Graphes orientés

Chapitre 19

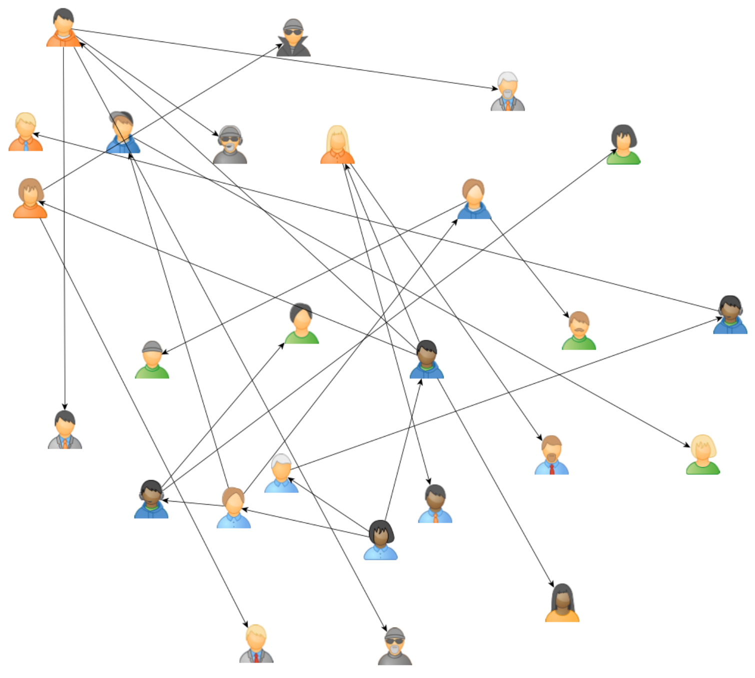
NSI2

4 janvier 2022

Introduction

Situation

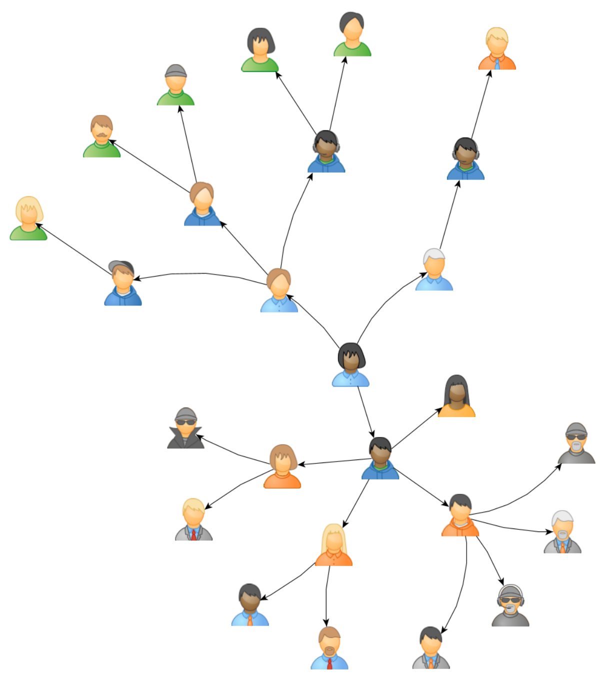
On considère des individus qui ont été infectés par une maladie et on place une flèche pour signifier que tel individu a contaminé tel autre individu.
On obtient ce résultat :



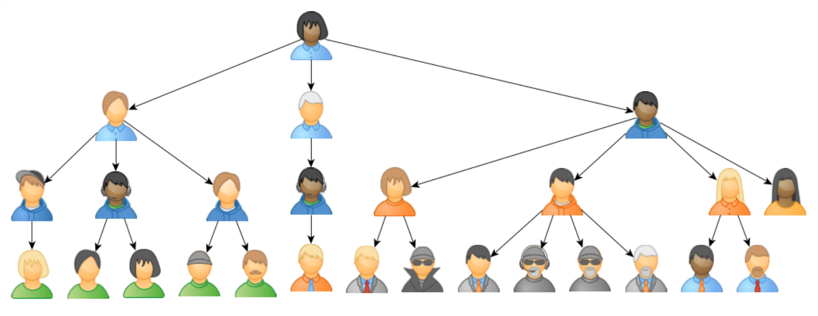
Constat

C’est le fouillis, n’est-ce pas ?

