

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH

Giảng viên: TS. Phùng Minh Đức

Bộ môn Toán Lý - Trường ĐH Công nghệ Thông tin



Chương 5: Tích phân đường - Tích phân mặt

- 5.1 Tích phân đường loại 1
- 5.2 Tích phân đường loại 2
- 5.3 Tích phân mặt



5.1 Tích phân đường loại 1

- 5.1.1 Định nghĩa tích phân đường loại 1
- 5.1.2 Cách tính tích phân đường loại 1
- 5.1.3 Ứng dụng của tích phân đường loại 1

5.1.1 Định nghĩa tích phân đường loại 1

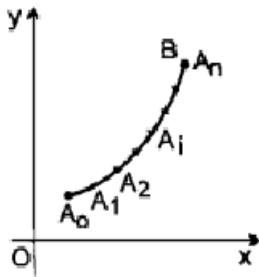
Định nghĩa 5.1

Cho hàm $f(M) = f(x, y)$ xác định trên một cung phẳng \widehat{AB} . Chia cung \widehat{AB} thành n cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$.

Gọi độ dài mỗi cung $A_{i-1}A_i$ là $\Delta s_i, i = 1, \dots, n$.

Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ lấy tùy ý một điểm $M_i(\xi_i, \eta_i), i = 1, \dots, n$ và lập tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$





Định nghĩa 5.1

Nếu $\max \Delta s_i \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = I$, không phụ thuộc vào cách chia cung \widehat{AB} cũng như cách chọn các điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$, thì ta nói hàm f khả tích trên \widehat{AB} và giới hạn đó được gọi là **tích phân đường loại một** của hàm f dọc theo cung \widehat{AB} , ký hiệu là

$$I = \int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds.$$

5.1.2 Cách tính tích phân đường loại 1

- *Cung trơn:*

- ▶ Cung \widehat{AB} được cho bởi phương trình $y = f(x), x \in [a, b]$ được gọi là trơn nếu hàm f có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$.
- ▶ Cung \widehat{AB} được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$ được gọi là trơn nếu các hàm $x(t), y(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[t_1, t_2]$.
- ▶ Cung \widehat{AB} được gọi là trơn từng khúc nếu nó gồm hữu hạn cung trơn.

- Cho cung \widehat{AB} trơn (hoặc trơn từng khúc). Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên \widehat{AB} thì nó cũng khả tích trên đó.

- Nếu $C \in \widehat{AB}$ thì

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_{\widehat{AC}} f(x, y) ds + \int_{\widehat{CB}} f(x, y) ds.$$



- Cung \widehat{AB} trơn cho bởi phương trình $y = y(x), x \in [a, b]$:

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

- Cung \widehat{AB} trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

- (trường hợp trong không gian) Cung \widehat{AB} trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Chú ý:

- ▶ Nếu Cung \widehat{AB} trơn cho bởi phương trình $x = x(y), y \in [c, d]$:

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy.$$

- ▶ L là đoạn thẳng cho bởi phương trình

$$\begin{cases} x \in [a, b] \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} y \in [c, d] \\ x = x_0 \end{cases}$$

thì tương ứng tính tích phân theo x hoặc theo y ở trên.



Ví dụ 5.1

Tính $I = \int_L xy ds$, L là cung cho bởi phương trình $\begin{cases} y = -x & \text{với } x \in [-1, 0] \\ y = \frac{1}{2}x^2 & \text{với } x \in [0, 1]. \end{cases}$

Giải:

Ta có $L = L_1 \cup L_2$ với

$$L_1 = \{(x, y) : x \in [-1, 0], y = -x\},$$

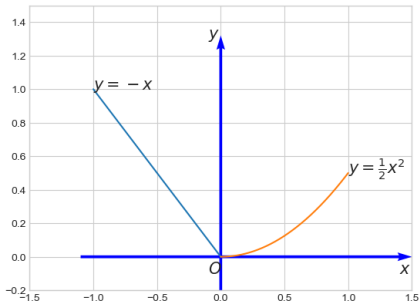
$$L_2 = \{(x, y) : x \in [0, 1], y = \frac{1}{2}x^2\},$$

do đó $I = \int_{L_1} xy ds + \int_{L_2} xy ds.$

Trên $L_1 : y = -x \Rightarrow y' = -1$

và trên $L_2 : y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y' = x.$ Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 x(-x)\sqrt{1+(-1)^2}dx + \int_0^1 x\frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^2}dx \\ &= \dots = \end{aligned}$$



