, debut, pivot - 1)

        # tri de la zone entre pivot et fin
        tri_rapide(lst, pivot + 1, fin)
```

Le tri fusion

- Ce tri se décrit facilement récursivement :
  - Si la liste contient 0 ou 1 élément, elle est triée
  - Sinon :
    1. On la divise en deux listes de tailles égales
    2. On trie les deux sous-listes
    3. On fusionne le résultat à l'aide d'une liste auxiliaire
    4. On recopie la liste auxiliaire dans la liste d'origine



La partie fusion

- Algorithme de fusion de listes triées :
  - On utilise deux curseurs parcourant `lst1` et `lst2` en parallèle dans le même sens
  - À chaque étape, on ajoute `min(lst1[c1], lst2[c2])` au résultat
  - Si une des listes est épuisée on recopie la fin de l'autre
- Ici, on va travailler sur deux portions voisines d'une même liste `lst`
  - Il est suffisant de travailler avec des indices
  - Une fois le résultat obtenu, on le recopie sur la portion correspondante de `lst`

La partie “fusion”

```python
def fusionner(lst, debut, milieu, fin):
    aux = []
    curseur1, curseur2 = debut, milieu + 1
    for k in range(debut, fin + 1):
        # si une des deux sous-listes a été copiée, copier l'autre
        if curseur1 > milieu:
            aux.append(lst[curseur2])
            curseur2 += 1
        elif curseur2 > fin:
            aux.append(lst[curseur1])
            curseur1 += 1
        # sinon, copier min(lst[curseur1], lst[curseur2])
        elif lst[curseur1] < lst[curseur2]:
            aux.append(lst[curseur1])
            curseur1 += 1
        else:
            aux.append(lst[curseur2])
            curseur2 += 1
    # on recopie la liste auxiliaire sur la liste à trier
    lst[debut:fin+1] = aux
```

La partie “tri”

```python
def tri_fusion(lst, debut, fin):
    # plus que 0 ou 1 élément à trier
    if debut >= fin:
        return

    # partitionner en deux-sous listes
    milieu = debut + (fin - debut) // 2

    # les trier
    tri_fusion(lst, debut, milieu)
    tri_fusion(lst, milieu+1, fin)

    # les fusionner
    fusionner(lst, debut, milieu, fin)
```

Complexité

- Complexité de la fusion : $O(n)$
- Même idée que pour le cas favorable du tri par pivot
- Dans tous les cas : partition en deux moitiés égales
  - Profondeur max d'appels récursifs imbriqués : $O(\log n)$
  - Au k^e niveau de récursion on fusionne 2^k listes de taille environ $n/2^k$, coût total $O(n)$
  - Coût total : $O(n \log n)$
- Algorithme (asymptotiquement) optimal mais plus de mémoire utilisée que tri par pivot
- Tri stable (des éléments égaux restent dans le même ordre)

Le tri de Python

Méthode `sort` : tri sur place de `list`

- Algo hybride entre tri par fusion et tri par insertion (*Timsort*)
- Stable, $O(n \log n)$ en temps (au pire et en moyenne), $O(n)$ en espace
- Utilisé par d'autres langages de programmation (par ex. Java)
- **Attention :** trie sur place, ne renvoie pas de liste !
- Possibilité de trier selon un critère donné (`key=f`), ou à l'envers (`reverse=True`)

Tri sans modification de la liste : fonction `sorted`

Le tri de Python

```
>>> lst = ["Chennai", "Mumbai", "Kochi", "Delhi", "Calcutta", "Amritsar"]
>>> lst.sort()
>>> print(lst)
['Amritsar', 'Calcutta', 'Chennai', 'Delhi', 'Kochi', 'Mumbai']

>>> lst.sort(reverse=True)
>>> print(lst)
['Mumbai', 'Kochi', 'Delhi', 'Chennai', 'Calcutta', 'Amritsar']

>>> lst.sort(key=len)
>>> print(lst)
['Kochi', 'Delhi', 'Mumbai', 'Chennai', 'Calcutta', 'Amritsar']

>>> def derniere_lettre(s):
...     return s[-1]
...
>>> sorted(lst, key=derniere_lettre)
['Calcutta', 'Kochi', 'Delhi', 'Mumbai', 'Chennai', 'Amritsar']
```

Section 3

Variations autour du tri

Mélange de liste

On a vu comment trier une liste, mais comment la mélanger uniformément ?

Première tentative :

