ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
UIT TOÀN DIỆN • SÁNG TẠO • PHỤNG SỰ

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH

Giảng viên: TS. Phùng Minh Đức

Bộ môn Toán Lý - Trường ĐH Công nghệ Thông tin

Nội dung môn học

1. Chương 1: Phép tính vi phân và tích phân hàm một biến
2. Chương 2: Lý thuyết chuỗi
3. Chương 3: Phép tính vi phân hàm nhiều biến
4. Chương 4: Phép tính tích phân hàm nhiều biến
5. Chương 5: Tích phân đường - tích phân mặt
6. Chương 6: Phương trình vi phân

Chương 1: Phép tính vi phân và tích phân hàm một biến

1.1 Phép tính vi phân hàm một biến

1.1.1 Giới hạn của hàm số

Định nghĩa 1.1

(a) *Cho hàm số* $f(x)$ *xác định trên tập* $D \subset \mathbb{R}$ *và* $x_0 \in D$. *Ta nói rằng* $f(x)$ *có giới hạn* L *(hữu hạn) khi* x *dần tới* x_0, *viết* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, *nếu* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *sao cho*

$$\forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

(b) *Cho hàm số* $f(x)$ *xác định trên tập* $D \subset \mathbb{R}$ *và* $x_0 \in D$. *Ta nói rằng* $f(x)$ *có giới hạn* ∞ *khi* x *dần tới* x_0, *viết* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, *nếu* $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ *sao cho*

$$\forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Ví dụ 1.1

Chứng minh $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ *theo định nghĩa.*

Giải: Với $\epsilon > 0$ tùy ý, lấy $k > 4$ thỏa mãn $4 + \frac{\epsilon}{k} < k$. Khi đó, chọn $\delta = \frac{\epsilon}{k} > 0$ ta có:

$$\forall x : |x-2| < \delta \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{k} \Rightarrow x < 2 + \frac{\epsilon}{k},$$

do đó:

$$|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |(x-2)||(x+2)| < \frac{\epsilon}{k}(4 + \frac{\epsilon}{k}) < \frac{\epsilon}{k}k = \epsilon.$$

Vậy $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

- Định nghĩa tương đương:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\{x_n\} \text{ mà } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ thì } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Từ định nghĩa này ta thấy, nếu có dãy $\{x_n\}$ mà $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ nhưng $\nexists \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ thì suy ra $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Ví dụ 1.2

Tìm $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Giải: Xét dãy $\{x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}, n = \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, ta có $\lim_{n\to\pm\infty} x_n = 0$ nhưng

$$\sin\frac{1}{x_n} = \begin{cases} 1 \text{ với } n \text{ chẵn} \\ -1 \text{ với } n \text{ lẻ} \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}.$$

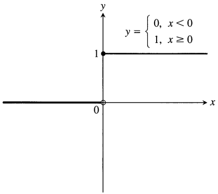
• Giới hạn một phía:

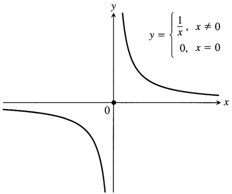
Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$. Nếu $f(x)$ có giới hạn L khi x dần tới $x_0, x > x_0 (x < x_0)$, thì ta nói f có giới hạn phải (trái) là L tại x_0, viết

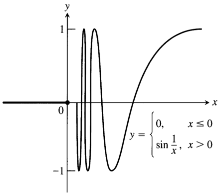
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \qquad \Big(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L\Big).$$

Ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \text{ và } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$







• Giới hạn tại vô cực:

Định nghĩa 1.2

(a) *Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn L (hữu hạn) khi x dần tới dương vô cực (âm vô cực) và viết*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad (\lim_{x \to -\infty} f(x) = L)$$

nếu $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ *sao cho:* $\forall x > N (\forall x, |x| > N) : |f(x) - L| < \epsilon.$

