UNIVERSITAS MERCU BUANA

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Himpunan

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 01 | 15048 | Tim Dosen |


### Abstract

Himpunan merupakan kumpulan objek-objek yang berbeda. Himpunan adalah kumpulan objek yang didefinisikan secara jelas dalam sembarang urutan. Nama himpunan biasa ditulis menggunakan huruf kapital, dan anggota himpunan ditulis menggunakan huruf kecil.


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu menyebutkan operasi himpunan, dan mampu menuliskan cara penyajian himpunan.

# Isi

# HIMPUNAN I

## 1.1. DEFINISI

Himpunan merupakan kumpulan objek-objek yang berbeda. Himpunan adalah kumpulan objek yang didefinisikan secara jelas dalam sembarang urutan. Himpunan adalah kumpulan dari objek-objek tertentu yang tercakup dalam satu kesatuan dengan keterangannya yang jelas. Untuk menyatakan suatu himpunan, digunakan huruf besar / KAPITAL seperti A, B, C dsb. Sedangkan untuk menyatakan anggota-anggotanya digunakan huruf kecil seperti a, b, c, dsb. Konsep himpunan merupakan konsep dasar dalam aritmatika. Objek milik himpunan disebut anggota atau elemen himpunan. Jika p adalah anggota himpunan A, ditulis p $\in$ A. Sebaliknya jika p adalah bukan anggota himpunan A, maka ditulis p $\notin$ A.

## 1.2 PENYAJIAN HIMPUNAN

Ada 4 cara untuk menyatakan suatu himpunan, yaitu:

### 1. Enumerasi

Mengenumerasi artinya menulis semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal. Biasanya himpunan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital maupun dengan menggunakan simbol-simbol lainnya.

Contoh:

1. Himpunan A berisi empat bilangan asli.
   Dapat ditulis sebagai berikut A = {1,2,3,4}
2. Himpunan B berisi lima bilangan genap positif pertama.
   Dapat ditulis sebagai berikut B = { 2,4,6,8,10}
3. Himpunan C berisi 100 buah bilangan asli pertama.
   Dapat ditulis sebagai berikut C = {1, 2, ..., 100 }
4. Himpunan Z berisi bilangan bulat.
   Dapat ditulis sebagai berikut Z = {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}.

**Keanggotaan**

$x \in A$ : $x$ merupakan anggota himpunan $A$;

$x \notin A$ : $x$ bukan merupakan anggota himpunan $A$.

Contoh:

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$

$K = \{\{\}\}$

maka

$3 \in A$

$\{a, b, c\} \in R$

$c \notin R$

$\{\} \in K$

$\{\} \notin R$

**2. Simbol-simbol Baku**

Beberapa simbol baku yang biasa digunakan untuk mendefinisikan himpunan antara lain:

P = himpunan bilangan bulat positif.

N = himpunan bilangan alami (natural).

Z = himpunan bilangan bulat

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

U = himpunan semesta

**3. Notasi Pembentuk Bilangan**

Himpunan dinyatakan dengan menulis syarat yang harus dipenuhi anggotanya.

| Notasi: { x \| syarat yang harus dipenuhi oleh x } |
|---|

Aturan dalam penulisan syarat keanggotaan:

a. Bagian di kiri tanda '|' melambangkan elemen himpunan

b. Tanda '|' dibaca *dimana* atau *sedemikian sehingga*

c. Bagian di kanan tanda '|' menunjukan syarat keanggotaan himpunan

d. Setiap tanda ',' di dalam syarat keanggotaan dibaca *dan*

Contoh:

1. A adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 5.

   Dinyatakan sebagai:

   A = { x | x adalah himpunan bilangan bulat posif lebih kecil dari 5}

   Notasi matematikanya:

   $A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$

   Yang ekivalen dengan $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

2. B adalah himpunan bilangan genap positif yang lebih kecil atau sama dengan 8.
   Dinyatakan sebagai:
   B = { x | x adalah himpunan bilangan genap positif yang lebih kecil dari 8 }
   Notasi Matematikanya:
   $B = \{ x \mid x/2 \in P, 2 < x < 8 \}$

### 4. Diagram Venn

Diagram Venn menyajikan himpunan secara grafis. Didalam diagram Venn, himpunan semesta (U) digambarkan sebagai suatu segi empat sedangkan himpunan lainnya digambarkan sebagai lingkaran di dalam segi empat tersebut.

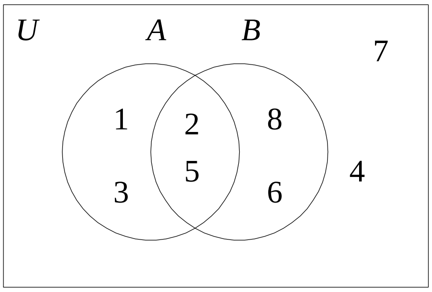
Contoh:

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},

*A* = {1, 2, 3, 5} dan

*B* = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:




## 1.3. DEFINISI PADA TEORI HIMPUNAN

### 1. Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam *A* disebut kardinal dari himpunan *A*.

| Notasi: $n(A)$ atau $\lvert A \rvert$ |
| --- |

Contoh:

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 },
   atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
   maka $\lvert B \rvert = 8$

(ii) $T$ = {kucing, *a*, Amir, 10, paku},
   maka $\lvert T \rvert = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$,
   maka $\lvert A \rvert = 3$

## 2. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai elemen.

| Notasi : ∅ atau {} |
|---|

Contoh:

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

(ii) $P$ = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(iii) $A$ = {$x$ | $x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$ }, $n(A) = 0$

Himpunan { { } } dapat juga ditulis sebagai { ∅ }

Himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {∅, {∅}}

{∅} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

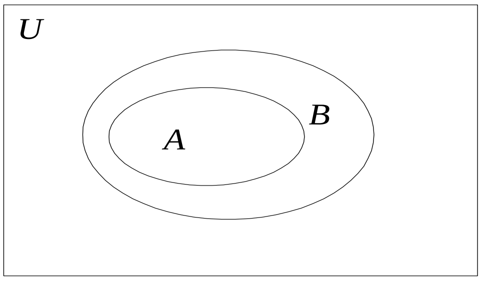
## 3. Himpunan Bagian *(subset)*

Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen dari *B*.

Dalam hal ini, *B* dikatakan *superset* dari *A*.

| Notasi: $A \subseteq B$ |
|---|

Diagram Venn $A \subseteq B$:




Contoh:

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

- $\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka ∅ dan *A* disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan *A*.

  Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka {1, 2, 3} dan ∅ adalah *improper subset* dari *A*.

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

  (i) $A \subset B$ : $A$ adalah himpunan bagian dari $B$ tetapi $A \neq B$.

  $A$ adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari $B$.

  Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  (ii) $A \subseteq B$ : digunakan untuk menyatakan bahwa $A$ adalah himpunan bagian (*subset*) dari $B$ yang memungkinkan $A = B$.

**4. Himpunan yang Sama**

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen $A$ merupakan elemen $B$ dan sebaliknya setiap elemen $B$ merupakan elemen $A$.
- $A = B$ jika $A$ adalah himpunan bagian dari $B$ dan $B$ adalah himpunan bagian dari $A$. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

| |
|---|
| Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ |

Contoh:

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, $A$, $B$, dan $C$ berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) jika $A = B$, maka $B = A$

(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

**5. Himpunan terhingga**

Himpunan terhingga adalah himpunan yang banyak anggotannya terhingga.

Contoh:

D = {x | x adalah bilangan asli yang kurang dari 11}

D adalah himpunan terhingga, karena elemen-elemennya terhingga yaitu {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

**6. Himpunan tak hingga**

Himpunan tak hingga adalah himpunan yang banyak anggotanya tidak terhingga atau tidak terbatas.

Contoh:

Z = {y | y adalah bilangan asli}

Z adalah himpunan tak hingga, karena elemen-elemennya tidak terbatas atau tak berhingga.

**7. Himpunan Ekivalen**

Himpunan *A* dikatakan ekivalen dengan himpunan *B* jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

| Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$ |
|---|

Contoh:

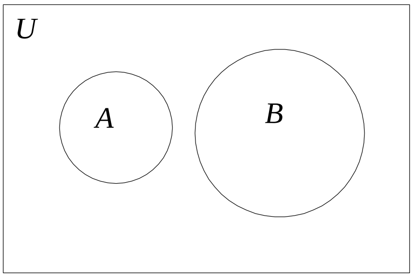
Misal $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

**8. Himpunan Saling Lepas**

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

| Notasi : *A // B* |
|---|

Diagram Venn:




Contoh:

Jika $A = \{x \mid x \in P, x < 8\}$ dan $B = \{10, 20, 30, ...\}$, maka *A // B.*

**9. Himpunan Kuasa (power set)**

Himpunan kuasa adalah himpunan seluruh himpunan bagian dari suatu himpunan. Himpunan kuasa dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

| Notasi : $P(A)$ atau $2^A$ |
|---|

Contoh1:

Jika $A$ = { 1, 2 }, maka $P$ ($A$) = { ∅, { 1 }, { 2 }, { 1, 2 }}

Contoh2:

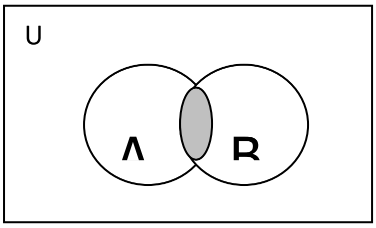
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P$ (∅) = {∅}, dan himpunan kuasa dari himpunan {∅} adalah $P$({∅}) = {∅, {∅}}.

