BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH

Giảng viên: TS. Phùng Minh Đức

Bộ môn Toán Lý - Trường ĐH Công nghệ Thông tin

Chương 4: Phép tính tích phân hàm nhiều biến

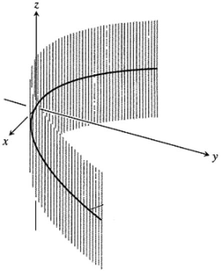
4.1: Bổ túc kiến thức về mặt bậc 2

4.1.1 Mặt trụ

4.1.2 Các mặt bậc 2

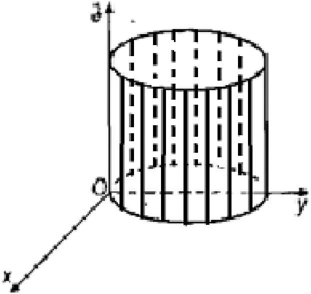
4.1.1 Mặt trụ

Mặt trụ: là mặt sinh ra bởi một đường thẳng (l) có phương cố định di chuyển theo một đường cong phẳng (C) cho trước. Đường cong (C) và đường thẳng (l) tương ứng được gọi là *đường chuẩn* và *đường sinh* của mặt trụ.



Một mặt trụ thường gặp là mặt trụ tròn xoay khi $(l) \parallel Oz$ và (C) là đường tròn $(I(a,b), R)$ có phương trình

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$



4.1.2 Các mặt bậc 2

Các mặt bậc 2: là tập hợp những điểm trong không gian $Oxyz$ thỏa mãn phương trình

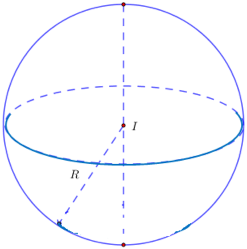
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

trong đó $A, B, \ldots, K$ là những hằng số.
Bằng cách nhóm và đổi biến, ta có thể đưa các mặt bậc 2 về một trong các mặt sau:

4.1.2 Các mặt bậc 2

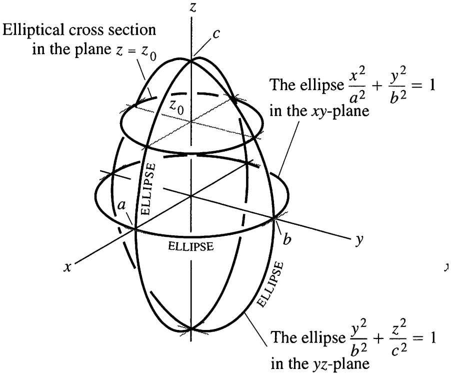
Sphere (mặt cầu): phương trình mặt cầu tâm $I(a,b,c)$ bán kính R là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$



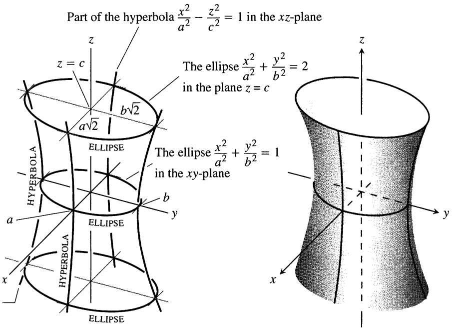
Ellipsoid: là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



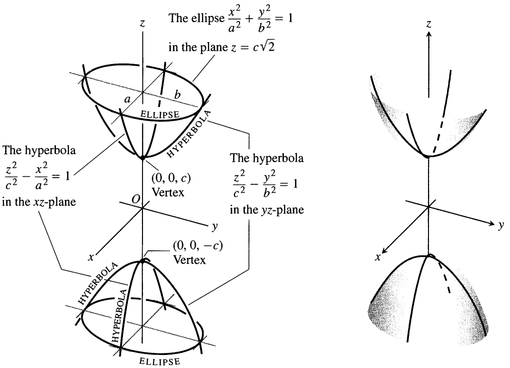
Hyperboloid one sheet (1 tầng): là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



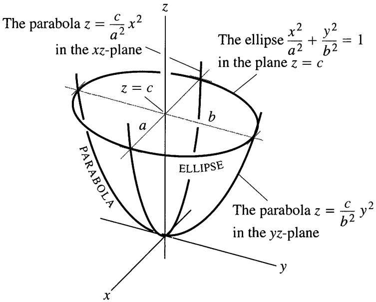
Hyperboloid two sheets (2 tầng): là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$