(b) *Ta nói rằng $f(x)$ có giới hạn ∞ khi x dần tới dương vô cực (âm vô cực) và viết*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty \qquad (\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty)$$

nếu $\forall M > 0, \exists N > 0$ *sao cho*

$$\forall x > N \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Ví dụ 1.3

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$. *Như vậy ta có* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$; $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.
3. *Tìm* $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$. *Bằng cách lấy các dãy và kiểm tra giống như trong Ví dụ 1.2, ta suy ra*

$$\nexists\lim_{x\to\infty}\sin x,\qquad \text{tương tự}\ \nexists\lim_{x\to\infty}\cos x,\ \nexists\lim_{x\to\infty}\tan x.$$

- **Các quy tắc tính giới hạn:**

Định lý 1.1

Giả sử $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *và* $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ *(*L, M **hữu hạn***) thì*

a. $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M.$

b. $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = LM.$

c. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0.$

d. $\lim_{x \to x_0} |f(x)|^{\alpha} = |L|^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Ví dụ 1.4

1. *Các hàm* $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ *và* $g(x) = \sin\frac{1}{x} + x$ *đều không có giới hạn tại* $x = 0$, *tuy nhiên ta có*

$$\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 0; \quad \nexists \lim_{x\to 0}[f(x) + g(x)]; \quad \nexists \lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]; \quad \nexists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

2. *Các hàm* $f(x) = \sin^2\frac{1}{x}$ *và* $g(x) = \cos^2\frac{1}{x}$ *đều không có giới hạn tại* $x = 0$, *và ta có*

$$\lim_{x\to 0}[f(x) + g(x)] = 1; \quad \nexists \lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)]; \quad \nexists \lim_{x\to 0}[f(x)g(x)], \quad \nexists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ví dụ 1.5

(Các dạng vô định)

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+3}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-3x-3)}{(x-1)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x-3}{x+5}=\dfrac{-5}{6}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+x-1}+(2-x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+x-1)-(2-x)^2}{\sqrt{x^2+x-1}-(2-x)}=$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5(x-1)}{\sqrt{x^2+x-1}-(2-x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x})}=\dfrac{5}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\dfrac{(\frac{x}{2})^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=2$

1.1.2 Vô cùng bé và vô cùng lớn

Định nghĩa 1.3

(a) *Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng bé khi $x \to x_0$ (viết tắt là VCB) nếu*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

(b) *Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng lớn khi $x \to x_0$ (viết tắt là VCL) nếu*

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$$

Ta có: $f(x) \neq 0$ là một VCB khi $x \to x_0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ là một VCL khi $x \to x_0$.

Ví dụ 1.6

1. *Cho* $k \in \mathbb{N}$ *thì* x^k *và* $\sqrt[k]{|x|}$ *là những VCB khi* $x \to 0$.

   $x^k - a^k$ *và* $(x-a)^k$ *là những VCB khi* $x \to a\ldots$

2. *Các hàm* $\sin x, \tan x, 1 - \cos x \ldots$ *là các VCB khi* $x \to 0$.
3. *Các hàm* $\ln(x+1), e^x - 1$ *là các VCB khi* $x \to 0$.

- **So sánh các vô cùng bé và vô cùng lớn:**

Định nghĩa 1.4

Giả sử $f(x), g(x)$ *là hai VCB khi* $x \to x_0$. *Khi đó*

(a) *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *thì ta nói* f *có bậc cao hơn* g, *viết* $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$.

(b) *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ *thì ta nói* f *và* g *cùng bậc, viết* $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$.
Với $C = 1$ *thì ta nói* f *và* g *là các VCB tương đương, viết* $f \sim g$, *khi* $x \to x_0$.

Định nghĩa 1.5

Giả sử $f(x), g(x)$ *là hai VCL khi* $x \to x_0$. *Khi đó*

(a) *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$ *thì ta nói* f *có bậc cao hơn* g.

(b) *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ *thì ta nói* f *và* g *cùng bậc .*

Với $C = 1$ *thì ta nói* f *và* g *là các VCL tương đương, viết* $f \sim g$, *khi* $x \to x_0$.

