Matrices

I Notion de matrice

Définition : matrice

Une matrice A peut être vue comme « un tableau de nombres ».
Supposons qu'elle comporte n lignes et p colonnes (n et p sont des entiers plus grands que 1), on la note ainsi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

L'élément qui se situe à la i$^{\text{e}}$ ligne et à la j$^{\text{e}}$ colonne est noté $\boldsymbol{a_{ij}}$. On l'appelle également *coefficient*.

Attention : les indices des lignes et des colonnes commencent à 1 (et non à zéro comme dans la plupart des langages informatiques).

Pour résumer l'écriture précédente on écrit

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

On dit aussi que A est une matrice $n \times p$. Si $n = p$ on dit que A est une *matrice carrée d'ordre* n.

Exemples

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. On a $b_{21} = -3$.
- $C = \begin{pmatrix} 2,4 & 7 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 10,1 & 1 \\ 0,01 & 3 & 12 & 100 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes. On a $c_{33} = 12$.
- $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Exercice 1

On considère $E = \begin{pmatrix} -4 & 7,6 & 4 & -1 & 12 \\ 8 & -3 & 5,7 & 101 & 1 \\ 12 & 0,01 & 3 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

Donne les valeurs de e_{12}, e_{21}, e_{35} et e_{24}.

Le script PYTHON suivant permet de générer une matrice $n \times p$ avec des coefficients entiers aléatoires compris entre -100 et 100.

Code Python

```python
from random import randint

n = int(input("Entrez le nombre de lignes : "))
p = int(input("Entrez le nombre de colonnes : "))

matrice = []  # une matrice est une liste de lignes

for i in range(n):  # il y a n lignes
    ligne = []  # on construit une ligne vide
    for j in range(p):  # il y a p colonnes
        ligne.append(randint(-100, 100))  # on remplit la ligne aléatoirement
    matrice.append(ligne)  # on ajoute la ligne à la liste de lignes
```

Exercice 2

1. Écris complètement la matrice suivante : $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 5}}$ où $m_{ij} = i$ si i=j et 0 sinon.
2. Écris complètement la matrice suivante : $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 4 \\ 1 \leqslant j \leqslant 5}}$ où $m_{ij} = 0$ si i<j et 1 sinon.
3. Écris complètement la matrice suivante : $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$ où $m_{ij} = 1$ si $i + j$ est pair et 0 sinon.
4. BONUS : écris des programmes PYTHON qui génèrent ces matrices.

Définitions : Matrices nulles et identités

- Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est dite *nulle* (c'est « un tableau de zéros ») ;
- la matrice *carrée d'ordre* n dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la *diagonale* (c'est-à-dire ceux qui s'écrivent a_{ii}) qui valent 1 s'appelle *la matrice identité d'ordre* n et se note I_n.

Exemple

La matrice identité I_3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II Opérations sur les matrices

Définition : addition

Soient A et B deux matrices $n \times p$, on note $A + B$ la matrice $n \times p$ obtenu en ajoutant les coefficients correspondants de A et de B :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + n_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple

Prenons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$, alors $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 4 \\ -7 & 17 \end{pmatrix}$.

Remarque

Attention : on ne peut ajouter deux matrices que si elles ont les mêmes dimensions (c'est-à-dire même nombre de lignes et même nombre de colonnes).

Définition : multiplication par un réel

Soient A une matrice $n \times p$ et k un nombre réel, on note kA la matrice $n \times p$ obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k :

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \times a_{11} & \cdots & k \times a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \times a_{n1} & \cdots & k \times a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple

Prenons $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ et $k = 5$, alors on obtient que $5A = \begin{pmatrix} 40 & 15 & 5 \\ 20 & 35 & 10 \\ -10 & 5 & 40 \end{pmatrix}$.

La propriété suivante énonce quelques résultats utiles pour calculer.

Propriété : règles de calcul

Soient A, B et C trois matrices de mêmes dimensions et k et k' 2 réels.

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + k')A = kA + k'A$

Exercice 3

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$.

Montrer que $B - 2A + 3C$ est une matrice nulle.

Définition : multiplication de deux matrices

Soient A une matrice $n \times p$ et B une matrice $p \times q$ (le nombre de colonnes de la 1re est égal au nombre de lignes de la 2e) alors il est possible de définir la matrice $C = A \times B$, produit de A par B.
C'est une matrice $n \times q$ dont les coefficients sont ainsi :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kq} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & c_{ij} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \ldots + a_{ip} \times b_{pj}$$

Exemple

Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -8 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ alors A est une matrice 2×3, B est une matrice 3×4 donc il est possible de définir la matrice $C = A \times B$, ce sera une matrice 2×4.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -8 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -40 \\ -19 & 18 & 3 & 70 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Par exemple, pour calculer c_{33}, on fait $5 \times 0 + (-3) \times (-1) + 4 \times 0 = 3$.

Remarque

Attention :

- on ne peut multiplier A par B que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B ;
- ce n'est pas parce qu'on peut calculer $A \times B$ qu'on peut calculer $B \times A$: les matrices de l'exemple précédent ne permettent pas de calculer $B \times A$ car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -8 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{Impossible}$$

– pour pouvoir calculer $A \times B$ et $B \times A$ il faut que ces deux matrices soient carrées d'ordre n et *en général* on n'a pas $A \times B = B \times A$.

