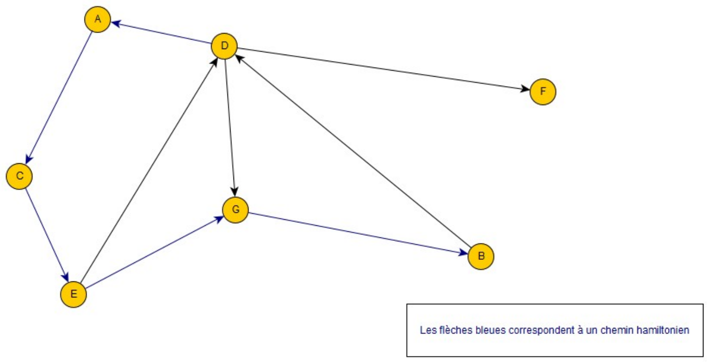
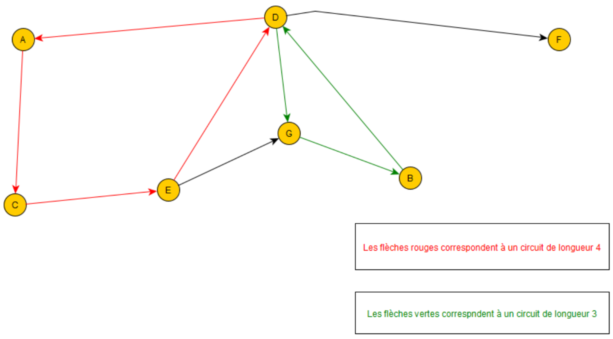
Delpeux
Dorian

Math
Devoir Maison

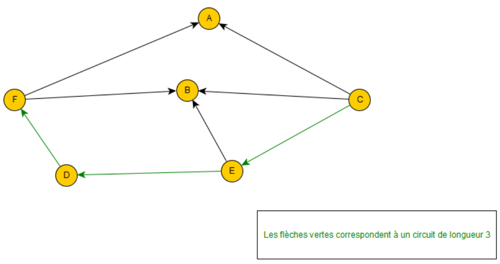
Exercice 1 :
- un chemin hamiltonien est une succession de sommets dans un ordre donné, chacun étant relié au suivant par un arc

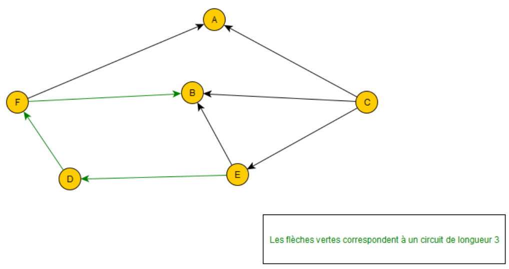


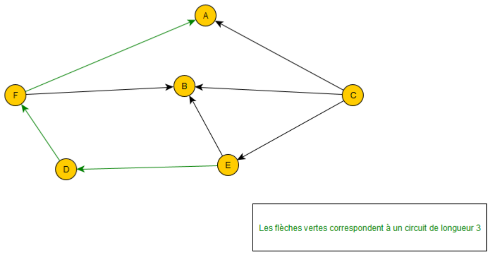
- un circuit de longueur 3 et un circuit de longueur 4 :
un circuit est le nombre d’arcs qui composent le chemin. C’est aussi le nombre de sommets qui composent le chemin mois un. Il peut avoir autant d'arc qu'il y a de chemin dans le graphe. La plupart du temps, on a des graphes à longueurs 3 et 4 comme on peut le voir sur le graphe. Il peut avoir des graphes plus longs.



Exercice 2 :
- On a deux méthodes pour démonter un chemin de longueur 3. D'abord, on a le graphe qui permet de voir directement les chemins successeurs. Quand il y a au moins trois flèches allant vers la même direction alors on a un chemin de longueur 3







Sinon, on peut aussi voir le nombre de chemin de longueur 3 grâce à une méthode matricielle.

A	B	C	D	E	F
—	—	A,B,E	F	B,D	A,B

Je vais représenter les matrices sous forme de tableau mais le principe est le même.Cette matrice représente M.

