ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
UIT
TOÀN DIỆN • SÁNG TẠO • PHỤNG SỰ

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH

Giảng viên: TS. Phùng Minh Đức

Bộ môn Toán Lý - Trường ĐH Công nghệ Thông tin

Chương 3: Phép tính vi phân hàm nhiều biến

3.1 Các khái niệm cơ bản về hàm nhiều biến

3.1.1 Định nghĩa hàm nhiều biến

Định nghĩa 3.1

Không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ *là tập hợp*

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

cùng với 2 phép toán

- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$
  $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n;$
- $kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n), \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}$

và tích vô hướng

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$
$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

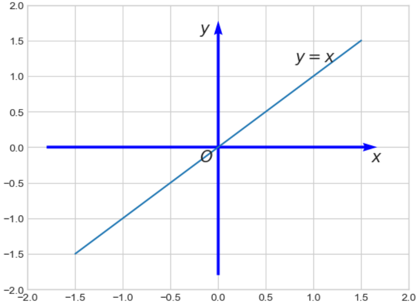
Định nghĩa 3.2

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. Một ánh xạ

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto u = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

được gọi là một hàm số n biến xác định trên D.

- Tập D được gọi là miền xác định của hàm f. Thông thường đó là tập các phần tử $x \in \mathbb{R}^n$ làm cho $f(x)$ có nghĩa.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các biến số độc lập.



Ví dụ 3.1

Xét trong không gian $\mathbb{R}^2 = Oxy$.

1. *Các hàm* $f_1(x,y) = x + y$, $f_2(x,y) = xy$ *có miền xác định là toàn không gian* $\mathbb{R}^2$.
2. *Hàm* $f_3(x,y) = \dfrac{x}{y}$ *có miền xác định là* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.
3. *Hàm* $f_4(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *có miền xác định là* $D = \{(x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
4. *Hàm* $f_5(x,y) = \sqrt{x-y}$ *có miền xác định là* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$.
5. *Hàm* $f_6(x,y) = \ln(xy)$ *có miền xác định là* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$.

3.1.2 Tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

- Trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$, tập

$$\{e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0), i = 1, 2, \dots, n \text{ (thành phần thứ } i \text{ bằng 1)}\}$$

gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Mỗi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ đều có thể viết thành

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

và ta nói x có toạ độ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ trong cơ sở chính tắc đó.

- Khoảng cách giữa hai điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ là

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

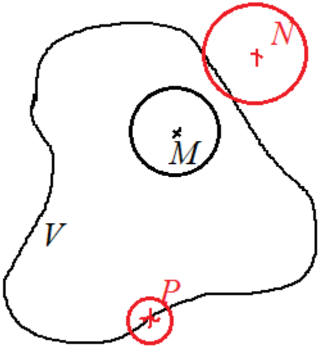
- Với mỗi $r > 0$, tập

$$B_r(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(x_0, y) < r\}$$

$$(\bar{B}_r(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(x_0, y) \leq r\})$$

được gọi là một hình cầu mở (đóng) tâm x_0, bán kính r.

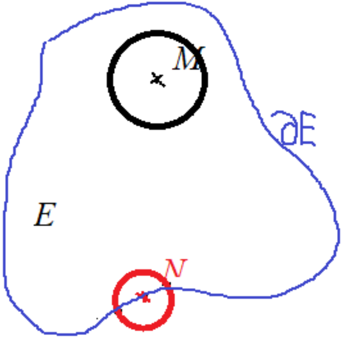
- Tập $V \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một *lân cận* của điểm x_0 nếu tồn tại một hình cầu mở $B_r(x_0) \subset V$.



- Cho tập $E \subset \mathbb{R}^n$ có phần bù

$$E^c = \{x \in \mathbb{R}^n | x \notin E\}.$$

- ▶ Điểm $x_0 \in E$ được gọi là một *điểm trong* của E nếu tồn tại một hình cầu mở $B_r(x_0) \subset E$.
- ▶ Tập E gọi là *mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.
- ▶ Tập E gọi là *đóng* nếu phần bù E^c của nó là mở.

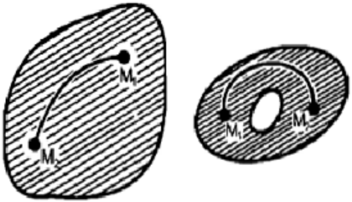


- Điểm $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gọi là một *điểm biên* của E nếu $\forall r > 0$ ta đều có

$$B_r(x_0) \cap E \neq \emptyset,\ B_r(x_0) \cap E^c \neq \emptyset.$$

  Tập tất cả các điểm biên của E gọi là *biên* của E, ký hiệu là ∂E.
  Ta có: tập E là đóng khi và chỉ khi $\partial E \subset E$.
- Tập E gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một hình cầu B_r nào đó sao cho $E \subset B_r$.

