

# Graphes orientés

---

NSI2

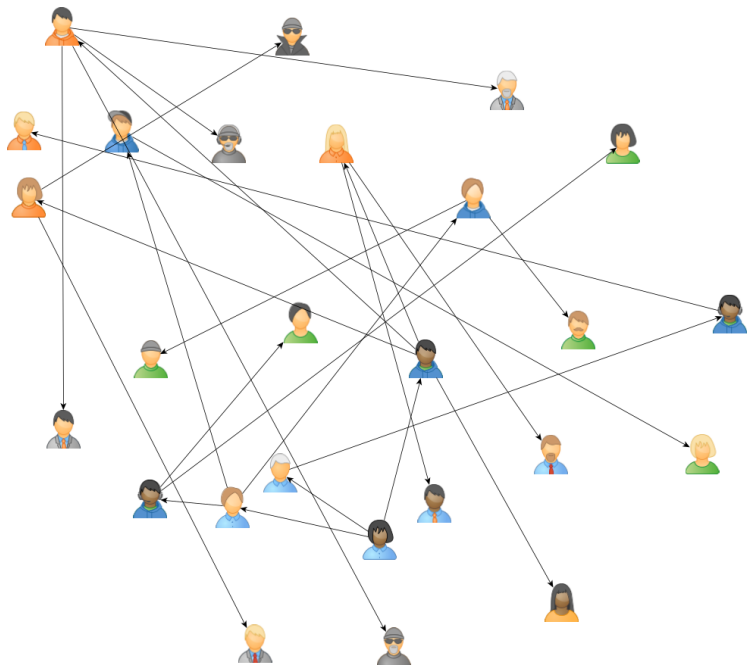
30 mars 2023

# Introduction

---

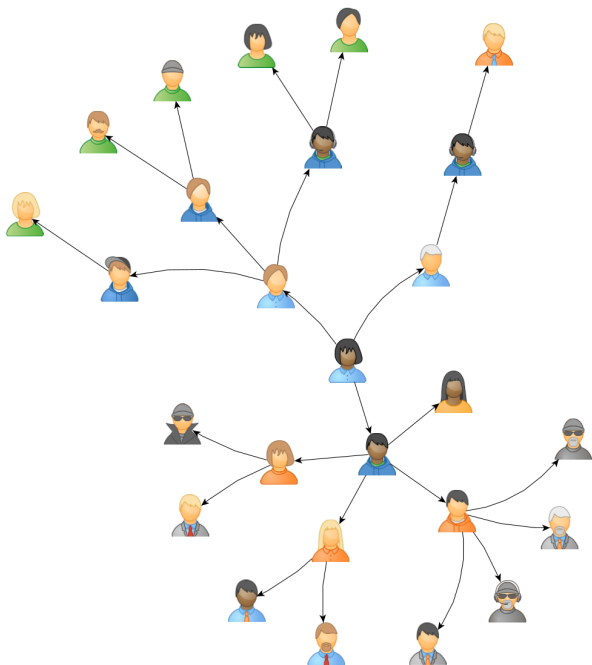
On considère des individus qui ont été infectés par une maladie et on place une flèche pour signifier que tel individu a contaminé tel autre individu.

On obtient ce résultat :

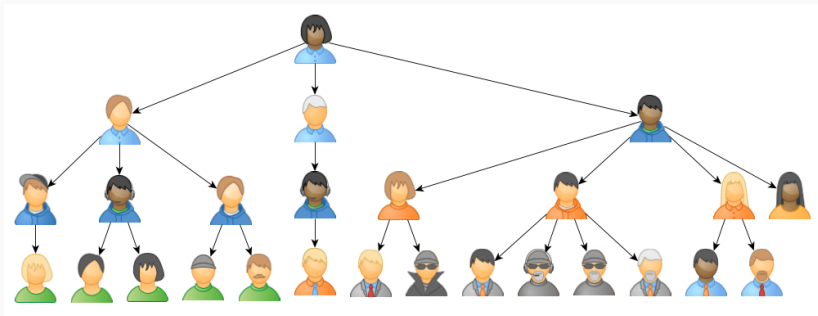


C'est le fouillis, n'est-ce pas ?