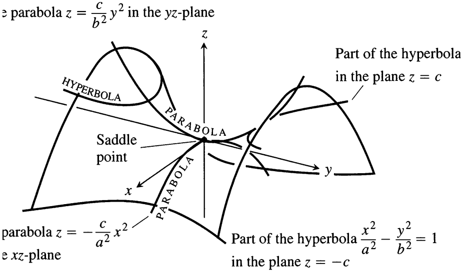
Elliptic Paraboliod: là mặt có phương trình dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0.$$



Hyperbolic Paraboliod: là mặt có phương trình dạng

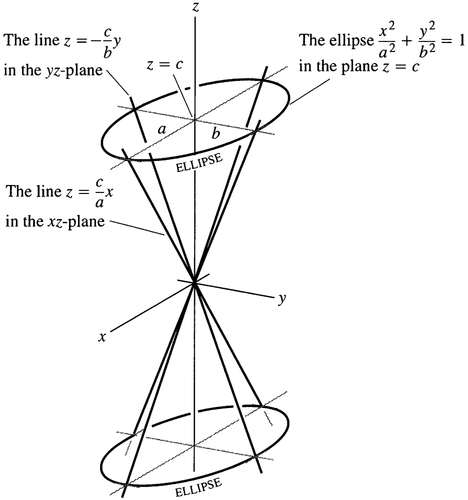
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0.$$



Elliptic Cone (mặt nón elliptic): là mặt có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Khi $a = b$ ta có **mặt nón tròn xoay.**



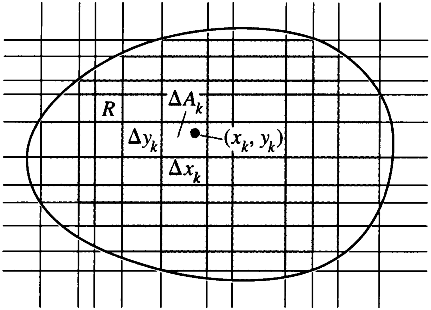
4.2: Tích phân kép

4.2.1 Định nghĩa tích phân kép

Định nghĩa 4.1

Cho hàm $f(x,y)$ *xác định trên một miền đóng và bị chặn* $R \subset \mathbb{R}^2$. *Chia* R *thành* n *mảnh nhỏ* R_k, *mỗi mảnh có đường kính và diện tích tương ứng là* $d_k = \max\{d(M,N) : M, N \in R_k\}$ *và* ΔA_k, $k = 1, \ldots, n$.
Lấy tùy ý điểm $(x_k, y_k) \in R_k, k = 1, \ldots, n$ *và lập tổng*

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k.$$



Định nghĩa 4.1 (tiếp)

Nếu $\max d_k \to 0$ khi $n \to +\infty$ và tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = I$$

không phụ thuộc vào việc chia miền R cũng như việc chọn các (x_k, y_k), thì ta nói hàm f khả tích trên R và giá trị I đó được gọi là **tích phân kép** của hàm $f(x, y)$ trên miền R, ký hiệu là

$$I = \iint\limits_R f(x, y)dA.$$

- Trong công thức tích phân kép, R gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dA gọi là yếu tố diện tích.
- Hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn R thì khả tích trên miền đó.
- Nếu miền R được chia thành 2 miền R_1, R_2 không dẫm lên nhau thì

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)dA.$$

- Chia miền R bởi các đường song song với Ox, Oy, ta được $dA = dxdy$, do đó

$$I = \iint\limits_R f(x,y)dA = \iint\limits_R f(x,y)dxdy.$$

4.2.2 Cách tính tích phân kép

Định lý 4.1

(Fubini) Giả sử hàm $f(x, y)$ *khả tích trên* $R = [a, b] \times [c, d]$.

(a) *Nếu với mỗi* $x \in [a, b]$, *hàm số* $y \mapsto f(x, y)$ *khả tích trên* $[c, d]$ *thì hàm số*

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

khả tích trên $[a, b]$ *và*

$$\iint\limits_R f(x, y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy \Big) dx.$$

Định lý 4.1

(b) Nếu với mỗi $y \in [c, d]$, hàm số $x \mapsto f(x, y)$ khả tích trên $[a, b]$ thì hàm số

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

khả tích trên $[c, d]$ và

$$\iint\limits_R f(x, y)dxdy = \int_c^d J(y)dy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)dx\Big)dy$$

Hệ quả 4.1

Nếu hàm $f(x, y)$ *liên tục trên* $R = [a, b] \times [c, d]$ *thì*

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)dy \Big) dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)dx \Big) dy.$$

Chú ý: Nếu $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ (tách biến) thì