- Tập E được gọi là *liên thông* nếu có thể nối hai điểm bất kỳ trong E bởi một đường liên tục nằm hoàn toàn trong E.
  Tập liên thông E được gọi là *đơn liên* nếu nó bị giới hạn bởi một mặt kín; gọi là *đa liên* nếu nó bị giới hạn bởi nhiều mặt kín rời nhau đôi một.



3.2 Giới hạn

3.2.1 Giới hạn của hàm nhiều biến

Xét trên không gian $\mathbb{R}^2 = Oxy$.

- Dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}$ được gọi là hội tụ tới điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nếu

$$\lim_{n\to+\infty} d(M_n, M_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0.$$

  Viết $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M_0$ hay $M_n \to M_0$ khi $n \to +\infty$.

- Hàm số $f(x, y) = f(M)$ xác định trên miền D được gọi là có giới hạn l khi $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$ nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho

$$\forall M \in D, d(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - l| < \epsilon.$$

  Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \quad \text{hay} \quad \lim_{M\to M_0} f(M) = l.$$

Ví dụ 3.2

$$a.\ \lim_{(x,y)\to(1,0^+)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{1^2 - (1)(0)}{\sqrt{1} - \sqrt{0}} = 1.$$

$$\begin{aligned} b.\ \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0. \end{aligned}$$

$$c.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- Một cách tương đương, ta có

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = l \Leftrightarrow \left(\forall\{M_n(x_n, y_n)\} \subset D, \lim_{n\to+\infty} M_n = M_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l.\right)$$

Kết quả này dẫn đến: nếu chỉ ra được hai dãy

$$\{M_n(x_n, y_n)\}, \{P_n(u_n, v_n)\} \subset D \text{ mà } \lim_{n\to+\infty} M_n = \lim_{n\to+\infty} P_n = M_0$$

nhưng $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n, v_n)$ thì suy ra $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$.
Thông thường ta tìm $\{M_n\}$ và $\{P_n\}$ thuộc hai đường cong nào đó.

Ví dụ 3.3

($\sim$ 2020) Chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^3 + y^4}$.

Giải: Đặt $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^3 + y^4}$, xét các điểm $M(x, y)$ trên đường $x = ky, y \to 0$.

Ví dụ 3.4

Tìm giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$. *(xét* $M(x,y)$ *trên đường cong* $y = kx^2, x \to 0$*)*

Ví dụ 3.5

(∼ 2022) Tính gới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x-1)y}{x^2+y^2}$. *(xét* $M(x,y)$ *trên đường* $x = 0$ *và cho* $y \to 0^+$, $y \to 0^-$.*)*

Ví dụ 3.6

(∼ 2023) Tính gới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos 2x - \cos 2y}{x^2+y^2}$.

Giải: Có $f(x,y) = \dfrac{\cos 2x - \cos 2y}{x^2+y^2} = \dfrac{1 - 2\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 y)}{x^2+y^2} = 2\dfrac{\sin^2 y - \sin^2 x}{x^2+y^2}$, xét $M(x,y)$ trên đường $x = 0, y \to 0$ và $y = 0, x \to 0$.

3.2.2 Tính liên tục của hàm nhiều biến

Định nghĩa 3.3

Cho hàm f xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $M_0 \in D$. Ta nói rằng hàm f liên tục tại M_0 nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Nếu D là miền đóng và $M_0 \in \partial D$ thì giới hạn trên được lấy với $M \in D$.
Hàm f được gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

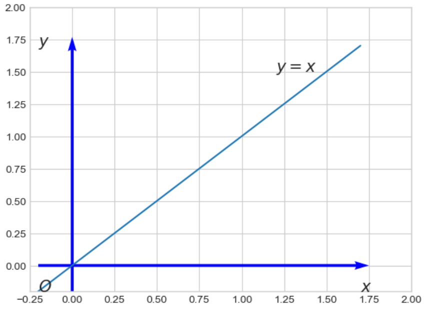
Điểm M_0 mà tại đó hàm f không liên tục thì gọi là *điểm gián đoạn* của f.

- Điểm gián đoạn loại 1: $\exists \lim\limits_{M \to M_0} f(M) \neq f(M_0)$.
- Điểm gián đoạn loại 2: không phải loại 1.

