МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

Реферат

по дисциплине
«Уравнения математической физики»
по теме:
«Метод Фурье для вынужденных колебаний струны
(с подвижными концами)»

направление подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направление образовательной программы
«Сквозные цифровые технологии»

Выполнил студент
гр. Б9119-02.03.01сцт
Петров С.Д. ______________
(Ф.И.О.) *(подпись)*
Проверил
Алексеев Г. В. ______________
(Ф.И.О.) *(подпись)*
«01» февраля 2023г.

г. Владивосток
2023

Оглавление

1. Волновые уравнения

Волновое уравнение – линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, задающее колебания струны, мембраны, а также другие колебательные процессы в сплошных средах.

Общий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Здесь:

- $u(x, t)$ − Неизвестная функция
- x, y, z − Координаты в пространстве
- t − Время
- $a > 0$ − Константа, описывающая скорость распространения

Рассмотрим однородное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Данное уравнение называется уравнением колебаний струны, или же уравнение продольных колебаний стержня. Оно описывает то, что сила (вторая производная по времени) пропорциональна кривизне(вторая производная по координате). Впервые оно почти одновременно появилось в работах Д.Бернулли, Ж. Л. Д`Аламбера и Л. Эйлера.

Комментарий:

Тейлор установил, что сила, действующая на бесконечно малый элемент струны, пропорциональна второй производной по координате, но рассматривал только одномерный вариант задачи.

Д’Аламбер в дальнейшем стал рассматривать зависимость отклонения струны от времени. Это позволило применить второй закон Ньютона. Он переформировал закон и написал уравнение в современном виде.

Примечательно, что Бернулли получил решение в виде тригонометрического ряда, а Д'Аламбер и Эйлер в виде прямой и обратной волн. Позже Фурье доказала эквивалентность этих решений.

2. Вынужденные колебания струны с подвижными концами

Задача колебаний струны с подвижными концами сводится к решению неоднородного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

удовлетворяющего краевым условиям:

$$u(0,t) = g_0(t), u(l,t) = g_l(t) - \text{обозначают подвижные концы}$$

$$u(x,0) = \varphi_0 - \text{изначальное положение струны в пространстве}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1 - \text{изначальная скорость колебания струны}$$

Для нахождения решения задачи сведем ее к задаче с однородными краевыми условиями, а далее решим, как задачу с закрепленными концами. Для этого введем вспомогательную функцию:

$$w(x,t) = g_0(t) + \ (g_l(t) - g_0(t)\ )\frac{x}{l}$$

Видно, что функция w удовлетворяет граничным условиям $u(0,t), u(l,t)$. Таким образом, решение задачи можно представить, как:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

Получим новую искомую функцию v, из линейности становится очевидно, что она удовлетворяет граничным условиям:

$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$

В результате получаем неоднородное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t)$$

С однородными граничными условиями:

$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$

$$v(x,0) = \varphi_{v0}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \varphi_{v1}$$

3. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах

Для решения задача вынужденных колебаний с подвижными концами, необходимо уметь решать уравнения для вынужденных колебаний с закрепленными концами.

Задача имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Удовлетворяющая граничным условиям:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

И начальным условиям:

$$u(x,0) = \varphi_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1$$

Будем искать решение u в виде суммы:

$$u = v + w$$

Здесь $v -$ решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Удовлетворяющая граничным условиям:

$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$

И начальным условиям:

$$v(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0$$

А $w -$ решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Удовлетворяющая граничным условиям:

$$w(0,t) = w(l,t) = 0$$

И начальным условиям:

$$w(x,0) = \varphi_0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \varphi_1$$

Решение задачи v описывает вынужденные колебания струны – колебания совершающиеся под действием силы с плотностью f, с отсутствующими начальными возмущениями.

Решение задачи w описывает свободные колебания струны – колебания происходящие лишь под действием начального возмущения струны.

Следуя методу Фурье, будем искать решение v в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{k(t)} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

В таком случае граничные условия удовлетворяются автоматически.

Определим функции $T_k(t)$ так, чтобы ряд удовлетворял неоднородному волновому уравнению.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t)\right) \sin\frac{k\pi x}{l} = f(x,t) \qquad (1)$$

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$$

Предположим что функцию $f(x,t)$ тое можно разложить в ряд Фурье по синусам.

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (2)$$

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^1 f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\ dx$$

Фактически (1) и (2) являются разложениями одной функции в ряд Фурье по синусам. Значит:

$$T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t) = f_k(t)$$

Теперь у нас появилось обычное дифференциально уравнение второго порядка относительно T_k. Для однозначности решения с учетом однородности начальных условий введем нулевые начальные условия.

