Colle Maths Q15-S1-1

Mampouya

Exercice 1

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On tire une boule dans l'urne et on répète le processus suivant : tant qu'on n'a pas tiré une boule blanche, on remet la boule noire dans l'urne, plus une autre boule noire. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais nécessaires pour tirer une boule blanche.

1. Calculer $p(X=1)$, $p(X=2)$ et $p(X=3)$.
2. Montrer que $p(X=k)=\dfrac{1}{k(k+1)}$.
3. La variable X possède-t-elle une espérance ?

Corrigé

1. Il y a une chance sur 2 de tirer la boule blanche du premier coup, donc $p(X=1)=\frac{1}{2}$.
   Pour tirer la boule blanche au deuxième coup, il faut avoir tiré une boule noire d'abord, donc $p(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$.
   De même On obtient $p(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\frac{1}{4}$.
2. En généralisant on obtient que $p(X=k)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{k-1}{k}\times\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$.
3. $E(X)$, si elle existe, est la limite quand $n\to+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{k(k+1)}$, or cette série diverge donc X n'a pas d'espérance.

Exercice 2

Guy est très distrait : quand il s'arrête pour prendre de l'essence, il y a une chance sur dix pour qu'il reparte sans sa passagère, descendue pour visiter les lieux. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes que Guy a parcouru en compagnie de sa passagère, avant de repartir sans elle.

1. Établir la loi de probabilité de X.

2. En moyenne, au bout de combien d'étapes oublie-t-il sa passagère ?

3. Quel est le nombre maximum d'étapes que peut comporter le voyage pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux que la passagère arrive à destination avec Guy ?

Corrigé

1. $X\hookrightarrow\mathcal{G}\left(\dfrac{1}{10}\right)$, c'est à dire que pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, $p(X=k)=\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{9}{10}\right)^{k-1}$.

2. D'après le cours, $E(X)=10$: en moyenne, au bout de 10 étapes, il oublie sa passagère.

3. Guy n'oublie pas sa passagère si et seulement si $X>n$, donc on cherche le plus grand $n\in\mathbf{N}^*$ tel que

$$p(X>n)\geqslant\frac{1}{2}$$

Or $p(X>n)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}=\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{k}=\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ donc on doit résoudre

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\geqslant\frac{1}{2}$$

Ce qui équivaut à $(n-1)\ln\left(\frac{9}{10}\right)\geqslant-\ln 2$ Et donc $n\leqslant\frac{\ln 2}{\ln 10-\ln 9}$.
Ce nombre vaut environ 6,57 à 10^{-2} près donc la valeur cherchée est 6 : si le trajet comporte moins de 7 étapes, alors il y a plus d'une chance sur deux que Guy arrive à destination avec sa passagère.