Ví dụ 3.7

Xét tính liên tục của hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} & \text{với } x \neq y \\ 0 & \text{với } x = y \end{cases}$

Giải:



- Tại $M(x,y)$ với $x \neq y$ thì hàm số $f(x,y) = \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ luôn liên tục.
- Tại $M_0(0,0)$, theo Ví dụ 3.2 ta có
$$\lim_{M \to M_0} f(M) = 0 = f(M_0),$$
do đó hàm f liên tục tại $M_0(0,0)$.
- Tại $P(a,a), a > 0$ bất kỳ, ta có
$$\lim_{M \to P} f(M) = 2a\sqrt{a} \neq 0 = f(P),$$
do đó $P(a,a), a > 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm f.

Ví dụ 3.8

Xét tính liên tục của hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & \textit{với } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \textit{với } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Giải:

- Tại $M(x,y) \neq (0,0)$ thì $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ luôn liên tục.
- Tại $M_0(0,0)$: theo Ví dụ 3.4 ta có $\nexists \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$, do đó M_0 là điểm gián đoạn loại 2 của hàm f.

3.3 Đạo hàm và vi phân

3.3.1 Đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Cố định $y = y_0$, nếu hàm một biến $f(x, y_0)$ theo biến x có đạo hàm tại x_0 thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f theo biến x* tại M_0, ký hiệu là

$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0).$$

- Tương tự, ta có *đạo hàm riêng của f theo biến y* tại M_0, ký hiệu là

$$f'_y(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{hay} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Tổng quát, đạo hàm riêng của hàm $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo biến $x_i, i = 1, \ldots, n$ tại điểm $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là đạo hàm tại a_i của hàm một biến

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Khi tính đạo hàm riêng của một hàm số theo biến nào thì ta coi các biến còn lại là tham số và tính đạo hàm một biến theo biến đó.

Ví dụ 3.9

Tính các đạo hàm riêng của hàm $f(x, y) = e^{2x}\sin(x+y^2)$.

Giải:

- $$f'_x = (e^{2x})'_x \sin(x+y^2) + e^{2x}[\sin(x+y^2)]'_x$$
  $$= 2e^{2x}\sin(x+y^2) + e^{2x}\cos(x+y^2) = e^{2x}[2\sin(x+y^2) + \cos(x+y^2)].$$
- $$f'_y = e^{2x}[\sin(x+y^2)]'_y = e^{2x}(x+y^2)'_y\cos(x+y^2) = 2ye^{2x}\cos(x+y^2).$$

3.3.2 Vi phân toàn phần

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Với mỗi điểm $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, biểu thức

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

gọi là *số gia toàn phần* của f tại M_0.

- Nếu có thể biểu diễn dạng

$$\Delta f = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

ở đó $\alpha \to 0, \beta \to 0$ khi $M \to M_0$, thì ta nói hàm f *khả vi tại* M_0. Biểu thức

$$df(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y$$

được gọi là *vi phân toàn phần* của hàm f tại M_0.

- Hàm $z = f(x, y)$ được gọi là khả vi trên miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của miền ấy.

Định lý 3.1

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng ở lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì f khả vi tại M_0 và ta có

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Chú ý:

- Do $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ nên $df = f'_x dx + f'_y dy$.
- Ta có công thức tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Ví dụ 3.10

Tính gần đúng $\dfrac{\sqrt{4.01}}{1+\sqrt{1.01}}$.

Giải: Xét hàm $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$, điểm $M_0(4,1)$ và $\Delta x = \Delta y = 0.01$.

Ta có: $f(4,1) = \dfrac{\sqrt{4}}{1+\sqrt{1}} = 1;$

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{y})} \Rightarrow f'_x(4,1) = \frac{1}{2\sqrt{4}(1+\sqrt{1})} = 0.125;$$

$$f'_y = \frac{-\sqrt{x}}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2} \Rightarrow f'_y(4,1) = \frac{-\sqrt{4}}{2\sqrt{1}(1+\sqrt{1})^2} = -0.25;$$

Do đó

$$\frac{\sqrt{4,01}}{1+\sqrt{1,01}} = f(4+0.01, 1+0.01) \approx f(4,1) + f'_x(4,1)\times 0.01 + f'_y(4,1)\times 0.01$$
$$= 1 + 0.125\times 0.01 + (-0.25)\times 0.01 = 0.999875.$$

3.3.3 Đạo hàm của hàm hợp

Cho tập $D \subset \mathbb{R}^n$ và các ánh xạ

$$
\begin{aligned}
u : D &\to \mathbb{R}^m \\
x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x)) \\
f : u(D) &\to \mathbb{R} \\
u = (u_1, \ldots, u_m) &\mapsto f(u) = f(u_1, \ldots, u_m)
\end{aligned}
$$

Khi đó ánh xạ tích

$$
\begin{aligned}
F = f \circ u : D &\to \mathbb{R} \\
x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto F(x) = f(u(x)) = f(u_1(x), \ldots, u_m(x))
\end{aligned}
$$

được gọi là hàm hợp của f và u.

