ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
UIT
TOÀN DIỆN • SÁNG TẠO • PHỤNG SỰ

BÀI GIẢNG GIẢI TÍCH

Giảng viên: TS. Phùng Minh Đức

Bộ môn Toán Lý - Trường ĐH Công nghệ Thông tin

Chương 6: Phương trình vi phân

6.1: Khái niệm phương trình vi phân

• Một hệ thức liên hệ giữa biến x, hàm $y(x)$ và các đạo hàm của nó có dạng

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{6.1}$$

được gọi là một *phương trình vi phân*. Biến x gọi là biến độc lập, $y(x)$ gọi là biến phụ thuộc.

• Cấp cao nhất của đạo hàm của $y(x)$ có mặt trong phương trình (6.1) gọi là *cấp* của phương trình.

• Một hàm $y(x)$ xác định trên miền $I \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn (6.1) với mọi $x \in I$ được gọi là một *nghiệm* hay một *đường tích phân* của phương trình.

Tập tất cả các nghiệm của (6.1) gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình.

Nghiệm của một phương trình vi phân có thể cho dưới dạng tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t \in I).$$

• Giải một phương trình vi phân là đi tìm nghiệm tổng quát của nó.

6.2: Phương trình vi phân cấp 1

6.2.1 Các khái niệm

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \text{(viết đơn giản là } F(x, y, y') = 0). \tag{6.2}$$

- Dạng chuẩn tắc của phương trình vi phân cấp 1:

$$y' = f(x, y). \tag{6.3}$$

- Nếu cho trước điều kiện $y(x_0) = y_0$ thì đó được gọi là *điều kiện ban đầu* của phương trình (6.3), có thể được viết là $y|_{x=x_0} = y_0$. Bài toán giải phương trình (6.3) với điều kiện ban đầu gọi là *bài toán Cauchy*.

• Nghiệm tổng quát của phương trình (6.3) có thể cho dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

với C là hằng số tùy ý. Hệ thức đó còn được gọi là một *tích phân tổng quát* của phương trình (6.3).

• Nghiệm tổng quát dạng hiển của phương trình (6.3) là

$$y = \psi(x, C).$$

• Ứng với mỗi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ ta tìm được một C_0.
Khi đó, nghiệm $y = \psi(x, C_0)$ gọi là một *nghiệm riêng* và hệ thức $\Phi(x, y, C_0) = 0$ gọi là một *tích phân riêng* của phương trình (6.3).

• Phương trình (6.3) có thể có những nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát, gọi là các nghiệm *kỳ dị*.

6.2.2 Phương trình khuyết

- *Phương trình khuyết y:* $F(x, y') = 0$.

1. Trường hợp (đẹp nhất) giải ra được: $y' = f(x)$. Khi đó

$$y(x) = \int f(x)dx.$$

2. Trường hợp giải ra được: $x = f(y')$.

- Nếu tìm được $y' = f^{-1}(x)$ thì giải như trường hợp 1.

- Nếu không: đặt $\dfrac{dy}{dx} = y'(x) = t \Rightarrow dy = tdx$. Ngoài ra

$$x = f(y') = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)dt.$$

Do đó

$$dy = tf'(t)dt \Rightarrow y = \int tf'(t)dt.$$

Ta được dạng tham số của đường tích phân là

$$x = f(t), y = \int tf'(t)dt.$$

- *Phương trình khuyết y:* $\quad F(x, y') = 0$.

