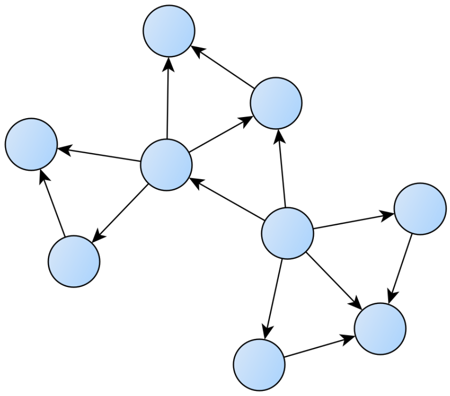
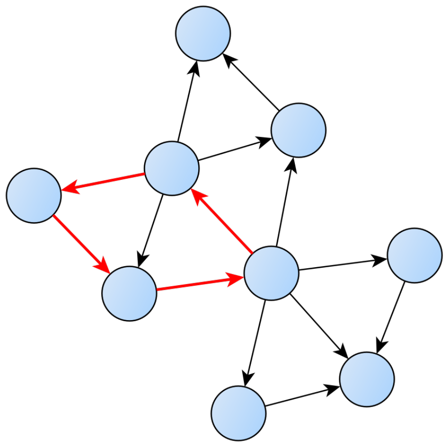
Chapitre 1
Graphes : méthodes et algorithmes

1 Niveaux dans un graphe orienté sans circuit

On dit qu'un graphe orienté est *sans circuit* lorsqu'il ne … comporte aucun circuit, c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver un chemin partant d'un sommet et y revenant.

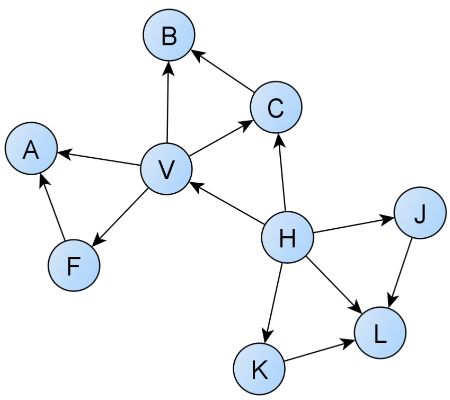


graphe sans circuit

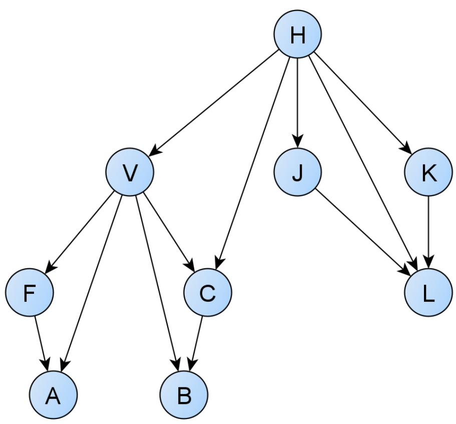


graphe avec circuit

Lorsqu'un graphe orienté est sans circuit il est possible de l'organiser de manière *hiérarchisée*, comme ceci :



graphe sans circuit



le même graphe hiérarchisé

Comment faire ? À droite, on voit que les sommets sont disposés en couches horizontales : des *niveaux*. Il faut donc définir ce qu'est le niveau d'un sommet.

Propriété

Dans un graphe orienté sans circuit, il existe un sommet qui n'a pas de prédécesseur.

Preuve

Soit n le nombre de sommets du graphe. On va raisonner par l'absurde : supposons que notre graphe soit sans circuit, mais qu'il n'existe aucun sommet sans prédécesseur. Alors tout sommet possède un prédécesseur.
On en choisit un, on l'appelle S_0 puis un de ses prédécesseurs qu' on appelle S_1

- si $S_1 = S_0$ alors il y a une boucle (donc un circuit de longueur 1) sur S_0 et c'est contradictoire avec notre hypothèse.
- sinon on continue et on appelle S_2 un prédécesseur de S_1.

À chaque nouveau sommet choisi si c'est un sommet qui figure déjà dans la liste des sommets choisis, cela nous permet d'exhiber un circuit et c'est contradictoire. Or comme il n'y a que n sommets, au bout de n étapes (au maximum), on sera obligés de choisir un sommet déjà choisi.