Định lý 3.2

Nếu f *có các đạo hàm riêng* $\dfrac{\partial f}{\partial u_i}, i = 1, \ldots, m$ *liên tục trong* $u(D)$ *và với mỗi* $i = 1, \ldots, m, u_j$ *có các đạo hàm riêng* $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n$ *trong* D. *Khi đó tồn tại các đạo hàm riêng* $F'_{x_j} = \dfrac{\partial F}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n$ *và ta có*

$$F'_{x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n.$$

Dạng ma trận

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial u_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Trong trường hợp $m = n$, ma trận

$$J = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

là một ma trận vuông cấp n, gọi là *ma trận Jacobi* của ánh xạ u, còn định thức của nó gọi là *định thức Jacobi* của u, ký hiệu là $|J| = \frac{Du}{Dx} = \det\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

Ví dụ 3.11

Tính các đạo hàm riêng của $F(x, y) = e^{xy}\sin(x + 2y)$.

Giải: Đặt $u_1(x, y) = e^{xy}, u_2(x, y) = \sin(x + 2y)$ và $f(u_1, u_2) = u_1u_2 \Rightarrow F(x, y) = f(u(x, y))$. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = u_2, \frac{\partial f}{\partial u_2} = u_1;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = xe^{xy} \quad \text{và} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \cos(x + 2y), \frac{\partial u_2}{\partial y} = 2\cos(x + 2y);$$

Do đó:

$$\begin{aligned} F'_x = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} &= \sin(x + 2y)ye^{xy} + e^{xy}\cos(x + 2y) \\ &= e^{xy}[y\sin(x + 2y) + \cos(x + 2y)]; \\ F'_y = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial y} &= \sin(x + 2y)xe^{xy} + e^{xy}(2\cos(x + 2y)) \\ &= e^{xy}[y\sin(x + 2y) + 2\cos(x + 2y)]. \end{aligned}$$

Ngoài ra, ta có định thức Jacobi

$$|J| = \frac{Du}{Dx} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \cos(x+2y) & 2\cos(x+2y) \end{vmatrix}$$

$$= ye^{xy} \times 2\cos(x+2y) - xe^{xy} \times \cos(x+2y)$$

$$= (2y-x)e^{xy}\cos(x+2y).$$

Chú ý 3.1

- *Nếu* $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i = x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ *thì*

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'(t).$$

- *Nếu các đạo hàm riêng* $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ *liên tục thì theo ĐL3.1,* $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ *cũng liên tục* $\forall j = \overline{1, n}$*, do đó* F *khả vi và ta có vi phân toàn phần của* F *là*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n. \tag{3.1}$$

3.3.4 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Xét trường hợp hàm 2 biến $z = f(x, y)$.

- Giả sử f có các đạo hàm riêng cấp 1 là f'_x, f'_y. Nếu tồn tại các đạo hàm riêng của f'_x, f'_y thì các đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng cấp 2 của f, ký hiệu là:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x)'_x = f''_{x^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f'_x)'_y = f''_{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f'_y)'_x = f''_{yx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f'_y)'_y = f''_{y^2}.$$

- Nếu tồn tại các đạo hàm riêng của $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2}$ thì các đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng cấp 3 của $f, \ldots$

Định lý 3.3

(Schwarz) Nếu hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm đó liên tục tại M_0 thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

- Giả sử hàm $z = f(x, y)$ khả vi và có vi phân toàn phần $df = f'_x dx + f'_y dy$ là một hàm theo 2 biến x, y. Nếu tồn tại vi phân toàn phần của df thì vi phân đó gọi là vi phân toàn phần cấp 2 của f, ký hiệu là $d^2 f = d(df)$.
- Tương tự, ta có các vi phân cấp cao hơn của hàm f

$$d^3 f = d(d^2 f)$$

$$\dots$$

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

- Nếu x, y là các biến số độc lập thì ta có

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) &= d(f'_x dx + f'_y dy) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy \\ &= f''_{x^2}(dx)^2 + (f''_{xy} + f''_{yx})dxdy + f''_{y^2}(dy)^2. \end{aligned}$$

  Nếu f''_{xy}, f''_{yx} liên tục thì $f''_{xy} = f''_{yx}$, khi đó

$$d^2f = f''_{x^2}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}(dy)^2.$$

- Nếu x, y là các hàm số của các biến độc lập s, t thì dx, dy là các hàm theo biến s, t. Do đó

