МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

Реферат
по дисциплине
«Уравнения математической физики»
по теме:
«Метод Фурье для вынужденных колебаний струны
(с подвижными концами)»

направление подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направление образовательной программы
«Сквозные цифровые технологии»

Выполнил студент
гр. Б9119-02.03.01сцт
Петров С.Д. ______________
(Ф.И.О.) *(подпись)*
Проверил
Алексеев Г. В. ______________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

«01» февраля 2023г.

г. Владивосток
2023

Оглавление

1. Волновые уравнения

Волновое уравнение – линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, задающее колебания струны, мембраны, а также другие колебательные процессы в сплошных средах.

Общий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Здесь:

- $u(x,t)$ — Неизвестная функция
- x, y, z — Координаты в пространстве
- t — Время
- $a > 0$ — Константа, описывающая скорость распространения

Рассмотрим однородное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Данное уравнение называется уравнением колебаний струны, или же уравнение продольных колебаний стержня. Оно описывает то, что сила(вторая производная по времени) пропорциональна кривизне(вторая производная по координате). Впервые оно почти одновременно появилось в работах Д.Бернулли, Ж. Л. Д`Аламбера и Л. Эйлера.

Комментарий:

Тейлор установил,, что сила, действующая на бесконечно малый элемент струны, пропорциональна второй производной по координате, но рассматривал только одномерный вариант задачи.

Д'Аламбер в дальнейшем стал рассматривать зависимость отклонения струны от времени. Это позволило применить второй закон Ньютона. Он переформировал закон и написал уравнение в современном виде.

Примечательно, что Бернулли получил решение в виде тригонометрического ряда, а Д'Аламбер и Эйлер в виде прямой и обратной волн. Позже Фурье доказала эквивалентность этих решений.

2. Метод Фурье для уравнений свободных колебаний струны

Метод Фурье является одним из распространенных методов решения уравнений с частными производными.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны длины l, закрепленной на концах, за время Т, где $0 < T < \infty$. Такая задача сводится к одномерному волновому уравнению в области $Q = (0, l) \times (0,\ T)$.

Добавим граничные условия:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 - \text{обозначает фиксированные концы}$$

$$u(x,0) = \varphi_0 - \text{изначальное положение струны в пространстве}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1 - \text{изначальная скорость колебания струны}$$

Предположим, что решение существует и единственно. Будем искать частное ненулевое решение, удовлетворяющее граничным условиям в виде произведения.

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Подставляя в уравнение получим:

$$X(x)\ddot{T}(t) = \ \alpha^2\, X''(x)T(t)$$

Разнесем функции одинаковых переменных по разные стороны, разделив обе части на $\alpha^2 XT$. (ошибки не будет, так как X,T ненулевое решение и скорость строго больше нуля)

$$\frac{\ddot{T}}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$$

Так как части зависят от разных переменных, то обе части равны одной и той же постоянной. Обозначим эту переменную через $-\lambda$. Тогда из равенства получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

$$\ddot{T} + \alpha^2 \lambda T = 0$$

$$X'' + \alpha^2 \lambda X = 0$$

Чтобы получить нетривиальные решения, необходимо найти нетривиальные решения для граничных условий.

$$X(0) = X(l) = 0$$

Таким образом, необходимо найти значения параметра λ, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, а также граничным условиям.

Рассмотрим 3 случая.

- $\boldsymbol{\lambda < 0}$

  Общее решение имеет вид:

  $$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda x}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda x}}$$

  Где C_1, C_2 произвольные постоянные, удовлетворяющие граничным условиям.

  Получим:

  $$\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 = 0, \qquad C_1 e^{\sqrt{-\lambda x}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda x}} = 0$$

  Определитель системы отличен от нуля, отсюда $\mathrm{C}_1 = 0, \mathrm{C}_2 = 0$. Значит $X(x) = 0$. Т.е. при $\lambda < 0$ не существует нетривиального решения.

- $\boldsymbol{\lambda = 0}$

  Общее решение имеет вид:

  $$X = C_1 + C_2 x$$

  Граничные условия:

  $$\mathrm{C}_1 + 0\mathrm{C}_2 = 0, \qquad C_1 + lC_2 = 0$$

  Определитель системы отличен от нуля, отсюда $\mathrm{C}_1 = 0, \mathrm{C}_2 = 0$. Значит $X(x) = 0$. Т.е. при $\lambda = 0$ не существует нетривиального решения.

- $\boldsymbol{\lambda > 0}$

  Общее решение имеет вид:

  $$X = C_1\cos(\sqrt{\lambda x}) + \ C_2\sin(\sqrt{\lambda x})$$

  Где C_1, C_2 произвольные постоянные, удовлетворяющие граничным условиям.

  Граничные условия:

  $$\mathrm{C}_1 + 0\mathrm{C}_2 = 0, \qquad lC_1\cos\left(\sqrt{\lambda}\right) + \ lC_2\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$$

  Из первого условия видно, что $C_1 = 0$, из второго получаем $lC_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$. Необходимо считать $\mathrm{C}_2 \neq 0$.

  Приходим к равенству $l\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$ Т. е. $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}$.

  Таким образом, получим $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$

Подставим вместо λ значения λ_k и запишем решение второго уравнения.

$$T_k(t) = a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}$$

Где a_k, b_k произвольные постоянные.

Получим решение в виде:

$$u_k(x,t) = X_kT_k = \left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

То же самое справедливо для любой линейной комбинации функций, а также ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right]$$

Остается определить a_k, b_k так, чтобы выполнялись начальные условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \ \varphi_0$$

Продифференцируем найденное решение по t:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k\pi a}{l}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l} + b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right]$$

Получим второе граничное условие:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \varphi_1$$

Полученные формулы граничных условий представляют разложения функций φ_0, φ_1 в ряд Фурье по синусам на интервале $(0, l)$. Постоянные a_k, b_k можно выразить через формулы:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0 \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx, \qquad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \varphi_1 \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx$$

3. Вынужденные колебания струны с подвижными концами

Задача колебаний струны с подвижными концами сводится к решению неоднородного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

удовлетворяющего краевым условиям:

$$u(0,t) = g_0(t), u(l,t) = g_l(t) - \text{обозначают подвижные концы}$$

$$u(x,0) = \varphi_0 - \text{изначальное положение струны в пространстве}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1 - \text{изначальная скорость колебания струны}$$

Для нахождения решения задачи сведем ее к задаче с однородными краевыми условиями, а далее решим как задачу с закрепленными концами. Для этого введем вспомогательную функцию:

$$w(x,t) = g_0(t) + \left(g_l(t) - g_0(t)\right)\frac{x}{l}$$

Видно, что функция w удовлетворяет граничным условиям $u(0,t), u(l,t)$. Таким образом, решение задачи можно представить как:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

Получим новую искомую функцию v, из линейности становится очевидно, что она удовлетворяет граничным условиям:

$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$