Ví dụ 1.7

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2} = 0 \Rightarrow (x-2)^2$ *là VCB bậc cao hơn* x^2-4 *khi* $x \to 2$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x$ *khi* $x \to 0$. *Tương tự là* $\tan x \sim x$ *khi* $x \to 0$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \ln(1+x) \sim x$ *khi* $x \to 0$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 \sim x$ *khi* $x \to 0$.

Định lý 1.2

Nếu $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ *là các VCB (tương ứng VCL) khi* $x \to x_0$ *và* $f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2$ *thì*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

Ví dụ 1.8

Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$.

Giải: *Ta có* $\ln(1+x^2) \sim x^2$ *và* $1-\cos x = 2\sin^2(\frac{x}{2}) \sim 2(\dfrac{x}{2})^2 = \dfrac{x^2}{2}$ *khi* $x \to 0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2/2} = 2$.

1.1.3 Hàm liên tục

Định nghĩa 1.6

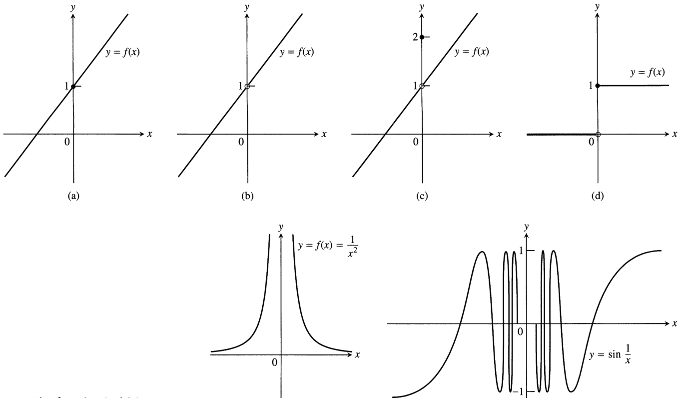
Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Hàm f được gọi là

- *liên tục tại $x_0 \in (a, b)$ nếu*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- *liên tục tại a (tương ứng tại b) nếu*
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \left(\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)\right).$$

Hàm f được gọi là liên tục trên $[a, b]$ nếu nó liên tục tại mọi điểm trong $[a, b]$.

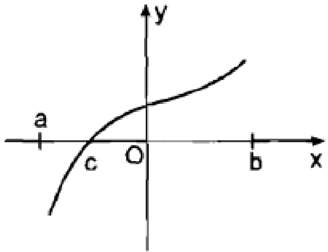
Điểm x_0 tại đó hàm f không liên tục thì gọi là điểm gián đoạn.

- Nếu $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì x_0 gọi là điểm gián đoạn loại một.
- Những điểm gián đoạn không phải loại một thì gọi là là loại hai.



Định lý 1.3

Cho $f(x)$ là một hàm số xác định, liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.



Ví dụ 1.9

CMR phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2, 2]$.

Giải: Kiểm tra điều kiện của định lý cho hàm $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ trên các đoạn $[-2, -1], [-1, 1], [1, 2]$.

1.1.4 Đạo hàm và vi phân

Định nghĩa 1.7

Hàm số $f(x)$ *xác định trên khoảng* (a, b) *được gọi là* **khả vi** *tại* $x_0 \in (a, b)$ *nếu tồn tại giới hạn hữu hạn*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Giá trị giới hạn hữu hạn đó gọi là **đạo hàm** *của* f *tại* x_0*, ký hiệu là* $f'(x_0)$*.*
Hàm f *được gọi là khả vi trên* (a, b) *nếu nó khả vi tại mọi điểm trong* (a, b)*.*

Ví dụ 1.10

1. *Tính đạo hàm của hàm* $f(x) = x^2$ *tại* $x_0 = 2$.

   Ta có: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4.$

   Vậy $f'(2) = 4$.

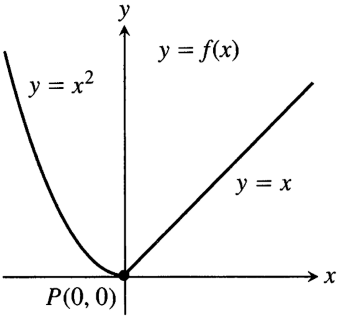
2. *Tính đạo hàm của hàm* $g(x) = |x|$ *tại* $x_0 = 0$.

   Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ *và* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$,

   nên $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x| - 0}{x - 0}$.

   Vậy hàm $g(x) = |x|$ *không khả vi tại* $x_0 = 0$.

Ý nghĩa: Đạo hàm của hàm số tại một điểm cho biết tốc độ tăng giảm của hàm số tại điểm đó.



- $f'(-2) = -4$ và $f'(-0.5) = -1$: hàm giảm tại $x = -2$ nhanh hơn tại $x = -0.5$
- $f'(1) = 1$ và $f'(2) = 1$: tốc độ tăng tại $x = 1$ và $x = 2$ là như nhau.

Nếu f khả vi tại $x \in (a, b)$ thì

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

từ đó suy ra: $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$.

- Đại lượng $df = f'(x)\Delta x$ được gọi là *vi phân* của f tại x.
- Do hàm $f(x) = x$ có $f'(x) = 1$ nên $dx = df = \Delta x$. Vì vậy ta viết

$$df = f'(x)dx \Leftrightarrow f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

- **Đạo hàm và vi phân cấp cao:**

Cho hàm f xác định trong khoảng (a, b).

- Giả sử f khả vi trên (a, b) và có đạo hàm f' cũng khả vi trên (a, b). Khi đó ta nói f khả vi 2 lần trên (a, b), và đạo hàm của f' gọi là đạo hàm cấp 2 của f, ký hiệu là f'' hay $f^{(2)}$. Như vậy

$$f'' = (f')'.$$

- Một cách quy nạp, giả sử f khả vi $n-1$ lần trên (a, b) và đạo hàm $f^{(n-1)}$ cũng khả vi trên (a, b). Khi đó ta nói f khả vi n lần trên (a, b), và đạo hàm của $f^{(n-1)}$ gọi là đạo hàm cấp n của f, ký hiệu là $f^{(n)}$. Như vậy

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Tương tự, ta cũng có vi phân cấp cao của hàm f như sau:

$$d^2 f = d(df), \ldots, d^n f = d(d^{n-1} f).$$

• **Đạo hàm của hàm hợp:**

Định lý 1.4

Cho hàm $g(x)$ *khả vi tại* x_0 *và* $f(u)$ *khả vi tại điểm* $u_0 = g(x_0)$. *Khi đó hàm hợp* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *khả vi tại* x_0 *và*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Ví dụ 1.11

1. $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x \Rightarrow (\sin x)''' = -(\sin x)' = -\cos x \Rightarrow (\sin x)^{(4)} = -(\cos x)' = \sin x \ldots$

   Tổng quát, ta có $\sin^{(n)} x = \begin{cases} (-1)^k \sin x \text{ với } n = 2k \\ (-1)^k \cos x \text{ với } n = 2k+1 \end{cases}.$

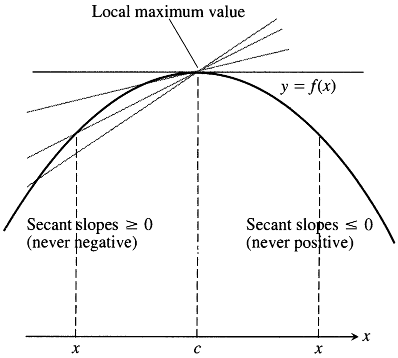
2. $(e^{ax+b})' = e^{ax+b} \cdot (ax+b)' = a \cdot e^{ax+b} \ldots \Rightarrow (e^{ax+b})^{(n)} = a^n \cdot e^{ax+b}, n = 1, 2, \ldots$

