Chapitre 1

Arithmétique

Bases de numération

«Partons sur de bonnes bases.»

Définition : ensemble des entiers naturels

On note N l'ensemble des entiers naturels.

 $N = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12 ...\}$

Nous avons l'habitude d'utiliser la base 10 pour représenter les entiers naturels, c'est-àdire qu'on utilise 10 symboles, appelés *chiffres* pour les écrire : 0, 1, 2, ..., 9. Or il n'en a pas toujours été ainsi :

- au I^{er} millénaire av. J.-C., les Babyloniens utilisaient la base soixante pour mesurer le temps et les angles;
- durant le I^{er} millénaire, les Mayas et les Aztèques se servaient de la base vingt (et d'ailleurs en France, 80 se lit « quatre-vingts »);
- entre le vii^e et le xv^e siècle, les astronomes Arabes utilisaient la base cent cinquante pour élaborer des tables permettant de trouver la position d'un astre dans le ciel à un moment donné.

De nos jours, en Informatique, on utilise beaucoup la base deux, dite *binaire* et la base seize, appelée *hexadécimale*. L'objectif de ce chapitre est de donner les méthodes permettant d'écrire un entier naturel dans une base donnée, plus précisément dans les bases 2, 10 et 16. Nous verrons également comment passer facilement du binaire à l'hexadécimal et vice-versa.



Écriture binaire d'un entier naturel

1 Pourquoi le binaire?

Pour simplifier, disons qu'au niveau le plus « bas » d'un ordinateur, se trouvent des (millions de) transistors qui jouent chacun un rôle d'interrupteur. De multiples points de l'ordinateur peuvent alors être soumis à une tension (état 1) ou non (état 0). En considérant 2 de ces points, on voit que l'état de ce système peut être 00, 01, 10 ou 11. Cela fait 4 possibilités et le binaire est né!



2 Comprendre l'écriture en base 2

Puisqu'il n'y a que deux chiffres en binaire, compter est simple mais nécessite rapidement plus de chiffres qu'en base 10 :

Écriture décimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
Écriture binaire	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	

Notation

On écrira $(11)_{10}$ pour insister sur le fait qu'on parle du nombre 11 *en base 10*, et $(11)_2$ pour dire que c'est une écriture binaire.

Lorsque ce n'est pas précisé cela veut dire que l'écriture est en base 10.

Ainsi $(11)_2$ = 3 alors que $(11)_{10}$ n'est autre que le 11 « classique » et d'ailleurs on le note 11 (sans les parenthèses et le 10 en indice).

De même, (111)₂ = 7.

Tout entier naturel admet une unique écriture décimale (c'est-à-dire en base 10), il en va de même en binaire :

Propriété : écriture binaire d'un entier naturel

Tout entier naturel possède une unique écriture en base 2, dite écriture binaire. Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ et k + 1 nombres a_i , uniques et valant 0 ou 1 et tels que

$$n = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \dots + a_k 2^k$$

ce qui s'écrit aussi $n = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i$.

Exemple

Lorsqu'on regarde le tableau précédent, on voit que $6 = (110)_2$. Cela s'interprète ainsi :

Chiffre binaire	1	1	0
Valeur	2 ²	2 ¹	2 ⁰

et on obtient un exemple de la propriété précédente :

$$6 = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2$$

Exercice 1

Donner l'écriture décimale des onze premières puissances de deux.

Méthode 1 : passer de la base 2 à la base 10

On a un entier écrit en binaire et on veut connaître son écriture en base 10. Par exemple, que vaut (11101)₂?

On fait un tableau dans lequel on met dans la première ligne le nombre en binaire. Dans la seconde ligne on indique quelle est la valeur de chaque chiffre binaire.

Chiffre binaire	1	1	1	0	1
Valeur	2 ⁴	2 ³	2 ²	2 ¹	2 ⁰

Ensuite on fait le total:

$$(11101)_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

= 16 + 8 + 4 + 1
= 29

Donc (11101)₂, c'est 29.