Définition : niveau d'un sommet dans un graphe orienté sans circuit

Soit un sommet d'un graphe orienté sans circuit

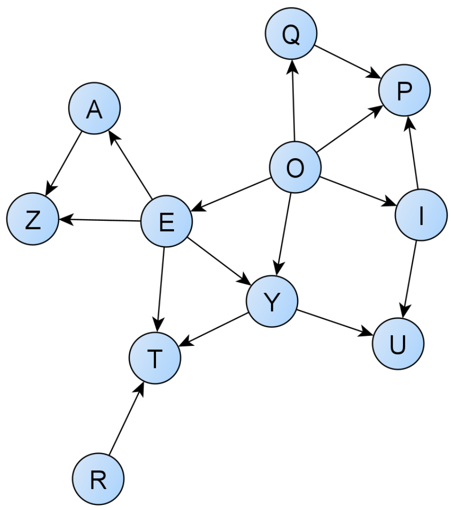
- s'il n'a pas de prédécesseur, son niveau est 0 ;
- sinon, on considère tous ses prédécesseurs, on choisit celui qui a le niveau le plus élevé et on ajoute 1 : on obtient le niveau du sommet.

Pour déterminer les niveaux des sommets on peut aussi appliquer l'algorithme suivant :

```
Variables
    L : liste des sommets
    n : entier
Début
    n <-- 0
    tant que L est non vide
        sélectionner tous les sommets qui n'ont aucun prédécesseur dans L
        ils ont le niveau n
        enlever ces sommets de L
    n <-- n + 1
Fin
```

Exemple

On considère le graphe suivant :



On commence par construire le tableau des prédécesseurs :

sommet	A	Z	E	R	T	Y	U	I	O	P	Q
prédécesseurs	E	A,E	O	—	R,E,Y	E,O	Y,I	O	—	I,O,Q	O

R et O ont le niveau 0. On les retire du tableau :

sommet	A	Z	E	T	Y	U	I	P	Q
prédécesseurs	E	A,E	—	E,Y	E	Y,I	—	I,Q	—

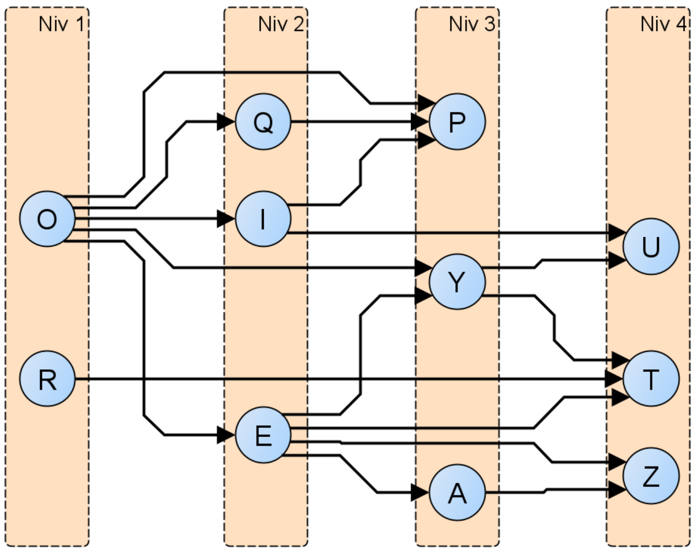
E, I et Q ont le niveau 1, on les retire :

sommet	A	Z	T	Y	U	P
prédécesseurs	—	A	Y	—	Y	—

A, Y et P ont le niveau 2 et on voit que Z, T et U ont le niveau 3.

sommet	R	O	E	I	Q	A	Y	P	Z	T	U
niveau	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3

On peut maintenant redessiner le graphe de manière hiérarchisée de haut en bas ou de droite à gauche, en alignant les sommets par niveaux :

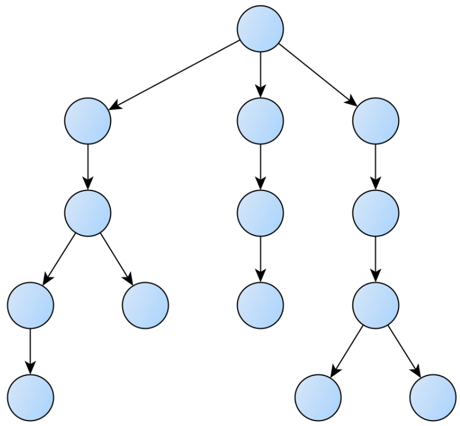


graphe représenté de manière nivelée

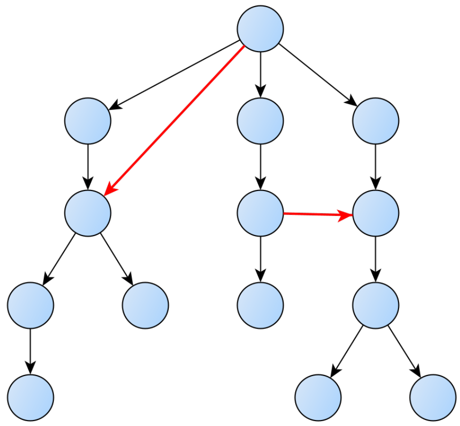
En appliquant cette méthode on peut parfois prouver qu'un graphe donné est une *arborescence*.