## 1.4. OPERASI – OPERASI DASAR HIMPUNAN

### 1. Irisan (Perpotongan / Intersection)

Irisan himpunan A dan himpunan B adalah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemendari himpunan A dan himpunan B. Irisan dinyatakan dengan A ∩ B yang dibaca ”A irisan B”.

Diagram Venn untuk A ∩ B




Contoh:

S = {a, b, c, d} dan T = {b, d, f, g}

Maka S ∩ T = {b, d}

Dapat dinyatakan dengan A ∩ B = {x | x ∈ A dan x ∈ B}

Setiap himpunan A dan himpunan B mengandung A ∩ B sebagai subhimpunan, yaitu

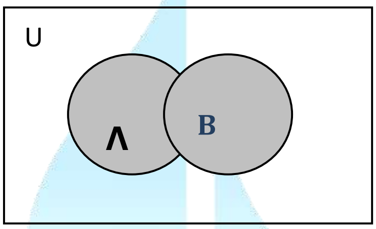
(A ∩ B) ⊂ A dan (A ∩ B) ⊂ B

Jika himpunan A dan himpunan B tidak mempunyai elemen-elemen yang dimiliki bersama, berarti A dan B terpisah, maka irisan dari keduanya adalah himpunan kosong.

### 2. Gabungan (Perpaduan / Union )

Gabungan (Union) himpunan dari A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau B atau keduanya. Union tersebut dapat dinyatakan sebagai A ∪ B dibaca A union B.

Diagram venn dari A ∪ B



Contoh

A = {a, b, c, d} dan B = {e, f, g}

Maka $A \cup B$ = {a, b, c, d, e, f, g}

Union A dan B dapat didefinisikan secara ringkas sebagai berikut

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Berlaku hukum $A \cup B = B \cup A$

A dan B kedua-duanya juga selalu berupa subhimpunan dari $A \cup B$, yaitu

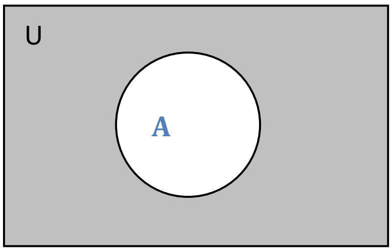
$A \subset (A \cup B)$ dan $B \subset (A \cup B)$

### 3. Komplemen (complement)

Komplemen dari suatu himpunan A terhadap himpunan semesta U adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemem U yang bukan elemen A, yaitu selisih dari himpunan semesta U dan A. Komplemen dapat didefinisikan secara ringkas sebagai berikut

$A' = \{x \mid x \in U \text{ dan } x \notin A\}$ atau $A' = \{x \mid x \notin A\}$

Diagram Venn dari A'.




Contoh:

Misalkan U = {1,2,3,…,9}

A = {1,3,7,9} carilah A' !

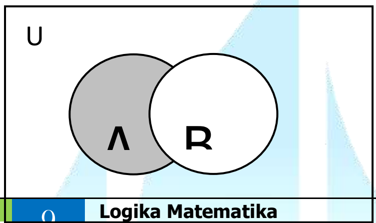
<u>JAWAB</u>

A' = {2,4,6,8}

### 4. Selisih (difference)

Selisih dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen A dan bukan elemen B. Dinyatakan dengan A – B dibaca "selisih A dan B" atau "A kurang B". Himpunan A mengandung A – B sebagai subhimpunan, berarti$(A - B) \subset A$.

Diagram Venn untuk A – B



Contoh:

Jika A = { 1,2,3,...10} dan B = { 2,4,6,8,10} Carilah A – B  dan B – A!

Jawab

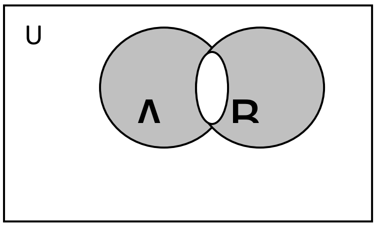
A – B = { 1,3,5,7,9}

B – A = 0 {himpunan kosong}

**5. Beda Setangkup (symmetric difference / Selisih simetri)**

Beda setangkup dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya ada pada himpunan A dan B tetapi tidak pada keduanya.

Diagram Venn untuk $A \oplus B$




Contoh:

Jika A = { 2, 4,6} dan B = { 2,3,5} Carilah $A \oplus B$!

Jawab

$A \oplus B$ = { 3,4,5,6}

**Latihan**:

1. Jika $A$ = {2, 4, 6, 8, 10} dan $B$ = {4, 10, 14, 18} carilah $A \cap B$!
2. Jika $A$ = { 2, 5, 8 , 10} dan $B$ = { 7, 5, 22 }, carilah $A \cup B$!
3. Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 10 }, jika $A$ = {1, 3, 5, 7, 9}, carilah A'!
4. Jika $A$ = { 1, 2, 3, ..., 10 } dan $B$ = { 2, 4, 6, 8}, carilah $A - B$!
5. Jika $A$ = {1, 2, 4, 6 } dan $B$ = { 2, 3, 5,7 }, carilah $A \oplus B$!
6. Jika U= {a, b, c, . . . i}, A= { a, i}, B= {a, b, c} , dan C= {a, g, h}.

   Carilah:

   a) $A \cap B \cap C$
   b) $A \cup (B \cap C)$
   c) $A \cup B \cup C$
   d) $A' \cap (B \cup C)$

e) $(A \cup B) \cap C'$

# Daftar Pustaka

Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Himpunan II

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 02 | 15048 | Tim Dosen |


### Abstract

Konsep dalam prinsip inklusi eksklusi merupakan perluasan ide dalam diagram venn beserta operasi irisan, dan gabungan, namun konsepnya diperluas dan diperkaya dengan ilustrasi penerapan yang bervariasi dalam matematika kombinatorik.


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu mencari banyaknya anggota himpunan.

Isi

# HIMPUNAN II

## 2.1 Prinsip Inklusi-Eksklusi

Berapa banyak anggota di dalam gabungan dua buah himpunan A dan B? Penggabungan dua buah himpunan menghasilkan himpunan baru yang elemen-elemennya berasal dari himpunan A dan himpunan B. Himpunan A dan himpunan B mungkin saja memiliki elemen-elemen yang sama. Banyaknya elemen bersama antara A dan B adalah n $(A \cap B)$. Setiap unsur yang sama itu telah dihitung dua kali, sekali pada n (A) dan sekali pada n (B), meskipun ia sharusnya dianggap sebagai satu buah elemen di dalam

n $(A \cap B)$. Karena itu, jumlah elemen hasil penggabungan seharusnya adalah jumlah elemen di masing-masing himpunan dikurangi dengan jumlah elemen di dalam irisannya. atau

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

**ATAU**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Prinsip ini dikenal dengan nama prinsip inklusi-eksklusi.

**Ketentuan:**

Jika A dan B adalah himpunan berisisan maka

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Contoh:

A = { 2, 3, 5, 7}

B = { 0, 2, 4}

Maka $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 4 + 3 - 1$

= 6

**Contoh 1:**

Ada berapa bilangan bulat positif lebih kecil atau sama dengan 100 yang habis dibagi 6 atau 9?

**Penyelesaian:**

Misalkan

A: bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 6

B: himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 9.

Dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 6 atau 9 adalah

$|A|$ = 100/6

$|B|$ = 100/9

$|A \cap B|$ = 100/18

$$
\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
&= \lfloor 100/6 \rfloor + \lfloor 100/9 \rfloor - \lfloor 100/18 \rfloor \\
&= 16 + 11 + 5 \quad = \quad 22
\end{aligned}
$$

Jadi banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 6 atau 9 adalah 22.

**Contoh 2:**

Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

*A* = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

*B* = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5, n (A $\cap$ B) = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 ( yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi olek KPK / kelipatan persekutuan terkecil dari 3 dan 5 yaitu 15.

Ditanyakan n (A $\cup$ B)???

n (A) = 100/3 = 33

n (B) = 100/5 = 20

n (A $\cap$ B) = 100/15 = 6

maka n (A $\cup$ B) = n (A) + n (B) – n (A $\cap$ B)

= 33 + 20 -6

= 47

Jadi ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 dan 5.

**Contoh 3:**

Dalam sebuah kelas terdapat 25 mahasiswa yang menyukai matematika diskrit, 13 mahasiswa menyukai aljabar linier dan 8 orang diantaranya menyukai matematika diskrit dan aljabar linier. Berapa mahasiswa terdapat dalam kelas tersebut?

**Penyelesaian:**

- Misalkan A himpunan mahasiswa yang menyukai matematika diskrit dan B himpunan mahasiswa yang menyukai aljabar linier.
- Himpunan mahasiswa yang menyukai kedua mata kuliah tersebut dapat dinyatakan sebagai himpunan A $\cap$ B.
- Banyaknya mahasiswa yang menyukai salah satu dari kedua mata kuliah tersebut atau keduanya dinyatakan dengan $|A \cup B|$. Dengan demikian

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$= 25 + 13 – 8$

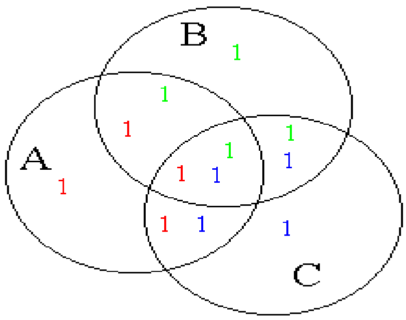
$= 30.$

Jadi, terdapat 30 orang mahasiswa dalam kelas tersebut.