Exercice 2

Utiliser la méthode 1 pour déterminer les écritures décimales des nombres suivants

1. (1 1011)₂

3. (101 1011)₂

5. (1011 1101)₂

2. $(110011)_2$

4. (110 1100)₂

6. (10 1101 0011)₂

Méthode 2 : passer de la base 10 à la base 2

Ici on veut faire « dans l'autre sens » : on a un nombre en base 10 et on veut l'écrire en binaire.

Commençons par nous rappeler comment on fait avec une écriture décimale :

$$243 = 2 \times 100 + 4 \times 10 + 3$$
$$= 2 \times 10^{2} + 4 \times 10^{1} + 3 \times 10^{0}$$

En fait, on a trouvé tout seul que 243 commence par s'écrire avec des *centaines* (plus précisément 2 centaines). Une fois qu'on a compté ces deux centaines, il reste 43 et on recommence : il faut 4 dizaines, et 3 unités.

On peut faire la même chose en base 2 : on commence par repérer quelle est la plus grande puissance de 2 inférieure à 243 : c'est 128.

```
243 = 128 + 115 on recommence avec 115

= 128 + 64 + 51 on continue avec 51

= 128 + 64 + 32 + 19 puis avec 19

= 128 + 64 + 32 + 16 + 3 puis avec 3

= 128 + 64 + 32 + 16 + 2 + 1 c'est terminé

= 2<sup>7</sup> + 2<sup>6</sup> + 2<sup>5</sup> + 2<sup>4</sup> + 2<sup>1</sup> + 2<sup>0</sup> 0 il n'y a plus qu'à écrire en binaire

= (11110011)<sub>2</sub>
```

Cette méthode est pratique quand l'entier est petit et que l'on connaît bien les premières puissances de deux.

Quand ce n'est pas le cas, une autre méthode (la méthode 3) peut être employée.

Exercice 3

Utiliser la méthode 2 pour déterminer les écritures binaires des nombres suivants

1. 17

3. 130

5. 231

2. 36

4. 192

6. 1283

3 L'algorithme des divisions successives

C'est un algorithme très important car il est valable en base 10, en base 2 et aussi en base 16 (que nous verrons plus tard)

Définition : division euclidienne dans N

Soient A et B deux entiers naturels, et $B \neq 0$. Il existe deux nombres uniques Q et R (vérifiant $0 \ge R < B$) tels que l'on puisse écrire

$$A = Q \times B + R$$

C'est exactement la division que l'on a apprise en sixième (celle où l'on s'arrête aux nombres entiers):

- · A est appelé le dividende;
- B est le diviseur;
- · Q est le quotient;
- R est le reste, il est impérativement plus petit que B.

Méthode 3

On va retrouver les chiffres de 243 en base 10 en faisant des divisions successives par 10. On sait déjà que ce sont 2,4 et 3 mais c'est un exemple pour comprendre comment cela marche et pour passer à la base 2 ensuite.

On divise 243 par 10 en faisant une division euclidienne :

Comme le quotient (24) n'est pas nul, on recommence, jusqu'à ce que le quotient soit nul :

Quand on trouve un quotient nul, on reprend tous les restes à l'envers :2, 4 et 4, cela nous donne 243.

En fait, il est plus pratique d'enchainer les divisions comme ceci :

Pour trouver l'écriture binaire, de 243 on fait pareil mais avec des divisions par 2 :

Dès qu'on a trouvé un quotient nul on remet les restes dans l'ordre inverse :

Remarque

Attention à bien écrire les restes dans l'ordre inverse de celui dans lequel ils apparaissent.

Exercice 4

Utiliser la méthode 3 pour déterminer les écritures binaires des nombres suivants

1. 12

3. 69

5. 251

2. 37

4. 145

6. 1234

4 Vocabulaire lié à l'informatique

Un chiffre décimal peut être 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9.
 Un chiffre binaire peut être seulement 0 ou 1. En Anglais, chiffre binaire se traduit par binary digit, que l'on abrège en bit. On garde cette dénomination en Français.
 Le bit est donc «le plus petit morceau d'information numérique».