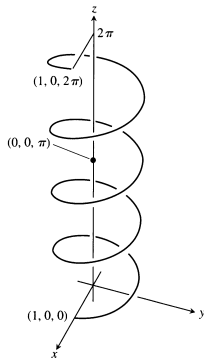


Ví dụ 5.2

Tính $I = \int_L z ds$, với L là cung cho bởi phương trình tham số

$$x = \cos 4t, y = \sin 4t, z = t, t \in [0, 2\pi].$$

Giải:



Ta có $x' = -4 \sin 4t$, $y' = 4 \cos 4t$, $z' = 1$, do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{(-4 \sin 4t)^2 + (4 \cos 4t)^2 + 1} dt \\ &= \dots = \end{aligned}$$



5.1.3 Ứng dụng của tích phân đường loại một

Giả sử cung vật chất \widehat{AB} có khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$ với ρ là một hàm liên tục.

► Độ dài cung \widehat{AB} : $\ell = \int_{\widehat{AB}} ds.$

► Khối lượng của cung \widehat{AB} là

$$m = \int_{\widehat{AB}} \rho(x, y, z) ds.$$

► Trọng tâm $G(x_G, y_G, z_G)$ của cung \widehat{AB} xác định bởi

$$x_G = \int_{\widehat{AB}} x \rho(x, y, z) ds, \quad y_G = \int_{\widehat{AB}} y \rho(x, y, z) ds, \quad z_G = \int_{\widehat{AB}} z \rho(x, y, z) ds.$$



Ví dụ 5.3

Tính độ dài của đường cong là giao của mặt phẳng $y + z = 1$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Giải: Đặt $x = \cos t, y = \sin t \Rightarrow z = 1 - \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Do đó

$$x' = -\sin t, y' = \cos t, z' = -\cos t.$$

Độ dài của đường cong là

$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (-\cos t)^2} dt \\&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt \\&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \sin^2 t} dt = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t} dt \\&= \text{chu vi hình elip có bán trục lớn } a = \sqrt{2}, \text{ bán trục nhỏ } b = 1.\end{aligned}$$



5.2 Tích phân đường loại 2

- 5.2.1 Định nghĩa tích phân đường loại 2
- 5.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2
- 5.2.3 Công thức Green
- 5.2.4 Điều kiện để tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường lấy tích phân
- 5.2.5 Tích phân đường loại 2 trong không gian

5.2.1 Định nghĩa tích phân đường loại 2

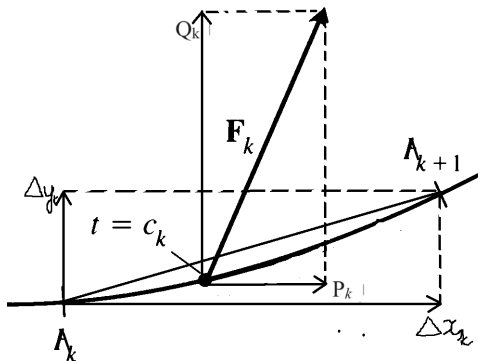
Định nghĩa 5.2

Cho các hàm $P(x, y), Q(x, y)$ xác định trên một cung phẳng \widehat{AB} . Chia cung \widehat{AB} thành n cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$.

Gọi độ dài đại số của hình chiếu của vector $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ trên 2 trục Ox, Oy là

$\Delta x_i, \Delta y_i, i = 1, \dots, n$. Trên mỗi cung $A_{i-1}A_i$ lấy tùy ý một điểm $M_i(\xi_i, \eta_i), i = 1, \dots, n$ và lập tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i.$$