Exercice 4

– On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et BA.

– Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

Propriétés de calcul

A, B et C sont des matrices.
Lorsque les opérations sont possibles (bonnes dimensions des matrices) on a :

- $A(BC) = (AB)C$;
- $(A + B)C = AC + BC$;
- $A(B + C) = AB + AC$.

Soit k un nombre réel alors on a également $A \times kB = kAB$.

Si A est *carrée d'ordre* n on a

- $AI_n = I_nA = A$ où I_n est la matrice identité d'ordre n.
- $A \times 0 = 0 \times A = 0$ en notant 0 la matrice carrée d'ordre n nulle.

III Exemple concret d'utilisation

Imaginons une école qui forme des ingénieurs en informatique, avec seulement 3 matières. Trois élèves de première année ont obtenu les résultats suivants :

Résultats pour le premier trimestre

	Maths	Physique	Info
Adam	12	8	16
Bertrand	18	14	12
Charles	5	20	15

Résultats pour le deuxième trimestre

	Maths	Physique	Info
Adam	10	10	14
Bertrand	18	12	14
Charles	7	14	17

Ces deux tableaux peuvent s'écrire matriciellement $S_1 = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \\ 18 & 14 & 12 \\ 5 & 20 & 15 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 14 \\ 18 & 12 & 14 \\ 7 & 14 & 17 \end{pmatrix}$

Pour calculer les moyennes mensuelles des élèves « en une fois » on peut définir $M = 0,5(S_1 + S_2)$:

$$M = 0,5 \times \left[\begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \\ 18 & 14 & 12 \\ 5 & 20 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 10 & 14 \\ 18 & 12 & 14 \\ 7 & 14 & 17 \end{pmatrix}\right]$$

$$M = 0,5 \times \begin{pmatrix} 22 & 18 & 30 \\ 36 & 16 & 26 \\ 12 & 34 & 32 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 15 \\ 18 & 8 & 13 \\ 6 & 17 & 16 \end{pmatrix}$$

Le coefficient des mathématiques est 1, celui de la physique est 2 et celui de l'informatique est 5.

Pour passer en deuxième année, il faut un total de points supérieur ou égal à 120.

Pour faire « d'un coup » le total des points, on peut considérer la matrice de coefficients $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Les points des élèves sont donnés par la matrice

$$P = MC$$

$$P = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 15 \\ 18 & 8 & 13 \\ 6 & 17 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 104 \\ 109 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Ainsi seul Charles est admis à passer en 2^{e} année.

IV Matrices inversibles et systèmes

Définition et propriété : Matrice inversible, inverse d'une matrice

Soit A une matrice **carrée d'ordre** n. S'il existe une matrice B d'ordre n telle que

$$AB = I_n \qquad \text{ou} \qquad BA = I_n$$

alors automatiquement les deux égalités sont vérifiées, B est nécessairement *unique* et on dit alors que B *est l'inverse de* A. De manière symétrique A est également l'inverse de B si bien qu'on dit que A et B sont inverses l'une de l'autre.
On note ceci $A = B^{-1}$ ou, ce qui revient au même, $B = A^{-1}$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 5

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont inverses.

Remarque

Il existe des matrices non inversibles, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Méthode : résoudre des systèmes avec des matrices

On considère un *système de* n *équations à* n *inconnues* :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On connaît tous les nombres a_{ij} et tous les b_i, et on veut trouver les valeurs des inconnues x_i.

Ce système peut se réécrire de manière matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$AX = B$$

Si la matrice A est inversible (en pratique ce sera toujours le cas parce qu'on nous donnera sa matrice inverse ou bien parce qu'on l'aura déterminée à l'aide de la calculatrice) alors, on peut reprendre l'égalité précédente et écrire : $A^{-1}AX = A^{-1}B$, ce qui donne $I_nX = A^{-1}B$. En définitive on a

$$X = A^{-1}B$$

Ainsi pour trouver les valeurs des inconnues x_i, on effectue simplement le produit matriciel $A^{-1}B$: chacune de ses lignes nous donne la valeur du x_i correspondant.

Remarque

Pour savoir comment utiliser la calculatrice, regarder ici :

- modèles CASIO : https://youtu.be/yjvQx13Vhlk
- modèles Texas Instrument : https://youtu.be/rxDxBnIwaGo

Exemple

On considère le système suivant : $\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1 \\ 5x - 3y - 2z = 2 \\ -x + 2y + z = -3 \end{cases}$

Il peut se réécrire de manière matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Appelons A la matrice carrée du membre de gauche. On détermine que A est inversible avec la calculatrice et que son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -3 & 4 & 14 \\ 7 & -9 & -31 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -3 & 4 & 14 \\ 7 & -9 & -31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

C'est à dire, en effectuant le produit dans le membre de droite

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -37 \\ 82 \end{pmatrix}$$

On a donc résolu le système : $\begin{cases} x = 11 \\ y = -37 \\ z = 82 \end{cases}$

Exercice 6

1. Effectue le produit suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. Á l'aide de la calculatrice détermine l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Résous le système suivant : $\begin{cases} x + 2y = 15 \\ -3x + 3y = -6 \end{cases}$