En déplaçant les sommets du graphe on peut le présenter ainsi :

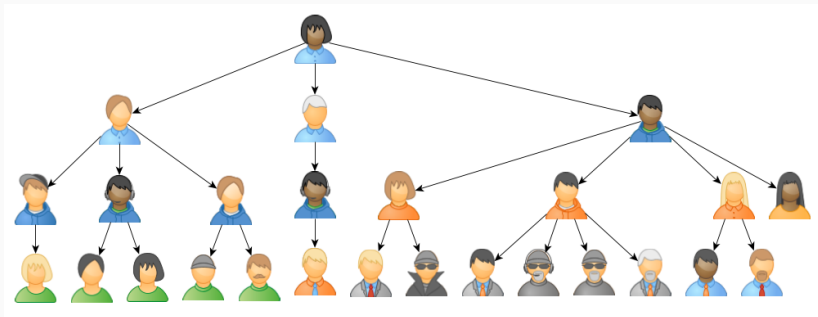


C'est le même graphe mais on y voit plus clair... et on y voit encore plus clair comme ça :



On voit clairement le « patient zéro » et on reconnaît quelque chose qui ressemble à une structure que l'on a déjà rencontrée :





On voit clairement le « patient zéro » et on reconnaît quelque chose qui ressemble à une structure que l'on a déjà rencontrée : une arborescence.

La représentation graphique d'un graphe orienté ne le caractérise pas, même si certaines représentations aident à mieux en cerner la structure.

Ce qui caractérise un graphe orienté c'est bel et bien ses **sommets** et ses **arcs**.

# Représentations d'un graphe

---

Abel, Briec, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.

Abel, Briec, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.

On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

Abel, Briec, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.

On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

- Abel a aimé des messages de Corentin et David ;

Abel, Briec, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.

On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

- Abel a aimé des messages de Corentin et David ;
- Briec a aimé ses messages, ceux d'Abel et de Corentin ;

Abel, Briec, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.

On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

- Abel a aimé des messages de Corentin et David ;
- Briec a aimé ses messages, ceux d'Abel et de Corentin ;
- Corentin a aimé les messages de David ;



Abel, Briec, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.

On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

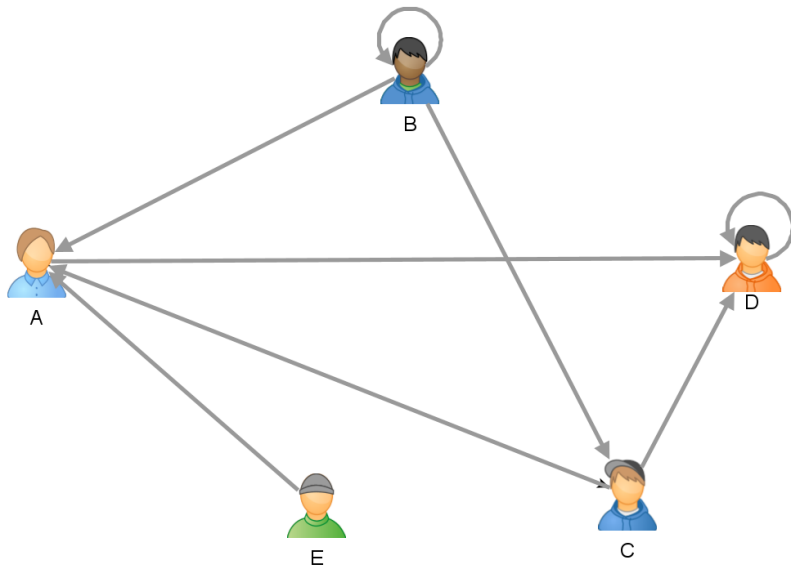
- Abel a aimé des messages de Corentin et David ;
- Briec a aimé ses messages, ceux d'Abel et de Corentin ;
- Corentin a aimé les messages de David ;
- David a aimé ses propres messages ;

Abel, Briec, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.