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy.$$

Ví dụ 4.1

Tính tích phân $I = \iint\limits_R (4 - x - y)dxdy$ *trên* $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Giải: Ta tính tích phân trên theo cả 2 cách

$$\bullet I = \int_0^1 \Big(\int_0^2 (4 - x - y)dx \Big) dy = \int_0^1 \Big(4x - \frac{1}{2}x^2 - yx) \Big|_0^2 \Big) dy$$

$$= \int_0^1 (6 - 2y)dy = (6y - y^2)\Big|_0^1 = 5.$$

$$\bullet I = \int_0^2 \Big(\int_0^1 (4 - x - y)dy \Big) dx = \int_0^2 \Big(4y - xy - \frac{1}{2}y^2) \Big|_0^1 \Big) dx$$

$$= \int_0^2 (\frac{7}{2} - x)dx = (\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_0^2 = 5.$$

Ví dụ 4.2

Tính tích phân $I = \iint\limits_R (4(x+1)e^y)dxdy$ *trên* $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.

Giải: Hàm $f(x,y) = 4(x+1)e^y$ tách biến, do đó ta có

$$I = 4\Big(\int_0^2 (x+1)dx\Big)\Big(\int_0^1 e^y dy\Big) = 4\Big(\frac{1}{2}x^2 + x)\Big|_0^2\Big)(e^y\Big|_0^1) = 16(e-1).$$

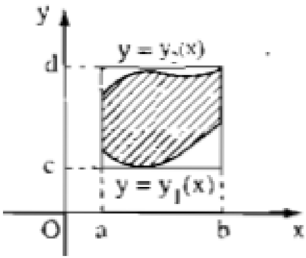
Định lý 4.2

Giả sử hàm $f(x,y)$ *khả tích trên*

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

với y_1, y_2 *là hai hàm số khả tích trên* $[a,b]$ *và*

$$y_1(x) \le y_2(x), \forall x \in [a,b].$$



Định lý 4.2 (tiếp)

Nếu với mỗi $x \in [a, b]$, hàm số $y \mapsto f(x, y)$ khả tích trên đoạn $[y_1(x), y_2(x)]$ thì hàm

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

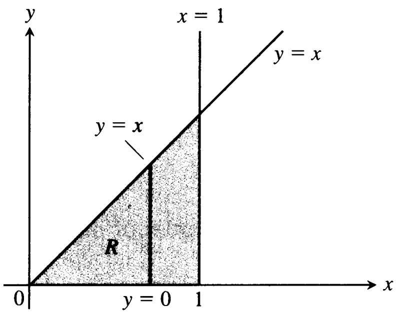
khả tích trên $[a, b]$ và

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \Big) dx.$$

Ví dụ 4.3

Tính tích phân $I = \iint\limits_R (4 - x - y)dxdy$ *trên miền* R *giới hạn bởi các đường* $x = 1, y = 0, y = x.$

Giải:



Miền lấy tích phân là $R = \{x \in [0,1], 0 \le y \le x\}$. Do đó ta có

$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^x (4 - x - y)dy\Big)dx$$

$$= \int_0^1 \Big(4y - xy - \frac{1}{2}y^2\Big)\Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 (4x - \frac{3}{2}x^2)dx = (2x - \frac{1}{2}x^3)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

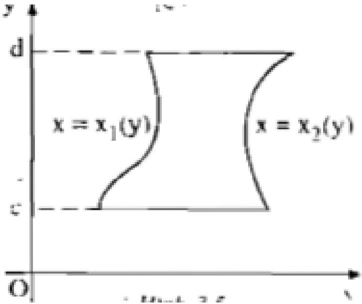
Định lý 4.3

Giả sử hàm $f(x,y)$ *khả tích trên*

$$R = \{(x,y) : x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$$

với x_1, x_2 *là hai hàm số khả tích trên* $[c,d]$ *thỏa mãn*

$$x_1(y) \leq x_2(y), \forall y \in [c,d].$$



Định lý 4.3 (tiếp)

Nếu với mỗi $y \in [a, b]$, hàm số $x \mapsto f(x, y)$ khả tích trên đoạn $[x_1(y), x_2(y)]$ thì hàm

$$J(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$$

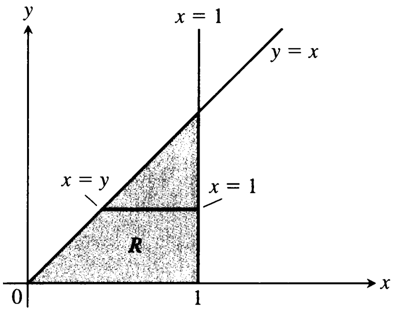
khả tích trên $[c, d]$ và

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_c^d J(y)dy = \int_c^d \Big(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx \Big) dy.$$

Ví dụ 4.4

Tính tích phân $I = \iint\limits_R (4 - x - y)dxdy$ *trên miền* R *giới hạn bởi các đường* $x = 1, y = 0, y = x$.

