Chapitre 7

Algèbres de Boole

I Définition d'une algèbre de Boole

Définition

Une *algèbre de Boole*, c'est un ensemble E muni de :

- deux lois *binaires* notées + et $\times$;
- une loi *unaire* qui à a associe $\overline{a}$;
- deux éléments particuliers notés 0 et 1;

et telle que , pour tous éléments a, b et c de E :

- Les deux lois binaires sont *commutatives* : $a+b=b+a$ et $ab=ba$
- elles sont aussi associatives : $a+(b+c)=(a+b)+c$ et $a(bc)=(ab)c$
- $\times$ se distribue sur + : $a(b+c)=ab+ac$
- + se distribue sur $\times$: $\boxed{a+bc=(a+b)(a+c)}$
  c'est la seule propriété contre-intuitive, on la notera $(*)$
- 0 est neutre pour + : $0+a=a$
- 0 est absorbant pour $\times$: $0a=0$
- 1 est neutre pour $\times$: $1a=a$
- 1 est absorbant pour + : $1+a=1$
- on a $a+\overline{a}=1$ et $a\overline{a}=0$

Exemples

- L'ensemble $\{0;1\}$ muni de $\vee$, $\wedge$ et $\neg$ est la plus simple des algèbres de Boole.
- Si on pose que deux propositions sont égales quand elles sont équivalentes, alors l'ensemble des propositions muni de $\vee$, $\wedge$ et $\neg$ est une algèbre de Boole, 0 étant la proposition fausse et 1 la proposition vraie.
- Comme on le verra au prochain chapitre, lorsqu'on se donne un ensemble E et que l'on considère $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble de ses parties, muni des opérations $\cap$ (intersection, joue le rôle de $\times$) et $\cup$ (union, joue le rôle de +), alors $P(E)$ est une algèbre de Boole, 0 étant l'*ensemble vide* et 1 étant E lui-même.

Exercice 1

Montrer que :

a. $(a+b)(\overline{a}+c)(\overline{b}+\overline{c}) = a\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\overline{c}$

b. $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} + a\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} + \overline{a}\,b\overline{c}\,\overline{d} + ab\overline{c}\,\overline{d} = \overline{b}\,\overline{c}$

c. $ab + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,b = \overline{a} + b$

Propriétés

- Dans une algèbre de Boole, pas besoin de multiplication par un entier car pour tout élément a :
$$a + a = a$$
Donc $2a = a$ et par suite pour tout entier naturel non nul n : $na = a$.
- Pas besoin de puissances non plus car pour tout élément a :
$$aa = a$$
Donc $a^2 = a$ et par suite pour tout entier naturel non nul n : $a^n = a$.

Preuve :

Soit a un élément de E :

- $a = a + 0$
  $= a + a\overline{a}$ et on utilise $(*)$
  $= (a + a)(a + \overline{a})$
  $= (a + a)1$
  $= a + a$

- $a = a \times 1$
  $= a(a + \overline{a})$
  $= aa + a\overline{a}$
  $= aa + 0$
  $= aa$

Propriété

Si 2 éléments x et y de E sont tels que $xy = 0$ et $x + y = 1$, alors $x = \overline{y}$.

Preuve :

$$
\begin{aligned}
x + y = 1 \quad & \Rightarrow \quad (x + y)\overline{y} = \overline{y} \\
& \Rightarrow \quad x\overline{y} + y\overline{y} = \overline{y} \\
& \Rightarrow \quad x\overline{y} + 0 = \overline{y} \\
& \Rightarrow \quad x\overline{y} + xy = \overline{y} \\
& \Rightarrow \quad x(\overline{y} + y) = \overline{y} \\
& \Rightarrow \quad x \times 1 = \overline{y} \\
& \Rightarrow \quad x = \overline{y}
\end{aligned}
$$

Propriété : lois de De Morgan

Quels que soient les éléments de x et y de E on a

$$\overline{x \times y} = \overline{x} + \overline{y} \qquad \text{et} \qquad \overline{x + y} = \overline{x} \times \overline{y}$$

Preuve de la première égalité.
Si on pose $A = xy$ et $B = \overline{x} + \overline{y}$, alors on doit montrer que $\overline{A} = B$.
On utilise la propriété précédente et on montre donc que $A + B = 1$ et que $AB = 0$:

$B + A = \overline{x} + \overline{y} + xy$ et on utilise $(*)$
$= (\overline{x} + \overline{y} + x)(\overline{x} + \overline{y} + y)$
$= (1 + \overline{y})(1 + \overline{x})$
$= 1 \times 1$
$= 1$

$AB = (\overline{x} + \overline{y})xy$
$= \overline{x}xy + \overline{y}xy$
$= 0y + 0x$
$= 0 + 0$
$= 0$

Exercice 2

Montrer la deuxième loi en faisant la même chose.