  3. Phương trình có thể tham số hóa: $x = f(t), y' = g(t)$. Giống trường hợp 2, ta có

  $$dy = g(t)f'(t)dt \Rightarrow y = \int g(t)f'(t)dt.$$

  Ta được dạng tham số của đường tích phân là

  $$x = f(t), y = \int g(t)f'(t)dt.$$

Ví dụ 6.1

- *Phương trình khuyết* x*:* $F(y, y') = 0$.
  1. Trường hợp giải ra được: $y' = f(y)$. Khi đó
  $$dx = \frac{dy}{f(y)} \Rightarrow x = \int \frac{dy}{f(y)} \Rightarrow \Phi(x, y, C) = x - \int \frac{dy}{f(y)} = 0.$$
  2. Trường hợp giải ra được: $y = f(y')$.
  - Nếu tìm được $y' = f^{-1}(y)$ thì giải như trường hợp 1.
  - Nếu không: đặt $y' = t \Rightarrow dy = tdx$. Ngoài ra
  $$y = f(y') = f(t) \Rightarrow dy = f'(t)dt.$$
  Do đó: $$dx = \frac{f'(t)}{t}dt \Rightarrow x = \int \frac{f'(t)}{t}dt.$$
  Ta được dạng tham số của đường tích phân:
  $$x = \int \frac{f'(t)}{t}dt, y = f(t).$$

- *Phương trình khuyết* x*:* $F(y, y') = 0$.

3. Phương trình có thể tham số hóa: $y = f(t), y' = g(t)$. Giống trường hợp 2, ta có

$$dx = \frac{f'(t)}{g(t)}dt \Rightarrow x = \int \frac{f'(t)}{g(t)}dt.$$

Ta được dạng tham số của đường tích phân:

$$x = \int \frac{f'(t)}{g(t)}dt, y = f(t).$$

Ví dụ 6.2

6.2.3 Phương trình với biến số phân ly-Phương trình thuần nhất

- *Phương trình với biến số phân ly:* là phương trình có dạng:

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy \Rightarrow \Phi(x, y, C) = \int f(x)dx - \int g(y)dy = 0.$$

- *Phương trình thuần nhất (đẳng cấp):* phương trình có dạng $y' = f(\frac{y}{x})$.

Đặt $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu' = f(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u$.

1. Nếu $f(u) \neq u$, ta rút ra: $\dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$. Lây tích phân 2 vế, ta được

$$\int \frac{du}{f(u) - u} du = \ln|x| + \ln|C|.$$

2. Nếu $f(u) = u$, ta rút ra $y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Lấy tích phân 2 vế, ta được

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx.$$

Ví dụ 6.3

6.2.4 Phương trình tuyến tính

Phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

trong đó $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục.

- Trường hợp $q(x) = 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính thuần nhất*;
- Nếu $q(x) \neq 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính không thuần nhất*.

- Xét trường hợp phương trình thuần nhất: $y' + p(x)y = 0$.

1. Nếu $y \neq 0$, ta rút ra: $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$. Tích phân 2 vế ta được:
$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \Longrightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$
2. $y = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình ứng với $C = 0$.

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{6.4}$$

với C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 6.4

- Phương trình không thuần nhất: $y' + p(x)y = q(x)$.

Để giải phương trình không thuần nhất, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Giải phương trình thuần nhất tương ứng tìm được nghiệm $y = Ce^{-\int p(x)dx}$;
2. Xét $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ và thay vào phương trình không thuần nhất, biến đổi và rút gọn, ta được:
$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Longrightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K,$$
với K là hằng số tùy ý.

Từ đó ta được nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K\right)e^{-\int p(x)dx}. \tag{6.5}$$

Phương pháp tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất như trên gọi là *phương pháp biến thiên hằng số*.

- *Quy trình tìm nghiệm của phương trình tuyến tính cấp 1:*

1. Tính $\int p(x)dx$, suy ra nghiệm của phương trình thuần nhất theo công thức (6.4);
2. Tính $\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$, suy ra nghiệm của phương trình không thuần nhất theo công thức (6.5).

Ví dụ 6.5

6.2.5 Phương trình Bernoulli

Phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

trong đó $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Với $y \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, phương trình trên trở thành

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x),$$

ta được 1 phương trình tuyến tính cấp 1 đối với z.

