# Chapitre 3

## Arithmétique

# Écriture des « réels »

*« Tout cela est-il bien réel ? »*

## I Écriture décimale et arrondi

On sait que tout nombre réel admet une écriture décimale :

- « un et demi » s'écrit 1,500 000... et on enlève les zéros inutiles, cela fait 1,5.
- « trois septièmes » s'écrit $0{,}428\,571\,428\,571\,428\,571\,428\,571\,4\ldots$ et pour insister sur le fait que le motif 428571 se répète indéfiniment on écrit $0{,}\underline{428\,571}$.
- $\pi$ a une écriture décimale qui commence par $3{,}141\,592\,653\,59$ mais son écriture décimale comporte une infinité de chiffres *sans qu'aucun motif ne se répète*.

On est souvent amenés à *arrondir* les nombres réels : soit le nombre n'est « pas très grand » et on ne veut garder que quelques chiffres après la virgule, soit il est « plutôt grand » et on ne veut garder que quelques chiffres significatifs :

**Méthode 1**

On veut arrondir $\frac{3}{7}$ à $10^{-3}$ près, c'est-à-dire à 3 chiffres après la virgule.
Il y a trois possibilités :

- **Arrondi par défaut** : On « coupe » après le troisième chiffre :

$$\frac{3}{7} \approx 0{,}428 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}$$

- **Arrondi par excès** : On « coupe » après le troisième chiffre et on ajoute $10^{-3}$, c'est-à-dire un *millième* :

$$\frac{3}{7} \approx 0{,}429 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près par excès.}$$

- **Arrondi au plus près** : On regarde le chiffre immédiatement après le troisième (celui qui correspond à $10^{-4}$). Si c'est 0,1,2,3 ou 4, on prend l'arrondi par défaut, si c'est 5,6,7,8 ou 9, on prend l'arrondi par excès.

$$\frac{3}{7} \approx 0{,}429 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ au plus proche.}$$

## Exercice 1

Utiliser la méthode 1 pour déterminer

1. L'arrondi de $\frac{13}{11}$ à $10^{-2}$ près par défaut
2. L'arrondi de $\sqrt{2}$ à $10^{-4}$ près par excès.
3. L'arrondi de $\frac{149}{999}$ à $10^{-3}$ au plus près.

## Méthode 2

On veut arrondir 273 692,291 à $10^4$, c'est à dire à la dizaine de milliers.
Là encore il y a trois possibilités. On commence par remarquer que le chiffre correspondant à $10^4$ est le 7.

- **Arrondi par défaut** : On remplace tous les chiffres à droite du 7 par des zéros. La partie décimale disparaît.

$$273\,692{,}291 \approx 270\,000 \quad \text{à } 10^4 \text{ près par défaut.}$$

- **Arrondi par défaut** : On prend l'arrondi par défaut et on ajoute $10^4$.

$$273\,692{,}291 \approx 280\,000 \quad \text{à } 10^4 \text{ près par excès.}$$

- **Arrondi au plus près** : On regarde le chiffre immédiatement après celui de $10^4$ (celui qui correspond à $10^3$). Si c'est 0,1,2,3 ou 4, on prend l'arrondi par défaut, si c'est 5,6,7,8 ou 9, on prend l'arrondi par excès.

$$273\,692{,}291 \approx 270\,000 \quad \text{à } 10^4 \text{ au plus proche.}$$

## Exercice 2

Utiliser la méthode 2 pour déterminer

1. L'arrondi de **38 564 526** à $10^3$ près par défaut
2. L'arrondi de **281 564 526** à $10^8$ près par excès.
3. L'arrondi de **9524** à $10^3$ au plus près.

# II Écriture dyadique et arrondi

## 1 Écriture dyadique

Lorsqu'on écrit un nombre décimal tel que $3{,}719$, on a l'égalité suivante :

$$3{,}719 = 3 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$$

Il est possible de faire la même chose en base 2 : on ajoute des puissances de 2 d'exposants négatifs.

**Méthode : retrouver l'écriture décimale à partir d'une écriture dyadique**

On considère le nombre $n = (1010,011)_2$. Quelle est son écriture décimale ?

