

Récurtivité

Chapitre 01

NSI2

28 août 2023

Le formidable principe de la récursivité

On dit qu'une fonction est **récursive** lorsque dans sa définition on appelle (une ou plusieurs fois) cette même fonction.

On dit qu'une fonction est **récursive** lorsque dans sa définition on appelle (une ou plusieurs fois) cette même fonction.

Cela pose un problème : si la fonction ne cesse de s'appeler, comment cela peut-il se terminer ?

Exemple 1

La fonction suivante est incorrecte :

```
def f():  
    return f()
```

Exemple 1

La fonction suivante est incorrecte :

```
def f():  
    return f()
```

l'appel `f()` provoque *a priori* une boucle infinie.

Exemple 2

```
def f(n : int):  
    return f(n-1)
```

Exemple 2

```
def f(n : int):  
    return f(n-1)
```

Quelle que soit la valeur de x , l'appel $f(x)$ provoque également *a priori* une boucle infinie :

Exemple 2

```
def f(n : int):  
    return f(n-1)
```

Quelle que soit la valeur de x , l'appel $f(x)$ provoque également *a priori* une boucle infinie :

$f(10)$ appelle $f(9)$ qui appelle $f(8)$ *et cætera*.

Syntactic Sugar



« sucre syntaxique » d'un langage de programmation : ensemble des règles de syntaxe qui ont été ajoutées pour rendre le code plus facile à lire et à écrire.

Syntactic Sugar



« sucre syntaxique » d'un langage de programmation : ensemble des règles de syntaxe qui ont été ajoutées pour rendre le code plus facile à lire et à écrire.

```
def f(n : int) -> int:  
    return 0 if n <= 0 else f(n - 1)
```

Un premier exemple digne d'intérêt

Soit $n \in \mathbf{N}$. *Factorielle* n est le produit de tous les entiers non-nuls inférieurs ou égaux à n , et se note $n!$.

Un premier exemple digne d'intérêt

Soit $n \in \mathbf{N}$. *Factorielle* n est le produit de tous les entiers non-nuls inférieurs ou égaux à n , et se note $n!$.

- $1! = 1;$

Un premier exemple digne d'intérêt

Soit $n \in \mathbf{N}$. *Factorielle* n est le produit de tous les entiers non-nuls inférieurs ou égaux à n , et se note $n!$.

- $1! = 1;$
- $2! = 1 \times 2 = 2;$

Un premier exemple digne d'intérêt

Soit $n \in \mathbf{N}$. *Factorielle* n est le produit de tous les entiers non-nuls inférieurs ou égaux à n , et se note $n!$.

- $1! = 1$;
- $2! = 1 \times 2 = 2$;
- $10! = 1 \times 2 \times \dots \times 10 = 3\,628\,800$;

Un premier exemple digne d'intérêt

Soit $n \in \mathbf{N}$. *Factorielle* n est le produit de tous les entiers non-nuls inférieurs ou égaux à n , et se note $n!$.

- $1! = 1$;
- $2! = 1 \times 2 = 2$;
- $10! = 1 \times 2 \times \dots \times 10 = 3\,628\,800$;
- $0! = 1$ par convention.

À l'aide d'une boucle for

```
def factorielle( n : int) -> int:  
    result = 1  
    for i in range(1, n + 1):  
        result *= i  
    return result
```

À l'aide d'une boucle for

```
def factorielle( n : int) -> int:  
    result = 1  
    for i in range(1, n + 1):  
        result *= i  
    return result
```

L'algorithme est dit **itératif** car il utilise une boucle.

```
fonction factorielle(n : entier naturel) -> entier naturel
  si n = 0 alors
    renvoyer 1
  sinon
    renvoyer n * factorielle(n -1)
  fin si
```

```
fonction factorielle(n : entier naturel) -> entier naturel
  si n = 0 alors
    renvoyer 1
  sinon
    renvoyer n * factorielle(n -1)
  fin si
```

D'une certaine manière, c'est plus « élégant ».

Exercice

- Programmer la fonction **factorielle** en PYTHON de manière récursive, et tester cette fonction en vérifiant que **factorielle(10)** renvoie bien 3 628 800.
- Mettre du *Syntactic Sugar* là-dedans!

Formidable?
Mais pourquoi?

- On veut écrire une fonction f qui résout un problème dépendant d'un entier naturel n ;

- On veut écrire une fonction f qui résout un problème dépendant d'un entier naturel n ;
- on examine le cas où n vaut 0 (ou 1), correspondant à un problème très simple, que l'on sait résoudre;

- On veut écrire une fonction f qui résout un problème dépendant d'un entier naturel n ;
- on examine le cas où n vaut 0 (ou 1), correspondant à un problème très simple, que l'on sait résoudre;
- on suppose que l'on sait résoudre le problème pour un entier $n-1$, à l'aide de la fonction f , on regarde alors les opérations à effectuer pour passer de ce problème au problème de taille n ;

- On veut écrire une fonction f qui résout un problème dépendant d'un entier naturel n ;
- on examine le cas où n vaut 0 (ou 1), correspondant à un problème très simple, que l'on sait résoudre;
- on suppose que l'on sait résoudre le problème pour un entier $n-1$, à l'aide de la fonction f , on regarde alors les opérations à effectuer pour passer de ce problème au problème de taille n ;
- on programme alors la fonction f de manière récursive.