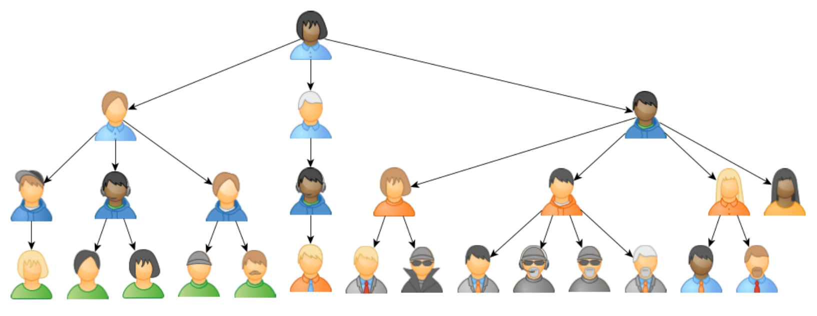
En déplaçant les sommets du graphe on peut le présenter ainsi :



C’est le même graphe mais on y voit plus clair… et on y voit encore plus clair comme ça :



On voit clairement le « patient zéro » et on reconnaît quelque chose qui ressemble à une structure que l'on a déjà rencontrée :



On voit clairement le « patient zéro » et on reconnaît quelque chose qui ressemble à une structure que l'on a déjà rencontrée : une arborescence.

Conclusion

La représentation graphique d'un graphe orienté ne le caractérise pas, même si certaines représentations aident à mieux en cerner la structure.

Ce qui caractérise un graphe orienté c'est bel et bien ses sommets et ses arcs.

Représentations d’un graphe

Situation

Abel, Brieuc, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n’importe quel utilisateur, y compris son créateur.

Situation

Abel, Brieuc, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.
On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

Situation

Abel, Brieuc, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.
On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

- Abel a aimé des messages de Corentin et David ;

Situation

Abel, Brieuc, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.
On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

- Abel a aimé des messages de Corentin et David ;
- Brieuc a aimé ses messages, ceux d'Abel et de Corentin ;

Situation

Abel, Brieuc, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.
On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

- Abel a aimé des messages de Corentin et David ;
- Brieuc a aimé ses messages, ceux d'Abel et de Corentin ;
- Corentin a aimé les messages de David ;

Situation

Abel, Brieuc, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.
On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

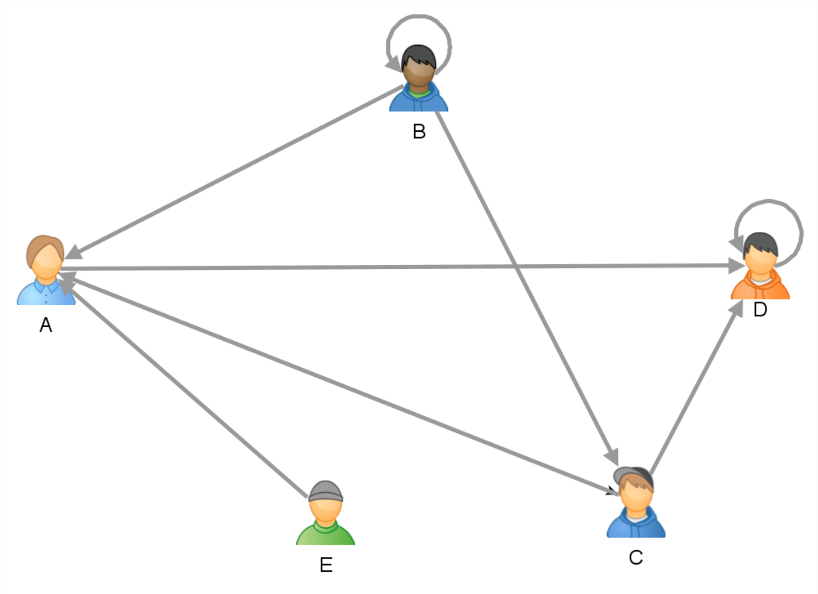
- Abel a aimé des messages de Corentin et David ;
- Brieuc a aimé ses messages, ceux d'Abel et de Corentin ;
- Corentin a aimé les messages de David ;
- David a aimé ses propres messages ;

