

## D'après métropole mai 2018

Sur une plateforme de vidéos en ligne, les vidéos sont notées de 0 à 5 par les utilisateurs. Après une période d'observation, les administrateurs de la plateforme décident de mettre une vidéo sur la page d'accueil lorsqu'elle satisfait à l'un au moins des critères suivants :

- la vidéo a obtenu la note 5 et comptabilise un nombre de vues supérieur ou égal à 200 ;
- la vidéo a obtenu la note 5 et elle est récente ;
- la vidéo comptabilise un nombre de vues strictement inférieur à 200 et elle est récente ;
- la vidéo n'a pas obtenu la note 5 et comptabilise un nombre de vues supérieur ou égal à 200.

On définit les trois variables booléennes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de la façon suivante :

- $a = 1$  si la vidéo a obtenu la note 5,  $a = 0$  sinon ;
- $b = 1$  si la vidéo comptabilise un nombre de vues supérieur ou égal à 200,  $b = 0$  sinon ;
- $c = 1$  si la vidéo est récente,  $c = 0$  sinon.

1. L'administrateur de la plateforme a traduit les conditions pour qu'une vidéo soit mise sur la page d'accueil par l'expression booléenne  $E = ab + ac + \bar{b}c + \bar{a}b$ .

Justifier chacun des termes de cette somme.

2.
  - a. Représenter l'expression  $E$  dans un diagramme de Karnaugh.
  - b. En déduire une expression simplifiée de  $E$  sous la forme d'une somme de deux termes.
  - c. Retrouver cette expression par le calcul.
  - d. Interpréter cette expression simplifiée de  $E$  dans le contexte de l'exercice.
3. Une vidéo qui n'est pas récente, qui n'a pas obtenu la note 5 et qui comptabilise un nombre de vues strictement inférieur à 200 sera-t-elle mise sur la page d'accueil ?
4.
  - a. Donner une expression de  $\bar{E}$  à l'aide des variables booléennes précédemment définies en utilisant un diagramme de Karnaugh.
  - b. Retrouver ce résultat par le calcul.
  - c. Interpréter cette expression de  $\bar{E}$  dans le contexte de l'exercice.

# D'après métropole mai 2017

Le but de cet exercice est d'étudier une méthode de cryptage inventée par Gilbert Vernam en 1917, et appelée « masque jetable ».

Dans tout l'exercice, on note respectivement  $M$  le mot initial,  $K$  la clé de cryptage et  $Y$  le mot crypté.

Les trois nombres  $M$ ,  $K$ ,  $Y$  sont des entiers naturels.

## Partie 1 : Masque jetable

La méthode décrite dans cette partie utilise le connecteur logique « xor », appelé « ou exclusif », qui est défini par la table de vérité suivante :

$P$	$Q$	$P \text{ xor } Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Par exemple les deux premières lignes signifient que  $0 \text{ xor } 0 = 0$  et que  $0 \text{ xor } 1 = 1$ .

1. Recopier intégralement la table de vérité ci-après et compléter la dernière colonne.

$P$	$Q$	$P \text{ xor } Q$	$(P \text{ xor } Q) \text{ xor } Q$
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	

2. Parmi les quatre propositions  $P$ ,  $Q$ ,  $(P \text{ xor } Q)$  et  $((P \text{ xor } Q) \text{ xor } Q)$ , deux sont équivalentes.  
À l'aide de la table 2 complétée, déterminer lesquelles, en expliquant la réponse.

Dans la suite de l'exercice, on note  $a_b$  l'écriture du nombre entier  $a$  en base  $b$ .

3. Donner la représentation binaire de l'entier qui s'écrit  $26_{10}$  en décimal.
4. Soit  $M$  et  $K$  deux entiers naturels écrits en binaire, tels que la longueur de l'écriture de  $K$  est supérieure ou égale à celle de  $M$ .

Pour crypter le mot  $M$  avec la clé  $K$ , on procède comme suit : pour chaque chiffre  $m$  du mot initial  $M$ , on considère le chiffre  $k$  de la clé  $K$  qui a la même position que  $m$  dans l'écriture.

On obtient alors le chiffre  $y$  du mot crypté  $Y$  qui a la même position que  $m$  dans l'écriture du mot initial  $M$ , par la relation :  $y = m \text{ xor } k$ .

L'écriture binaire du mot crypté  $Y$  est la juxtaposition dans le même ordre des chiffres  $y$  calculés pour chaque chiffre  $m$  du mot  $M$ .

*Exemple* : avec  $M = 01_2$  et  $K = 10_2$

- Avec le chiffre de rang 1 en partant de la droite :  $m = 1$  et  $k = 0$
- avec le chiffre de rang 2 :  $m = 0$  et  $k = 1$ ; donc  $y = 0 \text{ xor } 1 = 1$ .

Donc le mot crypté est  $Y = 11_2$

- Avec le mot initial  $M = 011_2$  et la clé  $K = 101_2$ , déterminer le mot crypté  $Y$ .
- Comment, étant donné un mot crypté  $Y$  et une clé  $K$ , retrouver le mot initial  $M$ ?