BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH

Giảng viên: TS. Phùng Minh Đức

Bộ môn Toán Lý - Trường ĐH Công nghệ Thông tin

Tổng kết nội dung thi cuối kỳ

- **Đổi thứ tự lấy tích phân:** Nếu có tích phân

$$I = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx$$

tức là miền lấy tích phân $R = \{(x,y) : x \in [a,b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$. Vẽ hình và biểu diễn lại miền R dạng

$$R = \{(x,y) : y \in [c,d], x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$$

thì

$$I = \int_c^d \Big(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy.$$

- **Tích phân kép trong hệ tọa độ cực:** (thường dùng khi miền lấy tích phân có giới hạn bởi các đường tròn hoặc elip)

  - Phần giới hạn dạng hình tròn: đặt $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$ Ta được

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{R'} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdrd\phi.$$

  - Phần giới hạn bởi elip: đặt $\begin{cases} x = ar\cos\phi \\ y = br\sin\phi \end{cases}$ Ta được

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{R'} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdrd\phi.$$

- **Cách tính tích phân bội ba:** từ giả thiết về giới hạn của miền lấy tích phân V, xác định
  - D là hình chiếu của V trên Oxy,
  - $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$.

Khi đó ta có

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \iint\limits_D dxdy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

- Hệ tọa độ trụ: khi miền lấy tích phân có dạng hình trụ.
- Hệ tọa độ cầu: khi miền lấy tích phân có dạng hình cầu.

- Cách tính tích phân đường loại 1:
  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = y(x), x \in [a, b]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

  - Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

  - *(trường hợp trong không gian)* Cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

- Cách tính tích phân đường loại 2:
  - Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $y = y(x)$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \Big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\Big)dx.$$

(đổi vai trò của x, y nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình $x = x(y)$).

  - Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$ thì

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} \Big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\Big)dt.$$

- Tích phân đường loại 2 trong không gian: cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ thì

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \int_{t_A}^{t_B} \Big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t) \Big) dt.$$

- Chú ý cho cả 2 loại tích phân đường:
  - Đường cong lấy tích phân L có dạng đường tròn $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ thì đặt $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t. \end{cases}$
  - Đường cong lấy tích phân L có dạng đường elip $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ thì đặt $\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t. \end{cases}$

- *Tính diện tích hình phẳng:* diện tích hình phẳng R cho bởi công thức

$$S = \iint\limits_R dxdy.$$

- *Tính diện mặt cong:* Giả sử R là hình chiếu trên mặt phẳng Oxy của mặt cong (S) có phương trình $z = f(x, y)$ và $p = f'_x, q = f'_y$. Khi đó diện tích mặt cong (S) được tính theo công thức

$$S = \iint\limits_R \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy.$$

- Độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$: $\ell = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds$

- *Tính thể tích của khối trụ:* khối trụ có đường chuẩn là biên của miền R, đường sinh song song với Oz giới hạn bởi đường cong $z = f(x, y) \geq 0$ và mặt phẳng Oxy, có thể tích là

$$V = \iint_R f(x, y) dxdy.$$

- *Thể tích của vật thể:*

$$V = \iiint_V dxdydz.$$

- Các dạng phương trình vi phân cấp 1: khuyết, phân ly, đẳng cấp (thuần nhất), tuyến tính, Bernoulli, vi phân toàn phần.

Chú ý: phương trình cho dạng $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$: đầu tiên kiểm tra xem có phải dạng đẳng cấp không, nếu không thì tính $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (nháp):

- nếu $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$: dạng pt vi phân toàn phần;
- nếu $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$: (nháp) chia cho dx và dy để xem dạng tuyến tính (hoặc Bernoulli) theo biến x hay y:

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \quad (x \text{ là biến, } y \text{ là hàm phụ thuộc}),$$

$$P(x,y)x' + Q(x,y) = 0 \quad (y \text{ là biến, } x \text{ là hàm phụ thuộc}).$$

- Phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng:
  - Phương trình tuyến tính thuần nhất: $y'' + py' + qy = 0$. Giải phương trình đặc trưng: $k^2 + pk + q = 0$. Đặt $\Delta = p^2 - 4q$, có những trường hợp sau:
    1. $\Delta > 0$: Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$, khi đó nghiệm tổng quát của pt tuyến tính thuần nhất là
$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$
    2. $\Delta = 0$: Phương trình đặc trưng có nghiệm kép $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$, khi đó nghiệm tổng quát của pt tuyến tính thuần nhất là
$$y = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1 + C_2 x).$$
    3. $\Delta < 0$: Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phức $k_1 = a + ib, k_2 = a - ib$, khi đó nghiệm tổng quát của pt tuyến tính thuần nhất là
$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

- Phương trình tuyến tính không thuần nhất: $y'' + py' + qy = f(x)$.

Phương pháp biến thiên hằng số: ta giải phương trình theo các bước sau:

1. Tìm 2 nghiệm riêng y_1, y_2 độc lập tuyến tính của pttt thuần nhất tương ứng.
2. Tìm $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$

   Giải hệ ta được $C_1'(x) = \psi_1(x), C_2'(x) = \psi_2(x)$, suy ra

$$C_1(x) = \int \psi_1(x)dx = G_1(x) + K_1, \quad C_2(x) = \int \psi_2(x)dx = G_2(x) + K_2$$

Từ đó ta được nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất là

$$y = y_1(G_1(x) + K_1) + y_2(G_2(x) + K_2)$$

Phương pháp hệ số bất định: Tìm nghiệm của pt dạng $y = Y_1 + Y_2$, ở đó:

B1: Giải phương trình thuần nhất tương ứng tìm được nghiệm $Y_1 = C_1y_1 + C_2y_2$.

B2: Tìm một nghiệm riêng Y_2 theo phương pháp *hệ số bất định* như sau:

- *Trường hợp 1:* $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, với $a \in \mathbb{R}$ và $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
  1. Nếu a không là nghiệm của phương trình đặc trưng:
     $$Y_2 = e^{ax}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \text{ là một đa thức bậc } n.$$
     Thay vào phương trình rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_n(x)$.
  2. Nếu a là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng: $Y_2 = xe^{ax}Q_n(x)$.
  3. Nếu a là nghiệm kép của phương trình đặc trưng: $Y_2 = x^2e^{ax}Q_n(x)$.
- *Trường hợp 2:* $f(x) = P_m(x)\cos bx + P_n(x)\sin bx$.
  1. Nếu $\pm ib$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng:
     $$Y_2 = Q_M(x)\cos bx + R_M(x)\sin bx, \text{ với } M = \max\{m, n\}.$$
     Thay vào phương trình rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_M(x), R_M(x)$.
  2. Nếu $\pm ib$ là nghiệm của phương trình đặc trưng $\Leftrightarrow p = 0, q = b^2$:
     $$Y_2 = x[Q_M(x)\cos bx + R_M(x)\sin bx].$$

Chúc các em ôn và thi tốt

Good luck!