Giải:



Miền lấy tích phân là $R = \{y \in [0,1], y \le x \le 1\}$.
Do đó ta có

$$I = \int_0^1 \Big(\int_y^1 (4 - x - y)dx \Big) dy$$
$$= \int_0^1 \Big(4x - \frac{1}{2}x^2 - yx \Big)\Big|_y^1 dy$$
$$= \int_0^1 (\frac{7}{2} - 5y + \frac{3}{2}y^2)dy$$
$$= (\frac{7}{2}y - \frac{5}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^3)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Hệ quả 4.2

Nếu các hàm $f(x,y), y_1(x), y_2(x)$ *trong Định lý 4.2 là các hàm liên tục thì*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\Big)dx.$$

Hệ quả 4.3

Nếu các hàm $f(x,y), x_1(y), x_2(y)$ *trong Định lý 4.3 là các hàm liên tục thì*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\Big)dy.$$

• Đổi thứ tự lấy tích phân:

Nếu có tích phân

$$I = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx$$

tức là miền lấy tích phân $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$. Vẽ hình và biểu diễn lại miền D dạng

$$D = \{(x,y) : x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$$

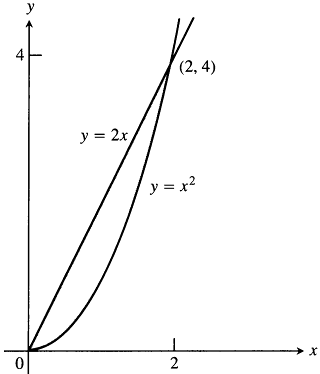
thì

$$I = \int_c^d \Big(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy.$$

Ví dụ 4.5

Tính tích phân $I = \iint\limits_R (4-x-y)dxdy$ *trên miền* R *giới hạn bởi các đường* $y = 2x, y = x^2$.

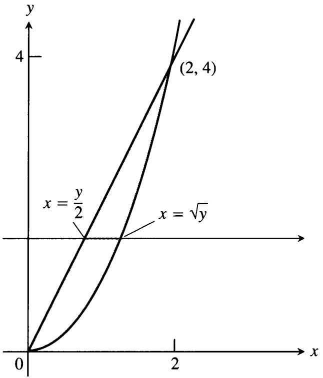
Giải:



Tìm giao điểm của 2 đường $y = 2x, y = x^2$, ta được 2 điểm $A(0,0), B(2,4)$. Miền lấy tích phân là $R = \{x \in [0,2], x^2 \le y \le 2x\}$. Do đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \Big(\int_{x^2}^{2x} (4-x-y)dy \Big) dx \\ &= \int_0^2 \Big(4y - xy - \frac{1}{2}y^2 \Big)\Big|_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 (8x - 8x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4) dx \\ &= (4x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5)\Big|_0^2 = \frac{28}{15}. \end{aligned}$$

Đổi thứ tự lấy tích phân, ta được:



Miền lấy tích phân là

$R = \{y \in [0,4], \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\}$. Do đó ta có

$$I = \int_0^4 \Big(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (4 - x - y)dx \Big) dy$$

$$= \int_0^4 \Big(4x - \frac{1}{2}x^2 - yx \Big) \Big|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy$$

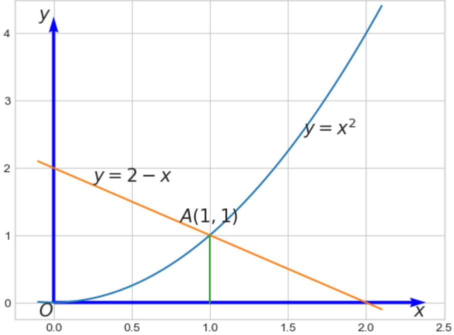
$$= \int_0^4 (4\sqrt{y} - \frac{5}{2}y - y\sqrt{y} + \frac{5}{8}y^2) dy$$

$$= (\frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{4}x^2 - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{24}y^3)\Big|_0^4 = \frac{28}{15}.$$

Ví dụ 4.6

Đổi thứ tự lấy tích phân $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)dxdy$.