1.1.5 Các định lý giá trị trung bình

Định nghĩa 1.8

Cho hàm f xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. Điểm $c \in D$ được gọi là một điểm cực đại (cực tiểu) của f nếu $\exists \delta > 0$ sao cho $(c-\delta, c+\delta) \subset D$ và $\forall x \in (c-\delta, c+\delta)$, ta có

$$f(x) \leq f(c) \quad (\text{tương ứng } f(x) \geq f(c)).$$

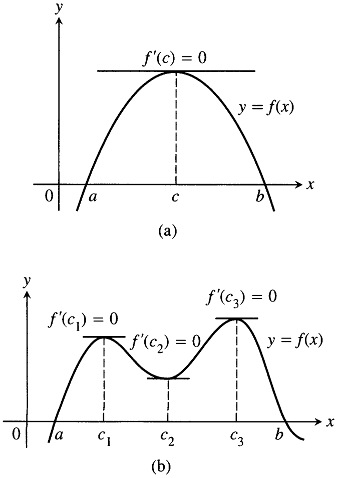


Định lý 1.5

(Định lý Fermat) Nếu hàm f đạt cực trị tại $c \in D$ và f khả vi tại c thì $f'(c) = 0$.

Hệ quả 1.1

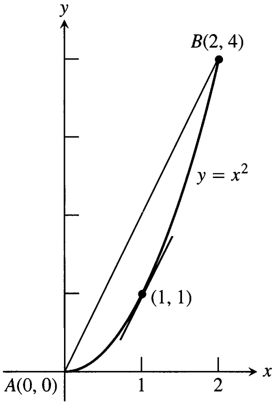
(Định lý Rolle) Cho hàm f xác định và liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b). Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.



Định lý 1.6

(Định lý Lagrange) Cho hàm f xác định và liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b). Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Định lý 1.7

Giả sử hàm f xác định và có đạo hàm đến cấp n liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm cấp $n+1$ trên (a, b). Khi đó, với $x_0 \in (a, b)$ bất kỳ, ta có

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{1.1}$$

với ξ là một số nằm giữa x và x_0.

- Công thức (1.1) gọi là *công thức Taylor* và hàm $f(x)$ cho bởi công thức đó gọi là *khai triển Taylor hữu hạn* của f tại x_0.
- Khai triển Taylor của f tại $x_0 = 0$ được gọi là *khai triển Mac Laurin* của f.

- **Khai triển Mac Laurin của một số hàm sơ cấp:**

Ví dụ 1.12

1. *Hàm* $f(x) = \sin x$*: từ* **Ví dụ 1.11**, *ta có* $\sin^{(n)} 0 = \begin{cases} 0 \text{ với } n = 2k \\ (-1)^{k-1} \text{ với } n = 2k+1. \end{cases}$

   Do đó

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\sin(\theta x), 0 < \theta < 1.$$

2. *Tương tự với hàm* $f(x) = \cos x$, *ta có*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos(\theta x), 0 < \theta < 1.$$

Ví dụ 1.13

1. *Hàm* $f(x) = \ln(x+1)$*: ta có* $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}} \Rightarrow$ $f^{(n+1)}(0) = (-1)^n n!, n = 1, 2, \ldots$, *do đó*

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(\theta x+1)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

2. *Hàm* $f(x) = \mathrm{e}^x$*: ta có* $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1, n = 1, 2, \ldots$, *do đó*

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

1.1.6 Một số ứng dụng của các định lý giá trị trung bình

• *Quy tắc L'Hospital khử dạng vô định:* Quy tắc sau thường được dùng khi tính giới hạn để khử các dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Định lý 1.8

(De L'Hospital) Cho các hàm số f, g xác định, khả vi tại lân cận của điểm $a \in \mathbb{R}$, có thể trừ tại điểm a. Giả sử $g'(x) \neq 0$ trong lân cận của a, khi đó

$$\text{Nếu } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0\,(=\infty) \text{ và } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{thì} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

- Quy tắc trên vẫn có thể áp dụng khi $x \to \infty$.
- Quy tắc trên có thể áp dụng tiếp cho các đạo hàm cấp 2, cấp 3, ...