- On regroupe les chiffres décimaux par paquets de 3, comme dans 1 230 014 par exemple.
 En binaire on groupe les bits par 4.
 Bien souvent les bits sont groupés par 8 (deux paquets de 4). Un tel paquet s'appelle un octet.
- Lorsqu'on considère un nombre écrit en binaire, on parle souvent de bit de poids fort et de bit de poids faible pour parler respectivement du bit associé à la plus grande puissance de 2, et du bit d'unités.
 Considérons (0010 0101)₂. Son bit de poids fort est 0, son bit de poids faible est 1.

Exercice 5

- Que peut-on dire d'un entier dont le bit de poids faible de son écriture binaire vaut 0? Pourquoi?
- 2. Même question pour un entier dont les 2 bits de poids les plus faibles de son écriture binaire valent 0.

Exercice 6

- **1.** Si on décide, en machine, de représenter des entiers naturels par leur écriture binaire sur 4 bits, combien pourra-t-on en représenter? Quels seront les plus petit et le plus grand nombre représentables?
- 2. Même question, mais en écrivant les entiers sur n bits, où n est un entier positif.

Ecriture hexadécimale d'un entier naturel

La base « naturelle » de l'informatique est la base 2, mais elle n'est pas très pratique car elle donne lieu à des écritures trop longues. La base 10 nous paraît bien meilleure parce que nous avons l'habitude de l'utiliser, mais elle ne fait pas bon ménage avec la base 2 : il n'y a pas de méthode simple pour passer du décimal au binaire, et vice versa. La base 16, ou base *hexadécimale*, est en revanche très adaptée à l'écriture des paquets de 4 bits, et par extension à celle des octets et autres écritures binaires.

En hexadécimal, on dispose de 16 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F.

Propriété: écriture binaire d'un entier naturel

Tout entier naturel possède une unique écriture en base 16, dite écriture hexadécimale. Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ et k + 1 nombres a_i , uniques et valant 0, 1, 2, ..., ou F et tels que

$$n = a_0 16^0 + a_1 6^1 + ... + a_k 16^k$$

ce qui s'écrit aussi

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i 16^i$$

Remarque

On a vu une propriété similaire en base 2 et en fait elle est valable dans toutes les bases b (où b est un entier naturel supérieur ou égal à 2). Cela justifierait par exemple l'utilisation de la base 20 ou de la base 150.

Les méthodes que l'on a vues en base 2 et 10 se transposent en base 16.

Méthode 4 : passer de la base 16 à la base 10

Déterminons l'écriture décimale de (*D4A*)₁₆. Il faut garder en tête les valeurs suivantes :

chiffre hexadécimal	Α	В	С	D	E	F
valeur	10	11	12	13	14	15

Ainsi, si l'on veut l'écriture décimale de $(D4A)_{16}$, on écrit :

$$(D4A)_{16} = 13 \times 16^2 + 4 \times 6 + 10 \times 16^0$$
 car D vaut 13 et A vaut 10.
= 3402

Exercice 7

Utiliser la méthode 4 pour déterminer les écritures décimales des nombres suivants

Méthode 5 : passer de la base 10 à la base 16

Déterminons maintenant l'écriture hexadécimale de 503 : on fait des divisions successives par 16 tout comme en base 2

On s'arrête car on a trouvé un quotient nul et on remet les restes dans l'ordre inverse : 1, 15, 7 cela fait 1, F et 7 : $503 = (1F7)_{16}$.