Giải:



Từ các tích phân trong đề bài, ta thấy miền lấy tích phân là $R = R_1 \cup R_2$ với

$R_1 = \{(x,y) : x \in [0,1], 0 \le y \le x^2\}$,

$R_2 = \{(x,y) : x \in [1,2], 0 \le y \le 2 - x\}$

$\Rightarrow R = \{(x,y) : y \in [0,1], \sqrt{y} \le x \le 2 - y\}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dxdy.$$

4.2.3 Đổi biến số trong tích phân kép

Xét tích phân $\iint\limits_R f(x,y)dxdy$ với $f(x,y)$ liên tục trên miền R. Thực hiện đổi biến:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v).$$

Giả thiết rằng

- $x = x(u,v), y = y(u,v)$ là những hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền đóng R' của $O'uv$.
- Công thức đổi biến số xác định một song ánh từ miền R' lên miền R.
- Định thức Jacobi $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ hoặc $J = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên R'.

Khi đó ta có

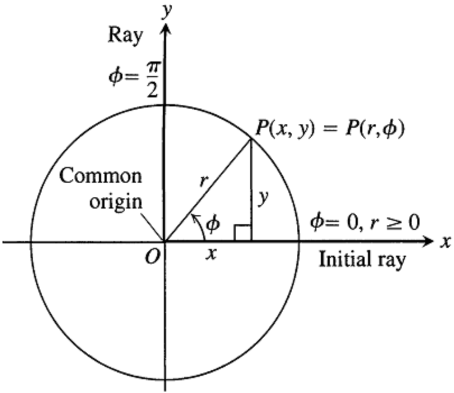
$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \iint\limits_{R'} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv.$$

- **Hệ tọa độ cực:**

Điểm $P(x, y)$ trong mặt phẳng Oxy tương ứng có $|\overrightarrow{OP}| = r$ và góc $(\overrightarrow{OP}, Ox) = \phi$ thì

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi. \end{cases}$$

Ta có: $x^2 + y^2 = r^2$.



- **Tích phân kép trong hệ tọa độ cực:**

Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$ $(r > 0, 0 \le \phi \le 2\pi)$. Ta có

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\phi \\ y'_r & y'_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

Do đó

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \iint\limits_{R'} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdrd\phi.$$

Nếu $\alpha \le \phi \le \beta, r_1(\phi) \le r \le r_2(\phi)$ thì ta có

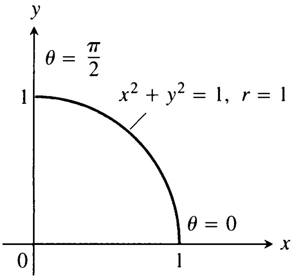
$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\phi \int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdr.$$

Ví dụ 4.7

Tính tích phân $I = \iint\limits_R (x+y)dxdy$ *trên miền* $R = \{(x,y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Giải:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$



Từ $x^2 + y^2 = r^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$.

Từ $\begin{cases} x = r\cos\phi \geq 0 \\ y = r\sin\phi \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Do đó ta có:

$$I = \iint\limits_R (x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r\cos\phi + r\sin\phi) r dr d\phi$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\phi + \sin\phi) d\phi \right) \left(\int_0^1 r^2 dr \right)$$

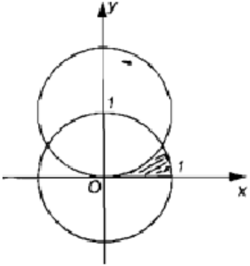
$$= (\sin\phi - \cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 \right) = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 4.8

Tính tích phân $I = \iint\limits_R \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ *trên miền*
$R = \{(x,y) : x, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1, x^2+y^2-2y \geq 0\}$.

Giải:

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$



Từ $\begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \leq 1 \\ x^2+y^2-2y = r^2 - 2r\sin\phi \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2r\sin\phi \leq r^2 \leq 1 \Rightarrow 2\sin\phi \leq r \leq 1$ và $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$.

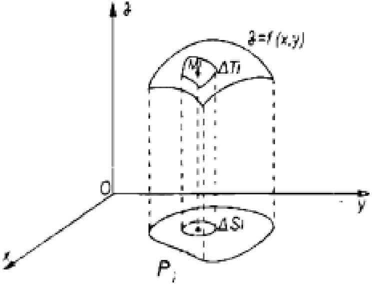
Do đó ta có:

$$I = \iint\limits_R \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{2\sin\phi}^{1} \sqrt{r^2}rdrd\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{2\sin\phi}^{1} r^2drd\phi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{r^3}{3}\Big|_{2\sin\phi}^{1}\right)d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{3}\sin^3\phi\right)d\phi = \cdots = \frac{\pi}{18} + \sqrt{3} - \frac{16}{9}.$$