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) &= d(f'_x dx + f'_y dy) = d(f'_x)dx + f'_x d(dx) + d(f'_y)dy + f'_y d(dy) \\ &= f''_{x^2}(dx)^2 + (f''_{xy} + f''_{yx})dxdy + f''_{y^2}(dy)^2 + f'_x d^2x + f'_y d^2y. \end{aligned}$$

3.3.5 Đạo hàm theo hướng

- Cho điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 = Oxyz$, vector $\vec{u}$ có $|\vec{u}| = 1$. Điểm $M(x, y, z)$ nằm trên đường thẳng (Δ) qua M_0 và có vector chỉ phương $\vec{u}$ thỏa mãn
$$\overrightarrow{M_0M} = \rho\vec{u}, \rho \in \mathbb{R}.$$
- Giả sử hàm $f(x, y, z)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^3$ và $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn
$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho}$$
thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm theo hướng của* f *tại* M_0 *theo hướng* $\vec{u}$, ký hiệu là $f'(M_0, \vec{u})$ hoặc $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M_0)$.
- Đạo hàm của f tại M_0 theo hướng $\vec{u}$ biểu thị sự tăng giảm (biến thiên) của hàm f theo hướng $\vec{u}$ tại M_0.

Với $\vec{u} = \vec{i} = (1, 0, 0)$, từ $\overrightarrow{M_0M} = \rho\vec{i}$, suy ra $M = (x_0 + \rho, y_0, z_0)$. Do đó

$$f'(M_0, \vec{i}) = \lim_{\rho \to 0+} \frac{f(x_0 + \rho, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho} = f'_x(M_0).$$

Tương tự với $\vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$: $f'(M_0, \vec{j}) = f'_y(M_0), f'(M_0, \vec{k}) = f'_z(M_0)$.

Định lý 3.4

Nếu hàm $f(x, y, z)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \vec{0}$ tại M_0 và

$$f'(M_0, \vec{u}) = f'_x(M_0)u_1 + f'_y(M_0)u_2 + f'_z(M_0)u_3.$$

Ví dụ 3.12

Tính đạo hàm của hàm $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$ *tại điểm* $M_0(1, 2, -1)$ *theo hướng xác định bởi véctơ* $\overrightarrow{M_0M_1}$ *với* $M_1(0, 4, -3)$.

Giải: Ta có $\overrightarrow{M_0M_1} = (-1, 2, -2)$, do đó véctơ đơn vị theo hướng $\overrightarrow{M_0M_1}$ là

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_0M_1}}{|\overrightarrow{M_0M_1}|} = \frac{(-1, 2, -2)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}).$$

Ta có: $f'_x = 2xz, f'_y = 2yz, f'_z = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow f'_x(M_0) = 2.1.(-1) = -2, f'_y(M_0) = 2.2.(-1) = -4, f'_z(M_0) = 1^2 + 2^2 = 5.$$

Do đó

$$f'(M_0, \vec{u}) = f'_x(M_0)u_1 + f'_y(M_0)u_2 + f'_z(M_0)u_3 = (-2)(-\frac{1}{3}) + (-4)\frac{2}{3} + 5(-\frac{2}{3}) = -\frac{16}{3}.$$

- Giả sử hàm $f(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Khi đó vector

$$\nabla f(M_0) = \overrightarrow{grad}(f(M_0)) = \Big(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\Big)$$

gọi là gradient của f tại M_0.

- Công thức trong Định lý 3.4 có thể viết thành

$$f'(M_0,\vec{u}) = f'_x(M_0)u_1 + f'_y(M_0)u_2 + f'_z(M_0)u_3 = \nabla f(M_0).\vec{u}.$$

Do đó, nếu f khả vi tại M_0 thì $|f'(M_0,\vec{u})|$ đạt GTLN bằng $|\nabla f(M_0))|$ khi 2 vector $\vec{u}$ và $\nabla f(M_0)$ cùng phương:

- theo hướng $\vec{u_1} = \dfrac{\nabla f(M_0)}{|\nabla f(M_0)|}$, $f'(M_0,\vec{u_1}) = |\nabla f(M_0)|$ lớn nhất $\Rightarrow$ hàm f tăng nhanh nhất theo hướng $\vec{u_1}$;
- theo hướng $\vec{u_2} = -\dfrac{\nabla f(M_0)}{|\nabla f(M_0)|}$, $f'(M_0,\vec{u_2}) = -|\nabla f(M_0)|$ nhỏ nhất $\Rightarrow$ hàm f giảm nhanh nhất theo hướng $\vec{u_2}$. Hướng này gọi là hướng dốc nhất của f tại M_0.