Ví dụ 1.14

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6}{\cos x}=6.$
2. *Với* $\alpha>0$*, ta có*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\ldots=.$

- *Tìm cực trị của hàm số:*

Định lý 1.9

Cho hàm số f xác định trên $[a,b]$, có đạo hàm liên tục đến cấp n tại lân cận điểm $x_0 \in (a,b)$ và

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Khi đó

1. *Nếu n chẵn thì x_0 là một điểm cực trị của hàm f, cụ thể*

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 : x_0 \text{ là điểm cực tiểu} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 : x_0 \text{ là điểm cực đại.} \end{cases}$$

2. *Nếu n lẻ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm f.*

Ví dụ 1.15

Xét hàm số $f(x) = \sin^3 x, x \in (-\pi, \pi)$. *Ta có*
$f'(x) = 3\cos x \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{2}, x = 0$ *và* $f''(x) = 3(-\sin^3 x + 2\cos^2 x \sin x)$.

1. *Tại* $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ *ta có* $f''(-\dfrac{\pi}{2}) = 3 > 0 \Rightarrow x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ *là một điểm cực tiểu của* f;
2. *Tại* $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ *ta có* $f''(\dfrac{\pi}{2}) = -3 < 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ *là một điểm cực đại của* f;
3. *Tại* $x_2 = 0$ *ta có* $f''(0) = 0$. *Tính tiếp*
   $f^{(3)}(x) = 3[-3\cos x \sin^2 x + 2(-2\cos x \sin^2 x + \cos^3 x)] \Rightarrow f^{(3)}(0) = 6 \neq 0$.
   Vậy $x_2 = 0$ *không là điểm cực trị của hàm* f.

1.2 Phép tính tích phân hàm một biến

1.2.1 Tích phân bất định

Định nghĩa 1.9

Hàm F được gọi là một nguyên hàm của f trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ nếu

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Định lý 1.10

Nếu F là một nguyên hàm của f trên khoảng I thì họ tất cả các nguyên hàm của f được gọi là tích phân bất định của f là

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

với C là một hằng số tùy ý.

- **Bảng nguyên hàm mốt số hàm thông dụng:**

Đạo hàm	Nguyên hàm
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1)$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$\int \dfrac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$

1.2.2 Tích phân xác định

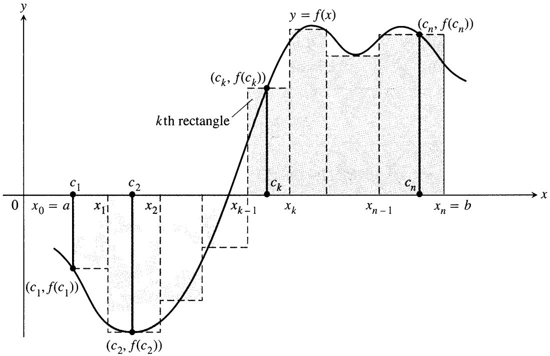
Định nghĩa 1.10

Cho hàm f xác định và bị chặn trên $[a, b]$. Chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Lấy tùy ý $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ và đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, n$ rồi lập tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$



Định nghĩa 1.10 (tiếp)

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

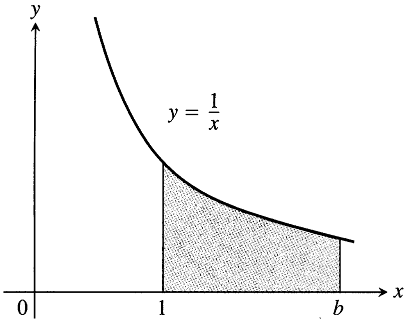
$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = I$$

không phụ thuộc vào việc chia đoạn $[a, b]$ *cũng như việc chọn các* c_i, *thì giá trị* I *đó được gọi là* **tích phân xác định** *của hàm* f *trên* $[a, b]$, *ký hiệu là*

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Công thức Newton-Leibniz: Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ có một nguyên hàm trong đoạn đó là $F(x)$ thì

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$



- Về mặt hình học, ta biết $\int_a^b |f(x)|dx$ là phần diện tích của miền giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = f(x), y = 0$.
- Trong nhiều bài toán, ta cần tìm hiểu phần diện tích của các miền còn lại. Tổng quát, ta có các khái niệm về **tích phân suy rộng** sau.