**Latihan 1:**

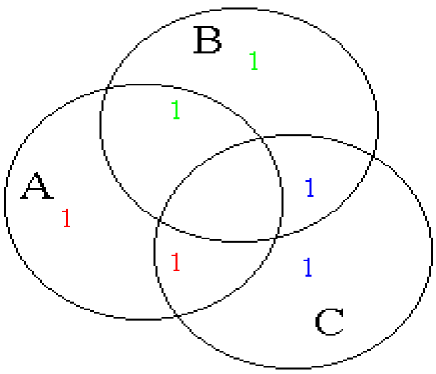
1. Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak melampaui 1000 yang habis dibagi oleh 7 atau 11?
2. Misalkan ada 1467 mahasiswa angkatan 2004 di ITB. 97 orang diantaranya adalah mahasiswa Departemen Informatika, 68 mahasiswa Departemen Matematika, dan 12 orang mahasiswa *double degree* Informatika dan Matematika. Ada berapa orang yang tidak kuliah di Departemen Matematika atau Informatika?
3. Pada sebuah sekolah tinggi terdapat 345 siswa yang mengambil mata kuliah kalkulus, 212 siswa mengambil kuliah matematika diskrit dan 188 siswa mengambil kedua mata kuliah tersebut. Berapa siswa yang mengambil kalkulus adan matematika diskrit ?

## 2.2 Perluasan Prinsip Inklusi-Eksklusi untuk Tiga Himpunan




- **Angka 1 merah** menunjukkan daerah yang terlibat ketika **|A|** dihitung,
- **Angka 1 hijau** menunjukkan daerah yang terlibat ketika **|B|** dihitung,dan
- **Angka 1 biru** menunjukkan daerah yang terlibat ketika **|C|** dihitung.

Terlihat bahwa daerah yang beririsan dihitung berulang-ulang.



- **|A ∩B|** dikurangkan (dua 1 merah diambil),
- **|A ∩ C|** dikurangkan (dua 1 biru diambil), dan
- **|B ∩ C|** dikurangkan (dua 1 hijau diambil)

Terlihat bahwa penghitungan hampir benar, kecuali pada daerah di mana ketiga himpunan sama-sama beririsan. Maka perlu ditambahkan kembali **|A ∩ B ∩ C|**.

**Rumus Inklusi – Eksklusi Untuk Tiga Buah Himpunan** adalah:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ATAU

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**Contoh 1:**

Dari 120 orang mahasiswa Informatika, 100 orang mengambil paling sedikit satu mata kuliah pilihan, yaitu logika matematika, bahasa C, dan pemrograman berbasis web.

Diketahui

65 orang mengambil logika matematika

45 orang mengambil bahasa C

42 orang mengmbil pemrograman berbasis web

20 orang mengambil Logika matematika dan bahasa C

25 orang mengambil logika matematika dan pemrograman berbasis web

15 orang mengambil bahasa C dan pemrograman berbasis web

100 orang mengambil paling sedikit 1 mata kuliah

Berapakah orang yang mengambil ketiga-tiganya?

**Penyelesaian**:

Diket

$n(A) = 65$

$n(B) = 45$

$n(C) = 42$

$n(A \cap B) = 20$

$n(A \cap C) = 25$

$n(B \cap C) = 15$

$n(A \cup B \cup C) = 100$

maka

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(A \cap B \cap C)$$

$$100 = 152 - 60 + n(A \cap B \cap C)$$

$$100 = 92 + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cap B \cap C) = 100 - 92$$

$$= 8$$

Jadi mahasiswa yang mengambil mata kuliah ketiganya sebanyak 8 orang.

**Contoh 2:**

Sebanyak 115 mahasiswa mengambil mata kuliah Matematika Diskrit, 71 Kalkulus Peubah Banyak, dan 56 Geometri. Di antaranya, 25 mahasiswa mengambil Matematika Diskrit dan Kalkulus Peubah Banyak, 14 Matematika Diskrit dan Geometri, serta 9 orang mengambil Kalkulus Peubah Banyak dan Geometri. Jika terdapat 196 mahasiswa yang mengambil paling sedikit satu dari ketiga mata kuliah tersebut, berapa orang yang mengambil ketiga mata kuliah sekaligus?

**Penyelesaian**:

Misalkan

A : himpunan mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit,

B: himpunan mahasiswa yang mengambil mata kuliah Kalkulus Peubah Banyak,

G: himpunan mahasiswa yang mengambil mata kuliah Geometri.

Maka $|A| = 115$

$|B| = 71$

$|C| = 56$

$|A \cap B| = 25$

$|A \cap C| = 14$

$|B \cap C| = 9$

$|A \cup B \cup C| = 196$

Dengan mempergunakan prinsip inklusi-eksklusi:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$196 = 115 + 71 + 56 - 25 - 14 - 9 + |A \cap B \cap C|$$

$$196 = 194 + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cap B \cap C| = 196 – 194 = 2$$

Jadi, Banyak mahasiswa yang mengambil ketiga mata kuliah sekaligus adalah

2 mahasiswa .

**Contoh 3:**

Sebuah kelas terdiri dari 100 orang siswa. Pada pelajaran olahraga 25 orang siswa mengambil bulu tangkis, 20 orang mengambil basket, 16 orang siswa mengambil renang. Selain itu terdapat 5 siswa orang yang mengambil ketiganya, 7 oarang siswa mengambil bulu tangkis dan renang, 8 orang siswa mengambil basket dan renang, dan 58 orang siswa tidak mengambil ketiga-tiganya. Ditanya:

a) Tentukanlah n (A), n (B), n (C), n $(A \cap C)$, n $(B \cap C)$, n $(A \cup B \cup C)$, n $(A \cap B \cap C)$!!!

b) Hitunglah siswa yang hanya mengambil bulu tangkis dan basket / n $(A \cap B)$ !!!

Penyelesaian:

a. n (A) = 25 siswa

n (B) = 20 siswa

n (C) = 16 siswa

n $(A \cap C)$ = 7 siswa

n $(B \cap C)$ = 8 siswa

n $(A \cup B \cup C)$ = 100 – 58 = 42 siswa

n $(A \cap B \cap C)$ = 5 siswa

b. n $(A \cup B \cup C)$ = n (A) + n (B) + n (C) - n $(A \cap B)$ - n $(A \cap C)$ - n $(B \cap C)$ + n $(A \cap B \cap C)$

42 = 25 + 20 + 16 - n $(A \cap B)$ – 7 – 8 + 5

42 = 61 - 10 - n $(A \cap B)$

42 = 51 - n $(A \cap B)$

n $(A \cap B)$ = 51 - 42

= 9 siswa

Jadi banyaknya siswa yang mengambil bulu tangkis dan basket adalah 9 siswa.

**Contoh 4:**

Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak melampaui 1000 yang habis dibagi oleh 5, 7 atau 11 ?

**Penyelesaian:**

- Misalkan P himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5, Q himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 7, dan R himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 11.
- Dengan demikian $P \cup Q \cup R$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5 atau 7 atau 11, dan himpunan $P \cap Q \cap R$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5, 7 dan 11.
- Himpunan $P \cap Q$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5 dan 7, $P \cap R$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5 dan 11, dan $Q \cap R$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 7 dan 11.

$|P| = 1000/5 = 200$

$|Q| = 1000/7 = 142$

$|R| = 1000/11 = 90$

$|P \cap Q| = 1000/35 = 28$

$|P \cap R| = 1000/55 = 18$

$|Q \cap R| = 1000/77 = 12$

$|P \cap Q \cap R| = 1000/385 = 2$

$|P \cup Q \cup R| = |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |Q \cap R| + |P \cap Q \cap R|$

$|P \cup Q \cup R| = 200 + 142 + 90 - 28 - 18 - 12 + 2$

$= 376.$

Jadi, terdapat 376 bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5, 7 atau habis dibagi 11.

Berdasarkan prinsip inklusi eksklusi, formula untuk menghitung banyaknya anggota himpunan hasil gabungan empat himpunan hingga.

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| = {} & |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| \\
& - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| \\
& + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\
& - |A \cap B \cap C \cap D|
\end{aligned}
$$

**Latihan 2:**

1. Sebanyak 1232 orang mahasiswa mengambil kuliah bahasa Inggris, 879 orang mengambil kuliah bahasa Perancis, dan 114 orang megambil kuliah bahasa Jerman. Sebanyak 103 orang mengambil kuliah bahasa Inggris dan Perancis, 23 orang megambil kuliah bahasa Inggris dan Jerman, dan 14 orang mengambil bahasa Perancis dan Jerman. Jika 2092 orang mengambil paling sedikit satu buah kuliah bahasa Inggris, bahasa Perancis, dan bahasa Jerman. Berapa banyak mahasiswa yang mengambil kuliah ketiga bahasa tersebut?
2. Di antara 100 mahasiswa, 32 orang mempelajari matematika , 20 orang mempelajari fisika, 45 orang mempelajari biologi, 15 mempelajari matematika dan biologi, 7 mempelajari matematika dan fisika, 10 mempelajari fisika dan biologi, dan 30 tidak mempelajari satupun di antara ketiga bidang tersebut.

   Hitunglah banyaknya mahasiswa yang mempelajari ketiga bidang tersebut?

# Daftar Pustaka

Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

UNIVERSITAS MERCU BUANA

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Komposisi Bentuk Fungsi

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 03 | 15048 | Tim Dosen |


### Abstract

Fungsi bisa mengubah suatu himpunan yang satu menjadi himpunan yang lain. Suatu himpunan bisa dipetakan oleh sebuah fungsi atau lebih.