Решение при начальных условиях имеет вид:

$$T_k(t) = \frac{1}{\omega_k}\int_o^t f_k(t)\sin\omega_k(t-\tau)\ d\tau$$

Подставляя T_k, найдем v.

Далее решим волновое уравнение свободных колебаний струны с закрепленными концами, чтобы найти w

4. Метод Фурье для уравнений свободных колебаний струны с закрепленными концами

Метод Фурье является одним из распространенных методов решения уравнений с частными производными.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны длины l, закрепленной на концах, за время T, где $0 < T < \infty$. Такая задача сводится к одномерному волновому уравнению в области $Q = (0,l) \times (0,\ T)$.

Добавим граничные условия:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 - \text{обозначает фиксированные концы}$$

$u(x, 0) = \varphi_0$ – изначальное положение струны в пространстве

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1$ – изначальная скорость колебания струны

Предположим, что решение существует и единственно. Будем искать частное ненулевое решение, удовлетворяющее граничным условиям в виде произведения.

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Подставляя в уравнение получим:

$$X(x)\ddot{T}(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$$

Разнесем функции одинаковых переменных по разные стороны, разделив обе части на $\alpha^2 XT$. (ошибки не будет, так как X,T ненулевое решение и скорость строго больше нуля)

$$\frac{\ddot{T}}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$$

Так как части зависят от разных переменных, то обе части равны одной и той же постоянной. Обозначим эту переменную через $-\lambda$. Тогда из равенства получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

$$\ddot{T} + \alpha^2 \lambda T = 0$$

$$X'' + \alpha^2 \lambda X = 0$$

Чтобы получить нетривиальные решения, необходимо найти нетривиальные решения для граничных условий.

$$X(0) = X(l) = 0$$

Таким образом, необходимо найти значения параметра λ, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, а также граничным условиям.

Рассмотрим 3 случая.

- $\boldsymbol{\lambda < 0}$

  Общее решение имеет вид:

$$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda x}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda x}}$$

Где C_1, C_2 произвольные постоянные, удовлетворяющие граничным условиям.

Получим:

$$\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 = 0, \qquad C_1 e^{\sqrt{-\lambda x}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda x}} = 0$$

Определитель системы отличен от нуля, отсюда $\mathrm{C}_1 = 0, \mathrm{C}_2 = 0$. Значит $X(x) = 0$. Т.е. при $\lambda < 0$ не существует нетривиального решения.

- $\boldsymbol{\lambda = 0}$

Общее решение имеет вид:

$$X = C_1 + C_2 x$$

Граничные условия:

$$\mathrm{C}_1 + 0\mathrm{C}_2 = 0, \qquad C_1 + lC_2 = 0$$

Определитель системы отличен от нуля, отсюда $\mathrm{C}_1 = 0, \mathrm{C}_2 = 0$. Значит $X(x) = 0$. Т.е. при $\lambda = 0$ не существует нетривиального решения.

- $\boldsymbol{\lambda > 0}$

Общее решение имеет вид:

$$X = C_1 \cos(\sqrt{\lambda x}) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda x})$$

Где C_1, C_2 произвольные постоянные, удовлетворяющие граничным условиям.

Граничные условия:

$$\mathrm{C}_1 + 0\mathrm{C}_2 = 0, \qquad lC_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\right) + lC_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$$

Из первого условия видно, что $C_1 = 0$, из второго получаем $lC_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$. Необходимо считать $\mathrm{C}_2 \neq 0$.

Приходим к равенству $l \sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$ Т. е. $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}$.

Таким образом, получим $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$

Подставим вместо λ значения λ_k и запишем решение второго уравнения.

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin\frac{k\pi a t}{l}$$

Где a_k, b_k произвольные постоянные.

Получим решение в виде:

$$u_k(x,t) = X_k T_k = \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

То же самое справедливо для любой линейной комбинации функций, а также ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right]$$

Остается определить a_k, b_k так, чтобы выполнялись начальные условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \varphi_0$$

Продифференцируем найденное решение по t:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k\pi a}{l}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right]$$

Получим второе граничное условие:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \varphi_1$$

Полученные формулы граничных условий представляют разложения функций φ_0, φ_1 в ряд Фурье по синусам на интервале $(0, l)$. Постоянные a_k, b_k можно выразить через формулы:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0 \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx, \qquad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi_1 \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx$$