Définition : arborescence

Une *arborescence* est un graphe oriente qui possède *un unique sommet de niveau 0*, qu'on appelle la *racine* et à partir de laquelle on peut atteindre *tout autre sommet par un unique chemin*.

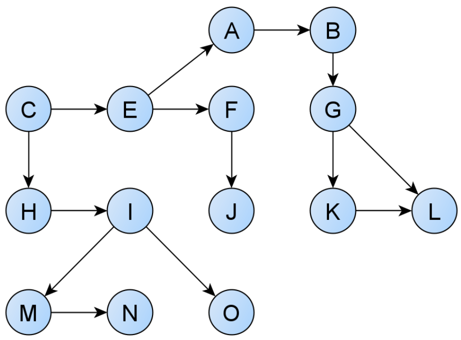


graphe qui est une arborescence



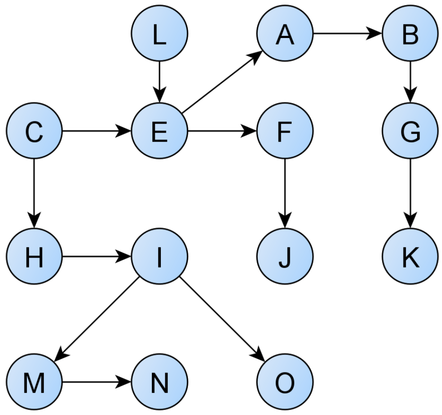
graphe qui n'en est pas une

Exercice 1



1. Dresser le tableau des prédécesseurs du graphe ci-dessus.
2. Déterminer le niveau de chaque sommet.
3. Dessiner le graphe de manière hiérarchisée.
4. Ce graphe est-il une arborescence ?

Exercice 2

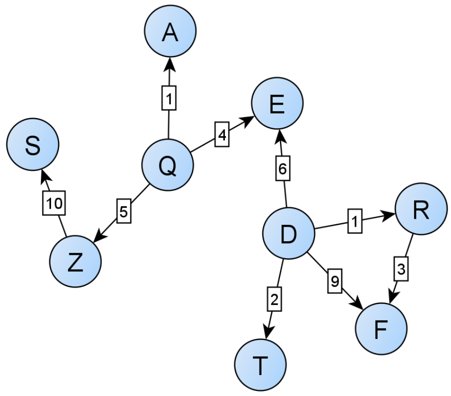


Ce graphe est-il une arborescence ?

2 Graphes orientés valués et ordonnancement

Définition : graphe orienté valué

un graphe orienté est dit *valué* (on dit aussi pondéré) lorsqu'on attribue un nombre réel à chacun de ses arcs.



un exemple de graphe valué

Imaginons maintenant une équipe de plusieurs personnes qui travaille sur un projet, (ce peut être le développement d'une application ou bien la construction d'une salle de sport). Toutes les personnes ne travaillent pas sur les mêmes aspects du projet. Certaines tâches peuvent être réalisées en même temps (par exemple on peut penser qu'on peut poser un revêtement au sol de la salle de sport en même temps qu'on peint sa façade). Certaines doivent attendre que d'autres soient terminées pour pouvoir commencer (évidemment avant de peindre la façade il faut avoir monté la façade), on parle de *contraintes d'antériorité*.
Les contraintes d'antériorité conduisent naturellement à un graphe orienté. Chaque tâche possède une durée propre, qui conduit à pondérer le graphe.

Faire de l'ordonnancement, c'est préciser la chronologie des différentes tâches (éventuellement effectuées en parallèle), déterminer la durée minimale du projet et les conséquences éventuelles d'un retard lors de la réalisation de telle ou telle tâche.

La méthode MPM sur un exemple

Cette méthode de gestion de projet, appelée méthode des potentiels métra (MPM) fut développée par le mathématicien français Bernard Roy en 1958, pour être directement appliquée en usine.

On va considérer le tableau de tâches suivant

Tâche	A	B	C	D	E	F	G
Durée en jours	6	3	6	2	4	3	1
Tâches antérieures	—	—	—	B	B	A, D	C, E, F

Dans celui-ci on lit, par exemple, que la tâche F dure 3 jours et ne peut commencer que lorsque A et D sont terminées.

Cet exemple va nous servir à illustrer la méthode MPM, mais nous donnerons les définitions dans le cas général.

