Calcul des prédicats

Exercice 1

Dans chercher à démontrer quoi que ce soit, donner les négations des propositions suivantes

1. $\forall x \in R$, $\forall y \in \mathrm{R}$, $\exists z \in \mathrm{R}$, $x < z < y$

2. $\exists x \in R$, $\exists y \in \mathrm{R}$, $x + y > 3$

3. $\forall n \in N^*$, $\exists p \in \mathrm{N}^*$ n divise p ou p divise n

Exercice 2

Méthode

- Pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\forall$ est fausse, il suffit de donner un *contre exemple*.
- Pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\exists x$... est vraie, on peut déterminer la valeur de x qui convient.
- Pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\forall$ est vraie on a souvent recours à un raisonnement ou au calcul littéral.
- De même pour prouver qu'une proposition quantifiée par $\exists x$... est fausse.

1. A : $\forall n \in \mathrm{N}$ 3 divise n ou 2 divise n
   Montrer que A est fausse

2. B : $\exists n \in \mathrm{N}$, 3 divise n et 4 divise n
   Montrer que B est vraie

3. C : « Quand on prend trois nombres entiers qui se suivent, leur somme est toujours un multiple de 3 ».
   Montrer que C est vraie.

4. D : « Quand on prend quatre nombres entiers qui se suivent, leur somme est toujours un multiple de 4 ».
   Montrer que D est fausse.

5. E : « Il existe deux entiers k et n plus grands que 1 tels que k divise à la fois n et n+1.
   Montrer que E est fausse.