Situation

Abel, Brieuc, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur.
On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

- Abel a aimé des messages de Corentin et David ;
- Brieuc a aimé ses messages, ceux d'Abel et de Corentin ;
- Corentin a aimé les messages de David ;
- David a aimé ses propres messages ;
- Ewen a aimé les messages d'Abel.

Représentation graphique



Graphe orienté

Ces résultats permettent de produire un graphe orienté :

Graphe orienté

Ces résultats permettent de produire un graphe orienté :

- les sommets du graphe représentent les personnes;

Graphe orienté

Ces résultats permettent de produire un graphe orienté :

- les sommets du graphe représentent les personnes ;
- les arcs sont des flèches qui représentent le fait que la personne de départ aime les messages de celle d'arrivée.

Tableau de successeurs

On peut aussi représenter les résultats dans un tableau :

personne	A	B	C	D	E
aime les messages de	C,D	A, B,C	D	D	A

Tableau de prédécesseurs

On peut aussi recopier le tableau en donnant pour chaque personne la liste de ses « followers » (personnes qui ont aimé ses messages) :

personne	A	B	C	D	E
followers	B,E	B	A,B	A,C,D	—

Matrice d’adjacence

On peut aussi présenter les données ainsi :

		arrivée				
		A	B	C	D	E
départ	A	0	0	1	1	0
	B	0	1	1	0	0
	C	0	0	0	1	0
	D	0	0	0	1	0
	E	1	0	0	0	0

Conclusion

Il y a donc plusieurs manières de représenter un graphe orienté.

Conclusion

Il y a donc plusieurs manières de représenter un graphe orienté.

À ces représentations correspondent différentes implémentations.

Un peu de théorie

Définition

Un graphe orienté G, c'est la donnée de

Définition

Un graphe orienté G, c'est la donnée de

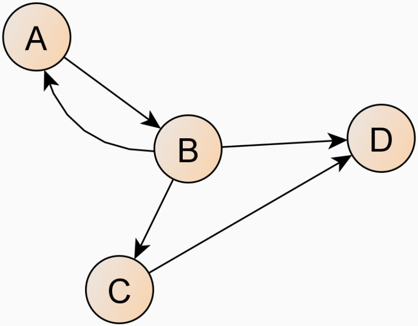
- un ensemble $S = \{s_1; ...; s_n\}$ de sommets ;

Définition

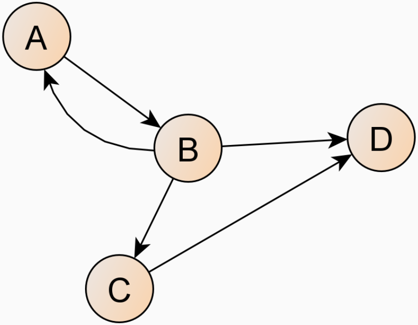
Un graphe orienté G, c'est la donnée de

- un ensemble $S = \{s_1; \ldots; s_n\}$ de sommets ;
- un ensemble A composé d'arcs du type $(s_i; s_j)$, qui indiquent qu'il y a « une flèche » partant du sommet s_i et allant au sommet s_j. :
  s_i est appelé l'origine de l'arc et s_j son extrémité.