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu mencari rumus baru dari sebuah himpunan atau lebih, bisa mencari rumus invers.

Isi

# KOMPOSISI BENTUK FUNGSI

## 3.1 Definisi Fungsi

Untuk setiap anggota himpunan A dikaitkan dengan satu dan hanya satu anggota himpunan B disebut suatu *fungsi* dari A ke B.

Himpunan A disebut domain atau ramah dan himpunan B disebut Codomain dari fungsi.

Fungsi biasa diberi nama seperti f, g, dan sebagainya. Dan biasa kita tulis fungsi f sebagai **f: a $\rightarrow$ B**

Jika a $\in$ A maka anggota himpunan B merupakan kaitan dari a dapat ditulis sebagai f(a). Elemen f(a) tersebut dinamakan nilai fungsi dari a, atau peta dari a.

Himpunan semua peta disebut daerah nilai (range) dari fungsi f. Daerah nilai merupakan himpunan bagian dari codomain.

Fungsi seringkali disajikan dalam bentuk rumus (persamaan) matematika. Misalnya f adalah fungsi f : R $\rightarrow$ R, dimana R adalah himpunan bilangan riil yang memetakan setiap x $\in$ R ke kuadratnya.

Disini rumus matematikanya adalah $f(x) = x^2$, yang dapat ditulis pula sebagai $x \rightarrow x^2$.

Fungsi merupakan suatu relasi yang khusus. Fungsi dapat disajikan sebagai himpunan pasangan terurut (x, y) seperti halnya relasi. Yang perlu diperhatikan setiap anggota domain satu dan hanya satu kali muncul sebagai komponen pertama pasangan.

Nama lain dari fungsi adalah pemetaan atau transformasi. Jika kita menuliskan f(a) = b jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.

Contoh:

- Himpunan {(1,a), (2,b),(3,c), (4, d)}
  Merupakan fungsi dari A {1,2,3,4} ke B {a,b,c,d}

- Himpunan {(1, a), (1, b), (2, a), (3, d), (4, a)}
  Bukan fungsi karena elemen 1 $\in$ A dipetakan ke a serta ke b.

- Himpunan {(1, a), (2, b), (3, c)}
  Bukan fungsi karena 4 $\in$ A tidak mempunyai peta di B.

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

1. Himpunan pasangan terurut

Fungsi adalah relasi, seangkan relasi biasanya dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut.

2. Formula Pengisian Nilai (*assignment*)

Fungsi dispesifikasikan alam bentuk rumus pengisian nilai (assignment), misal f(x) = 2x + 10, f(x) = 1/x.

3. Kata-kata

Fungsi dapat inyatakan secara eksplisit dalam rangkaian kata-kata. Misalnya: “f adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu string biner”.

4. Kode Program (*source code*)

Fungsi dispesifikasikan dalam bentuk kode program komputer. Misalnya dalam bahasa pascal, bahasa c, dsb.

**3.2 Jenis-Jenis Fungsi**

**1.) ONE ONE (INJEKTIF)**

Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (one-to-one) atau injectif jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama. Dengan kata lain, jika a dan b adalah anggota himpunan A, maka f(a) ≠ f(b) bilamana a ≠ b. Jika f(a) = f(b) maka implikasinya adalah a = b.

**Contoh1:**

Relasi

f = { (1, w), (2, u), (3, v)}

dari A = {1, 2, 3} ke B = {u, v, w, x} adalah **fungsi satu-ke-satu**.

**Contoh2**:

Relasi

f = { (1, u), (2, u), (3, v)}

dari A = {1, 2, 3} ke B = {u, v, w} adalah **bukan fungsi satu-ke-satu**

karena f(1) = f(2) = u.

**2.) ONTO (SURJEKTIF)**

Fungsi f dikatakan dipetakan **pada** (ONTO) atau surjektif jika setiap elemen B merupakan bayangan dari satu atau lebih himpunan A. Dengan kata lain, seluruh elemen B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B.

Semua elemen di B merupakan peta dari elemen-elemen A (Range A = B atau f(A) = B)

**Contoh1**:

Relasi

f = { (1, u), (2, u), (3, v)}

dari A = {1, 2, 3} ke B = {u, v, w} bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.

**Contoh2:**

Relasi

f = { (1, w), (2, u), (3, v)}

dari A = {1, 2, 3} ke B = {u, v, w} merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

**3.) KORESPONDENSI SATU KE SATU (BIJEKSI / BIJECTION)**

Fungsi f dikatakan **berkorespodensi satu-ke-satu** atau bijeksi jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

**Contoh1:**

Relasi

f = { (1, u), (2, w), (3, v)}

dari A = {1, 2, 3} ke B = {u, v, w} adalah fungsi berkorespoden sat-ke-satu karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

**Contoh2**:

Fungsi f(x) = x – 1 merupakan fungsi yang berkorespoden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

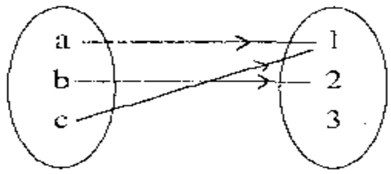
Jika f adalah fungsi yang berkorepoden satu-ke-satu dari A ke B maka kita dapat menemukan balikan(invers) dari f.
Fungsi yang berkorepoden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi invertible (dapat dibalikan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya.

**4.) FUNGSI KONSTAN**

Suatu fungsi f dari A ke dalam B disebut fungsi konstan jika elemen b $\in$ B yang sama ditetapkan untuk setiap elemen dalam A. Dengan kata lain, f : a $\rightarrow$ B adalah suatu fungsi konstan jika daerah nilai dari fungsi f hanya terdiri dari satu elemen.

**Contoh 1:**

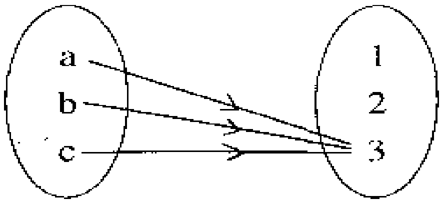
Misalkan fungsi f didefinisikan oleh diagram:




Maka f bukan fungsi konstan karena jangkau dari f terdiri atas 1 dan 2.

**Contoh 2:**

Misalkan fungsi f didefinisikan oleh diagram:




Maka f adalah fungsi konstan karena 3 ditetapkan untuk setiap elemen A.

## 3.3 Komposisi Fungsi

*Anggap $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$*

*Didapat fungsi baru $(g \circ f) : A$  C*

yang disebut **komposisi fungsi** dari f dan g

$h = g \circ f$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

**yaitu dengan mengerjakan f(x) terlebih dahulu**

ket : image f merupakan domain bagi g.

**contoh:**

1. $f:A \rightarrow B$; $g:B \rightarrow C$

   $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$

   $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(z) = r$

   $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$

2. $f: R \rightarrow R$ ; $f(x) = x^2$

   $g: R \rightarrow R$ ; $g(x) = x + 3$ R=riil

   maka

   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$

   Bila x=2, maka

   $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 25$

   $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 7$

## 3.4 Komposisi dari dua buah fungsi

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalh fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g dinotasikan dengan *f o g* adalah fungsi dari A ke C yang di definisikan oleh:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

dan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

**SIFAT**

$(f \circ g) \neq (g \circ f)$ : tidak komutatif

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ : asosiatif

*Contoh:*

1. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

   <u>Penyelesaian</u>:

   (i) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

   $= f(x^2 + 1)$

   $= x^2 + 1 - 1$

   $= x^2$.

   (ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

   $= g(x - 1)$

   $= (x - 1)^2 + 1$

   $= x^2 - 2x + 2$.

2. Diket $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x + 3$ carilah $(f \circ g)(2)$ dan $(g \circ f)(2)$!!!

   Penyelesaian:

   Untuk $x = 2$ maka $f(2) = x^2 = 2^2 = 4$

   Untuk $x = 2$ maka $g(2) = x + 3 = 2 + 3 = 5$

   $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

   $= f(x+3)$

   $= (x+3)^2$

   $= x^2 + 6x + 9$

   $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

   $= g(x^2)$

   $= x^2 + 3$

   Bila $x=2$, maka

   $(f \circ g)(2) = f(g(2))$ ingat $g(2) = 5$

   $= f(5)$

   $= 5^2$

$= 25$

$(g \circ f)(2) = g(f(2))$ ingat $f(2) = 4$

$= g(4)$

$= 4 + 3$

$= 7$

3. Diket $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dan $g(x) = 3x - 4$

   Ditanya

   a. Carilah rumus $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$
   b. Buktikan bahwa $(f \circ g)(2) = f(g(2))$

      Dan $(g \circ f)(2) = g(f(2))$

Penyelesaian:

Untuk $x = 2$ maka $f(2) = x^2 + 2x - 3$

$f(2) = 2^2 + 2.2 - 3$

$f(2) = 5$

Untuk $x = 2$ maka $g(2) = 3x - 4$

$g(2) = 3.2 - 4$

$g(2) = 2$

a.) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(3x - 4)$

$= (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) - 3$

$= 9x^2 - 24x + 16 + 6x - 8 - 3$

$= 9x^2 - 18x + 5$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2 + 2x - 3)$