```
from random import randrange

def melange(lst):
    for i in range(len(lst)):
        k = randrange(len(lst))
        lst[i], lst[k] = lst[k], lst[i]
```

Exercice : Quelle est la fréquence d'apparition de chaque résultat possible sur une liste de longueur 3 ?

Mélange de liste

```
from random import randrange
def melange(lst):
    for i in range(len(lst)):
        k = randrange(len(lst))
        lst[i], lst[k] = lst[k], lst[i]
```

Buggé !!!

- Combien de permutations possibles ? $n!$
- Combien d'exécutions possibles de l'algorithme ? n^n (beaucoup plus)
- n^n n'est pas divisible par $n!$ en général $\to$ répartition égale impossible

Mélange de liste

Seconde tentative

```
def melange(lst):
    for i in range(len(lst)-1):
        k = randrange(i, len(lst))  # changement ici !
        lst[i], lst[k] = lst[k], lst[i]
```

On peut raisonner à l'envers pour comprendre :

- À chaque étape on "devine" l'élément qui était en position `i` avant de trier
- Les éléments de rang $<$ `i` sont déjà fixés, donc on le nes considère pas
- Une fois chaque élément fixé, on a fini
- Complexité :

Mélange de liste

Seconde tentative

```
def melange(lst):
    for i in range(len(lst)-1):
        k = randrange(i, len(lst))  # changement ici !
        lst[i], lst[k] = lst[k], lst[i]
```

On peut raisonner à l'envers pour comprendre :

- À chaque étape on "devine" l'élément qui était en position `i` avant de trier
- Les éléments de rang $<$ `i` sont déjà fixés, donc on le nes considère pas
- Une fois chaque élément fixé, on a fini
- Complexité : $O(n)$

Recherche de la médiane

Problème de recherche de la médiane

Donnée : une liste de n éléments comparables
Résultat : l'élément médian de la liste

(Médiane : autant d'éléments supérieurs que d'éléments inférieurs)

- Algorithme naïf : calculer $\lfloor n/2 \rfloor$ fois le plus petit élément parmi les éléments restants
- Complexité :

Recherche de la médiane

Problème de recherche de la médiane

Donnée : une liste de n éléments comparables
Résultat : l'élément médian de la liste

(Médiane : autant d'éléments supérieurs que d'éléments inférieurs)

- Algorithme naïf : calculer $\lfloor n/2 \rfloor$ fois le plus petit élément parmi les éléments restants
- Complexité : $O(n^2)$. Peut-on faire mieux ?

Recherche de la médiane

Problème de recherche de la médiane

Donnée : une liste de n éléments comparables
Résultat : l'élément médian de la liste

(Médiane : autant d'éléments supérieurs que d'éléments inférieurs)

- Algorithme naïf : calculer $\lfloor n/2 \rfloor$ fois le plus petit élément parmi les éléments restants
- Complexité : $O(n^2)$. Peut-on faire mieux ?
- Idée : si on partitionne selon un pivot, l'élément médian est dans la partie qui contient plus de $n/2$ éléments...

Exercice : écrire une fonction efficace de recherche de la médiane

Recherche de la médiane

Problème de recherche du kè plus petit

Donnée : une liste de n éléments comparables
Résultat : le kè plus petit élément de la liste

```
def plus_petit(lst, k):
    debut = 0
    fin = len(lst)-1
    while True:
        p = randint(debut, fin)
        p = partitionne(lst, debut, p, fin)
        if p == k:
            return lst[k]
        elif p < k:
            debut = p+1
        else:
            fin = p-1
```

Complexité :

Recherche de la médiane

Problème de recherche du kè plus petit

Donnée : une liste de n éléments comparables

Résultat : le kè plus petit élément de la liste

```
def plus_petit(lst, k):
    debut = 0
    fin = len(lst)-1
    while True:
        p = randint(debut, fin)
        p = partitionne(lst, debut, p, fin)
        if p == k:
            return lst[k]
        elif p < k:
            debut = p+1
        else:
            fin = p-1
```

Complexité : $O(n)$ en temps et $O(1)$ en espace (en moyenne !)