Exemple

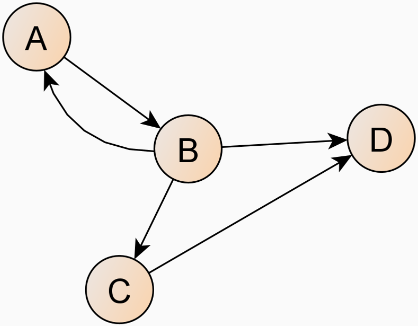


Exemple



Ici l'ensemble des sommets est $\{A; B; C; D\}$.

Exemple

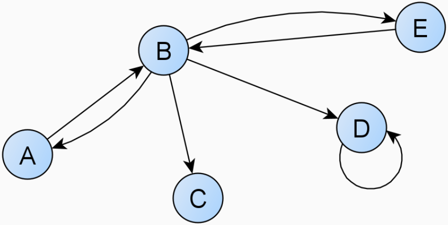


Ici l'ensemble des sommets est $\{A;\ B;\ C;\ D\}$.

L'ensemble des arcs est $\{(A; B);\ (B; A);\ (B; C);\ (B; D);\ (C; D)\}$

Exercice

Donner l'ensemble des sommets et l'ensemble des arc du graphe suivant.



Définition : boucle

Un arc dont l’origine et l’extrémité sont confondues d’appelle une boucle.

Définition : Successeurs, prédécesseurs

Soit un graphe de sommets S et d'arcs A. Soit s un sommet.

Définition : Successeurs, prédécesseurs

Soit un graphe de sommets S et d'arcs A. Soit s un sommet.

On note $\Gamma^{+}(s)$ l'ensemble des successeurs de s.

Définition : Successeurs, prédécesseurs

Soit un graphe de sommets S et d'arcs A. Soit s un sommet.

On note $\Gamma^+(s)$ l'ensemble des successeurs de s.
C'est l'ensemble des extrémités des arcs partant de s.

Définition : Successeurs, prédécesseurs

Soit un graphe de sommets S et d'arcs A. Soit s un sommet.

On note $\Gamma^+(s)$ l'ensemble des successeurs de s.
C'est l'ensemble des extrémités des arcs partant de s.

De même, on note $\Gamma^-(s)$ l'ensemble des prédécesseurs de s.

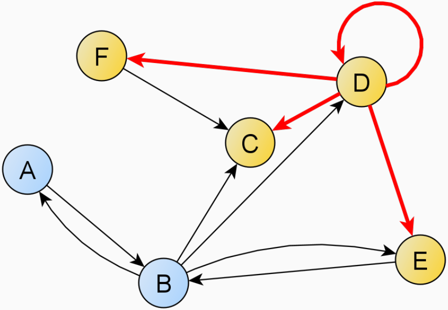
Définition : Successeurs, prédécesseurs

Soit un graphe de sommets S et d'arcs A. Soit s un sommet.

On note $\Gamma^+(s)$ l'ensemble des successeurs de s.
C'est l'ensemble des extrémités des arcs partant de s.

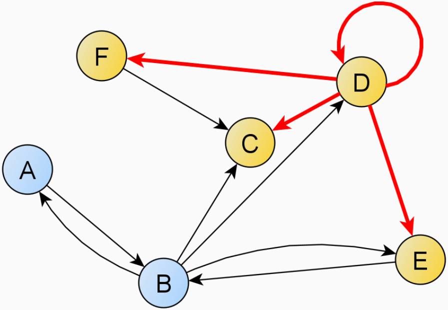
De même, on note $\Gamma^-(s)$ l'ensemble des prédécesseurs de s.
C'est l'ensemble des origines des arcs arrivant sur s.

Successeurs : exemple



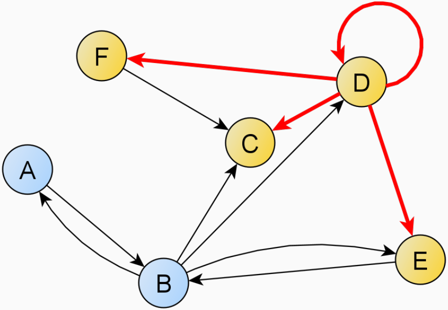
Dans ce graphe, il y a 4 arcs d'origine D.