Ví dụ 6.6

6.2.6 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{6.6}$$

ở đó P, Q là những hàm số cùng với các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong một miền đơn liên D và có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6.7}$$

Từ điều kiện (6.7), suy ra $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó.

Nếu $D = \mathbb{R}^2$ thì

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + K,$$

(hoặc: $u(x,y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + K.$)

Khi đó, phương trình (6.6) trở thành $du = 0$ và có nghiệm tổng quát là:

$$u(x,y) = C.$$

Ví dụ 6.7

Chú ý: Nếu điều kiện (6.7) không thỏa mãn, ta có thể tìm một hàm $\alpha(x, y)$ sao cho

$$\frac{\partial(\alpha P)}{\partial y} = \frac{\partial(\alpha Q)}{\partial x}. \tag{6.8}$$

Khi đó, $\alpha P dx + \alpha Q dy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ cho bởi

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \alpha(x, y_0) P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} \alpha(x, y) Q(x, y) dy + K,$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \alpha(x, y) P(x, y) dx + \int_{y_0}^{y} \alpha(x_0, y) Q(x_0, y) dy + K.$$

và nghiệm của (6.6) cũng là

$$u(x, y) = C.$$

6.3: Phương trình vi phân cấp 2

6.3.1 Các khái niệm

- Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 2:

$$F(x, y, y', y'') = 0). \tag{6.9}$$

- Dạng chuẩn tắc của phương trình vi phân cấp 2:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{6.10}$$

- Nếu cho trước điều kiện $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$ thì đó gọi là *điều kiện ban đầu* của phương trình (6.10). Bài toán giải phương trình (6.10) với điều kiện ban đầu gọi là *bài toán Cauchy*.

- Nghiệm tổng quát của phương trình (6.10) có thể cho dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Hệ thức đó còn được gọi là một *tích phân tổng quát* của phương trình (6.10).

- Nghiệm tổng quát dạng hiển của phương trình (6.10) là

$$y = \psi(x, C_1, C_2).$$

- Ứng với mỗi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = z_0$ ta tìm được C_1^0, C_2^0.
  - nghiệm $y = \psi(x, C_1^0, C_2^0)$ gọi là một *nghiệm riêng* của phương trình (6.10),
  - hệ thức $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ gọi là một *tích phân riêng* của phương trình (6.10).

6.3.2 Phương trình khuyết

- *Phương trình khuyết* y, y': $F(x, y'') = 0$

Đặt $z = y'$, ta được phương trình cấp 1 đối với z là: $F(x, z') = 0$.
Giả sử $z = f(x, C_1)$ là nghiệm tổng quát của phương trình đó thì

$$y = \int f(x, C_1)dx + C_2$$

là nghiệm của phương trình ban đầu, với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

- *Phương trình khuyết* y: $F(x, y', y'') = 0$

Đặt $z = y'$, ta được phương trình cấp 1 đối với z là: $F(x, z, z') = 0$.

- *Phương trình khuyết* x: $F(y, y', y'') = 0$

Đặt $z = y' \Rightarrow y'' = z\dfrac{dz}{dy}$, ta được phương trình cấp 1 đối với z theo biến y là

$$F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0.$$

6.3.3 Phương trình tuyến tính

Phương trình có dạng:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

trong đó $p(x), q(x), f(x)$ là những hàm số liên tục.

- $f(x) = 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính thuần nhất*;
- $f(x) \neq 0$ thì phương trình gọi là *tuyến tính không thuần nhất*.

• **Phương trình tuyến tính thuần nhất:**

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6.11}$$

với $p(x), q(x)$ là những hàm số liên tục.

