SI01 **Algèbres de Boole - Exercices** 2022

Exercice 1

$\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole.

1. Montrer par le calcul que $\forall a \in \mathcal{B}, \forall b \in \mathcal{B},\ a + ab = a$;

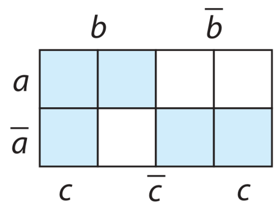
2. Montrer par le calcul que $\forall a \in \mathcal{B}, \forall b \in \mathcal{B},\ a(a + b) = a$.

3. Montrer par le calcul que $\forall a \in \mathcal{B}, \forall b \in \mathcal{B},\ a + \overline{a}\,b = a + b$.

Vérifier ces trois égalités avec des tables de Karnaugh.

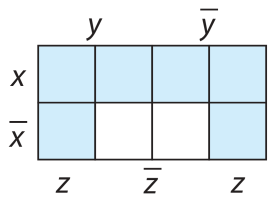
Exercice 2

Écrire de deux façons possibles l'expression booléenne représentée par le tableau de Karnaugh suivant.



Exercice 3

Écrire l'expression booléenne représentée par le tableau de Karnaugh suivant sous la forme d'une somme de deux variables booléennes prises parmi x, y, z, $\overline{x}$, $\overline{y}$ et $\overline{z}$.



Exercice 4

x,y et z sont trois élément d'une algèbre booléenne B.

Écrire l'expression $y\overline{(xy + z)}$ sous la forme d'un produit de trois variables booléennes prises parmi x, y, z, $\overline{x}$, $\overline{y}$ et $\overline{z}$.

Exercice 5

a,b et c sont trois élément d'une algèbre booléenne B.

1. Écrire l'expression $(a + \overline{b}\,c)(b + \overline{c})$ sous la forme d'une somme de deux produits de deux variables booléennes prises parmi a, b, c, $\overline{a}$, $\overline{b}$ et $\overline{c}$.

2. Représenter ce résultat dans une table de Karnaugh et en déduire une nouvelle expression

Exercice 6

B est une algèbre booléenne. On définit l'opération « nor », notée $\downarrow$ par :

$$\forall a \in \mathcal{B}, \forall b \in \mathcal{B},\ a \downarrow b = \overline{a+b}$$

Cette opération est dite *universelle* car elle permet de retrouver toutes les autres opérations.

1. Montrer que $\forall a \in \mathcal{B}\ a \downarrow a = \overline{a}$.

2. En déduire que

$$\forall a \in \mathcal{B}, \forall b \in \mathcal{B},\ (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) = a + b$$

3. Comment à partir de a, b et $\downarrow$ obtenir ab ?

Exercice 7 Polynésie juin 2018

Une société de fabrication et d'installation de fibre optique a besoin de recruter un informaticien, femme ou homme. La direction des ressources humaines considère qu'une candidature est recevable lorsqu'elle satisfait à l'une au moins des conditions suivantes :

- le candidat est âgé de 25 ans ou moins et est titulaire du BTS SIO ;
- le candidat est âgé de 25 ans ou moins, n'est pas titulaire du BTS SIO et possède de l'expérience ;
- le candidat est âgé de strictement plus de 25 ans et est titulaire du BTS SIO ;

On définit les variables booléennes a, b, c de la façon suivante :

- $a = 1$ si le candidat est âgé de strictement plus de 25 ans, $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ si le candidat est titulaire d'un BTS SIO, $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si le candidat a de l'expérience, $c = 0$ sinon.

1. Écrire une expression booléenne E traduisant qu'une candidature est recevable, à l'aide des variables booléennes a, b, c.

2. À l'aide d'un tableau de Karnaugh, déterminer une écriture simplifiée de E sous la forme d'une somme de deux termes. En déduire une interprétation simplifiée des conditions pour qu'une candidature soit recevable.

3. Une candidate a 21 ans, aucune expérience, mais est titulaire du BTS SIO. Remplit-elle les critères de recrutement ?

4. Donner une expression simple de $\overline{E}$.

Exercice 8 Polynésie mai 2017

Cinq joueurs, notés A, B, C, D et E, jouent régulièrement à un jeu en ligne.
Chaque partie de ce jeu oppose deux adversaires.

1. Dans cette question, on note $J = \{A, B, C, D, E\}$ l'ensemble des cinq joueurs.

   On note $V(x\ ;\ y)$ le prédicat : « le joueur x a déjà battu le joueur y ».

   Ainsi, la valeur V(A; B) est VRAI, et la valeur de V(B; A) est FAUX.

   On définit trois prédicats :

   P1 : $\forall x \in J,\ \exists y \in J,\ x \neq y$ et $V(x\ ;\ y)$

   P2 : $\exists x \in J,\ \forall y \in J,\ x \neq y$ et $V(x\ ;\ y)$

   P3 : $\exists y \in J,\ \forall x \in J,\ x \neq y$ et $V(x\ ;\ y)$

   Associer à chaque prédicat P1, P2, P3, celle des trois phrases suivantes qui lui correspond parmi les phrases suivantes. Aucune justification n'est demandée.

   « Il existe un joueur qui a été battu par tous les autres joueurs ».

   « Tous les joueurs ont battu au moins un autre joueur ».

   « Il existe un joueur qui a battu tous les autres joueurs ».

2. Un joueur reçoit un bonus lorsqu'il vérifie l'un au moins des trois critères suivants :

   • le joueur a participé à 20 parties ou davantage, et il a affronté plusieurs adversaires différents;

   • le joueur n'a pas affronté plusieurs adversaires différents, et il a obtenu strictement plus de victoires que de défaites;

   • le joueur n'a pas obtenu strictement plus de victoires que de défaites, et il a participé à 20 parties ou davantage.

   On définit les variables booléennes a, b, c de la façon suivante :

   $a = 1$ si le joueur a participé à 20 parties ou davantage; $a = 0$ sinon;

   $b = 1$ si le joueur a affronté plusieurs adversaires différents; $b = 0$ sinon;

   $c = 1$ si le joueur a obtenu strictement plus de victoires que de défaites; $c = 0$ sinon.

   a. Écrire une expression booléenne F traduisant les conditions permettant à un joueur d'obtenir le bonus.

   b. À l'aide d'un tableau de Karnaugh ou d'un calcul booléen, déterminer une écriture simplifiée de F sous forme d'une somme de deux termes.

   c. En déduire une formulation simplifiée des critères permettant à un joueur d'obtenir le bonus.