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	1	1	0	0	1	0
D	0	0	0	0	0	1
E	0	1	0	1	0	0
F	1	1	0	0	0	0

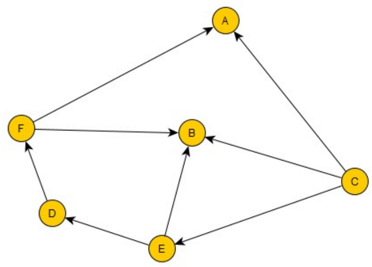
J'insère cette matrice dans ma calculatrice pour ensuite faire ce calcul : $[M]^3$. Le chiffre 3 correspond à longueur de chemin qu'on souhaite trouver.

$[M]^3$ =

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0	0	0
E	1	1	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0

Dans la matrice, le chiffre correspond aux nombre de chemin se trouvant dans la position. Alors, dans cette matrice, on a 3 chemin hamiltonien de longueur 3. Ils s'intitulent (A,E) ; (B,E) et (C,F).

- D'après, ce graphe on trouve bien des chemins à longueur 3 comme (A,E) ; (B,E) et (C,F).On trouve des chemins de longueur 4 comme (C,B) ou encore (C,A). Cependant, ce graphe ne représente à aucun moment 5 sommets qui se relie entre eux de manière d'un même chemin. On en déduit qu'il n'existe pas de chemin de longueur 5.

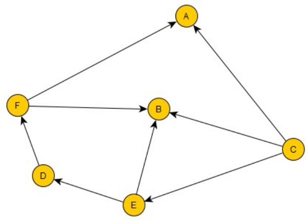


Pour vérifier que ce graphe ne représente aucun chemin de longueur 5. On doit faire $[M]^5$. Le chiffre 5 représente la longueur du chemin hamiltonien.

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0

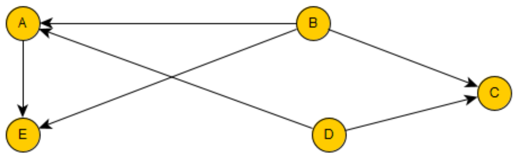
D'après la matrice ci-dessus, tout les valeurs matricielles sont à 0. On démontre alors qu'il n'y a aucun chemin de longueur 5.

- Un circuit est un système de boucle où on passe qu'une fois par sommet. Dans le cas présent, on voit une continuité de 3 flèches mais jamais d'une 4ème qui ferait office de circuit. Si l'arc (B,E) serait un prédécesseur au lieu d'un successeurs alors nous aurons eu un circuit.



Exercice 3 :

1. D'après ce graphe :



On voit des flèches allant d'un sommet à un autre. On appelle ça des arcs. Quand il va d'un point A vers un point B. C'est un successeurs et à l'inverse. Lorsque la flèches est venus d'un autre point comme B allant vers A. C'est un prédécesseurs.

Pour trouver la matrice d'adjacence, je construis en premier un tableau représentant les successeurs et les prédécesseurs.

	A	B	C	D	E
Successeur	E	A,C,E	—	A,C	—
Prédécesseur	B,D	—	B,D	—	A,E

On se donne le graphe ci-contre, dont la matrice d'adjacence est

M =

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	0
B	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0
D	0	0	0	0	0
E	1	0	0	0	1

2. D'après la propriété, étant donné que ce graphe possède 5 sommets on a

En pratique, on calcule M^2, M^3 puis $M + M^2 + M^3$ et on remplace chaque coefficient non nul par un 1.

M^2 =

	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0
E	1	1	0	1	1

Et M^3 =

	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0
E	1	1	0	1	1

De sorte que :

M + M² + M³ =

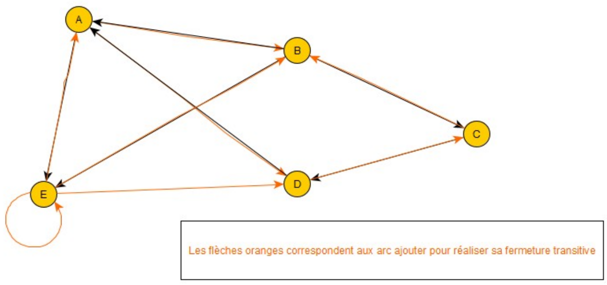
	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	0
B	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0
D	0	0	0	0	0
E	3	2	0	2	3

Donc en définitive M^ =

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	0
B	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0
D	0	0	0	0	0
E	1	1	0	1	1

3.

Ainsi, on aboutit au graphe suivant :



les arcs qui ont été ajouté pour réaliser la fermeture transitive du graphe sont (A, B);(A, D);(C,B);(C,D);(E,A);(E,B);(E,D) et (E).