Successeurs : exemple



Dans ce graphe, il y a 4 arcs d'origine D.Leurs extrémités sont les points C,D,E et F.

Successeurs : exemple



Dans ce graphe, il y a 4 arcs d'origine D.Leurs extrémités sont les points C,D,E et F.
Ainsi $\Gamma^{+}(D) = \{C; D; E; F\}$.

Tableau des successeurs

On peut caractériser tout graphe à partir d’un tableau des successeurs.

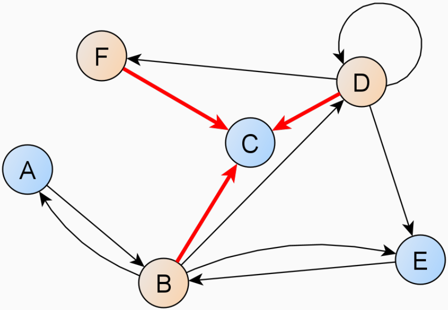
Tableau des successeurs

On peut caractériser tout graphe à partir d'un tableau des successeurs.

Voici celui du graphe précédent :

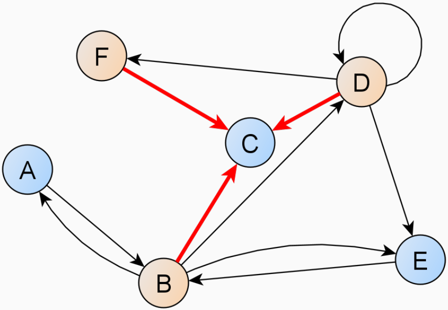
Sommet	A	B	C	D	E	F
successeurs	B	A, C, E	—	C, D, E, F	B	C

Prédécesseurs : exemple



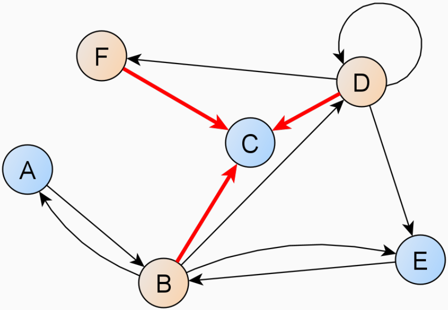
Dans ce graphe, il y a 3 arcs d'extrémité C.

Prédécesseurs : exemple



Dans ce graphe, il y a 3 arcs d'extrémité C.
Leurs origines sont les points B,D et F.

Prédécesseurs : exemple



Dans ce graphe, il y a 3 arcs d'extrémité C.
Leurs origines sont les points B,D et F.
Ainsi $\Gamma^{-}(C) = \{B; D; F\}$.

Tableau des prédécesseurs

Il caractérise également le graphe. Voici celui du graphe précédent :

Sommet	A	B	C	D	E	F
prédécesseurs	B	A, E	B, D, F	B, D	B, D	D

Matrice d’adjacence

Définition

Soit un graphe G de sommets $S = \{s_1; \ldots; s_n\}$ et d'arcs A.

Définition

Soit un graphe G de sommets $S = \{s_1; ...; s_n\}$ et d'arcs A.
On appelle *matrice d'adjacence de* G la matrice carrée d'ordre n $M = (m_{ij})$ telle que

Définition

Soit un graphe G de sommets $S = \{s_1; ...; s_n\}$ et d'arcs A.
On appelle *matrice d'adjacence de* G la matrice carrée d'ordre n $M = (m_{ij})$ telle que

- $m_{ij} = 1$ s'il y a un arc partant de s_i et arrivant sur s_j ;

Définition

Soit un graphe G de sommets $S = \{s_1; ...; s_n\}$ et d'arcs A.
On appelle *matrice d'adjacence de* G la matrice carrée d'ordre n $M = (m_{ij})$ telle que

- $m_{ij} = 1$ s'il y a un arc partant de s_i et arrivant sur s_j ;
- $m_{ij} = 0$ sinon.