Định nghĩa 5.2

Nếu $\max \Delta x_i \rightarrow 0, \max \Delta y_i \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = I$, không phụ thuộc vào cách chia cung \widehat{AB} cũng như cách chọn các điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$, thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại 2 của hàm P, Q dọc theo cung \widehat{AB} , ký hiệu là

$$I = \int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$



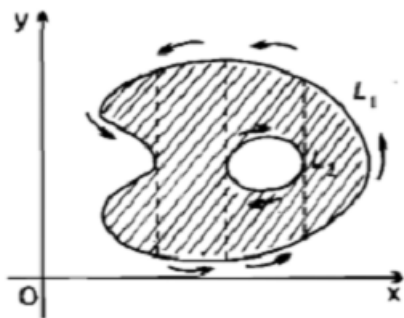
4.2.2 Cách tính tích phân đường loại 2

- Nếu cung \widehat{AB} trơn từng khúc và các hàm P, Q liên tục trên \widehat{AB} thì tồn tại tích phân đường loại 2 của P, Q dọc theo cung \widehat{AB} .
- Nếu $C \in \widehat{AB}$ thì

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\widehat{AC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{\widehat{CB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

- Nếu đổi chiều lấy tích phân dọc theo cung \widehat{BA} thì tích phân đường loại 2 bị đổi dấu

$$\int_{\widehat{BA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$



Chiều của đường cong khép kín: Một đường kín L là biên của miền D thì chiều dương của nó được xác định là chiều mà khi đi dọc L theo chiều đó, miền D nằm bên trái.

- Tích phân đường loại 2 dọc theo một đường cong khép kín (L) theo chiều dương ký hiệu là

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

- Nếu cung \widehat{AB} trơn cho bởi phương trình $y = y(x)$ thì

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) \right) dx.$$

(đổi vai trò của x, y nếu cung \widehat{AB} trơn cho bởi phương trình $x = x(y)$).

- Nếu cung \widehat{AB} trơn cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$ thì

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_A}^{t_B} \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt.$$



5.2.3 Công thức Green

Định lý 5.1

Giả sử miền D có biên là đường cong L gồm một hay nhiều đường kín trơn từng khúc rời nhau đôi một. Nếu hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên miền D thì

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy. \quad (5.1)$$

Công thức (5.1) gọi là công thức Green.

Hệ quả 5.1

Diện tích S của miền D có biên L được tính bởi công thức

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$



5.2.4 Điều kiện để tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường lấy tích phân

Định lý 5.2

Giả sử hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ và các đạo hàm của chúng liên tục trong một miền đơn liên D . Khi đó các mệnh đề sau đây tương đương với nhau:

- (a)** $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D;$
- (b)** $\oint_L Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường kín $L \subset D;$
- (c)** Tích phân $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc hai đầu mút A, B mà không phụ thuộc cung $\widehat{AB} \subset D;$
- (d)** $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm $u(x, y)$ nào đó trong D .



Cách tìm hàm $u(x, y)$ trong ý (d) của Định lý 5.2:

- Lấy $A(x_0, y_0) \in D$ tùy ý. Với mỗi $M(x, y) \in D$, hàm $u(x, y) = u(M)$ trong ý (d) của ĐL5.2 được cho bởi công thức

$$u(x, y) = \int_{\widehat{AM}} Pdx + Qdy + C, \quad C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

- Nếu $D = \mathbb{R}^2$ thì

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C$$

hoặc

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C.$$

Chú ý: Nếu $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ thì

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$



5.2.5 Tích phân đường loại 2 trong không gian

- Cho các hàm số $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ xác định trên cung \widehat{AB} trong \mathbb{R}^3 . Tương tự như định nghĩa tích phân đường loại hai trong mặt phẳng, ta có tích phân đường loại 2 của các hàm số P, Q, R dọc theo cung \widehat{AB} , ký hiệu là

$$I = \int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

- Nếu cung \widehat{AB} cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ thì:

$$I = \int_{t_A}^{t_B} \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt.$$



Tích phân mặt

Phần này sinh viên tự nghiên cứu.

- Tích phân mặt loại 1 bao gồm các nội dung:
 - ▶ Định nghĩa.
 - ▶ Cách tính.
- Tích phân mặt loại 2 bao gồm các nội dung:
 - ▶ Định nghĩa.
 - ▶ Cách tính
 - ▶ Công thức Stokes.
 - ▶ Điều kiện tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường lấy tích phân.
 - ▶ Công thức Ostrogradsky.
 - ▶ Véc-tơ rôta; trường thế; div; toán tử Hamilton.