On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

- Abel a aimé des messages de Corentin et David ;
- Briec a aimé ses messages, ceux d'Abel et de Corentin ;
- Corentin a aimé les messages de David ;
- David a aimé ses propres messages ;
- Ewen a aimé les messages d'Abel.

# Représentation graphique



Ces résultats permettent de produire un **graphe orienté** :

Ces résultats permettent de produire un **graphe orienté** :

- les **sommets du graphe** représentent les personnes;

Ces résultats permettent de produire un **graphe orienté** :

- les **sommets du graphe** représentent les personnes;
- les **arcs** sont des flèches qui représentent le fait que la personne de départ aime les messages de celle d'arrivée.

On peut aussi représenter les résultats dans un tableau :

personne	A	B	C	D	E
aime les messages de	C,D	A, B,C	D	D	A

On peut aussi recopier le tableau en donnant pour chaque personne la liste de ses « followers » (personnes qui ont aimé ses messages) :

personne	A	B	C	D	E
followers	B,E	B	A,B	A,C,D	—



# Matrice d'adjacence

On peut aussi présenter les données ainsi :

		arrivée				
		A	B	C	D	E
départ	A	0	0	1	1	0
	B	0	1	1	0	0
	C	0	0	0	1	0
	D	0	0	0	1	0
	E	1	0	0	0	0

Il y a donc plusieurs manières de représenter un graphe orienté.

Il y a donc plusieurs manières de représenter un graphe orienté.

À ces représentations correspondent différentes implémentations.

## Un peu de théorie

---

Un graphe orienté  $G$ , c'est la donnée de

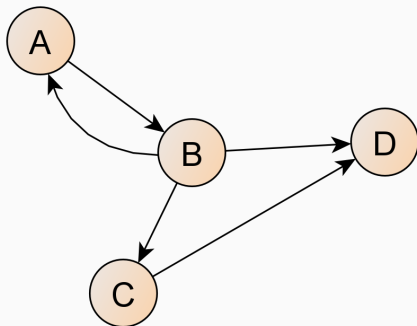
Un graphe orienté  $G$ , c'est la donnée de

- un ensemble  $S = \{s_1; \dots; s_n\}$  de sommets;

Un graphe orienté  $G$ , c'est la donnée de

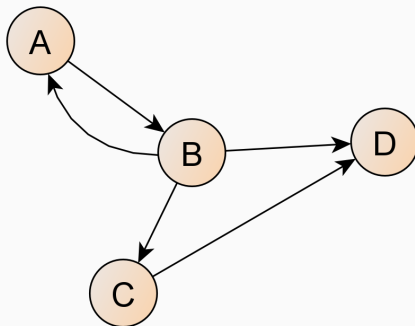
- un ensemble  $S = \{s_1; \dots; s_n\}$  de **sommets**;
- un ensemble  $A$  composé d'**arcs** du type  $(s_i; s_j)$ , qui indiquent qu'il y a « une flèche » partant du sommet  $s_i$  et allant au sommet  $s_j$ . :  
 $s_i$  est appelé l'**origine** de l'arc et  $s_j$  son **extrémité**.

# Exemple



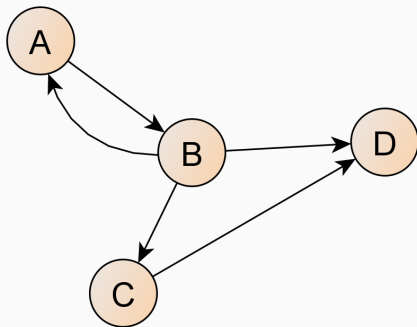


# Exemple



Ici l'ensemble des sommets est  $\{A; B; C; D\}$ .