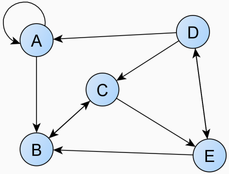
Définition

Soit un graphe G de sommets $S = \{s_1; ...; s_n\}$ et d'arcs A.
On appelle *matrice d'adjacence de* G la matrice carrée d'ordre n $M = (m_{ij})$ telle que

- $m_{ij} = 1$ s'il y a un arc partant de s_i et arrivant sur s_j ;
- $m_{ij} = 0$ sinon.

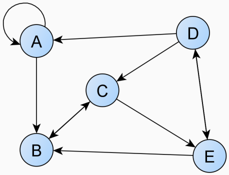
i est le numéro de ligne et j celui des colonnes de la matrice M.

Exemple



En écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique, on obtient

Exemple

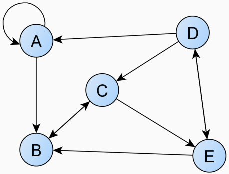


En écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & {\color{red}1} & 0 \end{pmatrix}$$

L'élément encadré de M est à la 3$^{\text{e}}$ ligne et à la 2$^{\text{e}}$ colonne : c'est m_{32}.

Exemple

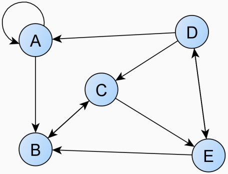


En écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'élément encadré de M est à la 3^e^ ligne et à la 2^e^ colonne : c'est m_{32}.Il vaut 1 et signifie qu'il y a un arc partant du sommet 3, donc C, et allant au sommet 2, donc B.

Exemple



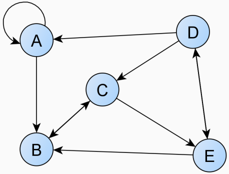
En écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \color{red}{1} & 0 \end{pmatrix}$$

L'élément encadré de M est à la 3^{e} ligne et à la 2^{e} colonne : c'est m_{32}.Il vaut 1 et signifie qu'il y a un arc partant du sommet 3, donc C, et allant au sommet 2, donc B.

De même, du 5^{e} sommet E, il existe un arc allant vers le 4^{e} (D), donc $m_{54} = 1$ (en rouge).

Exemple



En écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & {\color{red}1} & 0 \end{pmatrix}$$

L'élément encadré de M est à la 3$^{\text{e}}$ ligne et à la 2$^{\text{e}}$ colonne : c'est m_{32}.Il vaut 1 et signifie qu'il y a un arc partant du sommet 3, donc C, et allant au sommet 2, donc B.
De même, du 5$^{\text{e}}$ sommet E, il existe un arc allant vers le 4$^{\text{e}}$ (D), donc $m_{54} = 1$ (en rouge).

Remarque

Dans une matrice d'adjacence

Remarque

Dans une matrice d’adjacence

- Les lignes correspondent au points de départ, les colonnes au point d’arrivée ;

Remarque

Dans une matrice d’adjacence

- Les lignes correspondent au points de départ, les colonnes au point d’arrivée ;
- Sur une ligne donnée(la i$^{\text{e}}$ par exemple), on peut lire *tous les successeurs* de s_i ;

Remarque

Dans une matrice d'adjacence

- Les lignes correspondent au points de départ, les colonnes au point d'arrivée ;
- Sur une ligne donnée(la i^{e} par exemple), on peut lire *tous les successeurs* de s_i ;
- Sur une colonne donnée, (la j^{e} par exemple), on lit *tous les prédécesseurs* de s_j ;

Chemins, circuits

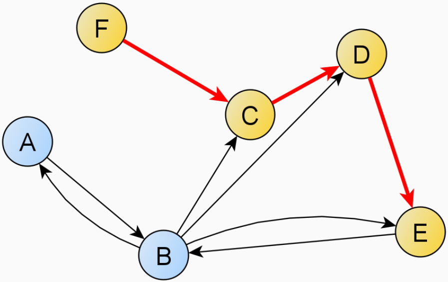
Définitions

On considère un graphe orienté.