1.2.3 Tích phân suy rộng loại 1

Định nghĩa 1.11

Cho hàm số $f(x)$ *xác định trên* $[a, +\infty)$ *và khả tích trên* $[a, b]$ *với* $b > a$ *bất kỳ.*

- *Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn* $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = I$ *thì* I *được gọi là* **tích phân suy rộng loại 1** *của hàm số* $f(x)$ *trên* $[a, +\infty)$ *và ta nói* f *khả tích trên* $[a, +\infty)$. *Ký hiệu*

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Khi đó ta cũng nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

- *Nếu tích phân đó không hội tụ thì ta nói nó phân kỳ.*

Tương tự ta có các tích phân suy rộng:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Ngoài ra, nếu các tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ hội tụ thì ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

- Nếu F là một nguyên hàm của f thì ta có thể tính

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)|_{a}^{+\infty}.$$

Ví dụ 1.16

1. $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \arctan(+\infty) - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}.$$
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_{-\infty}^{0} = \arctan 0 - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2}.$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi.$$

2. *Do* $\int \sin x dx = -\cos x$ *và* $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ *nên* $\nexists \int_0^{+\infty} \sin x dx$, *hay tích phân* $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ *phân kỳ. Tương tự* $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ *phân kỳ.*

3. $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}dx = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1 \text{ (hội tụ).}$$
$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x}dx = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-\infty}^{0} = +\infty \text{ (phân kỳ).}$$

Ví dụ 1.16

4. Tính $I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ với $a > 0$. Ta có:

- $p \neq 1 : \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-p}\Big|_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } p < 1 \\ -\frac{a^{1-p}}{1-p} \text{ nếu } p > 1. \end{cases}$
- $p = 1 : \int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_a^{+\infty} = +\infty.$

Vậy I hội tụ khi $p > 1$ và phân kỳ khi $p \leq 1$.

5. $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$ hội tụ hay phân kỳ? Tích phân này không tính được theo các phương pháp sơ cấp đã biết nên ta không có câu trả lời từ cách tính theo định nghĩa của tích phân suy rộng loại 1 được.

- **Các tiêu chuẩn so sánh:**

Định lý 1.11

Cho f, g *là các hàm khả tích trên* $[a, b]$ *với mọi* $b > a$ *và*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \geq a.$$

Khi đó ta có:

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ.*

Ví dụ 1.17

1. *Xét sự hội tụ của tích phân* $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$.

   Ta có

   $$0 < \mathrm{e}^{-x^2} \le \mathrm{e}^{-x}, \forall x \ge 1 \text{ và } \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} dx = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \mathrm{e}^{-1} \text{ hội tụ}$$

   nên $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$ *cũng hội tụ.*

2. *Tích phân* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ *hội tụ vì* $0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$, $\forall x \in [1, +\infty)$ *và* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ *hội tụ.*

3. *Tích phân* $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ *phân kỳ vì* $0 \le \frac{1}{x} \le \frac{\ln x}{x}$, $\forall x \in [e, +\infty)$ *và* $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ *phân kỳ.*

Định lý 1.12

Cho f, g là hai hàm số dương và khả tích trên $[a, +\infty)$. Khi đó:

1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty)$ *thì các tích phân*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ và } \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

   cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *và* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*
3. *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *và* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ thì* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ.*

Ví dụ 1.18

1. *Xét sự hội tụ của tích phân* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$.

   Ta có $\mathrm{e}^{-x^2} > 0, \mathrm{e}^{-x} > 0,\ \forall x \geq 0$. *Do* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x(x-1)} = 0$ *và* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} dx = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$ *hội tụ nên* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$ *cũng hội tụ.*

2. *Tích phân* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} dx$ *phân kỳ vì* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} : \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$ *và tích phân* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx$ *phân kỳ.*

3. *Tích phân* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ *phân kỳ vì* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} : \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ *và tích phân* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ *phân kỳ.*

1.2.4 Tích phân suy rộng loại 2

Định nghĩa 1.12

Cho hàm f xác định trên nửa đoạn $(a, b]$ sao cho f liên tục trên $[a + h, b]$, với $h > 0$ tùy ý, nhưng không liên tục trên toàn đoạn $[a, b]$ (khi đó điểm $x = a$ gọi là một điểm bất thường).