Định lý 6.1

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm của phương trình (6.11) thì $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của (6.11), với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Định nghĩa 6.1

Hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ *được gọi là phụ thuộc tuyến tính trên đoạn* $[a, b]$ *nếu*

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = c, \quad \forall x \in [a, b].$$

Hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ *không phụ thuộc tuyến tính thì gọi là độc lập tuyến tính.*

Định nghĩa 6.2

Cho hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$*. Định thức*

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

gọi là định thức Wronsky của y_1, y_2*, ký hiệu là* $W(y_1, y_2)$*.*

Định lý 6.2

Nếu hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên đoạn $[a, b]$ thì $W(y_1, y_2) \equiv 0$ trên đoạn đó.

Định lý 6.3

Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (6.11) và $x_0 \in [a, b]$.

- *Nếu $W(y_1, y_2)|_{x=x_0} \neq 0$ thì $W(y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.*
- *Nếu $W(y_1, y_2)|_{x=x_0} = 0$ thì $W(y_1, y_2) = 0, \forall x \in [a, b]$.*

Định lý 6.4

Cho $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (6.11) độc lập tuyến tính trên đoạn $[a, b]$. Khi đó $W(y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.

Định lý 6.5

Cho $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm **độc lập tuyến tính** *của phương trình (6.11). Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (6.11) là*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{6.12}$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Định lý 6.6

Nếu $y_1(x) \neq 0$ là một nghiệm riêng của phương trình (6.11) thì

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{[y_1(x)]^2} e^{-\int p(x)dx} dx \tag{6.13}$$

cũng là một nghiệm của (6.11) và y_1, y_2 độc lập tuyến tính.

- **Phương trình tuyến tính không thuần nhất:**

Xét phương trình tuyến tính không thuần nhất:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{6.14}$$

Phương pháp biến thiên hằng số:

1. Tìm 2 nghiệm riêng $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất (6.11).
2. Chọn $C_1(x), C_2(x)$ sao cho:
   - $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$
   - $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ là nghiệm của (6.14).

Từ hệ điều kiện đó, ta rút ra:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Giải hệ ta được $C_1'(x) = \psi_1(x), C_2'(x) = \psi_2(x)$, suy ra

$$C_1(x) = \int \psi_1(x)dx, C_2(x) = \int \psi_2(x)dx.$$

Từ đó ta được nghiệm của phương trình tuyến tính không thuần nhất (6.14) là

$$y = y_1 \int \psi_1(x)dx + y_2 \int \psi_2(x)dx. \tag{6.15}$$

• **Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng:**
Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{6.16}$$

với p, q là những hằng số.
Ta tìm nghiệm riêng của (6.16) dạng $y = e^{kx}$. Thay vào phương trinh (6.16) ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0 \Leftrightarrow k^2 + pk + q = 0. \tag{6.17}$$

Phương trình (6.17) gọi là *phương trình đặc trưng* của (6.16).

Đặt $\Delta = p^2 - 4q$, có những trường hợp sau:

• $\Delta > 0$: Phương trình (6.17) có 2 nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$, khi đó phương trình (6.16) có 2 nghiệm riêng tương ứng là

$$y_1 = e^{k_1 x} \quad \text{và } y_2 = e^{k_2 x}.$$

Hai nghiệm này độc lập tuyến tính, do đó nghiệm tổng quát của (6.16) là

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

- $\Delta = 0$: Phương trình (6.17) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$, khi đó phương trình (6.16) có 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính là

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x} \quad \text{và } y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int p dx} dx = x e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của (6.16) trong trường hợp này là

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1 + C_2 x).$$

- $\Delta < 0$: Phương trình (6.17) có 2 nghiệm phức $k_1 = a + ib, k_2 = a - ib$, khi đó (6.16) có 2 nghiệm riêng là

$$\bar{y_1} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx); \quad \bar{y_2} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$$

Đặt: $$y_1 = \frac{\bar{y_1} + \bar{y_2}}{2} = e^{ax} \cos bx; \quad y_2 = \frac{\bar{y_1} - \bar{y_2}}{2i} = e^{ax} \sin bx$$

thì y_1, y_2 cũng là 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (6.16), do đó nghiệm tổng quát của (6.16) là

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

• Phương trình không thuần nhất có hệ số hằng:

Xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{6.18}$$

với p, q là những hằng số.