3.3.6 Công thức Taylor

Định lý 3.5

Giả sử hàm $f(x,y)$ *có các đạo hàm riêng đến cấp* $n+1$ *liên tục trong một lân cận* V *nào đó của điểm* $M_0(x_0,y_0)$. *Nếu* $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in V$ *thì ta có*

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = & f(x_0,y_0) + df(x_0y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \cdots \\ & + \frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) \end{aligned} \tag{3.2}$$

với $0 < \theta < 1$.

Công thức (3.2) gọi là *khai triển Taylor hữu hạn* của hàm f tại (x_0,y_0).

3.4 Hàm ẩn

3.4.1 Hàm ẩn

3.4.2 Đạo hàm của hàm ẩn

3.4.1 Hàm ẩn

Cho tập $U \subset \mathbb{R}^2$ và hàm $F : U \to \mathbb{R}$. Xét phương trình

$$F(x, y) = 0. \tag{3.3}$$

- Nếu với mỗi $x = x_0$ trong khoảng I nào đó, tồn tại y_0 sao cho (x_0, y_0) là nghiệm của phương trình (3.3) thì ta nói phương trình đó xác định hàm số ẩn y theo x trong khoảng I.
- Hàm số $f : I \to \mathbb{R}$ gọi là hàm số ẩn xác định bởi phương trình (3.3) nếu

$$\forall x \in I : (x, f(x)) \in U \text{ và } F(x, f(x)) = 0.$$

3.4.2 Đạo hàm của hàm ẩn

Định lý 3.6

Cho $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên khoảng mở $U \subset \mathbb{R}^2$. Giả sử $(x_0, y_0) \in U$ mà $F(x_0, y_0) = 0$ và có $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó phương trình (3.3) xác định trong lân cận I nào đó của x_0 một hàm ẩn duy nhất $y = f(x)$ sao cho

- $f(x_0) = y_0$;
- *hàm f liên tục và có đạo hàm liên tục trong I.*

Đạo hàm của hàm $y = f(x)$ trong Định lý 3.6 được tính theo công thức

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Nếu $F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$ thì điểm (x_0, y_0) gọi là một điểm kỳ dị của phương trình (3.3).

Ví dụ 3.13

Tính đạo hàm của hàm ẩn cho bởi phương trình: $F(x, y) = ye^x - e^{xy} = 0.$

Giải: ta có $F(0, 1) = 0$ và $F'_x = ye^x - ye^{xy}, F'_y = e^x - xe^{xy}$
$\Rightarrow F'_y(0, 1) = 1$. Như vậy các điều kiện trong Định lý 3.6 được thỏa mãn.
Đạo hàm của hàm ẩn $y = f(x)$ thỏa mãn phương trình trên cho bởi

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{ye^x - ye^{xy}}{e^x - xe^{xy}}.$$

Xét trường hợp 3 biến với phương trình

$$F(x,y,z) = 0. \tag{3.4}$$

Định lý 3.7

Cho $F(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên khoảng mở $U \subset \mathbb{R}^3$. Giả sử $(x_0,y_0,z_0) \in U$ mà $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ và $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Khi đó phương trình (3.4) xác định trong lân cận V nào đó của (x_0,y_0) hàm ẩn duy nhất $z = f(x,y)$ sao cho

- *$f(x_0,y_0) = z_0$;*
- *hàm f liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong V.*

Các đạo hàm riêng của hàm $z = f(x,y)$ trong Định lý 3.7 được tính theo công thức

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ví dụ 3.14

Tính đạo hàm của hàm ẩn cho bởi phương trình: $F(x,y) = ye^x - e^{yz} = 0$.

Giải: ta có $F(0,1,0) = 0$ và $F'_x = ye^x, F'_y = e^x - ze^{yz}, \quad F'_z = -ye^{yz}$
$\Rightarrow F'_z(0,1,0) = -1$. Như vậy các điều kiện trong Định lý 3.7 được thỏa mãn.
Đạo hàm của hàm ẩn $z = f(x,y)$ thỏa mãn phương trình trên cho bởi

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{ye^x}{-ye^{yz}} = e^{x-yz}.$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{e^x - ze^{yz}}{-ye^{yz}} = \frac{e^{x-yz} - z}{y}.$$

3.5 Cực trị

3.5.1 Cực trị của hàm nhiều biến

3.5.2 Cực trị có điều kiện

3.5.3 Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm nhiều biến

3.5.1 Cực trị của hàm nhiều biến

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trên miền D và M_0 là một điểm trong của D.

- Điểm M_0 được gọi là một điểm *cực tiểu* (địa phương) của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M_0) \leq f(M), \forall M \in V.$$

- Điểm M_0 được gọi là một điểm *cực đại* (địa phương) của f nếu tồn tại một lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M_0) \geq f(M), \forall M \in V.$$

- Điểm cực đại và cực tiểu của một hàm số được gọi chung là điểm *cực trị*.
- Điểm M_0 được gọi là một *điểm tới hạn* của hàm f nếu

  [- không tồn tại ít nhất một trong hai đạo hàm riêng của f tại M_0
  - tồn tại các đạo hàm riêng của f tại M_0 và $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$.