II Diagrammes de Karnaugh

Cette méthode a été développée par Maurice Karnaugh en 1953. Elle fait appel à des tableaux qui représentent des expressions booléennes.
On colorie les cases qui correspondent aux différents termes de l'expression. À la fin on peut reconnaître et lire une expression simplifiée.

Propriété

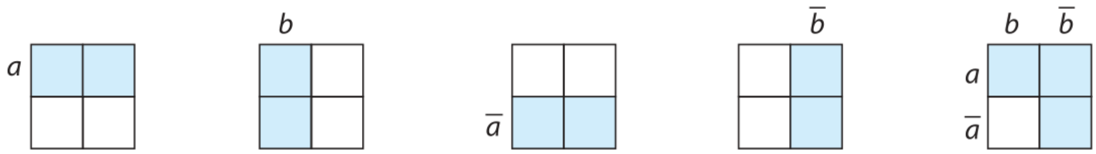
Un produit correspond à une *intersection*, une somme à une *union*.

Avec 2 variables

Le diagramme est un carré dont les quatre cases correspondent aux quatre produits ab, $a\overline{b}$, $\overline{a}\,b$, $\overline{a}\,\overline{b}$.

ab	$a\overline{b}$
$\overline{a}\,b$	$\overline{a}\,\overline{b}$

Ci dessous on représente a, b, $\overline{a}$, $\overline{b}$ et une dernière expression.



Cette dernière peut se lire $a+\overline{b}$ ou bien $ab+a\overline{b}+\overline{a}\,\overline{b}$.

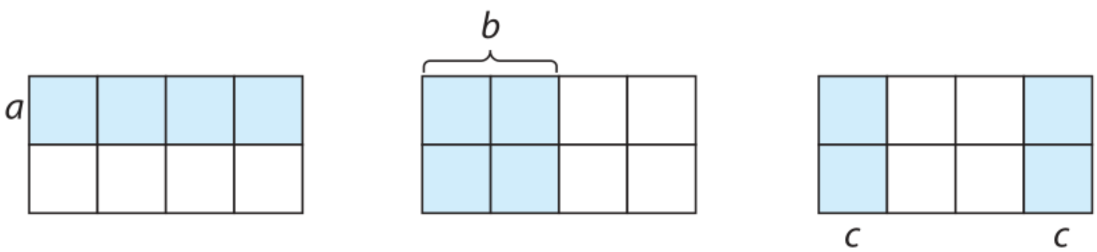
Exercice 3

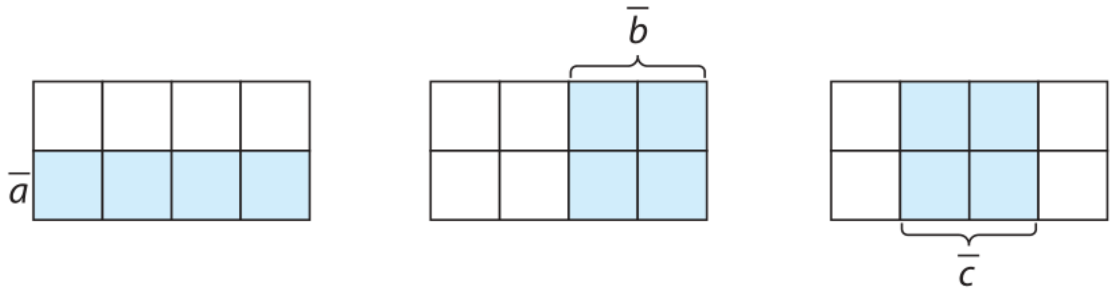
Propose une troisième interprétation du dernier diagramme.

Avec 3 variables

Le diagramme est un rectangle dont les huit cases correspondent aux produits suivants.

abc	$ab\overline{c}$	$a\overline{b}\,\overline{c}$	$a\overline{b}\,c$
$\overline{a}\,bc$	$\overline{a}\,b\overline{c}$	$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$	$\overline{a}\,\overline{b}\,c$





Exercice 4

Faire les tables de Karnaugh des expressions ab, $a\overline{b}$, ac, $a\overline{c}$, $\overline{a}\,b$, $\overline{a}\,\overline{b}$, $\overline{a}\,c$, $\overline{a}\,\overline{c}$, bc, $\overline{b}\,c$, $b\overline{c}$, $\overline{b}\,\overline{c}$.