$= 3(x^2 + 2x - 3) - 4$

$= 3x^2 + 6x - 9 - 4$

$= 3x^2 + 6x - 13$

b.) $(f \circ g)(2) = f(g(2))$ ingat $g(2) = 2$

$9x^2 - 18x + 5 = f(2)$

$9x^2 - 18x + 5 = x^2 + 2x - 3$

$9.2^2 - 18.2 + 5 = 2^2 + 2.2 - 3$

$36 - 36 + 5 = 4 + 4 - 3$

$5 = 5$

$(g \circ f)(2) = g(f(2))$ ingat $f(2) = 5$

$3x^2 + 6x - 13 = g(5)$

$3x^2 + 6x - 13 = 3x - 4$

$3.2^2 + 6.2 - 13 = 3.5 - 4$

$12 + 12 - 13 = 15 - 4$

$11 = 11$

**Terbukti**

4. Diket $f(x) = x^2 + 4$ dan $g(x) = 2x + 3$

   Ditanya

   a. Carilah rumus $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$
   b. Buktikan bahwa $(f \circ g)(3) = f(g(3))$

      Dan $(g \circ f)(3) = g(f(3))$

Penyelesaian:

Untuk x = 3 maka f (3) = $x^2 + 4 = 3^2 + 4 = 13$

Untuk x = 3 maka g (3) = $2x + 3 = 2.3 + 3 = 9$

a.) (f o g) (x) $= f(g(x))$

$= f(2x + 3)$

$= (2x + 3)^2 + 4$

$= 4x^2 + 12x + 9 + 4$

$= 4x^2 + 12x + 13$

(g o f) (x) $= g(f(x))$

$= g(x^2 + 4)$

$= 2(x^2 + 4) + 3$

$= 2x^2 + 8 + 3$

$= 2x^2 + 11$

b.) (f o g) (3) $= f(g(3))$ ingat g (3) = 9

$4x^2 + 12x + 13 = f(9)$

$4x^2 + 12x + 13 = x^2 + 4$

$4.3^2 + 12.3 + 13 = 9^2 + 4$

$36 + 36 + 13 = 81 + 4$

$85 = 85$

(g o f) (3) $= g(f(3))$ ingat f (3) = 13

$2x^2 + 11 = g(13)$

$2x^2 + 11 = 2x + 3$

$2.3^2 + 11 \quad = 2.13 + 3$

$18 + 11 \quad = 26 + 3$

$29 \quad = \quad 29$

**Terbukti**

### 3.5 Latihan

1. Diket f (x) = $x^2$ - 4 dan g (x) = 2x + 3

   Ditanya

   a. Carilah rumus (f o g) (x) dan (g o f) (x)
   b. Buktikan bahwa (f o g) (2) = f (g(2))
      Dan (g o f) (2) = g (f (2))

2. Diket f (x) = $2x^2$ - 2 dan g (x) = x - 3

   Ditanya

   a. Carilah rumus (f o g) (x) dan (g o f) (x)
   b. Buktikan bahwa (f o g) (2) = f (g(2))
      Dan (g o f) (2) = g (f (2))

3. Diket f (x) = $x^2$ + 2 dan g (x) = 2x - 3

   Ditanya

   a. Carilah rumus (f o g) (x) dan (g o f) (x).
   b. Buktikan bahwa (f o g) (3) = f (g(3))
      Dan (g o f) (3) = g (f (3))

4. Diket f (x) = $2x^2$ – 2, g (x) = x - 3 dan h (x) = x

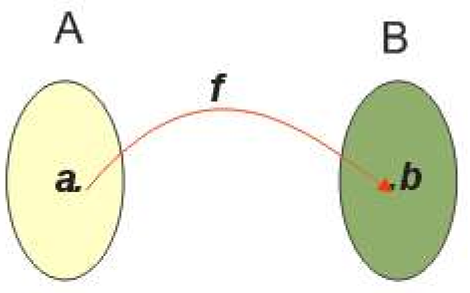
   Ditanya

   a. Carilah rumus (f o g) (x) , (g o f) (x), (g o h) (x), dan (h o f) (x).
   b. Buktikan bahwa (f o g) (2) = f (g (2))
   c. Buktikan bahwa (g o f) (2) = g (f (2))
   d. Buktikan bahwa (g o h) (2) = g (h (2))
   e. Buktikan bahwa (h o f) (2) = h (f (2))

## 3.5 Fungsi Invers

### 1. Pengertian Invers

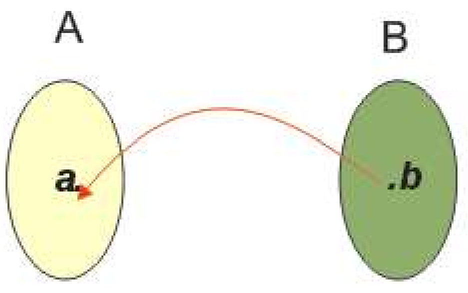
Misalkan *f* fungsi dari himpunan A ke B yang dinyatakan dengan diagram panah sbb:




sehingga diperoleh himpunan pasangan berurutan:

$f : \{(a, b) \mid a \in A$ dan $b \in B\}$

Kalau diadakan pengubahan domain menjadi kodomain dan kodomaian menjadi domaian, maka diagram panahnya menjadi




dan himpunan pasangan berurutannya menjadi

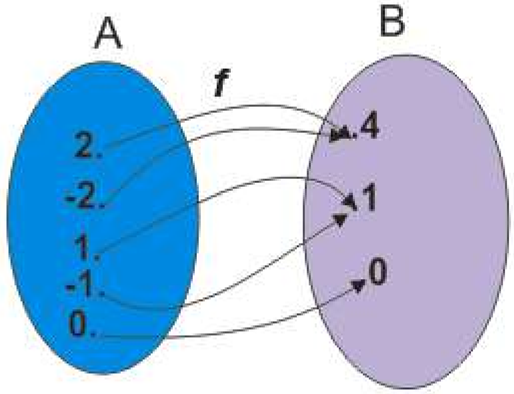
$\{(b, a) \mid b \in B$ dan $a \in A\}$

Relasi yang diperoleh dengan cara seperti di atas disebut invers fungsi f dan dilambangkan dengan $f^{-1}$

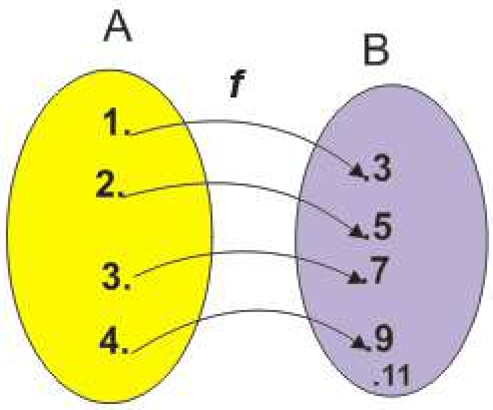
Definisi:

Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ dinyatakan dengan pasangan berurutan $f : \{(a,b) \mid a \in A$ dan $b \in B\}$ maka invers fungsi f adalah $f^{-1} : B \rightarrow A$ ditentukan oleh $f\{(b,a) \mid b \in B$ dan $a \in A\}$

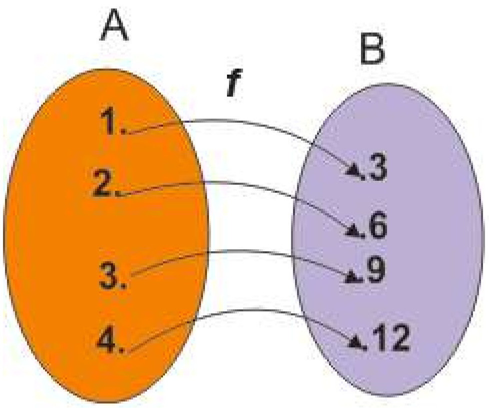
Apakah invers suatu fungsi juga merupakan fungsi ? Untuk jelasnya perhatikan diagram panah berikut.




(1)




(2)

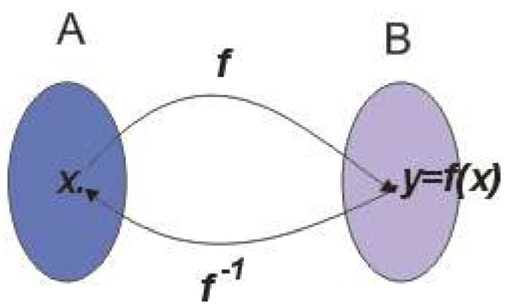



(3)

Tampak bahwa yang inversnya juga merupakan fungsi hanya pada gambar (3). Jika invers suatu fungsi merupakan fungsi, maka invers fungsi itu disebut fungsi invers.

**2. Menentukan Rumus Fungsi Invers**

Perhatikan diagram panah berikut.




y adalah peta dari x oleh fungsi f, sehingga pemetaan oleh fungsi f dapat dinayatakan dengan persamaan:

$$y = f(x)$$

Kalau $f^{-1}$ adalah invers dari fungsi f maka x adalah peta dari y oleh fungsi $f^{-1}$ sehingga diperoleh persamaan:

$$x = f^{-1}(y)$$

Selanjutnya peubah x diganti dengan y dan peubah y diganti dengan x.