Notations

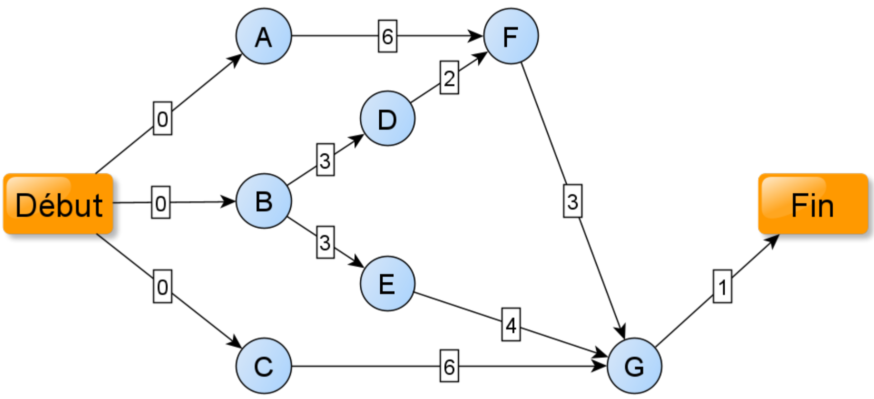
> On note G le graphe orienté valué qui représente les tâches du projet.
> Il a n sommets s_1, ..., s_n qui représentent toutes les tâches. On écrit s_i pour parler d'un de ces sommets sans dire précisément lequel.
> On note aussi $d(s_i)$ la durée de la tâche s_i, c'est la valeur (le poids) de tous les arcs qui partent de s_i.

Niveler le graphe

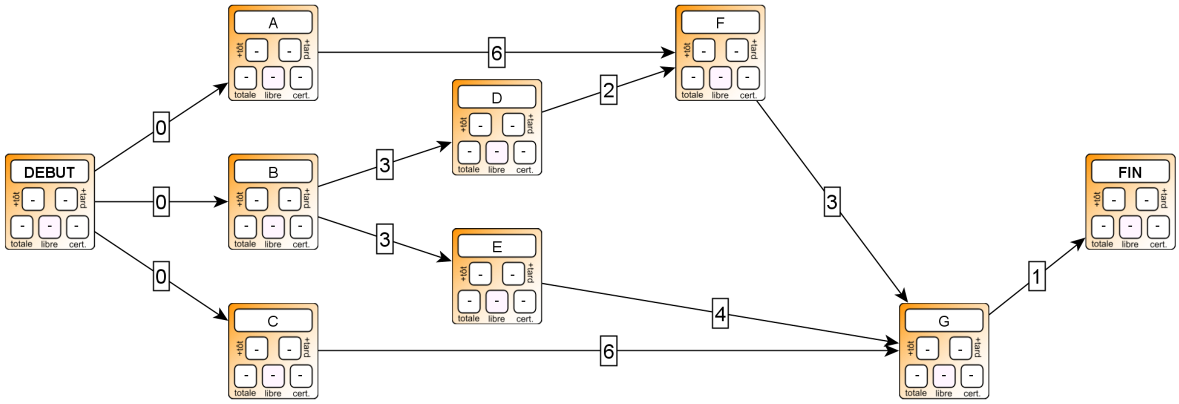
Dans le graphe qu'on va construire, les tâches antérieures sont les *prédécesseurs directs* de chaque tâche, et il n'y a pas de circuit (heureusement pour le projet). On peut donc niveler le graphe :

- A, B et C sont clairement de niveau 0 ;
- D et E sont de niveau 1;
- F est de niveau 2;
- G est de niveau 3.

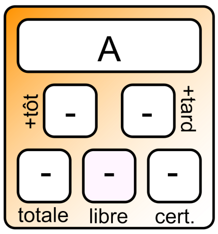
Cela nous permet de représenter le graphe du projet de manière hiérarchisée. On parle alors de *graphe d'ordonnancement*. Pour les besoins on rajoute 2 sommets « fictifs » : le début et la fin du projet. On pondère les arcs par les durées des tâches (on met 0 en partant de début car on considère que le projet peut commencer maintenant) :



Puis, étant donné que l'on va déterminer beaucoup de paramètres, on utilisera plutôt cette représentation :



Comme on peut le voir, pour chaque sommet, on peut déterminer 5 paramètres :



1. D'abord, on détermine la *date au plus tôt* de chaque tâche.
2. Ensuite on peut déterminer la *date au plus tard* de chaque tâche.
3. Cela permet de déterminer la *marge totale* de chaque tâche, ainsi que la *marge libre* et la *marge certaine*.

Nous allons définir ces nombres au fur et à mesure.