Exercice 8

Utiliser la méthode 5 pour déterminer les écritures hexadécimales des nombres suivants

1. 29

3. 123

5. 510

2. 50

4. 487

6. 2020

0x000340:	C6	10	80	Е3	02	10	01	ΕO	BO	10	C3	Ε1	00	30	0F	E1	Æ.∎ãà°.Ãá.O.á
0x000350:				ЕЗ				ЕЗ						10	9F	E5	BOÃã.O∣ã.ð)á<.∣å
0x000360:	0C	10	81	ΕO	00	00	91	E5	00	40	2D	E9	00	ΕO	8F	E2	à'å.@–é.à â
0x000370:	10	FF	2F	E1	00	40	BD	E8	00	30	0F	E1	DF	30	C3	E3	.ÿ∕á.@½è.O.áßOÃã
0x000380:	92	30	83	ЕЗ	03	F0	29	E1	0F	40	BD	E8	во	20	C3	E1	″O∎ã.ð)á.@½è° Ãá
0x000390:	В8	10	C3	E1	00	F0	69	E1	1E	FF	2F	E1	28	73	00	03	,.Ãá.ðiá.ÿ∕á(s
0x0003A0:	90	34	00	03	FO	B5	47	46	80	B4	FF	20	E1	F1	FA	FD	4āµGF∣´ÿ áñúý
0x0003B0:	A0	21	C9	04	27	4A	10	1C	08	80	00	F0	DЗ	FA	26	49	!É.'J∎.ðÓú&I
0x0003C0:	26	4A	10	1C	08	80	00	FO	F9	F8	00	F0	5B	F9	DB	F1	&J∥.ðùø.ð[ùÛñ
0x0003D0:	1B	FA	00	F0	DF	F8	F8	FO	1F	FB	4B	F0	73	FE	00	F0	.ú.ðßøøð.ûKðsþ.ð
0x0003E0:	6F	F8	71	FO	BB	FA	00	FO	07	FC	00	F0	1B	FE	1C	48	oøqð»ú.ð.ü.ð.þ.H
0x0003F0:	ΕO	21	49	02	02	F0	7A	FB	F7	F0	90	FC	19	48	00	24	à!Iőzû÷ő ü.H.\$
0x000400:	04	70	19	48	04	70	F5	FO	1F	F8	18	48	04	70	18	4F	.p.H.põð.ø.H.p.O
0x000410:	00	21	88	46	06	1C	00	FO	E5	F8	12	48	00	78	00	28	.!∎Fðåø.H.x.(
0x000420:	0E	D1	39	8D	01	20	08	40	00	28	09	DO	0E	20	08	40	.Ñ9@.(.Đ@
0x000430:	0E	28	05	D1	DE	F1	В8	FE	DE	F1	48	FE	00	FO	4A	FA	.(.ÑÞñ,þÞñHþ.ðJú
0x000440:	57	FO	BE	FF	01	28	15	D1	30	70	00	F0	2F	F8	00	20	Wð¾ÿ.(.ÑOp.ð∕ø.
0x000450:	30	70	22	ΕO	FF	7F	00	00	04	02	00	04	14	40	00	00	Op"àÿ ∣ @
0x000460:	00	00	00	02	80	34	00	03	1C	5E	00	03	34	30	00	03	4^40
0x000470:	40	30	00	03	0C	4D	00	20	28	70	00	F0	17	F8	57	F0	@OM. (p.ð.øWð
0x000480:	69	FF	04	1C	01	2C	08	D1	00	20	F8	85	06	FO	16	FF	iÿ,.Ñ. ø∎.ð.ÿ
0x000490:	2C	70	00	F0	0B	F8	42	46	2A	70	54	F0	57	FA	71	F0	,p.ã.øBF*pTőWúqã
0x0004A0:	67	FA	00	F0	FЗ	F9	В6	E7	34	30	00	03	00	B5	0A	F0	gú.ðóù¶ç40µ.ð
0x0004B0:	19	FE	00	06	00	28	01	D1	00	F0	28	F8	01	BC	00	47	.þ(.Ñ.ð(ø.¼.G
0x0004C0:	10	B5	0B	48	00	24	04	62	44	62	04	60	09	48	00	F0	.μ.Η.\$.bDb.`.Η.δ
0x0004D0:	37	F8	09	48	09	49	01	60	09	4A	0A	48	10	60	F2	20	7ø.H.I.`.J.H.`ò
0x0004E0:	00	01	09	18	0C	60	08	48	04	70	10	BC	01	BC	00	47	`.H.p.¼.¼.G

Un éditeur hexadécimal montre le contenu d'un fichier, d'un disque dur, ou de la RAM d'un ordinateur. La première colonne indique l'adresse, puis 16 octets écrits en hexadécimal et enfin les caractères correspondants.