# Exemple

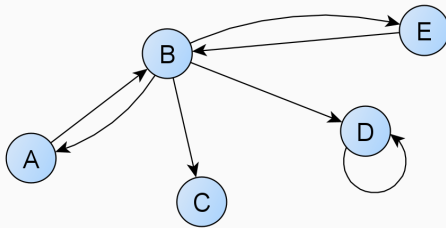


Ici l'ensemble des sommets est  $\{A; B; C; D\}$ .

L'ensemble des arcs est  $\{(A; B); (B; A); (B; C); (B; D); (C; D)\}$

# Exercice

Donner l'ensemble des sommets et l'ensemble des arc du graphe suivant.



# Définition : boucle

Un arc dont l'origine et l'extrémité sont confondues d'appelle une **boucle**.

# Définition : Successeurs, prédécesseurs

Soit un graphe de sommets  $S$  et d'arcs  $A$ . Soit  $s$  un sommet.

# Définition : Successeurs, prédécesseurs

Soit un graphe de sommets  $S$  et d'arcs  $A$ . Soit  $s$  un sommet.

On note  $\Gamma^+(s)$  l'ensemble des successeurs de  $s$ .

# Définition : Successeurs, prédécesseurs

Soit un graphe de sommets  $S$  et d'arcs  $A$ . Soit  $s$  un sommet.

On note  $\Gamma^+(s)$  l'ensemble des successeurs de  $s$ .

C'est l'ensemble des extrémités des arcs partant de  $s$ .

# Définition : Successeurs, prédécesseurs

Soit un graphe de sommets  $S$  et d'arcs  $A$ . Soit  $s$  un sommet.

On note  $\Gamma^+(s)$  l'ensemble des successeurs de  $s$ .

C'est l'ensemble des extrémités des arcs partant de  $s$ .

De même, on note  $\Gamma^-(s)$  l'ensemble des prédécesseurs de  $s$ .



# Définition : Successeurs, prédécesseurs

Soit un graphe de sommets  $S$  et d'arcs  $A$ . Soit  $s$  un sommet.

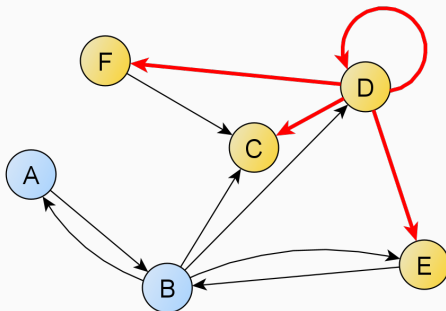
On note  $\Gamma^+(s)$  l'ensemble des successeurs de  $s$ .

C'est l'ensemble des extrémités des arcs partant de  $s$ .

De même, on note  $\Gamma^-(s)$  l'ensemble des prédécesseurs de  $s$ .

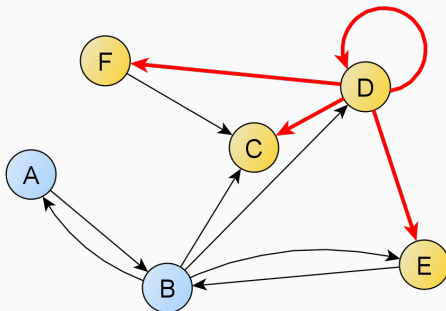
C'est l'ensemble des origines des arcs arrivant sur  $s$ .

# Successeurs : exemple



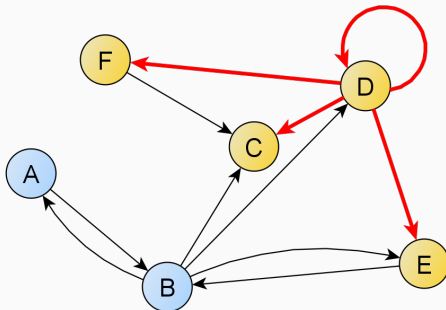
Dans ce graphe, il y a 4 arcs d'origine D.

# Successeurs : exemple



Dans ce graphe, il y a 4 arcs d'origine D. Leurs extrémités sont les points C, D, E et F.