Un chemin est une succession de sommets dans un ordre donné, chacun étant relié au suivant par un arc.

La longueur du chemin, c'est le nombre d'arcs qui composent le chemin.
C'est aussi le nombre de sommets qui composent le chemin moins un.

Exemple

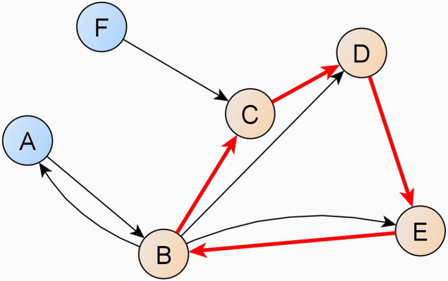


(F, C, D, E) est un chemin de longueur 3.

(F, C, B, E) n'en est pas un car l'arc (C, B) n'existe pas.

Circuit

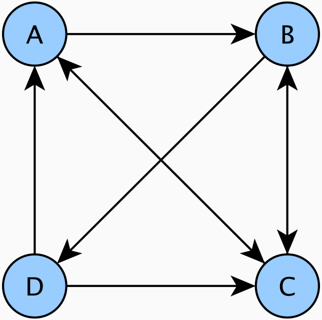
Un circuit est un chemin dont le premier et le dernier sommet sont identiques (un chemin « fermé » en quelque sorte).



(C, D, E, B, C) est un circuit de longueur 4.

Implémentation n°1

À l'aide d'une matrice d'adjacence




```
G = [[0, 1, 1, 0], # successeurs de A
     [0, 0, 1, 1], # successeurs de B
     [1, 1, 0, 0], # successeurs de C
     [1, 0, 1, 0]] # successeurs de D
```

Intérêts

- Très simple à mettre en œuvre.
- Fonctions `successeurs` et `arc` facile à coder.

Inconvénients

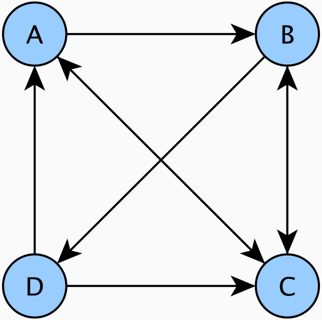
- On ne peut pas facilement ajouter d'autres sommets.
- Pour n sommets on a une matrice $n \times n$, ce qui prend beaucoup de place surtout s'il n'y a pas beaucoup d'arcs.
- On n'a pas les noms des sommets dans la matrice, c'est à nous de connaître la correspondance.

Remarques

- On peut très facilement encapsuler la matrice et les fonctions dans une classe.
- Attention, en PYTHON, les indices commencent à 0, donc il y a un petit « décalage » par rapport à la matrice théorique.

Implémentation n°2

Dictionnaire d'adjacence




```
G = {'A' : ['B','C'], # les sommets sont les clés
     'B' : ['C','D'], # et les valeurs les listes
     'C' : ['A','B'], # des successeurs de chaque
     'D' : ['A','C']} # clé
```

Intérêts

- On peut facilement ajouter d'autres sommets.
- On dispose des noms des sommets.
- Solution assez « élégante ».

Inconvénients

Si le nombre de sommets (et surtout d'arcs) est grand, cette implémentation prendra beaucoup plus de place en mémoire qu'une simple matrice d'adjacence.

Remarque

Encore une fois, il est judicieux d'encapsuler ce dictionnaire dans une classe.
On pourra alors définir des méthodes telles que :

- `liste_sommets`
- `successeurs`
- `predecesseurs`
- *Et cætera*