Định lý 3.8

Nếu hàm số f đạt cực trị tại M_0 và có các đạo hàm riêng tại M_0 thì

$$p = f'_x(M_0) = 0, \quad q = f'_y(M_0) = 0.$$

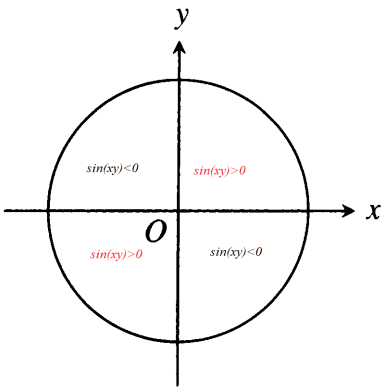
Ví dụ 3.15

Trên $\mathbb{R}^2$, hàm $f(x,y) = x^2 + y^2$ có một điểm cực tiểu $M_0(0,0)$. Ta có:

$$f'_x = 2x, f'_y = 2y \Rightarrow \begin{cases} f'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) = 0 \end{cases}$$

Điều ngược lại của định lý trên không đúng, tức là hàm số $f(x, y)$ có thể có các đạo hàm riêng bằng 0 tại một điểm nhưng điểm đó không là cực trị của hàm f.

Ví dụ 3.16



Xét hàm $f(x, y) = \sin(xy)$ *trên* $\mathbb{R}^2$ *tại* $M_0(0, 0)$.

$$f'_x = y\cos(xy), f'_y = x\cos(xy)$$

$$\Rightarrow f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0.$$

Tuy nhiên điểm $M_0(0, 0)$ *không phải là một điểm cực trị của hàm* f.

Định lý 3.9

Giả sử hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0)$ và

$$p = f'_x(M_0) = 0, \quad q = f'_y(M_0) = 0.$$

Đặt $r = f''_{x^2}(M_0), s = f''_{xy}(M_0), t = f''_{y^2}(M_0)$. Khi đó ta có:

(a) *Nếu $rt - s^2 > 0$: f đạt cực trị tại M_0. Nó là cực tiểu nếu $r > 0$ và là cực đại nếu $r < 0$.*

(b) *Nếu $rt - s^2 < 0$: f không đạt cực trị tại M_0.*

(c) *Nếu $rt - s^2 = 0$: chưa thể kết luận f có đạt cực trị tại M_0 hay không.*

Các bước tìm cực trị của hàm $f(x, y)$:

1. Tính f'_x, f'_y và giải hệ $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ tìm các điểm tới hạn $M_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots$.
2. Tính $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ và xét tại từng M_i:
   - Nếu $rt - s^2 > 0$: f đạt cực trị tại M_i. Nó là cực tiểu nếu $r > 0$ và là cực đại nếu $r < 0$.
   - Nếu $rt - s^2 < 0$: f không đạt cực trị tại M_i.
   - Nếu $rt - s^2 = 0$: chưa thể kết luận f có đạt cực trị tại M_i hay không.

Ví dụ 3.17

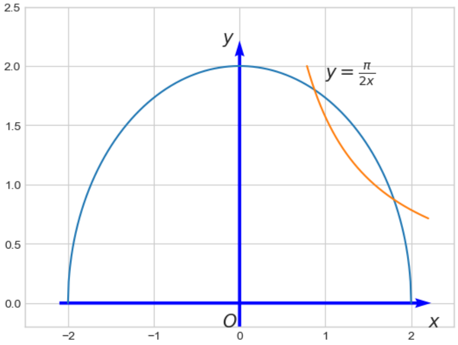
Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = \sin(xy)$ *trên* $D = \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4.$

Giải: Ta có $f'_x = y\cos(xy), f'_y = x\cos(xy)$

Giải hệ $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\cos(xy) = 0 \\ x\cos(xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ xy = \dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$

$$r = f''_{x^2} = -y^2\sin(xy), s = f''_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy), t = f''_{y^2} = -x^2\sin(xy).$$

- Tại $M_1(0, 0) : r = 0, t = 0, s = 1 \Rightarrow rt - s^2 = -1 \Rightarrow M_1(0, 0)$ không là điểm cực trị của hàm số.