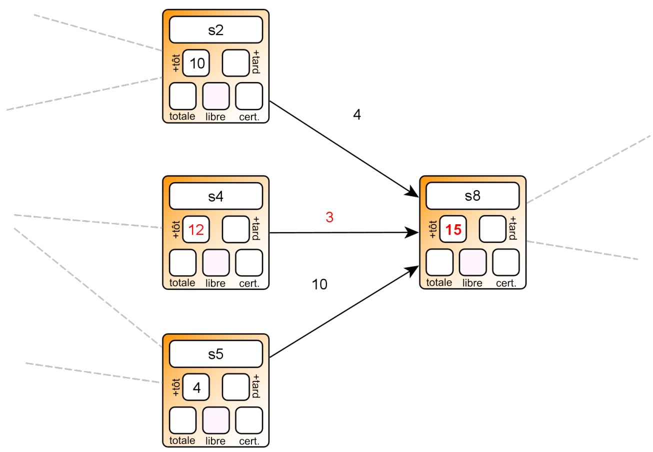
Date au plus tôt

Définition : date au plus tôt

On note $t(s_i)$ la *date au plus tôt* de la tâche s_i. Puisque s_i ne peut commencer que lorsque toutes les tâches antérieures sont terminées on a

$$t(s_i) = \max\left(\{t(s_j) + d(s_j) \ : \ s_j \text{ prédécesseur de } s_i\}\right)$$

Exemple



Pour calculer la date au plus tôt de s_8, il faut que les tâches antérieures s_2, s_4 et s_5 soient terminées :

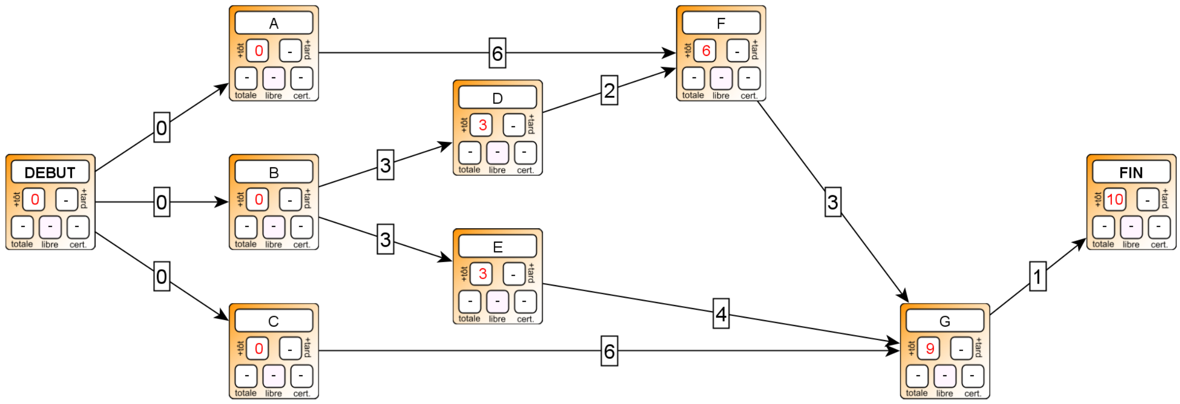
– s_2 commence au bout de 10 jours, dure 4 jours, donc est terminée au bout de 14 jours;

– s_4 commence au bout de 12 jours, dure 3 jours, donc est terminée au bout de 15 jours;

– s_5 commence au bout de 4 jours, dure 10 jours, donc est terminée au bout de 14 jours.

En définitive, $t(s_8) = 15$.

Calculons toutes les dates au plus tôt de notre projet. On commence par le début et on procède *niveau par niveau* dans l'ordre hiérarchique :



Définition : durée minimale de réalisation d'un projet

C'est le temps minimal requis pour que toutes les tâches soient accomplies en respectant les contraintes.

Dans notre cas la *durée minimale du projet* est de 10 jours.

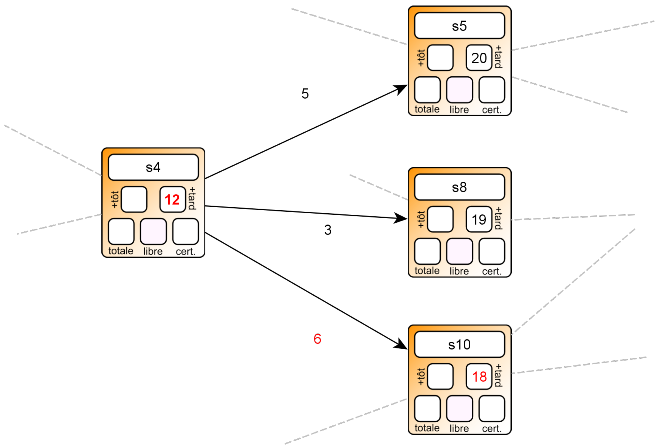
Date au plus tard

Définition : date au plus tard

On note $T(s_i)$ la *date au plus tard* de la tâche s_i : c'est la date maximale à laquelle on peut commencer s_i sans que cela ne repousse la date de fin du projet.