# Successeurs : exemple



Dans ce graphe, il y a 4 arcs d'origine D. Leurs extrémités sont les points C, D, E et F.

Ainsi  $\Gamma^+(D) = \{C; D; E; F\}$ .

On peut caractériser tout graphe à partir d'un **tableau des successeurs**.

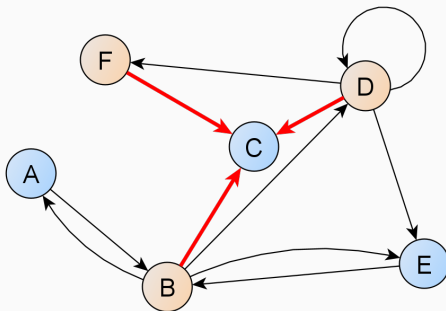
# Tableau des successeurs

On peut caractériser tout graphe à partir d'un **tableau des successeurs**.

Voici celui du graphe précédent :

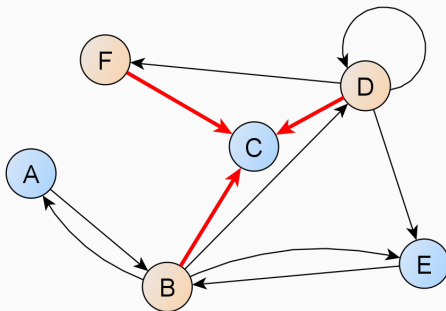
Sommet	A	B	C	D	E	F
successeurs	B	A, C, E	—	C, D, E, F	B	C

# Prédécesseurs : exemple



Dans ce graphe, il y a 3 arcs d'extrémité C.

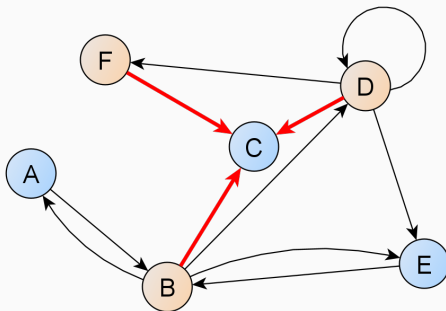
# Prédécesseurs : exemple



Dans ce graphe, il y a 3 arcs d'extrémité C.  
Leurs origines sont les points B,D et F.



# Prédécesseurs : exemple



Dans ce graphe, il y a 3 arcs d'extrémité C.  
Leurs origines sont les points B, D et F.  
Ainsi  $\Gamma^{-}(C) = \{B; D; F\}$ .

Il caractérise également le graphe. Voici celui du graphe précédent :

Sommet	A	B	C	D	E	F
prédécesseurs	B	A, E	B, D, F	B, D	B, D	D

# Matrice d'adjacence

---

Soit un graphe  $G$  de sommets  $S = \{s_1; \dots; s_n\}$  et d'arcs  $A$ .

Soit un graphe  $G$  de sommets  $S = \{s_1; \dots; s_n\}$  et d'arcs  $A$ .  
On appelle *matrice d'adjacence de  $G$*  la matrice carrée d'ordre  $n$   
 $M = (m_{ij})$  telle que

Soit un graphe  $G$  de sommets  $S = \{s_1; \dots; s_n\}$  et d'arcs  $A$ .  
On appelle *matrice d'adjacence* de  $G$  la matrice carrée d'ordre  $n$   
 $M = (m_{ij})$  telle que

- $m_{ij} = 1$  s'il y a un arc partant de  $s_i$  et arrivant sur  $s_j$ ;

Soit un graphe  $G$  de sommets  $S = \{s_1; \dots; s_n\}$  et d'arcs  $A$ .  
On appelle *matrice d'adjacence* de  $G$  la matrice carrée d'ordre  $n$   
 $M = (m_{ij})$  telle que

- $m_{ij} = 1$  s'il y a un arc partant de  $s_i$  et arrivant sur  $s_j$ ;
- $m_{ij} = 0$  sinon.