Contoh:

1. Tentukan rumus fungsi invers dari fungsi $f(x) = 2x + 6$ !

Jawab:

$y = f(x) = 2x + 6$

$\Leftrightarrow 2x = y - 6$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y - 3$

Dengan demikian $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3$ atau $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$

Contoh:

Tentukan r5umus fungsi invers dari fungsi $f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$

Jawab:

$y = f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}$

$$\Leftrightarrow y(3x+1)=2x-5$$

$$\Leftrightarrow 3yx+y=2x-5$$

$$\Leftrightarrow 3yx-2x=-y-5$$

$$\Leftrightarrow (3y-2)x=-y-5$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-y-5}{3y-2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y+5}{2-3y}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{y+5}{2-3y}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+5}{2-3x}$$

Jadi fungsi invers dari fungsi $f(x)=\frac{2x-5}{3x+1}, x\neq -\frac{1}{3}$ adalah $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{2-3x}$

**3. Fungsi Invers dan Fungsi Komposisi**

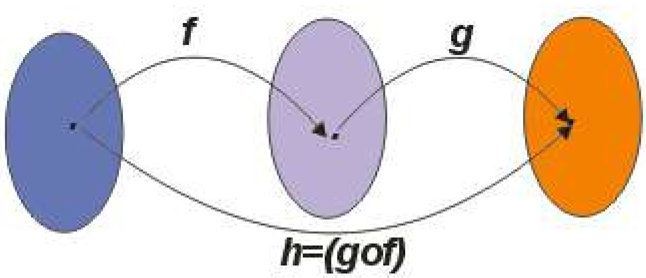
Misalkan h(x) adalah fungsi komposisi yang dapat dibentuk dari fungsi f(x) dan fungsi g(x). Fungsi h(x) kemungkinannya adalah ....

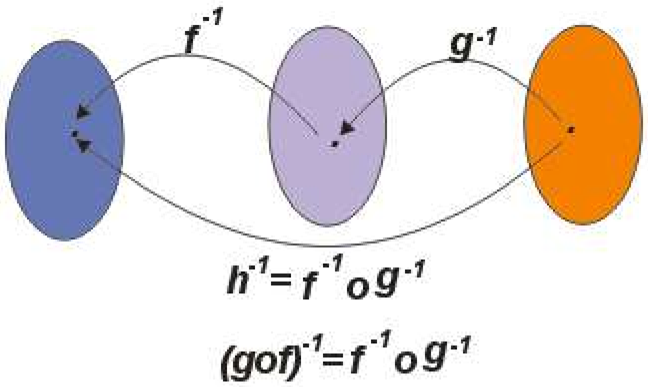
ii) h(x) = (fog)(x)

ii) h(x) = (gof)(x)

Diagram panahnya sbb:

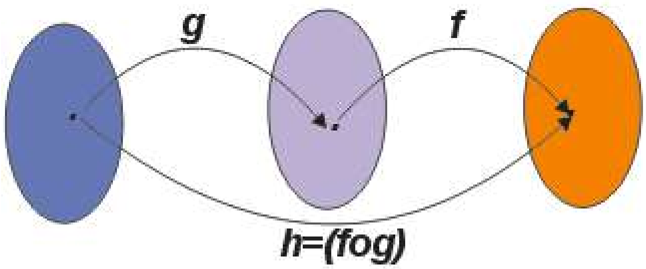
i)

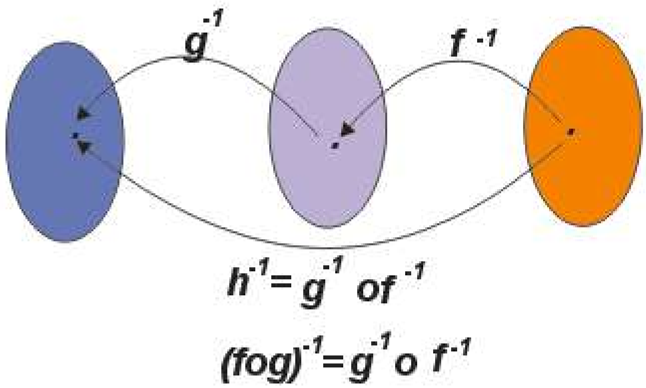





Jadi $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

ii)




Jadi $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Contoh:

Misalkan $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ ditentukan dengan rumus $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 5x - 2$. Tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$

Jawab:

Cara 1:

Dicari $(f \circ g)(x)$ terlebih dahulu selanjutnya dicari $(f \circ g)^{-1}(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (5x - 2) + 3 = 5x + 1$$

$$y = 5x + 1$$

$$\Leftrightarrow 5x = y - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}$$

Jadi $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$

Cara 2:

Dicari $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$ selanjutnya menggunakan rumus $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

$$f(x) = x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = x + 3$$

$$\Leftrightarrow x = y - 3$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = x - 3$$

$$g(x) = 5x - 2$$

$$\Leftrightarrow y = 5x - 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}y + \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$= g^{-1}(f^{-1}(x))$$

$$= \frac{1}{5}(x-3)+\frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{5}x-\frac{1}{5}$$

Contoh:

Fungsi-fungsi f dan g ditentukan dengan rumus:

$f(x) = 2x+1$ dan $g(x) = \dfrac{3x+5}{x-4}$

Carilah $(g \circ f)^{-1}(x)$!

Jawab;

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= \frac{3(2x+1)+5}{2x+1-4}$$

$$= \frac{6x+8}{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6x+8}{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow 2yx-3y = 6x+8$$

$$\Leftrightarrow 2yx-6x = 3y+8$$

$$\Leftrightarrow (2y-6)x = 3y+8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y+8}{2y-6}$$

Jadi $(g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{3x+8}{2x-6}$

# Daftar Pustaka

Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Kalkulus Proposisi

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | **04** | **15048** | Tim Dosen |


### Abstract

Logika adalah metode atau teknik yang diciptakan untuk meneliti ketepatan penalaran serta mengkaji prinsip-prinsip penalaran yang benar dan penarikan kesimpulan yang absah. Sebuah proposisi(*proposition*) atau *statement* ialah sebuah kalimat deklaratif yang memiliki tepat satu nilai kebenaran, yaitu: ”Benar”(B) atau ”Salah”(S).


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu membuat suatu proposisi dengan menggunakan penghubung logika, dan mampu membuat tabel kebenaran dari suatu proposisi.

# Isi

# KALKULUS PROPOSISI

## 4.1 LOGIKA

Logika adalah metode atau teknik yang diciptakan untuk meneliti ketepatan penalaran serta mengkaji prinsip-prinsip penalaran yang benar dan penarikan kesimpulan yang absah.

Ilmu logika berhubungan dengan kalimat-kalimat (argumen) dan hubungan yang ada diantara kalimat-kalimat tersebut. Tujuannya adalah memberikan aturan-aturan sehingga orang dapat menentukan apakah suatu kalimat bernilai benar.

Kalimat yang dipelajari dalam logika bersifat umum, baik bahasa sehari-hari maupun bukti matematika yang didasarkan atas hipotesa-hipotesa. Oleh karena itu aturan-aturan yang berlaku di dalamnya haruslah bersifat umum dan tidak tergantung pada kalimat atau disiplin ilmu tertentu. Ilmu logika lebih mengarah dalam bentuk sintaks-sintaks daripada arti dari kalimat itu sendiri.

### 4.1.1 GAMBARAN UMUM LOGIKA

Secara umum logika dibedakan menjadi dua yaitu Logika Pasti dan Logika Tidak Pasti. Logika pasti meliputi Logika Pernyataan (Propotitional Logic), Logika Predikat (Predicate Logic), Logika Hubungan (Relation Logic) dan Logika Himpunan. Sedangkan logika tidak pasti meliputi Logika Samar atau kabur (Fuzzy Logic).

- Logika Pernyataan membicarakan tentang pernyataan tunggal dan kata hubungnya sehingga didapat kalimat majemuk yang berupa kalimat deklaratif.
- Logika Predikat menelaah variabel dalam suatu kalimat, kuantifikasi dan validitas sebuah argumen.
- Logika Hubungan mempelajari hubungan antara pernyataan, relasi simetri, refleksif, antisimtris, dll.
- Logika himpunan membicarakan tentang unsur-unsur himpunan dan hukum-hukum yang berlaku di dalamnya.
- Logika Samar merupakan pertengahan dari dua nilai biner yaitu ya-tidak, nol-satu, benar-salah. Kondisi yang ditunjukkan oleh logika samar ini antara lain : banyak, sedikit, sekitar x, sering, umumnya. Logika samar banyak diterapkan dalam kecerdasan buatan, mesin pintar atau sistem cerdas dan alat-alat elektronika. Program komputer

dengan menggunakan logika samar mempunyai kapasitas penyimpanan lebih kecil dan lebih cepat bila dibanding dengan logika biner.

### 4.1.2 ALIRAN DALAM LOGIKA

Aliran dalam logika dibagi menjadi beberapa aliran, diantaranya:

**1. LOGIKA TRADISIONAL**

- Pelopornya adalah Aristoteles (384-322 SM)
- Terdiri dari analitika dan dialektika. Ilmu analitika yaitu cara penalaran yang didasarkan pada pernyataan yang benar sedangkan dialektika yaitu cara penalaran yang didasarkan pada dugaan.

**2. LOGIKA METAFISIS**

- Dipelopori oleh F. Hegel (1770-1831 M)
- Menurut Hegel, logika dianggap sebagai metafisika dimana susunan pikiran dianggap sebagai kenyataan.

**3. LOGIKA EPISTIMOLOGI**

- Diperkenalkan oleh FH. Bradley (1846-1924) dan Bernhard Bosanquet (1848-1923 M).
- Prisip dari logika epistimologi ini adalah untuk mencapai pengetahuan yang memadai, pikiran yang logis dan perasaan halus digabungkan. Selain itu, untuk mencapai kebenaran, logika harus dihubungkan dengan seluruh pengetahuan yang lainnya.

**4. LOGIKA INSTRUMENTALIS/FRAGMATIS**

- Dipelopori oleh Jhon Dewey (1859-1952)
- Prinsipnya adalah logika merupakan alat atau instrumen untuk menyelesaikan masalah.