$$T(s_i) = \min\left(\{T(s_j) - d(s_i) \ : \ s_j \text{ successeur de } s_i\}\right)$$

Exemple

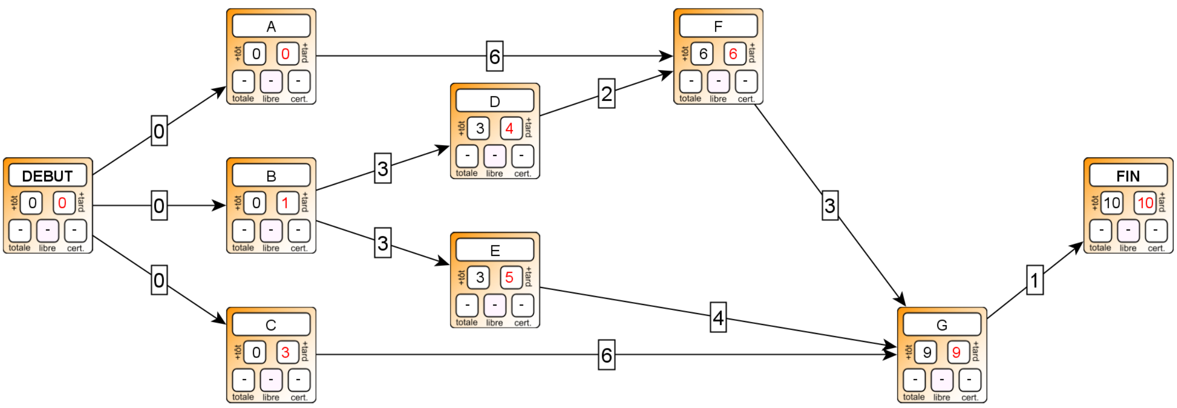


On n'a pas renseigné les dates au plus tôt car elles n'interviennent pas ici, mais normalement elles doivent avoir été calculées d'abord.
La tâche s_4 dure 6 jours

- puisqu'on peut commencer s_5 au plus tard au bout de 20 jours, il faut commencer s_4 au plus tard au bout de $20 - 6 = 14$ jours pour ne pas ralentir ;
- Puisqu'on peut commencer s_8 au plus tard au bout de 19 jours, il faut commencer s_4 au plus tard au bout de $19 - 6 = 13$ jours pour ne pas ralentir ;
- Puisqu'on peut commencer s_{10} au plus tard au bout de 18 jours, il faut commencer s_4 au plus tard au bout de $18 - 6 = 12$ jours pour ne pas ralentir.

Ainsi $T(s_4) = 12$.

Calculons toutes les dates au plus tard de notre projet. On commence par la fin : la date au plus tard de la fin est par définition égale à sa date au plus tôt. Ensuite on « remonte » la hiérarchie niveau par niveau :



On s'aperçoit que certaines tâches autorisent une « marge de manœuvre » et d'autres non. Nous allons préciser cela.

Marge totale, tâche critique

Définitions : marge totale et tâche critique

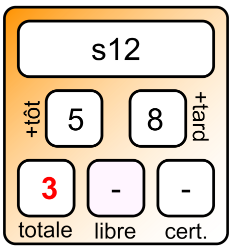
La *marge totale* d'une tâche s_i est

$$MT(s_i) = T(s_i) - t(s_i)$$

C'est le retard maximum que l'on peut accepter sur la date de début au plus tôt de la tâche sans que cela ne retarde la date de fin de projet.

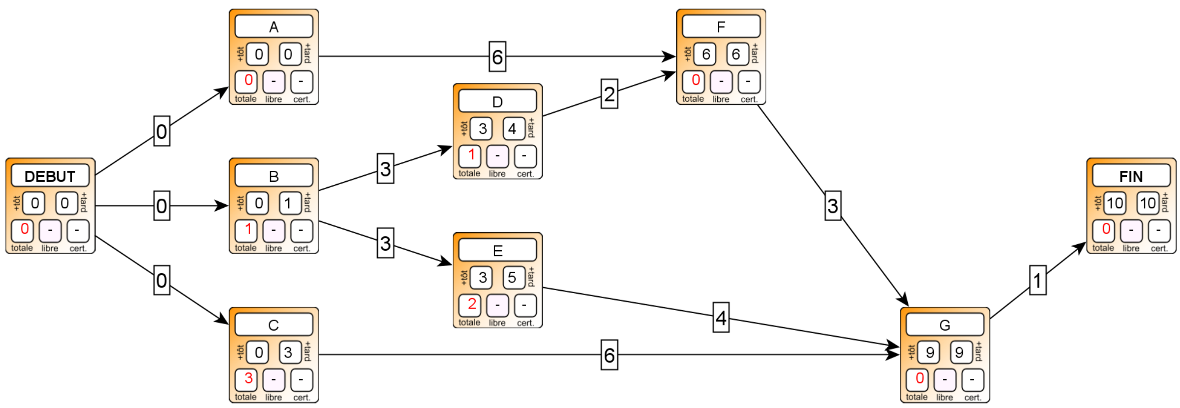
Si la marge totale d'une tâche est nulle, on dit que c'est une *tâche critique* : on doit impérativement la commencer au plus tôt, sinon le projet sera ralenti.