4.2.4 Ứng dụng của tích phân kép

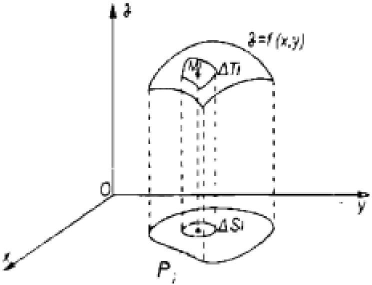


- *Tính thể tích của vật thể:* Khối trụ có đường chuẩn là biên của miền R, đường sinh song song với Oz giới hạn bởi đường cong $z = f(x, y) \geq 0$ và mặt phẳng Oxy, có thể tích là

$$V = \iint_R f(x, y)dxdy.$$

- *Tính diện tích hình phẳng:* diện tích hình phẳng R cho bởi công thức

$$S = \iint_R dxdy.$$



- *Tính diện mặt cong:* Giả sử một mặt cong (S) có phương trình $z = f(x, y)$ được giới hạn bởi một đường cong kín, ở đó hàm f liên tục có các đạo hàm riêng liên tục

$$p = f'_x, q = f'_y.$$

Gọi R là hình chiếu của (S) trên mặt phẳng Oxy. Khi đó diện tích mặt cong được tính bởi công thức

$$S = \iint\limits_R \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy.$$

Cho bản phẳng chiếm một miền $R \subset \mathbb{R}^2$ có khối lượng riêng tại mỗi điểm $P(x,y) \in R$ là $\rho(x,y)$ với ρ là một hàm liên tục.

• *Khối lượng của bản phẳng:* được tính bởi

$$m = \iint\limits_R \rho(x,y)dxdy.$$

• *Mômen quán tính của một bản phẳng:* Người ta định nghĩa mômen quán tính của một chất điểm có khối lượng m đặt tại điểm $P(x,y)$ đối với các trục Ox, Oy và gốc tọa độ O là

$$I_x = my^2, \quad I_y = mx^2, \quad I_O = m(x^2+y^2).$$

Do đó, mômen của bản phẳng được tính bởi

$$I_x = \iint\limits_R y^2 \rho(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint\limits_R x^2 \rho(x,y)dxdy.$$

$$I_O = \iint\limits_R (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy.$$

- *Trọng tâm của bản phẳng:* trọng tâm $G(x_G, y_G)$ của bản phẳng được tính bởi

$$x_G = \frac{\iint\limits_R x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_R \rho(x,y)dxdy}, \quad y_G = \frac{\iint\limits_R y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_R \rho(x,y)dxdy}.$$

Nếu bản phẳng đồng chất thì ρ không đổi, do đó

$$x_G = \frac{1}{S}\iint\limits_R x\rho(x,y)dxdy, \quad y_G = \frac{1}{S}\iint\limits_R y\rho(x,y)dxdy,$$

với $S = \iint\limits_R dxdy$ là diện tích của bản phẳng.

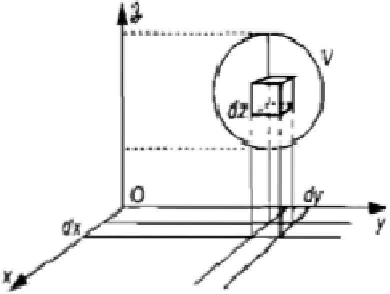
4.3: Tích phân bội ba

4.3.1 Định nghĩa tích phân bội ba

Định nghĩa 4.2

Cho hàm $f(x, y, z)$ *xác định trên một miền đóng và bị chặn* $V \subset \mathbb{R}^3$. *Chia* V *thành* n *mảnh nhỏ* $V_i, i = 1, \ldots, n$. *Giả sử mỗi mảnh đó có đường kính tương ứng là* $d_i = \max\{d(M, N), M, N \in V_i\}$ *và thể tích tương ứng là* $\Delta V_i, i = 1, \ldots, n$.
Lấy tùy ý $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$ *và lập tổng*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$



Định nghĩa 4.2 (tiếp)

Nếu $\max d_i \to 0$ khi $n \to +\infty$ và tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = I$$

không phụ thuộc vào việc chia miền V cũng như việc chọn các (x_i, y_i, z_i), thì ta nói hàm f khả tích trên V và giá trị I đó được gọi là **tích phân bội ba** của hàm $f(x, y, z)$ trên miền V, ký hiệu là

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV.$$

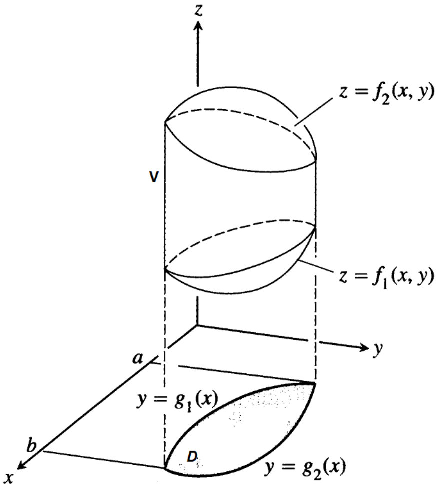
- Trong công thức tích phân bội ba, V gọi là miền lấy tích phân, f gọi là hàm dưới dấu tích phân, dV gọi là yếu tố thể tích.
- Hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn V thì khả tích trên miền đó.
- Nếu miền V được chia thành 2 miền V_1, V_2 không dẫm lên nhau thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV.$$