**5. LOGIKA SIMBOLIS**

- Logika simbolis adalah ilmu tentang penyimpulan yang sah (absah) yang dikembangkan menggunakan metod ematematika dan bantuan simbol-simbol khusus sehingga memungkinkan seseorang menghindari makna ganda dari bahasa sehari-hari.
- Pelopornya adalah Leibniz, De Morgan, dan Boole
- Logika ini menggunakan bahasa simbol untuk mempelajari secara rinci bagaimana akal harus bekerja dan bercirikan teknis, matematis, dan ilmiah. Pemakaian simbol matematika ini untuk mewakili bahsa dalam bentuk pernyataan yang bernilai benar atau salah.
- Logika simbolis ini kemudian menjadi dasar logika matematika modern yaitu logika formal yang semata-mata menelaah bentuk da bukan isi dari apa yang dibicarakan.

## 4.2 PERNYATAAN (PROPOSISI)

Kata merupakan rangkaian huruf yang mengandung arti, sedangkan kalimat adalah kumpulan kata yang disusun menurut aturan tata bahasa dan mengandung arti. Di dalam matematika tidak semua pernyataan yang bernilai benar atau salah saja yang digunakan dalam penalaran. Pernyataan disebut juga kalimat deklaratif yaitu kalimat yang bersifat menerangkan. Disebut juga proposisi.

Sebuah proposisi(*proposition*) atau *statement* ialah sebuah kalimat deklaratif yang memiliki tepat satu nilai kebenaran, yaitu: **"Benar"(B)** atau **"Salah"(S).** Kalkulus proposisi (*propotional calculus*) merupakan metode untuk kalkulasi menggunakan proposisi/kalimat. Dalam kalkulus proposisi yang ditinjau adalah nilai kalimat deklaratif (*true*/*false*), metode penggabungan kalimat dan penarikan kesimpulan (kalimat) berdasarkan kalimat tersebut.

Suatu proposisi adalah sebuah variabel logika p, q, r, ... atau sebuah ungkapan yang dibangun dari variabel-variabel ini dan hubungan dengan logika ($\wedge$, $\vee$, ~). Tabel kebenaran dari proposisi terdiri dari kolom-kolom dalam variabel-variabel dan kolom-kolom dalam proposisi.

Pernyataan/ Kalimat Deklaratif/ Proposisi adalah kalimat yang bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya.

Contoh :

1. Yogyakarta adalah kota pelajar (Benar).
2. 2+2=4 (Benar).
3. Semua manusia adalah fana (Benar).
4. 4 adalah bilangan prima (Salah).
5. 5x12=90 (Salah).

Tidak semua kalimat berupa proposisi

Contoh :

1. Dimanakah letak pulau bali?.
2. Pandaikah dia?.
3. Andi lebih tinggi daripada Tina.
4. 3x-2y=5x+4.
5. x+y=2.

### 4.2.1 PENGHUBUNG KALIMAT DAN TABEL KEBENARAN

Satu atau lebih proposisi dapat dikombinasikan untuk menghasilkan proposisi baru lewat penggunaan operator logika. Proposisi baru yang dihasilkan dari kombinasi tersebut disebut dengan proposisi majemuk (compound composition), sedangkan proposisi yang bukan merupakan hasil dari kombinasi proposisi lain disebut proposisi atomik. Proposisi majemuk tersusun dari sejumlah proposisi atomik.

Dalam logika dikenal 5 buah penghubung

**Tabel 4.1** Penghubung dalam logika

| Simbol | Arti | Bentuk |
|---|---|---|
| ~ | Tidak/Not/Negasi | Tidak………… |
| $\wedge$ | Dan/And/Konjungsi | ……..dan…….. |
| $\vee$ | Atau/Or/Disjungsi | ………atau……. |
| $\Rightarrow$ | Implikasi | Jika…….maka……. |
| $\Leftrightarrow$ | Bi-Implikasi | ……..bila dan hanya bila…….. |

**Contoh:**

Misalkan : p menyatakan kalimat " Mawar adalah nama bunga"

Q menyatakan kalimat " Apel adalah nama buah"

Maka kalimat " Mawar adalah nama bunga dan Apel adalah nama buah "

Dinyatakan dengan simbol **$p \wedge q$**

**Contoh :**

Misalkan p: hari ini hari minggu

q: hari ini libur

nyatakan kalimat dibawah ini dengan simbol logika :

a. Hari ini tidak hari minggu tetapi libur
b. Hari ini tidak hari minggu dan tidak libur
c. Tidak benar bahwa hari ini hari minggu dan libur

***Penyelesaian***

a. Kata "tetapi" mempunyai arti yang sama dengan dan sehingga kalimat (a) bisa ditulis sebagai : **$\sim p \wedge q$**
b. **$\sim p \wedge \sim q$**
c. **$\sim (p \wedge q)$**

## 1. NEGASI (INGKARAN)

Jika p adalah " Semarang ibukota Jawa Tengah", maka ingkaran atau negasi dari pernyataan p tersebut adalah ~p yaitu " Semarang bukan ibukota Jawa Tengah" atau "Tidak benar bahwa Semarang ibukota Jawa Tengah". Jika p diatas bernilai benar (true), maka ingkaran p (~p) adalah bernilai salah (false) dan begitu juga sebaliknya.

**Contoh:**

p = Komputer digital elektronik pertama dirakit pada abad ke dua puluh.

~ p = Komputer digital elektronik tidak dirakit pada abad ke dua puluh

Tabel Kebenarannya:

| p | ~p |
|---|---|
| B | S |
| S | B |

Contoh Lain:

p = Jakarta ibukota Indonesia

~p = Jakarta bukan ibukota Indonesia

**2. KONJUNGSI**

Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggunakan penghubung "**DAN/AND**" dengan notasi "$\wedge$"

Pada konjungsi $p \wedge q$ akan bernilai benar jika baik p maupun q bernilai benar. Jika salah satunya (atau keduanya) bernilai salah maka $p \wedge q$ bernilai salah.

**Contoh:**

p: Fahmi makan nasi

Q:Fahmi minum kopi

Maka $p \wedge q$ : Fahmi makan nasi dan minum kopi

**Tabel kebenaran:**

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| B | B | B |
| B | S | S |
| S | B | S |
| S | S | S |

Contoh lain:

$p$ = Galih naik sepeda

$q$ = Ratna naik sepeda

$p \wedge q$ = Galih dan Ratna naik sepeda

**3. DISJUNGSI / $\vee$**

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan penghubung "**ATAU/OR**" dengan notasi "$\vee$".

Kalimat disjungsi dapat mempunyai 2 arti yaitu :

**a. INKLUSIF OR / $\vee$**

Yaitu jika "p benar atau q benar atau keduanya true"

Contoh:

p = Blaise Pascal menemukan mesin hitung.

q = Taufik hidayat pandai bermain bulu tangkis.

$p \vee q$ = Blaise Pascal menemukan mesin hitung atau Taufik hidayat pandai bermain bulu tangkis

Tabel kebenaran:

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| B | B | B |
| B | S | B |
| S | B | B |
| S | S | S |

Contoh Lain:

*p* = Tommy ingin membeli sepatu

*q* = Tommy ingin membeli baju

$p \vee q$ = Tommy ingin membeli sepatu atau baju

Contoh lain:

p = Tenaga IT yang dibutuhkan menguasai Bahasa C++

q = Tenaga IT yang dibutuhkan menguasai Bahasa JaVA

$p \vee q$ = "Tenaga IT yang dibutuhkan menguasai Bahasa C++ atau Java".

Contoh lain:

p : 7 adalah bilangan prima

q : 7 adalah bilangan ganjil

$p \vee q$ : 7 adalah bilangan prima atau ganjil

Benar bahwa 7 bisa dikatakan bilangan prima sekaligus bilangan ganjil.

**b. EKSLUSIF OR / $\oplus$**

Yaitu jika "p benar atau q benar tetapi tidak keduanya".

Contoh:

*p* = Saya lahir di Jakarta

*q* = Saya lahir di Bandung

p ⊕ *q* = Saya lahir di Jakarta atau di Bandung (tapi tidak kedunya!)

*Tabel Kebenaran:*

| p | q | p ⊕ q |
|---|---|---|
| B | B | S |
| B | S | B |
| S | B | B |
| S | S | S |

Perhatikan bahwa p⊕q berarti p benar, atau q  benar tapi **tidak dua-duanya benar**!

Contoh lain :

p : Saya akan melihat pertandingan bola di TV.

q : Saya akan melihat pertandingan bola di lapangan.

p ⊕ q : Saya akan melihat pertandingan bola di TV atau lapangan.

Hanya salah satu dari 2 kalimat penyusunnya yang boleh bernilai benar yaitu jika "Saya akan melihat pertandingan sepak bola di TV saja atau di lapangan saja tetapi tidak keduanya.

**4. IMPLIKASI**

Misalkan ada 2 pernyataan p dan q, untuk menunjukkan atau membuktikan bahwa jika p bernilai benar akan menjadikan q bernilai benar juga, diletakkan kata "JIKA" sebelum pernyataan pertama lalu diletakkan kata "MAKA" sebelum pernyataan kedua sehingga didapatkan suatu pernyataan majemuk yang disebut dengan "IMPLIKASI/PERNYATAAN BERSYARAT/KONDISIONAL/ HYPOTHETICAL dengan notasi "→".

Notasi p→q dapat dibaca :

- Jika *p*, maka *q*
- Jika *p*, *q*
- *p* mengakibatkan *q*     (*p implies q*)
- *q* jika *p*
- *p* hanya jika *q*
- *p* syarat cukup untuk *q* (*sufficient condition*) )
- *q* syarat perlu untuk *p* (*necessary condition*))

**Contoh:**

p = Bunga mawar berwarna merah.

q = Manusia memiliki rambut.

p → q = Jika Bunga mawar berwarna merah maka manusia memili rambut.

