

Chapitre 2

Représentation des données

Bases de numération

« Partons sur de bonnes bases. »

On note **N** l'ensemble des *entiers naturels* : $\mathbf{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$. Nous avons l'habitude d'utiliser la base 10 pour représenter les entiers naturels, c'est-à-dire qu'on utilise 10 symboles, appelés *chiffres* pour les écrire : 0, 1, 2, ..., 9. Or il n'en a pas toujours été ainsi :

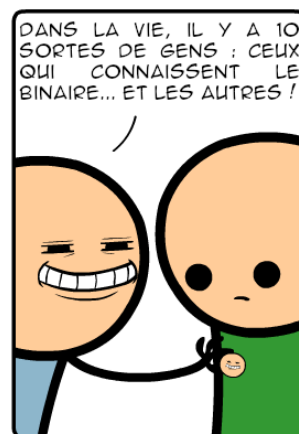
- au 1^{er} millénaire av. J.-C., les Babyloniens utilisaient la base soixante pour mesurer le temps et les angles;
- durant le 1^{er} millénaire, les Mayas et les Aztèques se servaient de la base vingt (et d'ailleurs en France, 80 se lit « quatre-vingts »);
- entre le VII^e et le XV^e siècle, les astronomes Arabes utilisaient la base cent cinquante pour élaborer des tables permettant de trouver la position d'un astre dans le ciel à un moment donné.

De nos jours, en Informatique, on utilise beaucoup la base deux, dite *binaire* et la base seize, appelée *hexadécimale*. L'objectif de ce chapitre est de donner les méthodes permettant d'écrire un entier naturel dans une base donnée, plus précisément dans les bases 2, 10 et 16. Nous verrons également comment passer facilement du binaire à l'hexadécimal et vice-versa.

I Écriture binaire d'un entier naturel

1 Pourquoi le binaire ?

Pour simplifier, disons qu'au niveau le plus « bas » d'un ordinateur, se trouvent des (millions de) transistors qui jouent chacun un rôle d'interrupteur. De multiples points de l'ordinateur peuvent alors être soumis à une tension (état 1) ou non (état 0). En considérant 2 de ces points, on voit que l'état de ce système peut être 00, 01, 10 ou 11. Cela fait 4 possibilités et le binaire est né !



2 Comprendre l'écriture en base 2

Puisqu'il n'y a que deux chiffres en binaire, compter est simple mais nécessite rapidement plus de chiffres qu'en base 10 :

Écriture décimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Écriture binaire	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	...

Notation

On écrira $(11)_{10}$ pour insister sur le fait qu'on parle du nombre 11 *en base 10*, et $(11)_2$ pour dire que c'est une écriture binaire.

Lorsque ce n'est pas précisé cela veut dire que l'écriture est en base 10.

Ainsi $(11)_2 = 3$, et de même, $(111)_2 = 7$.

Tout entier naturel admet une unique écriture décimale (c'est-à-dire en base 10), il en va de même en binaire :

Propriété : écriture binaire d'un entier naturel

Tout entier naturel possède une unique écriture en base 2, dite *écriture binaire*. Plus précisément, soit $n \in \mathbf{N}$, alors il existe un unique entier $k \in \mathbf{N}$ et $k + 1$ nombres a_i , uniques et valant 0 ou 1 et tels que

$$n = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \dots + a_k 2^k$$

ce qui s'écrit aussi

$$n = \sum_{i=0}^k a_i 2^i$$

Exemple

Lorsqu'on regarde le tableau précédent, on voit que $6 = (110)_2$.

Cela s'interprète ainsi :

Chiffre binaire	1	1	0
Valeur	2^2	2^1	2^0

et on obtient $6 = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2$.

Méthode 1 : passer de la base 2 à la base 10

Que vaut $(11101)_2$?

Chiffre binaire	1	1	1	0	1
Valeur	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

$$\begin{aligned}(11101)_2 &= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 16 + 8 + 4 + 1 \\ &= 29\end{aligned}$$

Méthode 2 : passer de la base 10 à la base 2

Comprenons ce que veut dire une écriture décimale :

$$\begin{aligned}203 &= 200 + 3 \\ &= 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0\end{aligned}$$

Faisons la même chose en base 2 :

$$\begin{aligned}203 &= 128 + 64 + 8 + 2 + 1 \\ &= 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 \\ &= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= (11001011)_2\end{aligned}$$

Cette méthode est pratique quand l'entier est petit et que l'on connaît bien les premières puissances de deux.