- Chia miền V bởi các mặt song song với Oxy, Oyz, Oxz, ta được $dV = dxdydz$, do đó

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

4.3.2 Cách tính tích phân bội ba



- Giả sử miền V giới hạn bởi các mặt $z = f_1(x, y), z = f_2(x, y)$, ở đó f_1, f_2 là các hàm số liên tục trên miền D, với D là hình chiếu của V trên Oxy. Khi đó ta có

$$I = \iint\limits_D dxdy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

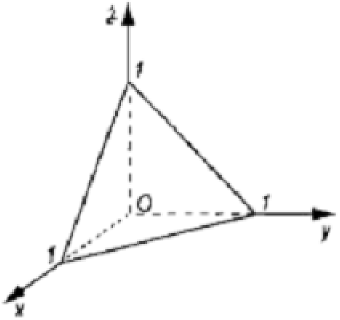
- Nếu $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ trong đó g_1, g_2 là những hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì

$$I = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Ví dụ 4.9

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V (x+y)dxdydz$ *với* V *là miền giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng* $x+y+z=1$.

Giải:



Ta có miền $V = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y\}$, do đó

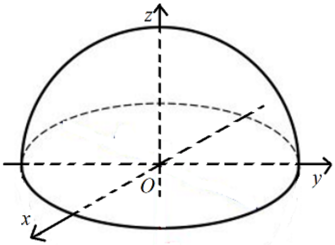
$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y)dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)z\Big|_0^{1-x-y} dy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)(1-x-y)dy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x(1-x) + (1-2x)y - y^2)dy$$
$$= \cdots = \frac{1}{18}.$$

Ví dụ 4.10

Tính tích phân $I = \iiint\limits_V z dx dy dz$

với V *là nửa hình cầu giới hạn bởi mặt phẳng* Oxy *và mặt* $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Giải:



Hình chiếu của V trên Oxy là hình tròn $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\} \Rightarrow V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$. Do đó

$$I = \iint\limits_D dxdy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} zdz$$
$$= \frac{1}{2} \iint\limits_D (R^2 - x^2 - y^2) dxdy.$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$ với $(x, y) \in D$, ta được $0 \leq r \leq R$ và $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Do đó

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$
$$= \frac{1}{2} (\phi\Big|_0^{2\pi}) (\frac{R^2}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4)\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{4}.$$

4.3.3 Đổi biến trong tích phân bội ba

Xét tích phân $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ với $f(x,y,z)$ liên tục trên miền V. Thực hiện đổi biến:

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w).$$

Giả thiết rằng

- $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ là những hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền đóng V' của $O'uvw$.
- Công thức đổi biến số xác định một song ánh từ miền D' lên miền D.
- Định thức Jacobi $J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$ hoặc $J = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên D'.

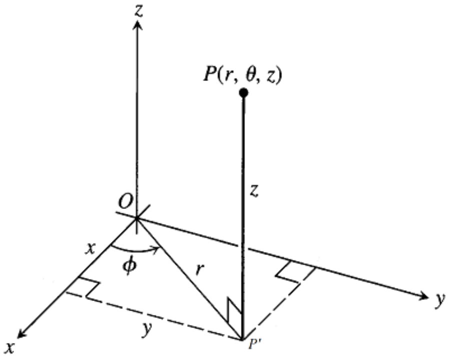
Khi đó: $$I = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J|dudvdw.$$

• Hệ tọa độ trụ:

Điểm $P(x, y, z)$ có hình chiếu trên mặt phẳng Oxy là P', với $|\overrightarrow{OP'}| = r$ và góc $(\overrightarrow{OP'}, Ox) = \phi$ thì

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

Ta có: $x^2 + y^2 = r^2$.



- **Đổi biến sang hệ tọa độ trụ:**

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = z.$$

Với $r > 0, 0 \leq \phi < 2\pi$, định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\phi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0,$$

do đó

$$I = \iiint_{V'} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z) r dr d\phi dz.$$

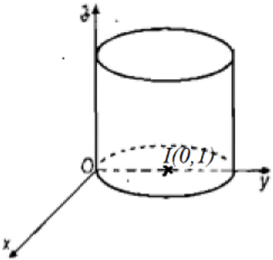
Ví dụ 4.11

Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\, z\,dxdydz$$ *với*

V *là miền trụ giới hạn bởi mặt phẳng* $Oxy, z = a$ *và mặt trụ* $x^2+y^2 = 2y$.