- Sa partie entière est $(1010)_2$, ce qui vaut 10.
- Sa partie décimale est

$$\begin{aligned}(0,011)_2 &= 2^{-2} + 2^{-3}\\ &= 0,25 + 0,125\\ &= 0,375\end{aligned}$$

Ainsi

$$n = 10,375$$

**Exercice 3**

Utiliser la méthode précédente pour déterminer les écriture décimales de

1. $(0,101)_2$
2. $(11,01)_2$
3. $(1111,1111)_2$

**Méthode : construire un nombre dyadique**

On veut l'écriture du nombre $5,75$ en base 2. Pour la partie entière, c'est simple :

$$5 = (101)_2$$

Pour la partie décimale, on remarque que

0,75 0,5+0,25

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$= 2^{-1} + 2^{-2}$

Ainsi

$$0,75 = (0,11)_2$$

Finalement

$$5,75 = (101,11)_2$$

**Exercice 4**

Utiliser la méthode précédente pour déterminer les écriture dyadiques de

1. $3,25$
2. $12,625$
3. $7,8125$

**Remarque**

Un nombre décimal n'a pas généralement une écriture dyadique « qui se termine ».
Par exemple 0,1 (qui est pourtant le nombre décimal le plus simple auquel on puisse penser) s'écrit

$$0,1 = (0,\ 0001\ 1001\ 1001\ \underline{1001}...)_2$$

## 2 Arrondi

Pour arrondir un nombre en base 2, on fait pareil qu'en base 10 :

**Exemples**

a. Arrondissons $n = (1101\ 1010)_2$ à $2^4$ au plus proche :
L'arrondi par défaut est $(1101\ 0000)_2$ mais comme le bit juste à droite du bit de $2^4$ est un 1, il faut rajouter $2^4$ à notre valeur arrondie, pour avoir la valeur par excès qui, elle, est plus proche :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & & & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
= & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Ainsi $n \approx (1110\ 0000)_2$ à $2^4$ au plus proche.

**b.** Pour les nombres dyadiques, c'est la même chose. Arrondissons $m = (11,\ 0011\ 1001)_2$ à $2^{-5}$ au plus proche :
Le bit de $2^{-6}$ est un 0, donc la bonne valeur arrondie est par défaut :

$$m \approx (11,\ 0011\ 1)_2 \text{ à } 2^{-5} \text{ au plus proche.}$$

**Remarque**

Quand on nous demande d'arrondir sans préciser, on convient que c'est au plus proche.

**Exercice 5**

Utiliser la méthode précédente pour déterminer

1. L'arrondi de $(1101\,1010)_2$ à $2^3$ près par défaut.
2. L'arrondi de $(1,1110\,101)_2$ à $2^{-3}$ près par excès.
3. L'arrondi de $(0,001)$ à $2^{-1}$ au plus proche.

# Exercices

## Exercice 6

Donner l'écriture décimale des nombres suivants

a. $(101,1)_2$

b. $(1,011)_2$

c. $(0,1111\ 111)_2$ en remarquant que c'est « $(111\ 1111)_2$ divisé par $2^7$.

## Exercice 7

Écrire en base 2 les nombres suivants :

a. 3,5

b. 7,75

c. 27,625

## Exercice 8

a. Quel est l'arrondi de $(10,011)_2$ à $(0,1)_2$ près ?

b. Quel est l'arrondi de $(11011)_2$ à $(100)_2$ près ?

c. Quel est l'arrondi de $(0,001011)_2$ à $(0,0001)_2$ près ?

## Exercice 9

a. Quel est l'arrondi de $(11,0101)_2$ à $2^{-2}$ près ?

b. Quel est l'arrondi de $(10111011)_2$ à 32 près près ?

## Exercice 10**

On aimerait trouver l'écriture dyadique (illimitée) de $\frac{1}{3}$. On note donc

$$\frac{1}{3} = (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_2$$

où $a_i$ vaut 1 ou 0.

1. Expliquer pourquoi $a_1$ vaut *nécessairement 0*.
2. On note $x = \frac{1}{3}$. Montrer que $x$ vérifie $4x = 1 + x$.
3. Quelle est l'écriture dyadique de $4x$ ?
4. Quelle est celle de $1 + x$ ?
5. En écrivant que ces 2 écritures représentent le même nombre, en déduire que

$$\frac{1}{3} = (0, 0101\ 0101 \dots)_2$$