Soit un graphe  $G$  de sommets  $S = \{s_1; \dots; s_n\}$  et d'arcs  $A$ .

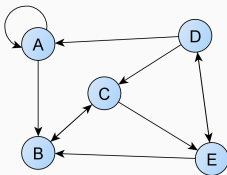
On appelle *matrice d'adjacence* de  $G$  la matrice carrée d'ordre  $n$   $M = (m_{ij})$  telle que

- $m_{ij} = 1$  s'il y a un arc partant de  $s_i$  et arrivant sur  $s_j$ ;
- $m_{ij} = 0$  sinon.

$i$  est le numéro de ligne et  $j$  celui des colonnes de la matrice  $M$ .

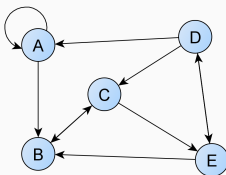


# Exemple



En écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique, on obtient

# Exemple

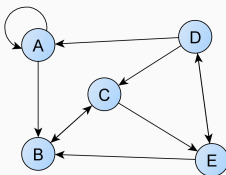


En écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \textcolor{red}{1} & 0 \end{pmatrix}$$

L'élément encadré de  $M$  est à la 3<sup>e</sup> ligne et à la 2<sup>e</sup> colonne : c'est  $m_{32}$ .

## Exemple

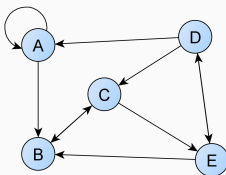


En écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \textcolor{red}{1} & 0 \end{pmatrix}$$

L'élément encadré de  $M$  est à la 3<sup>e</sup> ligne et à la 2<sup>e</sup> colonne : c'est  $m_{32}$ . Il vaut 1 et signifie qu'il y a un arc partant du sommet 3, donc C, et allant au sommet 2, donc B.

# Exemple



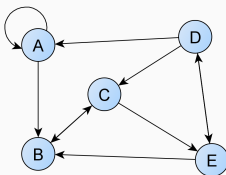
En écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \textcolor{red}{1} & 0 \end{pmatrix}$$

L'élément encadré de  $M$  est à la 3<sup>e</sup> ligne et à la 2<sup>e</sup> colonne : c'est  $m_{32}$ . Il vaut 1 et signifie qu'il y a un arc partant du sommet 3, donc C, et allant au sommet 2, donc B.

De même, du 5<sup>e</sup> sommet E, il existe un arc allant vers le 4<sup>e</sup> (D), donc  $m_{54} = 1$  (en rouge).

# Exemple



En écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \textcolor{red}{1} & 0 \end{pmatrix}$$

L'élément encadré de  $M$  est à la 3<sup>e</sup> ligne et à la 2<sup>e</sup> colonne : c'est  $m_{32}$ . Il vaut 1 et signifie qu'il y a un arc partant du sommet 3, donc C, et allant au sommet 2, donc B.

De même, du 5<sup>e</sup> sommet E, il existe un arc allant vers le 4<sup>e</sup> (D), donc  $m_{54} = 1$  (en rouge).

Dans une matrice d'adjacence

Dans une matrice d'adjacence

- Les lignes correspondent aux points de départ, les colonnes au point d'arrivée;

Dans une matrice d'adjacence

- Les lignes correspondent aux points de départ, les colonnes au point d'arrivée;
- Sur une ligne donnée (la  $i^{\text{e}}$  par exemple), on peut lire *tous les successeurs* de  $s_i$ ;



Dans une matrice d'adjacence

- Les lignes correspondent aux points de départ, les colonnes au point d'arrivée;
- Sur une ligne donnée (la  $i^{\text{e}}$  par exemple), on peut lire *tous les successeurs* de  $s_i$ ;
- Sur une colonne donnée, (la  $j^{\text{e}}$  par exemple), on lit *tous les prédécesseurs* de  $s_j$ ;

## Chemins, circuits

---

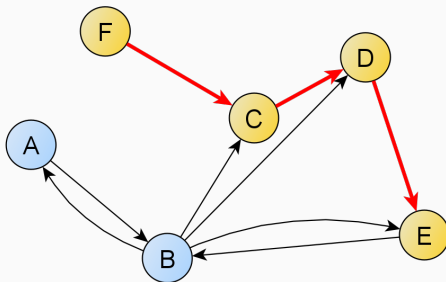
On considère un graphe orienté.

