Exercice type bac

On considère un tableau de nombres de n lignes et p colonnes.
Les lignes sont numérotées de 0 à $n-1$ et les colonnes sont numérotées de 0 à $p-1$.
La case en haut à gauche est repérée par $(0,\ 0)$ et la case en bas à droite par $(n-1,\ p-1)$.

On appelle *chemin* une succession de cases allant de la case $(0,\ 0)$ à la case $(n-1,\ p-1)$, en n'autorisant que des déplacements case par case : soit vers la droite, soit vers le bas.

On appelle *somme d'un chemin* la somme des entiers situés sur ce chemin. Par exemple, pour le tableau T suivant :

$T =$

4	**1**	**1**	3
2	0	**2**	1
3	1	**5**	**1**

- un chemin est $(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ 2)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$ (en gras sur le tableau);
- La somme du chemin précédent est 14;
- $(0,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$ n'est pas un chemin.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de la case $(0,\ 0)$ à la case $(n-1,\ p-1)$.

1. On considère tous les chemins allant de la case $(0,\ 0)$ à la case $(2,\ 3)$ du tableau T donné en exemple.

2. **a.** Un tel chemin comprend nécessairement 3 déplacements vers la droite. Combien de déplacements vers le bas comprend-il ?

   b. La longueur d'un chemin est égal au nombre de cases de ce chemin. Justifier que tous les chemins allant de $(0,\ 0)$ à $(2,\ 3)$ ont une longueur égale à 6.

3. En listant les chemins possibles allant de $(0,\ 0)$ à $(2\,,3)$ du tableau T, déterminer un chemin qui permet d'obtenir la somme maximale et donner la valeur de cette somme.

4. On veut créer le tableau T_2 où chaque élément $T_2[i][j]$ est la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de $(0,\ 0)$ à $(i,\ j)$.

   a. Compléter sur votre copie le tableau T_2 ci-dessous associé au tableau T suivant

$T =$

4	1	1	3
2	0	2	1
3	1	5	1

$T' =$

4	5	6	?
6	?	8	10
9	10	?	16

b. Justifier que si j est différent de zéro alors :

$$T_2[0][j] = T[0][j] + T_2[0][j-1]$$

5. Justifier que si i et j sont différents de 0 alors :

$$T_2[i][j] = T[i][j] + \text{max}(T_2[i-1][j], T_2[i][j-1])$$

6. On veut créer une fonction récursive `somme_max` qui

- en entrée prend un tableau `T` (qui est une liste de lignes, elles-même des listes d'`int`), et 2 `int` `i` et `j` ;
- renvoie la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de la case $(0, 0)$ à la case (i, j).

a. Quel est le cas d'arrêt, c'est-à-dire le cas qui est traité directement, sans appel récursif ? Que renvoie-t-on dans ce cas ?

b. À l'aide de la question précédente, écrire en Python la fonction récursive `somme_max`.

c. Quel appel de fonction doit-on faire pour résoudre le problème initial ?