Quand ce n'est pas le cas, une autre méthode (la méthode 3) peut être employée.

Évidemment, PYTHON connaît le binaire. Voici comment écrire un `int` en binaire et comment obtenir l'écriture binaire d'un `int`.

Shell Python

```
>>> 0b11001011 # il suffit de faire précéder le nombre de 0b
203
>>> bin(29)
'0b11101'
```

3 Un algorithme pour déterminer l'écriture binaire d'un entier naturel

Méthode 3 : les divisions successives

Voici comment on trouve les chiffres de l'écriture *décimale* de 203 :

On divise 203 par 10, cela fait 20, il reste 3, c'est le chiffre des unités.

On recommence avec 20, on le divise par 10, cela fait 2, reste 0, chiffre des dizaines.

On continue, on divise 2 par 10, cela fait 0, reste 2, chiffre des centaines.

Puisqu'on a trouvé un quotient de 0, on s'arrête.

On peut écrire cela simplement :

$$\begin{array}{r|l} 203 & 10 \\ \hline 3 & 20 \\ & | 10 \\ & 0 & 2 \\ & & | 10 \\ & & 2 & 0 \end{array}$$

Voici maintenant comment on trouve son écriture binaire. On procède comme en base 10 mais en divisant par 2 :

$$\begin{array}{r|l} 203 & 2 \\ \hline 1 & 101 \\ & | 2 \\ & 1 & 50 \\ & & | 2 \\ & & 0 & 25 \\ & & & | 2 \\ & & & 1 & 12 \\ & & & & | 2 \\ & & & & 0 & 6 \\ & & & & & | 2 \\ & & & & & 0 & 3 \\ & & & & & & | 2 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & | 2 \\ & & & & & & & 1 & 0 \end{array}$$

On a donc successivement établi :

$$\begin{aligned} 203 &= 101 \times 2 + 1 \\ &= (50 \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\ &= ((25 \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\ &= (((12 \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\ &= (((((6 \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\ &= ((((((3 \times 2 + 0) \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\ &= (((((((1 \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\ &= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= (11001011)_2 \end{aligned}$$

Cette succession d'égalités n'est (heureusement) pas à écrire à chaque fois.

Cette méthode donne lieu à un algorithme qui se programme facilement (tout comme les deux méthodes précédentes).

4 Vocabulaire

- Un chiffre décimal peut être 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9.
Un chiffre binaire peut être seulement 0 ou 1. En Anglais, *chiffre binaire* se traduit par *binary digit*, que l'on abrège en *bit*. On garde cette dénomination en Français.
Le bit est donc « le plus petit morceau d'information numérique ».
- On regroupe les chiffres décimaux par paquets de 3, comme dans 1 230 014 par exemple.
En binaire on groupe les bits par 4.
Bien souvent les bits sont groupés par 8 (deux paquets de 4). Un tel paquet s'appelle un *octet*.
- Lorsqu'on considère un nombre écrit en binaire, on parle souvent de *bit de poids fort* et de *bit de poids faible* pour parler respectivement du bit associé à la plus grande puissance de 2, et du bit d'unités.
Considérons l'octet $(0010\ 0101)_2$. Son bit de poids fort est 0, son bit de poids faible est 1.



II Écriture hexadécimale d'un entier naturel

La base « naturelle » de l'informatique est la base 2, mais elle n'est pas très pratique car elle donne lieu à des écritures trop longues. La base 10 nous paraît bien meilleure parce que nous avons l'habitude de l'utiliser, mais elle ne fait pas bon ménage avec la base 2 : il n'y a pas de méthode simple pour passer du décimal au binaire, et vice versa. La base 16, ou base *hexadécimale*, est en revanche très adaptée à l'écriture des paquets de 4 bits, et par extension à celle des octets et autres écritures binaires.

En hexadécimal, on dispose de 16 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F.