- Tại các điểm $\{M(x, y) : xy = \dfrac{\pi}{2}\}$:
  $r = -y^2, t = -x^2, s = -\dfrac{\pi}{2}$
  $\Rightarrow rt - s^2 = x^2y^2 - \dfrac{\pi^2}{4} = 0 \Rightarrow$ chưa thể kết luận các điểm này có phải cực trị hay không.
  Tuy nhiên, trong trường hợp này, ta biết rằng $\sin(xy) \leq 1 = \sin\frac{\pi}{2}$, do đó các điểm $\{M(x, y) : xy = \dfrac{\pi}{2}\}$ là các cực trị của hàm số.

3.5.2 Cực trị có điều kiện

Cực trị của hàm $f(x, y)$ trên miền $D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ gọi là *cực trị có điều kiện*.

Định lý 3.10

(ĐK cần của cực trị có điều kiện) Cho $M_0(x_0, y_0)$ *là một điểm cực trị có điều kiện của hàm* f *trên* D*. Giả sử* f *và* g *có các đạo hàm riêng trong lân cận của* M_0 *và* $g'_x(M_0)^2 + g'_y(M_0)^2 \neq 0$*. Khi đó ta có*

$$\begin{vmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

Điều kiện (3.5) và điều kiện $g(x_0, y_0) = 0$ giúp ta tìm (x_0, y_0).

Ví dụ 3.18

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ *trên miền* $D = \{(x,y) : x - 2y - 2 = 0\}$.

Giải: Đặt $g(x,y) = x - 2y - 2$, ta có

$$f'_x = 2x, f'_y = 2y; \quad g'_x = 1, g'_y = -2$$

Do đó

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4x - 2y.$$

Giải hệ

$$\begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow M_0\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Vậy hàm số đạt cực trị (cực tiểu) trên D tại $M_0(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$ và $f(M_0) = \dfrac{4}{5}$.

Với các giả thiết trong Định lý 3.10, từ điều kiện (3.5) suy ra tồn tại số λ thỏa mãn

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Số λ đó gọi là *nhân tử Lagrange*. Phương pháp tìm λ và (x_0, y_0) nhờ điều kiện (3.6) và $g(x_0, y_0) = 0$ gọi là *phương pháp nhân tử Lagrange*.

Ví dụ 3.19

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2$ *trên miền* $D = \{(x,y) : x - 2y - 2 = 0\}$.

Giải: Đặt $g(x,y) = x - 2y - 2$, ta có

$$f'_x = 2x, f'_y = 2y; \quad g'_x = 1, g'_y = -2$$

Giải hệ

$$\begin{cases} f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y - 2\lambda = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{4}{5} \\ x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Vậy hàm số đạt cực trị (cực tiểu) trên D tại $M_0(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$ và $f(M_0) = \dfrac{4}{5}$.

3.5.3 Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm nhiều biến

Để tìm GTLN và GTNN của một hàm $z = f(x, y)$ trên một miền đóng bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tìm các điểm tới hạn của f và tính giá trị hàm f tại các điểm đó.
2. So sánh với giá trị của f trên biên ∂D.
3. Kết luận về GTLN và GTNN của f trên D.

Chú ý: Nếu miền $D = \{(x, y) : g(x, y) \leq 0\}$ thì biên của D là

$$\partial D = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}.$$

Lúc này ta có thể tìm cực trị của f trên biên ∂D dưới dạng bài toán cực trị có điều kiện.

Ví dụ 3.20

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y) = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$$

trên miền $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Giải: Ta có $p = f'_x = 8x(1 - 2x^2 - y^2), \quad q = f'_y = 2y(1 - 4x^2 - 2y^2)$.
Giải hệ $p = 0, q = 0$ ta được các điểm

$$M_0(0,0), M_1(0, \frac{1}{\sqrt{2}}), M_2(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), M_3(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), M_4(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0).$$

Các điểm này đều nằm trong miền D đang xét và

$$f(M_0) = 0, f(M_1) = f(M_2) = \frac{1}{4}, f(M_3) = f(M_4) = 1.$$

Xét trên biên $\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Đặt $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, ta có $g'_x = 2x, g'_y = 2y$. Do đó

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8x(1-2x^2-y^2) & 2y(1-4x^2-2y^2) \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 4xy(3-4x^2-2y^2).$$

Giải hệ

$$\begin{cases} 4xy(3-4x^2-2y^2 = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

ta được các điểm cực trị: $M_5(0,1), M_6(0,-1), M_7(1,0), M_8(-1,0)$

$$M_9\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_{11}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_{12}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ta có $f(M_5) = f(M_6) = f(M_7) = f(M_8) = 0; f(M_9) = f(M_{10}) = f(M_{11}) = f(M_{12}) = \frac{1}{4}$.

Vậy trên D ta có GTLN của $f(x,y)$ bằng 1, GTNN của $f(x,y)$ bằng 0.