Un **chemin** est une succession de sommets dans un ordre donné, chacun étant relié au suivant par un arc.

La **longueur** du chemin, c'est le nombre d'arcs qui composent le chemin.

C'est aussi le nombre de sommets qui composent le chemin moins un.

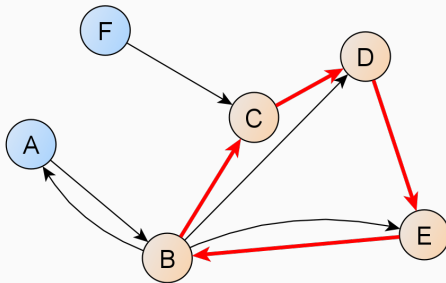
# Exemple



$(F, C, D, E)$  est un chemin de longueur 3.

$(F, C, B, E)$  n'en est pas un car l'arc  $(C, B)$  n'existe pas.

Un **circuit** est un chemin dont le premier et le dernier sommet sont identiques (un chemin « fermé » en quelque sorte).

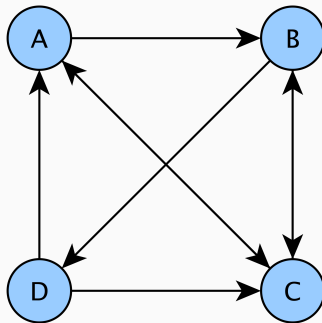


(C, D, E, B, C) est un circuit de longueur 4.

## Implémentation n°1

---

## À l'aide d'une matrice d'adjacence



```
G = [[0, 1, 1, 0], # successeurs de A  
      [0, 0, 1, 1], # successeurs de B  
      [1, 1, 0, 0], # successeurs de C  
      [1, 0, 1, 0]] # successeurs de D
```

- Très simple à mettre en œuvre.
- Fonctions **successeurs** et **arc** facile à coder.

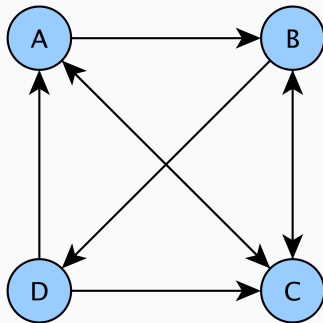


- On ne peut pas facilement ajouter d'autres sommets.
- Pour  $n$  sommets on a une matrice  $n \times n$ , ce qui prend beaucoup de place surtout s'il n'y a pas beaucoup d'arcs.
- On n'a pas les noms des sommets dans la matrice, c'est à nous de connaître la correspondance.

- On peut très facilement encapsuler la matrice et les fonctions dans une classe.
- Attention, en PYTHON, les indices commencent à 0, donc il y a un petit « décalage » par rapport à la matrice théorique.

## Implémentation n°2

---



```
G = {'A' : ['B', 'C'], # les sommets sont les clés  
      'B' : ['C', 'D'], # et les valeurs les listes  
      'C' : ['A', 'B'], # des successeurs de chaque  
      'D' : ['A', 'C']} # clé
```

- On peut facilement ajouter d'autres sommets.
- On dispose des noms des sommets.
- Solution assez « élégante ».

Si le nombre de sommets (et surtout d'arcs) est grand, cette implémentation prendra beaucoup plus de place en mémoire qu'une simple matrice d'adjacence.

Encore une fois, il est judicieux d'encapsuler ce dictionnaire dans une classe.

On pourra alors définir des méthodes telles que :

- `liste_sommets`
- `successeurs`
- `predecesseurs`
- *Et cætera*