Chapitre 6
Logique propositionnelle

I Notion de proposition

Définition : proposition

Une proposition est un énoncé qui a un sens et pour lequel on peut dire avec certitude qu'il est vrai ou faux. On dit qu'on peut lui associer une *valeur de vérité*. Cette valeur peut se noter VRAI ou FAUX mais on peut aussi choisir de la noter 0 (pour faux) ou 1 (pour vrai).

Exemples

- « 2+2 = 5 » est une proposition fausse.
- « $2 + 2 \equiv 1\ [3]$ » est une proposition vraie.

Exercice 1

L'affirmation « Cette affirmation est fausse » est-elle une proposition ?

II Connecteurs logiques

Définition : négation d'une proposition

L'opérateur de négation se note $\neg$. C'est un opérateur *unaire*, c'est à dire qu'il s'applique à *une* proposition.
Il est défini par la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
0	1
1	0

$\neg P$ se lit « non P ».

Définition : conjonction de deux propositions

L'opérateur de *conjonction* correspond au **and** de PYTHON, au **And** de VISUAL BASIC, au && de C++. Il se note $\wedge$, c'est un opérateur *binaire* car il s'applique à deux propositions.
Il est défini par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$P \wedge Q$ se lit « P et Q » et n'est vrai que si P est vrai et Q aussi.

Définition : disjonction de deux propositions

L'opérateur de *disjonction* correspond au `or` de PYTHON, au `Or` de VISUAL BASIC, au `||` de C++. Il se note $\vee$, c'est un opérateur *binaire*. Il est défini par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$P \vee Q$ se lit « P ou Q » et est vrai dès que P est vrai ou Q est vrai.

Définition : équivalence de deux propositions

Il se note $\Leftrightarrow$, c'est un opérateur *binaire*. Il est défini par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$P \Leftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q » et n'est vrai que si P et Q ont la même valeur de vérité.

Définition : implication

Il se note $\Rightarrow$, c'est un opérateur *binaire*. Il est défini par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q ».

- Quand P est fausse, $P \Rightarrow Q$ est vraie : « le faux implique n'importe quoi ».
- Quand P est vraie, $P \Rightarrow Q$ n'est vraie que si Q est aussi vraie : « le vrai n'implique que le vrai ».

Exercice 2

On note P et Q les affirmations suivantes :
P = « Paul aime le foot »
Q = « Paul aime les maths »
Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique en utilisant P, Q et des connecteurs logiques.

- A= « Paul aime le foot mais pas les maths »
- B = « Paul n'aime ni le foot, ni les maths »
- C = « Paul aime le foot ou il aime les maths et pas le foot »
- D = « Paul aime les maths et le foot ou il aime les maths mais pas le foot »

Exercice 3

Donner les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- A = $(\pi = 5) \wedge (2 + 3 = 5)$
- B = $(\pi = 5) \vee (2 + 3 = 5)$
- C = $(\pi = 3,14) \Rightarrow (5 + 6 = 11)$
- D= $(\pi = 5) \Rightarrow (2 + 3 = 5)$
- E = $(4 = 5) \Rightarrow A$
- F= $(5 + 5 = 10) \Leftrightarrow (\pi = 11)$

Exercice 4 (à faire plus tard)

Donner les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- A = $(11 > 0) \wedge (3 < 2)$

- $B = (11 > 0) \vee (3 < 2)$
- $C = (3 > 6) \vee (6 > 20)$
- $D = (3 < 2) \Rightarrow (5 = 5)$
- $E = (4 \neq 1) \Rightarrow (4 = 1)$
- $F = (4 < 5) \Leftrightarrow (10 + 1 = 11)$

Méthode : Montrer qu'une proposition est vraie

On peut montrer qu'une proposition composée est vraie en faisant prendre toutes les valeurs de vérités possibles aux propositions qui la compose et en trouvant sa table de vérité :

Montrons que $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ est vraie quelque soient les valeurs de vérité de P et de Q.

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Exercice 5 : l'implication

Vérifier que la table de vérité de $P \Rightarrow Q$ est la même que celle de $\neg(P) \vee Q$.

Exercice 6 : l'équivalence comme double implication

Vérifier que la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ est la même que celle de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Exercice 7 : le ou exclusif

Notons *xor* cet opérateur binaire. P *xor* Q est vraie si (et seulement si) une et une seule des 2 propositions est vraie.

1. Donner la table de vérité de P xor Q.
2. Vérifier que c'est la même que $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
3. Vérifier que c'est la même que celle de $(P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge Q))$

Exercice 8 : les lois de De Morgan

1. Montrer que $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
2. Montrer que $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

Propriété : équivalences classiques

Les propositions suivantes sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q et R.
On dit que ce sont des *tautologies*.