Propriété : écriture binaire d'un entier naturel

Tout entier naturel possède une unique écriture en base 16, dite *écriture hexadécimale*. Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ et $k + 1$ nombres a_i , uniques et valant 0, 1, 2, ..., ou F et tels que

$$n = a_0 16^0 + a_1 16^1 + \dots + a_k 16^k$$

ce qui s'écrit aussi

$$n = \sum_{i=0}^k a_i 16^i$$

Remarque

On a vu une propriété similaire en base 2 et en fait elle est valable *dans toutes les bases* b (où b est un entier naturel supérieur ou égal à 2). Cela justifie par exemple l'utilisation de la base 20 ou de la base 150.

Les méthodes que l'on a vu en base 2 et 10 se transposent en base 16.

Méthode 4 : passer de la base 16 à la base 10

Déterminons l'écriture décimale de $(D4A)_{16}$:

$$\begin{aligned}(D4A)_{16} &= 13 \times 16^2 + 4 \times 16 + 10 \times 16^0 \text{ car D vaut 13 et A vaut 10.} \\ &= 3402\end{aligned}$$

Méthode 5 : passer de la base 10 à la base 16

Déterminons maintenant l'écriture hexadécimale de 503 : on fait des divisions successives par 16 tout comme en base 2

$$\begin{array}{r|l} 503 & 16 \\ \hline 7 & 31 \\ & \hline & 15 & 1 & 16 \\ & & \hline & & 1 & 0 \end{array}$$

On s'arrête car on a trouvé un quotient nul et on remet les restes dans l'ordre inverse : 1, 15, 7 cela fait 1, F et 7 : $503 = (1F7)_{16}$.

0x000340:	C6	10	80	E3	02	10	01	E0	B0	10	C3	E1	00	30	0F	E1	Æ. l.ä...ä.ö.Ä.ö.Ä.
0x000350:	DF	30	C3	E3	1F	30	83	E3	03	F0	29	E1	3C	10	9F	E5	B0Ää.0lÄ.ä.)ä<.l.ä
0x000360:	0C	10	81	E0	00	00	01	E5	00	40	2D	E9	00	E0	8F	E2	.y.ä..ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000370:	10	FF	2F	E1	00	40	BD	E8	00	30	0F	E1	DF	30	C3	E3	.ä.ä..ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000380:	92	30	83	E3	03	F0	29	E1	0F	40	BD	E8	B0	20	C3	E1	'0l.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000390:	B8	30	C3	E1	00	F0	69	E1	1E	FF	2F	E1	28	73	00	03	.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x0003A0:	90	34	00	03	F0	B5	47	46	B0	B4	FF	20	E1	F1	FA	FD	4..ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x0003B0:	A0	21	C9	04	27	4A	10	1C	08	80	00	F0	D3	FA	26	49	l.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x0003C0:	26	4A	10	1C	08	80	00	F0	F9	F8	00	F0	5B	F9	DB	F1	ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x0003D0:	1B	FA	00	F0	DF	F8	F8	F0	1F	FB	4B	F0	73	FE	00	F0	.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x0003E0:	6F	F8	71	F0	BB	FA	00	F0	07	FC	00	F0	1B	FE	1C	48	ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x0003F0:	E0	21	49	02	02	F0	7A	FB	F7	F0	90	FC	19	48	00	24	ä.l..ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000400:	04	70	19	48	04	70	F5	F0	1F	F8	18	48	04	70	18	4F	.p.H.p.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000410:	00	21	88	46	06	1C	00	F0	E5	F8	12	48	00	78	00	28	l.l.F..ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000420:	0E	D1	39	8D	01	20	08	40	00	28	09	D0	0E	20	08	40	.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000430:	0E	28	05	D1	DE	F1	B8	FE	DE	F1	48	FE	00	F0	4A	FA	.(.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000440:	57	F0	BE	FF	01	28	15	D1	30	70	00	F0	2F	F8	00	20	Wä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000450:	30	70	22	E0	FF	7F	00	00	04	02	00	04	14	40	00	00	0p"ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000460:	00	00	00	02	80	34	00	03	1C	5E	00	03	34	30	00	03	...ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000470:	40	30	00	03	0C	4D	00	20	28	70	00	F0	17	F8	57	F0	@0...M.(p.ä.ä.ä.ä.ä
0x000480:	69	FF	04	1C	01	2C	08	D1	00	20	F8	85	06	F0	16	FF	i.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x000490:	2C	70	00	F0	0B	F8	42	46	2A	70	54	F0	57	FA	71	F0	p.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x0004A0:	67	FA	00	F0	F3	F9	B6	E7	34	30	00	03	00	B5	0A	F0	g.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x0004B0:	19	FE	00	06	00	28	01	D1	00	F0	28	F8	01	BC	00	47	p.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x0004C0:	10	B5	0B	48	00	24	04	62	44	62	04	60	09	48	00	F0	.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä
0x0004D0:	37	F8	09	48	09	49	01	60	09	4A	0A	48	10	60	F2	20	7ä.H.H.I..ä.ä.ä.ä.ä
0x0004E0:	00	01	09	18	0C	60	08	48	04	70	10	BC	01	BC	00	47	...ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä.ä