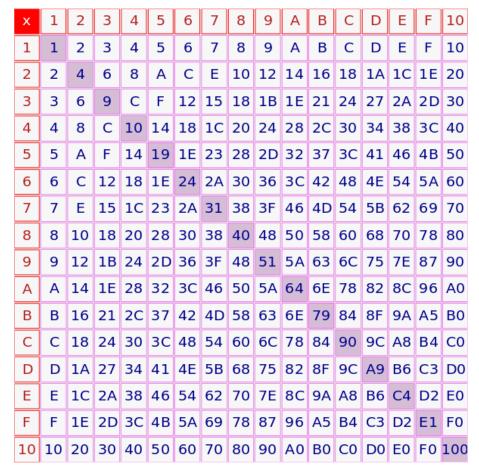


Table de multiplication hexadécimale.

Hexadécimal et binaire : un mariage heureux

En fait il est très simple de passer d'une écriture en base 2 à une écriture en base 16 et vice-versa. On utilise le tableau suivant :

Base 16	0	1	2	3	4	5	6	7
Base 2	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Base 16	8	9	Α	С	В	D	Ε	F
Base 2	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Ensuite on peut utiliser ce tableau dans les 2 sens :

Méthode 6 : passer de la base 2 à la base 16

$$(101101000011101)_{2} = (0101\ 1010\ 0001\ 1101)_{2}$$
$$= \left(\underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1101}_{D}\right)_{2}$$
$$= (5A1D)_{16}$$



Exercice 9

En utilisant la méthode 6, déterminer les écritures hexadécimales des nombres suivants

1. (1010 1111)₂

3. (1110 1000)₂

2. (10 1011)₂

4. (1 1010 1111)₂

Méthode 7 : passer de la base 16 à la base 2

$$(F7B)_{16} = \left(\underbrace{1111}_{F} \underbrace{0111}_{7} \underbrace{1101}_{B}\right)_{2}$$

= $(111101111101)_{2}$

Exercice 10

En utilisant la méthode 7, déterminer les écritures binaires des nombres suivants

1. $(FF)_{16}$

3. (3*D*)₁₆

2. (A2)₁₆

4. (7E8)₁₆

Exercices

Exercice 11

- **1.** Calculer $2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0$.
- 2. En déduire l'écriture binaire de 89.

Exercice 12

- **1.** Calculer $2^7 + 2^3 + 2^2 + 2^1$.
- 2. En déduire l'écriture décimale de (10001110)₂.

Exercice 13

En utilisant la méthode 2, donner l'écriture binaire de

- **1.** 56
- **2.** 35
- **3.** 13

Exercice 14

En utilisant la méthode 3, donner l'écriture binaire de

- **1.** 142
- **2.** 273
- **3.** 1000

Exercice 15

- Donner l'écriture décimale de (1101 1010)₂.
- Donner l'écriture binaire de 2016.

- Donner l'écriture hexadécimale de 2016.

Exercice 16

- Donner les écritures décimales de $(11)_2$, $(111)_2$, $(1111)_2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, conjecturer (c'est-à-dire faire une hypothèse sur) la valeur de $\left(\underbrace{1...1}_{n \text{ chiffres}}\right)_2$.

Exercice 17

Pour multiplier par dix un entier naturel exprimé en base dix, il suffit d'ajouter un 0 à sa droite, par exemple, $12 \times 10 = 120$.

Quelle est l'opération équivalente pour les entiers naturels exprimés en base deux?