- *Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn*

$$I = \lim_{h \to 0^+} \int_{a+h}^{b} f(x)dx$$

thì giá trị I đó được gọi là **tích phân suy rộng loại 2** *của f trên $(a, b]$ và ta nói hàm f khả tích trên $(a, b]$. Ký hiệu*

$$I = \int_a^b f(x)dx, \text{ và nói tích phân đó hội tụ.}$$

- *Nếu tích phân trên không hội tụ thì ta nói nó phân kỳ.*

- Ta cũng dùng ký hiệu đó cho tích phân suy rộng loại 2 của f trên $[a, b)$, tức là

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0^+} \int_a^{b-h} f(x)dx.$$

- Nếu F là một nguyên hàm của f thì ta có thể tính

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0^+} \int_{a+h}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{h \to 0^+} F(a+h).$$

Ví dụ 1.19

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$ ($x = 1$ *là một điểm bất thường*).

$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin 0 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$ ($x = -1$ *là một điểm bất thường*).

$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi.$

2. $\int_0^1 \frac{1}{e^x - 1}dx = \left(\ln(e^x - 1) - x\right)\Big|_0^1 = +\infty$ ($x = 0$ *là một điểm bất thường*).

Ví dụ 1.19

3. Tính $I = \int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$. Ta có $x = 0$ là một điểm bất thường:

- $p \neq 1: \int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p} - \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } p > 1 \\ \dfrac{1}{1-p} \text{ nếu } p < 1. \end{cases}$
- $p = 1: \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_0^1 = +\infty.$

Vậy I hội tụ khi $p < 1$ và phân kỳ khi $p \geq 1$.

Tổng quát, $I = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ hội tụ khi $p < 1$ và phân kỳ khi $p \geq 1$.

4. $\int_0^1 \frac{1}{e^{x^2}-1}dx$ hội tụ hay phân kỳ? Tích phân này không tính được theo các phương pháp sơ cấp đã biết nên ta không có câu trả lời từ cách tính theo định nghĩa của tích phân suy rộng loại 2 được.

• Các tiêu chuẩn so sánh:

Định lý 1.13

Cho f, g là các hàm khả tích trên $(a, b]$ và

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, c], a < c < b.$$

Khi đó:

1. $$\int_a^b g(x)dx \text{ hội tụ } \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ hội tụ.}$$

2. $$\int_a^b f(x)dx \text{ phân kỳ } \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ phân kỳ.}$$

Ví dụ 1.20

Xét sự hội tụ của tích phân sau:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}dx \quad (x = 1 \text{ là một điểm bất thường}).$$

Giải: Ta có $0 < \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (0,1)$ và tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ hội tụ (Ví dụ 1.19), do đó tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}dx$ cũng hội tụ.

Định lý 1.14

Giả sử f, g *là các hàm* **dương** *khả tích trên* $(a, b]$. *Khi đó*

1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty)$ *thì các tích phân*

$$\int_a^b f(x)dx \text{ và } \int_a^b g(x)dx$$

   cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *và* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*
3. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *và* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ thì* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ.*

Ví dụ 1.21

Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{x^2}-1}dx$ *($x = 0$ là một điểm bất thường).*

Ta có $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^{x^2}-1} : \frac{1}{x^2}\right) = 1$ *và tích phân* $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ *phân kỳ (Ví dụ 1.19)*

nên $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{x^2}-1}dx$ *cũng phân kỳ.*

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-\sin x}dx$ *($x = 0$ là một điểm bất thường).*

Ta có $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x-\sin x} : \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\frac{\sin x}{x}} = +\infty$ *và* $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{1}{x}dx$ *phân kỳ*

nên $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-\sin x}dx$ *cũng phân kỳ.*

Chú ý: Nếu $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to a$ thì các tích phân suy rộng

$$\int_a^b f(x)dx \text{ và } \int_a^b g(x)dx$$

cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

Ví dụ 1.22