Un éditeur hexadécimal montre le contenu d'un fichier, d'un disque dur, ou de la RAM d'un ordinateur. La première colonne indique l'adresse, puis 16 octets écrits en hexadécimal et enfin les caractères correspondants.

Hexadécimal et binaire : un mariage heureux

Le grand avantage qu'apporte l'hexadécimal s'illustre facilement :

Méthode 6 : passer de la base 2 à la base 16

$$\begin{aligned}(101101000011101)_2 &= (0101\ 1010\ 0001\ 1101)_2 \\ &= \left(\underbrace{0101}_5\ \underbrace{1010}_A\ \underbrace{0001}_1\ \underbrace{1101}_D \right)_2 \\ &= (5A1D)_{16}\end{aligned}$$

Méthode 7 : passer de la base 16 à la base 2

$$(F7B)_{16} = \left(\underbrace{1111}_F \underbrace{0111}_7 \underbrace{1101}_B \right)_{16}$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E	20
3	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D	30
4	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C	40
5	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B	50
6	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A	60
7	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69	70
8	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78	80
9	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87	90
A	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96	A0
B	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5	B0
C	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4	C0
D	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3	D0
E	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2	E0
F	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1	F0
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	A0	B0	C0	D0	E0	F0	100

En base 16

C'est encore la même chose. Il faut bien se souvenir de la valeur de A, B, C, D, E et F.

Ajouter 8 et 3 ne provoque pas de retenue puisque $8 + 3 = 11$ et que 11 est **B** en base 16.

Dès que l'addition de 2 chiffres dépasse 15, il y aura une retenue : par exemple 9 et A donnent $(19)_{10}$, donc $(13)_{16}$. Ainsi on note 3 et une retenue de 1.

Exemple

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & & \\ & 2 & 4 & 9 & 8 \\ + & 1 & 7 & A & 3 \\ \hline = & 3 & C & 3 & B \end{array}$$

Exercice 1

Donner l'écriture décimale des onze premières puissances de deux.

Exercice 2

1. Calculer $2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0$.
2. En déduire l'écriture binaire de 89.

Exercice 3

1. Calculer $2^7 + 2^3 + 2^2 + 2^1$.
2. En déduire l'écriture décimale de $(10001110)_2$.

Exercice 4

En utilisant la méthode 2, donner l'écriture binaire de

1. 56
2. 35
3. 13

Exercice 5

En utilisant la méthode 3, donner l'écriture binaire de

1. 142
2. 273
3. 1000

Exercice 6

- Donner l'écriture décimale de $(1101\ 1010)_2$.
- Donner l'écriture binaire de 2016.
- Donner l'écriture hexadécimale de 2016.

Exercice 7

- Donner les écritures décimales de $(11)_2$, $(111)_2$, $(1111)_2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, conjecturer la valeur de $\left(\underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ chiffres}} \right)_2$.

Exercice 8

Pour multiplier par dix un entier naturel exprimé en base dix, il suffit d'ajouter un 0 à sa droite, par exemple, $12 \times 10 = 120$.

Quelle est l'opération équivalente pour les entiers naturels exprimés en base deux ?

Exercice 9

1. Donner l'écriture binaire de 174.
2. Donner celle de 17.
3. Poser l'addition de 174 et 17 en binaire.
4. Donner l'écriture décimale du résultat et vérifier.

Exercice 10

1. Donner l'écriture hexadécimale de 1022.
2. Donner celle de 3489.
3. Poser l'addition de 1022 et 3489 en hexadécimal.
4. Donner l'écriture décimale du résultat et vérifier.