Exemple



La tâche s_{12} peut commencer au plus tôt au bout de 5 jours et au plus tard au bout de 8 jours. Sa marge totale est donc $MT(s_{12}) = 3$. Ce n'est pas une tâche critique : une fois que toutes les tâches antérieures à s_{12} sont effectuées, on peut en théorie encore attendre 3 semaines avant de commencer s_{12}.

Calculons les marges totales des tâches de notre projet :



Il existe des tâches critiques (en plus du début et de la fin) : A, F et G.

Définition : chemin critique

Un chemin critique est un chemin qui n'est composé que de tâches critiques.

Le chemin début-A-F-G-fin n'est composé que de tâches critiques : c'est un *chemin critique*.

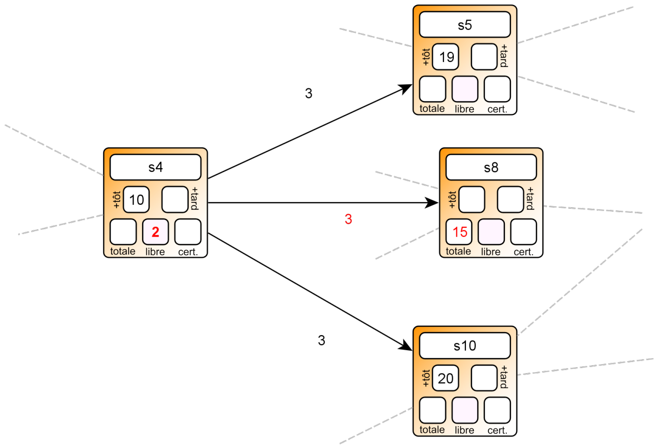
Marge libre

Définition : marge libre

La *marge libre* d'une tâche, c'est le retard maximum que l'on peut accepter sur la date de début *au plus tôt* d'une tâche sans que cela ne retarde la date de début *au plus tôt* de chacune des dates suivantes.

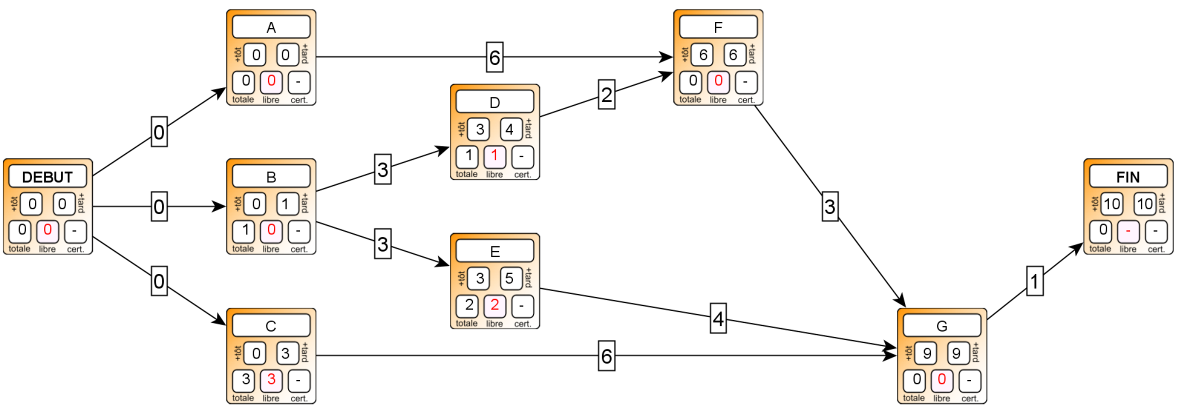
$$ML(s_i) = \text{min}\left(\{t(s_j) - t(s_i) - d(s_i) \ : \ s_j \text{ successeur de } s_i\}\right)$$

Exemple



La tâche s_4 dure trois jours. En la commençant au plus tôt on finit à 13 jours. Il y a des marges pour chacune des tâches suivantes, la plus petite est pour s_8 et vaut 3 jours.
Ainsi $ML(s_4) = 3$.