L'exemple des poignées de main

L'exemple des poignées de main

Nous l'avons traité en activité préparatoire :

L'exemple des poignées de main

Nous l'avons traité en activité préparatoire :

```
def f(n : int) -> int
  return 0 if n == 0 else n - 1 + f(n - 1)
```

Un exemple de récursion double

Un exemple de récursion double



La célèbre suite de Fibonacci, notée F , est définie ainsi :

Un exemple de récursion double



La célèbre suite de Fibonacci, notée F , est définie ainsi :

- Ses deux premiers termes F_0 et F_1 valent 1;

Un exemple de récursion double



La célèbre suite de Fibonacci, notée F , est définie ainsi :

- Ses deux premiers termes F_0 et F_1 valent 1;
- On construit chaque terme suivant en faisant la somme des deux précédents.

Un exemple de récursion double

De proche en proche, on calcule :

De proche en proche, on calcule :

- $F_2 = 1 + 1 = 2$

De proche en proche, on calcule :

- $F_2 = 1 + 1 = 2$
- $F_3 = 2 + 1 = 3$

De proche en proche, on calcule :

- $F_2 = 1 + 1 = 2$
- $F_3 = 2 + 1 = 3$
- $F_4 = 3 + 2 = 5$

De proche en proche, on calcule :

- $F_2 = 1 + 1 = 2$
- $F_3 = 2 + 1 = 3$
- $F_4 = 3 + 2 = 5$
- *et cætera*

De proche en proche, on calcule :

- $F_2 = 1 + 1 = 2$
- $F_3 = 2 + 1 = 3$
- $F_4 = 3 + 2 = 5$
- *et cætera*

Et plus généralement

Un exemple de récursion double

De proche en proche, on calcule :

- $F_2 = 1 + 1 = 2$
- $F_3 = 2 + 1 = 3$
- $F_4 = 3 + 2 = 5$
- *et cætera*

Et plus généralement

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{sinon} \end{cases}$$


```
function fibonacci(n : entier naturel) -> entier naturel
  si n < 2 alors
    renvoyer 1
  sinon
    renvoyer fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2)
  fin si
```

Exercice

Programmer la fonction `fibonacci` en PYTHON et vérifier que `fibonacci(30)` vaut 1 346 269.

- La récursivité est un des concepts *fondamentaux* de l'informatique.

- La récursivité est un des concepts *fondamentaux* de l'informatique.
On dit que c'est un **paradigme de programmation**.

- La récursivité est un des concepts *fondamentaux* de l'informatique.
On dit que c'est un **paradigme de programmation**.
- Certains algorithmes se programment naturellement de manière récursive.

- La récursivité est un des concepts *fondamentaux* de l'informatique.
On dit que c'est un **paradigme de programmation**.
- Certains algorithmes se programment naturellement de manière récursive.
- Certaines **structures de données** se définissent également de manière récursive.

La « magie » a un coût

Que se passe-t-il réellement en machine lorsqu'on évalue la fonction récursive `factorielle(3)` ?

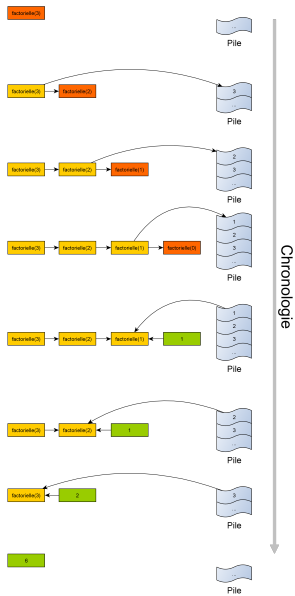
Que se passe-t-il réellement en machine lorsqu'on évalue la fonction récursive `factorielle(3)` ?

PYTHON possède une `pile` : c'est une structure de données simple, qui permet d'empiler et de dépiler des données un peu comme on empile des assiettes.

Que se passe-t-il réellement en machine lorsqu'on évalue la fonction récursive `factorielle(3)` ?

PYTHON possède une **pile** : c'est une structure de données simple, qui permet d'empiler et de dépiler des données un peu comme on empile des assiettes.

Lors de chaque appel récursif, une valeur est empilée en attendant le résultat de l'appel.



Lorsqu'il y a beaucoup d'appels récur­sifs *imbriqués*, la taille de la pile augmente.

Lorsqu'il y a beaucoup d'appels récursifs *imbriqués*, la taille de la pile augmente.

Pour éviter qu'elle sature, PYTHON fixe la limite des appels récursifs *imbriqués* à 999. Dès que l'on dépasse cette limite on obtient un message d'erreur :

Lorsqu'il y a beaucoup d'appels récur­sifs *imbriqués*, la taille de la pile augmente.

Pour éviter qu'elle sature, PYTHON fixe la limite des appels récur­sifs *imbriqués* à 999. Dès que l'on dépasse cette limite on obtient un message d'erreur :

```
RecursionError: maximum recursion depth exceeded in comparison
```

Fixer la taille de la pile

```
import sys
```

```
sys.setrecursionlimit(10_000)
```

Pour aller jusqu'à 10 000 appels récurifs au maximum (par exemple).

Exercice

Reprendre la fonction récursive `fibonacci` et utiliser le site [Python Tutor](#) pour visualiser la pile d'appels lors de l'évaluation de `fibonacci(5)`.

Quel commentaire peut-on faire ?