Exercice 18

Le code ASCII (American Standard Code for Information Interchange) permettait de coder les caractères principaux utilisés en Informatique. De nos jours on lui préfère l'UTF-8, mais ce dernier est rétro-compatible.

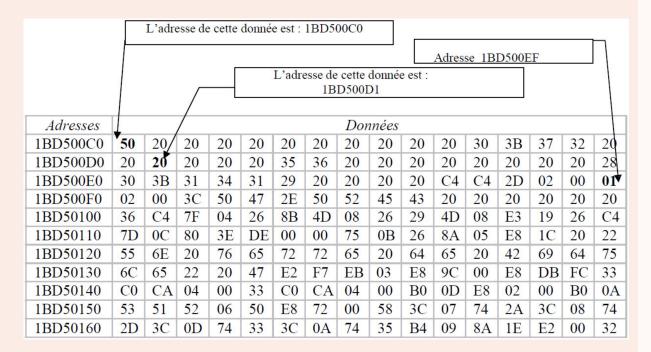
ASCII TABLE

Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char	Decimal	Hex	Char
0	0	[NULL]	32	20	[SPACE]	64	40	@	96	60	`
1	1	[START OF HEADING]	33	21	1	65	41	A	97	61	а
2	2	[START OF TEXT]	34	22		66	42	В	98	62	b
3	3	[END OF TEXT]	35	23	#	67	43	С	99	63	c
4	4	[END OF TRANSMISSION]	36	24	\$	68	44	D	100	64	d
5	5	[ENQUIRY]	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	6	[ACKNOWLEDGE]	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	7	[BELL]	39	27	100	71	47	G	103	67	g
8	8	[BACKSPACE]	40	28	(72	48	H	104	68	h
9	9	[HORIZONTAL TAB]	41	29)	73	49	1	105	69	i
10	Α	[LINE FEED]	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	В	[VERTICAL TAB]	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	С	[FORM FEED]	44	2C	1	76	4C	L	108	6C	1
13	D	[CARRIAGE RETURN]	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
14	E	[SHIFT OUT]	46	2E		78	4E	N	110	6E	n
15	F	[SHIFT IN]	47	2F	1	79	4F	0	111	6F	0
16	10	[DATA LINK ESCAPE]	48	30	0	80	50	P	112	70	р
17	11	[DEVICE CONTROL 1]	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	[DEVICE CONTROL 2]	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	[DEVICE CONTROL 3]	51	33	3	83	53	S	115	73	S
20	14	[DEVICE CONTROL 4]	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	[NEGATIVE ACKNOWLEDGE]	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	[SYNCHRONOUS IDLE]	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	[ENG OF TRANS. BLOCK]	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	[CANCEL]	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	[END OF MEDIUM]	57	39	9	89	59	Υ	121	79	у
26	1A	[SUBSTITUTE]	58	3A	1	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	[ESCAPE]	59	3B	;	91	5B	[123	7B	{
28	1C	[FILE SEPARATOR]	60	3C	<	92	5C	1	124	7C	
29	1D	[GROUP SEPARATOR]	61	3D	=	93	5D	1	125	7D	}
30	1E	[RECORD SEPARATOR]	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	[UNIT SEPARATOR]	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	[DEL]

- 1. Donner le code du caractère «F» en binaire.
- 2. Combien faudrait-il de bits pour représenter un caractère de cette table?
- **3.** En pratique, on code sur un *octet*, c'est à dire 8 *bits*. Quelle suite d'octets (en hexadécimal) correspond au mot « Fred »?
- **4.** Quelle opération arithmétique permet de passer d'un caractère majuscule au caractère minuscule correspondant? Donner un exemple. Et dans l'autre sens?



5. On utilise un éditeur hexadécimal, voici ce que l'on voit :



Retrouver le contenu de la variable de type chaîne de caractères de longueur 6 encodée en ASCII qui est stockée à partir de l'adresse (0001 1011 1101 0101 0000 0001 0010 1100)₂

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons «Attribution - Pas d'utilisation commerciale - Partage dans les mêmes conditions 3.0 non transposé».