Calculons les marges libres pour notre exemple :



Marge certaine

Définition : marge certaine

La *marge certaine* d'une tâche est le retard que l'on peut prendre sur cette tâche sans modifier les dates de début au plus tôt des tâches postérieures, tout en sachant que les tâches précédentes ont commencées à leur date au plus tard.
Il faut commencer par calculer *la date au plus tôt retardée de la tâche*, c'est-à-dire la date au plus tôt de la tâche sachant que les tâches précédentes ont commencé à leur date au plus tard. Pour une tâche s_i cette date est

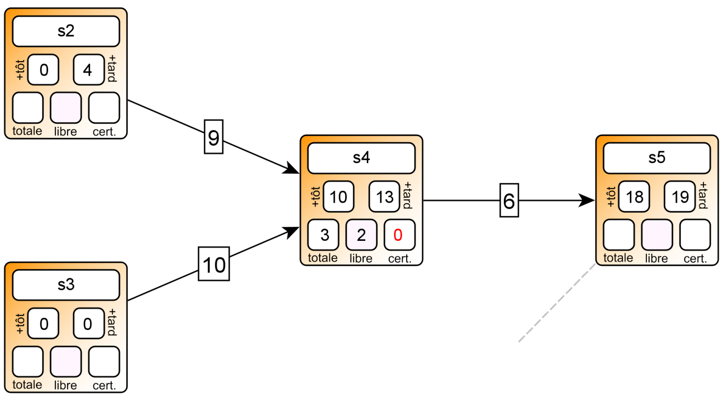
$$DR(s_i) = \max\left(\{T(s_j) + d(s_j) \ : \ s_j \text{ prédécesseur de } s_i\}\right)$$

Et alors la marge certaine est

$$MC(s_i) = \min\left(\{t(s_j) - DR(s_i) - d(s_i) \ : \ s_j \text{ successeur de } s_i\}\right)$$

Avec la convention que si ce résultat est négatif on décide que $MC(s_i) = 0$.

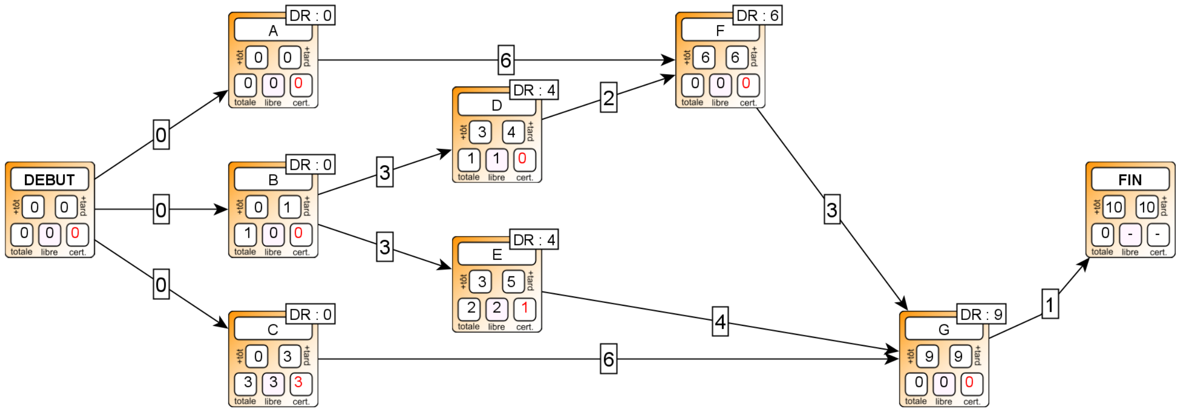
Exemple



Pour calculer la marge certaine de la tâche s_4 :

- On calcule $DR(s_4)$: au pire s_3 commence à 0 et dure 10 donc fait commencer s_4 à 10, et au pire s_2 commence à 9 et dure 4 donc fait commencer s_4 à 13. La date retardée $DR(s_4)$ vaut donc 13.
- s_4 n'a qu'un successeur : s_5, on calcule donc $t(s_5) - DR(s_4) - d(s_4)$, cela donne $18 - 13 - 6 = -1$, c'est négatif donc $MC(s_4) = 0$.

Calculons les marges certaines pour notre exemple :



L'intérêt de l'ordonnancement est de déterminer les tâches critiques, dont le déroulement devra être rigoureusement suivi pour ne pas perturber la suite du projet. Lorsque des tâches fortement non critiques (comme les tâches C ou E) sont trouvées, on peut par exemple diminuer un peu les ressources attribuées à ces tâches, quitte à utiliser leur marge libre, dans le but de réduire le coût global du projet.