Phương pháp biến thiên hằng số: ta tìm nghiệm của (6.18) theo các bước sau:

1. Tìm 2 nghiệm riêng y_1, y_2 độc lập tuyến tính của pttt thuần nhất (6.16).
2. Tìm $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$

   Giải hệ ta được $C_1'(x) = \psi_1(x), C_2'(x) = \psi_2(x)$, suy ra

$$C_1(x) = \int \psi_1(x)dx, C_2(x) = \int \psi_2(x)dx.$$

Từ đó ta được nghiệm tổng quát của phương trình (6.18) là

$$y = y_1 \int \psi_1(x)dx + y_2 \int \psi_2(x)dx.$$

Định lý 6.7

Nếu Y_1 là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (6.11) và Y_2 là một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (6.14) thì nghiệm tổng quát của (6.14) là

$$y = Y_1 + Y_2.$$

Ta sẽ áp dụng kết quả trên để tìm nghiệm của phương trình tuyến tính với hệ số hằng (6.18) có hàm $f(x)$ ở các dạng đặc biệt sau:

1. $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, với $a \in \mathbb{R}$ và $P_n(x)$ là một đa thức bậc n.
2. $f(x) = P_m(x)\cos bx + P_n(x)\sin bx$, với $b \in \mathbb{R}$ và $P_m(x), P_n(x)$ là các đa thức bậc m và n tương ứng.

Giả sử đã tìm được nghiệm tổng quát Y_1 của phương trình thuần nhất (6.16). Ta tìm một nghiệm riêng Y_2 của (6.18) theo phương pháp *hệ số bất định* như sau.

- *Trường hợp 1:* $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, với $a \in \mathbb{R}$ và $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ là một đa thức bậc n.
  1. Nếu a không là nghiệm của phương trình đặc trưng (6.17):
     $$Y_2 = e^{ax}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \text{ là một đa thức bậc } n.$$
     Thay vào phương trình (6.18) rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_n(x)$.
  2. Nếu a là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (6.17): $Y_2 = xe^{ax}Q_n(x)$.
  3. Nếu a là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (6.17): $Y_2 = x^2e^{ax}Q_n(x)$.
- *Trường hợp 2:* $f(x) = P_m(x)\cos bx + P_n(x)\sin bx$.
  1. Nếu $\pm ib$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (6.17):
     $$Y_2 = Q_M(x)\cos bx + R_M(x)\sin bx, \text{ với } M = \max\{m, n\}.$$
     Thay vào phương trình (6.18) rồi đồng nhất hệ số, ta tìm được $Q_M(x), R_M(x)$.
  2. Nếu $\pm ib$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (6.17) $\Leftrightarrow p = 0, q = b^2$:
     $$Y_2 = x[Q_M(x)\cos bx + R_M(x)\sin bx].$$

Chú ý 6.1

1. *Nếu y_1, y_2 tương ứng là nghiệm riêng của 2 phương trình*
$$y'' + py' + qy = f_1(x) \text{ và } y'' + py' + qy = f_2(x)$$
thì $y = y_1 + y_2$ là một nghiệm riêng của phương trình
$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$
2. *Nếu $f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos bx + P_n(x)\sin bx]$ thì bằng cách đặt $y = e^{ax}z$, ta đưa phương trình về dạng trên theo biến z.*
3. *Có thể áp dụng các phương pháp tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính bậc 2 cho các phương trình tuyến tính có bậc cao hơn.*

- *Phương trình Euler:* phương trình thuần nhất có hệ số biến thiên dạng

$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

Đặt $x = e^t$, ta đưa phương trình về dạng thuần nhất với hệ số hằng

$$y''(t) + (a-1)y'(t) + by(t) = 0.$$