Giải:



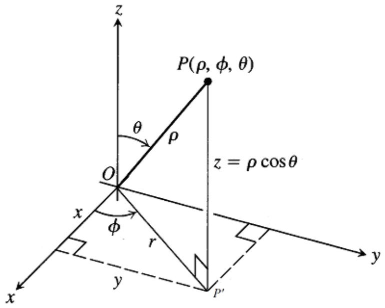
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$ từ $x^2+y^2 \le 2y$ ta được $0 \le r \le 2\sin\phi, 0 \le \phi \le \pi$ và $0 \le z \le a$. Do đó

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{V'} \sqrt{r^2}\, zr\,drd\phi dz \\
&= \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{2\sin\phi} r^2 dr \int_0^{a} zdz \\
&= \Big(\int_0^{\pi} \frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2\sin\phi} d\phi\Big)\Big(\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{a}\Big) \\
&= \frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi} \sin^3\phi d\phi \\
&= \frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\phi)\sin\phi d\phi \\
&= -\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\phi) d(\cos\phi) = \frac{16a^2}{9}.
\end{aligned}
$$

- **Hệ tọa độ cầu:**

Điểm $P(x, y, z)$ có $|\overrightarrow{OP}| = \rho$, $(\overrightarrow{OP}, Oz) = \theta$ và hình chiếu của P trên mặt phẳng Oxy là P' với $|\overrightarrow{OP'}| = r$ và góc $(\overrightarrow{OP'}, Ox) = \phi$ thì

$$\begin{cases} x = r\cos\phi = \rho\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\phi = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$



Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

• Đổi biến sang hệ tọa độ cầu:

$$x = \rho \sin\theta \cos\phi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\phi, \quad z = \rho \cos\theta.$$

Với $\rho > 0, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$, định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\theta \neq 0,$$

do đó

$$I = \iiint\limits_{V'} f(\rho\sin\theta\cos\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\phi.$$

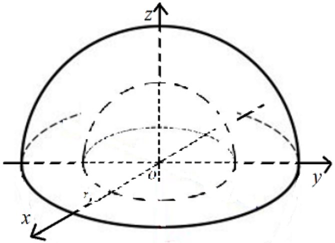
Ví dụ 4.12

Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$$

với V *là miền giới hạn bởi 2 mặt cầu* $x^2+y^2+z^2=1$ *và* $x^2+y^2+z^2=4$.

Giải:



Đặt $\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

Do đó, theo công thức đổi biến ta được

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{V'} \frac{1}{\rho}\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho \\ &= (\phi\Big|_0^{2\pi})(-\cos\theta\Big|_0^{\pi})(\frac{1}{2}r^2\Big|_1^2) \\ &= (2\pi)2(\frac{3}{2}) = 6\pi. \end{aligned}$$

4.3.4 Ứng dụng của tích phân bội ba

Cho một vật thể $V \subset \mathbb{R}^3$ có khối lượng riêng tại mỗi điểm $P(x, y, z) \in V$ là $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

- *Thể tích của vật thể:*

$$V = \iiint_V dxdydz.$$

- *Khối lượng của vật thể:*

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz.$$

Ứng dụng của tích phân bội ba

- *Trọng tâm của vật thể:* trọng tâm $G(x_G, y_G, z_G)$ của vật thể được tính bởi

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz, \quad y_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Nếu vật thể đồng chất thì

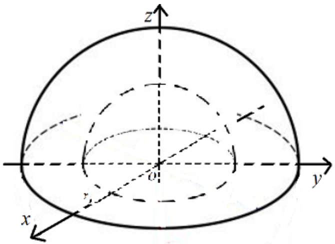
$$x_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V xdxdydz, \quad y_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V ydxdydz,$$

$$z_G = \frac{1}{V}\iiint\limits_V zdxdydz.$$

Ví dụ 4.13

Tính thể tích của vật thể V giới hạn bởi 2 mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ và $x^2+y^2+z^2=4$.

Giải:



Ta có $V = \iiint\limits_V dxdydz.$

Đặt $\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

Do đó, theo công thức đổi biến ta được

$$\begin{aligned} V &= \iiint\limits_{V'} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho \\ &= (\phi\Big|_0^{2\pi})(-\cos\theta\Big|_0^{\pi})(\frac{1}{3}r^3\Big|_1^2) \\ &= (2\pi)2(\frac{7}{3}) = \frac{28\pi}{3}. \end{aligned}$$