$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$	commutativité de $\wedge$
$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$	commutativité de $\vee$
$((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$	associativité de $\vee$
$((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$	associativité de $\wedge$
$(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$	distributivité de $\wedge$ sur $\vee$
$(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	distributivité de $\vee$ sur $\wedge$
$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$	
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	loi de De Morgan
$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	loi de De Morgan

Exemple : utilité de le proposition suivante

- « Il viendra mardi et il apportera son PC ou bien il viendra mercredi et il apportera son PC »
  se simplifie en :
  « Il viendra mardi ou mercredi et il apportera son PC ».
- « On n'a pas : Jean est gentil ou Jean est drôle » peut se réécrire :
  « Jean n'est pas gentil et Jean n'est pas drôle ».

Exercice 9

Simplifier « On n'a pas : Pierre habite Saint Brieuc et Pierre est brun ».

III Calcul des prédicats

Définitions : quantificateurs, variables, prédicats

Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » et s'appelle *quantificateur universel*.
Le symbole $\exists$ se lit « il existe » et s'appelle *quantificateur existentiel*.

Une *variable* est un symbole qui peut prendre plusieurs valeurs.
Un *prédicat* est un énoncé sans valeur de vérité qui contient au moins une variable, et qui devient une proposition en ajoutant un ou des quantificateurs.

Exemples

- « $x < 1$ » est un prédicat comportant une variable x.
- $\exists x \in R,\ x < 1$ est une proposition. Cette proposition est vraie : il existe un nombre réel strictement plus petit que 1 (et même une infinité) : 0 par exemple.
- $\forall x \in \mathrm{R},\ x < 1$ est une autre proposition… fausse ! Tout nombre réel n'est pas strictement plus petit que 1 : 2 par exemple.

Propriété : ordre des quantificateurs

Dans un prédicat à plusieurs variables, quand plusieurs quantificateurs de la même catégorie se suivent, on peut les échanger librement.
On *ne peut pas* échanger un quantificateur $\exists$ et un quantificateur $\forall$.

Exemples

- $\forall x \in \mathrm{R},\ \forall y \in \mathrm{R},\ \exists z \in \mathrm{R}, x + y < z$ est une proposition vraie : pour tous réels x et y on peut prendre z égal à $x + y + 1$.
  On peut échanger les quantificateurs universels : $\forall y \in \mathrm{R},\ \forall x \in \mathrm{R},\ \exists z \in \mathrm{R}, x + y < z$ est équivalent à la proposition précédente.
- $\forall x \in \mathrm{R},\ \exists y \in \mathrm{R}, x < y$ est une proposition vraie mais on ne peut pas échanger les quantificateurs : on obtient : $\exists y \in \mathrm{R},\ \forall x \in \mathrm{R}, x < y$ est fausse : cela voudrait dire qu'il existe un réel y plus grand que tous les autres !

Propriété : négation d'une proposition quantifiée

On obtient la négation d'une proposition quantifiée en changeant les $\exists$ en $\forall$, les $\forall$ en $\exists$ et en changeant le prédicat final par sa négation.

Exemple

On considère la propriété P :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$$

Sa négation est $\neg P$:

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ n \neq 2k$$

P est fausse puisqu'elle affirme que tout entier naturel est divisible par 2 !
Sa négation est vraie : elle affirme qu'il existe un entier naturel qui n'est pas divisible par 2 (3 par exemple).

Méthodes : preuve de propositions quantifiées

- Pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\forall$ est fausse, il suffit de donner un *contre exemple*.
- Pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\exists x \ldots$ est vraie, on peut déterminer la valeur de x qui convient.
- Pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\forall$ est vraie on a souvent recours à un raisonnement ou au calcul littéral.
- De même pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\exists x \ldots$ est fausse.

Exemples

- Montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ 3y + 1 = x$:
  Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $3y + 1 = x \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x - 1)$. Donc $\frac{1}{3}(x - 1)$ convient.
- Montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$ est fausse :
  Prenons $x = -1$. Il n'existe aucun $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y^2$. En effet d'après la règle des signes, y^2 est obligatoirement positif.

Exercice 10

Vrai ou faux ? Justifier.

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p - n \equiv 0\ [2]$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p - n \equiv 0\ [2]$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p - n \equiv 0\ [2]$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p - n \equiv 0\ [2]$

Exercice 11

Donner les négations des propositions suivantes et dire laquelle est vraie : la proposition ou sa négation.

- $\exists x \in \mathbb{R},\ 3x = 2$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x = x + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, x \leqslant y$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 = y$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 = y$