Correction

Le Roi et ses nains

NSI2

18 septembre 2023

Résultat préliminaire

Résultat préliminaire

Chaque puissance de 2 est plus grande que la somme de toutes celles qui précèdent.

Résultat préliminaire

Chaque puissance de 2 est plus grande que la somme de toutes celles qui précèdent.

Plus précisément :

Résultat préliminaire

Chaque puissance de 2 est plus grande que la somme de toutes celles qui précèdent.

Plus précisément :

Soit $n \in \mathbf{N}$,

Résultat préliminaire

Chaque puissance de 2 est plus grande que la somme de toutes celles qui précèdent.

Plus précisément :

Soit $n \in \mathbf{N}$,

$$2^{n+1} > 2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2^1 + 2^0$$

Preuve

$2^{n+1} + 2^n + \ldots + 2^1 + 2^0$ s'écrit $\left(\underbrace{1\ldots1}_{n+1 \text{ chiffres}}\right)_2$ en binaire.

Preuve

$2^{n+1} + 2^n + \ldots + 2^1 + 2^0$ s'écrit $\left(\underbrace{1\ldots1}_{n+1 \text{ chiffres}}\right)_2$ en binaire.

On a montré que cela vaut $2^{n+1} - 1$ dans un exercice précédent.

Donc c'est bien plus petit que 2^n.

Ce résultat nous sert pour résoudre l'exercice.

Solution

Solution

Le roi dispose des nains, numérotés de 0 à 7.

Solution

Le roi dispose des nains, numérotés de 0 à 7.
Il demande au nain numéro n d'apporter 2^n pièces.

Solution

Le roi dispose des nains, numérotés de 0 à 7.
Il demande au nain numéro n d'apporter 2^n pièces.
Il pèse l'ensemble et regarde combien il manque de grammes par rapport à la somme.

Solution

Le roi dispose des nains, numérotés de 0 à 7.
Il demande au nain numéro n d'apporter 2^n pièces.
Il pèse l'ensemble et regarde combien il manque de grammes par rapport à la somme.

Soit M ce nombre. On l'écrit en base 2.

Solution

Le roi dispose des nains, numérotés de 0 à 7.
Il demande au nain numéro n d'apporter 2^n pièces.
Il pèse l'ensemble et regarde combien il manque de grammes par rapport à la somme.

Soit M ce nombre. On l'écrit en base 2.

$$M = (b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0)_2$$

Solution

Le roi dispose des nains, numérotés de 0 à 7.
Il demande au nain numéro n d'apporter 2^n pièces.
Il pèse l'ensemble et regarde combien il manque de grammes par rapport à la somme.

Soit M ce nombre. On l'écrit en base 2.

$$M = (b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0)_2$$

Les voleurs sont les nains dont le bit est à 1!

Preuve

Si le nain 7 est voleur il manque au moins 128 grammes et b_7 est à 1.

Preuve

Si le nain 7 est voleur il manque au moins 128 grammes et b_7 est à 1.
Réciproquement s'il manque au moins 128 grammes c'est que le bit b_7 est à 1 car même si tous les autres nains sont voleurs, il ne peuvent au total voler que $2^6 + \ldots + 2^0 = 127$ grammes. Donc le nain 7 est un voleur.

Preuve

Si le nain 7 est voleur il manque au moins 128 grammes et b_7 est à 1.
Réciproquement s'il manque au moins 128 grammes c'est que le bit b_7 est à 1 car même si tous les autres nains sont voleurs, il ne peuvent au total voler que $2^6 + \ldots + 2^0 = 127$ grammes. Donc le nain 7 est un voleur.

Si c'est le cas on met le nain 7 au cachot et M devient $M - 128$.

Preuve

Si le nain 7 est voleur il manque au moins 128 grammes et b_7 est à 1.
Réciproquement s'il manque au moins 128 grammes c'est que le bit b_7 est à 1 car même si tous les autres nains sont voleurs, il ne peuvent au total voler que $2^6 + \ldots + 2^0 = 127$ grammes. Donc le nain 7 est un voleur.

Si c'est le cas on met le nain 7 au cachot et M devient $M - 128$.

Puis on recommence avec le nain 6 et 64 grammes.

Puis on recommence avec le nain 6 et 64 grammes.

Et ainsi de suite.