Tabel kebenaran:

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| B | B | B |
| B | S | S |
| S | B | B |
| S | S | B |

Contoh lain:

*p* = Nilai ujian akhir anda 80 atau lebih

*q* = Anda mendapat nilai A

$p \rightarrow q$ = "Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda mendapat nilai A"

Contoh lain:

p : Pak Ali adalah seorang haji.

q : Pak Ali adalah seorang muslim.

$p \rightarrow q$ : Jika Pak Ali adalah seorang haji maka pastilah dia seorang muslim.

**5. BIIMPLIKASI**

Biimplikasi atau bikondosional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan p dan q yang dinyatakan dengan notasi "$p \leftrightarrow q$" yang bernilai sama dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ sehingga dapat dibaca " p jika dan hanya jika q" atau "p bila dan hanya bila q". Biimplikasi 2 pernyataan hanya akan bernilai benar jika implikasi kedua kalimat penyusunnya sama-sama bernilaii benar.

**Contoh:**

p = Saya pergi ke Puncak.

q = Mobil berada di rumah.

$p \leftrightarrow q$ = Saya pergi ke Puncak jika dan hanya jika mobil berada di rumah.

Tabel kebenaran:

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| B | B | B |
| B | S | S |
| S | B | S |
| S | S | B |

Pernyataan "jika p dan hanya jika q" dapat dibaca "jika p maka q dan jika q maka p".

Contoh Lain:

*p* = saya selalu menyatakan kebenaran

*q* = ada emas di pulau ini

$p \leftrightarrow q$ = Jika dan hanya jika saya selalu mengatakan kebenaran maka ada emas di pulau ini.

Contoh lain:

p : Dua garis saling berpotongan adalah tegak lurus.

q : Dua garis saling membentuk sudut 90 derajat.

$p \leftrightarrow q$ : Dua garis saling berpotongan adalah tegak lurus jika dan hanya jika dan hanya jika dua garis saling membentuk sudut 90 derajat.

**Tabel 4.2** Tabel Kebenaran Penghubung Logika

| **p** | **q** | **~p** | **~q** | **$p \wedge q$** | **$p \vee q$** | **$p \rightarrow q$** | **$p \leftrightarrow q$** | **$p \oplus q$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | S | S | B | B | B | B | S |
| B | S | S | B | S | B | S | S | B |
| S | B | B | S | S | B | B | S | B |
| S | S | B | B | S | S | B | B | S |

Untuk menghindari perbedaan konotasi dan keganjilan arti dalam menerjemahkan simbol-simbol logika maka dalam matematika tidak disyaratkan adanya hubungan antara kedua kalimat penyusunnya. Kebenaran suatu kalimat berimplikasi semata-mata hanya tegantung pada nilai kebenaran kaliamat penyusunnya. Karena itu digunakan tabel kebenaran penghubung. Jika p dan q adalah kalimat-kalimat dimana B=true/benar dan S=false/salah, maka untuk n variable (p,q,…) maka tabel kebenaran memuat $2^n$ (2 pangkat n) baris.

## 4.3 INGKARAN (NEGASI) SUATU PENYATAAN

Ingkaran (negasi) suatu pernyataan bisa dikelompokan menjadi beberapa bentuk, diantaranya:

### 1. NEGASI SUATU KONJUNGSI

Contoh : Fahmi makan nasi dan minum kopi

Suatu konjungsi akan bernilai benar jika kedua kalimat penyusunnya yaitu p dan q bernilai benar, sedangkan negasi adalah pernyataan yang bernilai salah jika pernyataan awalnya bernilai benar dan bernilai benar jika pernyataan awalnya bernilai salah.

Oleh karena itu negasi dari : “Fahmi makan nasi dan minum kopi” adalah suatu pernyataan majemuk lain yang salah satu komponennya merupakan negasi dari komponen pernyataan awalnya. Jadi negasinya adalah: “Fahmi tidak makan nasi atau tidak minum kopi”.

Disini berlaku hukum De Morgan yaitu : $\sim(p\wedge q)$ ekuivalen dengan $\sim p\vee\sim q$

**2. NEGASI SUATU DISJUNGSI**

Contoh : “Fahmi makan nasi atau minum kopi”

Suatu disjungsi akan bernilai salah hanya jika kedua komponen penyusunnya bernilai salah., selain itu benar. Oleh karena itu negasi dari kalimat diatas adalah : “ Tidak benar bahwa Fahmi makan nasi atau minum kopi” atau dapat juga dikatakan “Fahmi tidak makan nasi dan tidak minum kopi. Disini berlaku hukum De Morgan yaitu : $\mathbf{\sim(p\vee q) \equiv \sim p\wedge\sim q}$

**3. NEGASI SUATU IMPLIKASI**

**Contoh** : “Jika hari hujan maka Adi membawa payung”.

Untuk memperoleh negasi dari pernyataan diatas, kita dapat mengubah bentuknya ke dalam bentuk disjungsi kemudian dinegasikan, yaitu :

$$\mathbf{p\Rightarrow q \equiv \sim p\vee q}$$

Maka negasinya

$$\mathbf{\sim( p\Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p\vee q) \equiv p\wedge\sim q}$$

**4. NEGASI SUATU BIIMPLIKASI**

Biimplikasi atau bikondisional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataaan p dan q yang dinotasikan dengan $\mathbf{p \Leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$

sehingga : $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

$$\equiv \sim [(\sim p\vee q ) \wedge (\sim q\vee p)]$$

$$\equiv \sim (\sim p\vee q ) \vee \sim(\sim q\vee p)$$

$$\mathbf{\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p\wedge\sim q ) \vee (q\wedge\sim p)}$$

**LATIHAN**

1. Diketahui proposisi-proposisi berikut:

$p$ : Pemuda itu tinggi

$q$ : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan

(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan

(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan

(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan

(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan

(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

2. Ubahlah proposisi-proposisi berikut ke dalam bentuk proposisi “jika *p* maka *q*”!
   a. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
   b. Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
   c. Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
   d. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
   e. Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
   f. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

# Daftar Pustaka


Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

UNIVERSITAS
MERCU BUANA

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 05 | 15048 | Tim Dosen |


### Abstract

Setiap proposisi baik atomik ataupun majemuk, harus memiliki nilai, True/Benar atau False/Salah. Alat yang digunakan untuk memberikan nilai dengan aturan tertentu dinyatakan pada Tabel Kebenaran (Truth Table). Tabel kebenaran menunjukkan secara sistematis satu demi satu nilai-nilai kebenaran sebagai hasil kombinasi dari proposisi-proposisi yang sederhana.


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu membedakan antara tautologi, kontradiksi, kontingensi dan mampu membuktikannya menggunakan tabel kebenaran.

# TAUTOLOGI, KONTRADIKSI, DAN CONTINGENT

## 5.1 TAUTOLOGI

Sebuah proposisi disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus, proposisi autologi dicirikan pada kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat B (benar).

atau

Sebuah proposisi dikatakan bernilai Tautologi, jika proposisi tersebut bernilai benar terhadap setiap pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.

Contoh Tautologi:

1. Buktikan notasi berikut $p \vee (\sim p)$ adalah tautologi!

   Tabel Kebenaran

| **p** | **~ p** | **p ∨(~p)** |
|---|---|---|
| B | S | B |
| S | B | B |

2. Buktikan bahwa proposisi $p \vee \sim (p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi. Buatlah tabel kebenarannya!

   Jawab:

| p | q | $p \wedge q$ | $\sim (p \wedge q)$ | $p \vee \sim (p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|---|
| B | B | B | S | B |
| B | S | S | B | B |
| S | B | S | B | B |
| S | S | S | B | B |

Karena nilai kebenaran dari $p \vee \sim (p \wedge q)$ adalah B (benar) untuk semua nilai p dan q maka proposisi adalah sebuah Tautologi.

**Latihan:**

Buktikan bahwa notasi berikut adalah sebuah tautologi!

a) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

b) $p \wedge ( p \vee q ) \vee ( \sim p \wedge ( \sim p \vee r ))$

## 5.2 KONTRADIKSI

Sebuah proposisi disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus, proposisi tautologi dicirikan pada kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat S (salah).

Atau

Sebuah proposisi dikatakan bernilai Kontradiksi, jika proposisi tersebut bernilai salah terhadap setiap pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.

Contoh Kontradiksi:

1. Buktikan bahwa notasi berikut adalah kontradiksi $p \wedge (\sim p)$

   Tabel Kebenaran:

| **p** | **~ p** | **$p \wedge (\sim p)$** |
|---|---|---|
| B | S | S |
| S | B | S |

2. Buktikan bahwa proposisi $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ adalah sebuah Kontradiksi.

Jawab

Tabel kebenaran:

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $\sim (p \vee q)$ | $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | S | S |
| B | S | S | B | S | S |
| S | B | S | B | S | S |
| S | S | S | S | B | S |

Karena nilai kebenaran dari $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ adalah S (salah) untuk semua niali p dan q maka proposisi adalak sebuah kontradiksi.

**Latihan:**

1. Buktikan bahwa notasi berikut adalah sebuah kontradiksi!

$\sim(\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q))$

2. Buktikan bahwa notasi dibawah ini adalah tautologi atau kontadiksi!

a) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

b) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

**5.3 IMPLIKASI TAUTOLOGI**

Sebuah proposisi p dikatakan berakibat propisisi q, jika implikasi "$p \rightarrow q$" bernilai tautologi, dan ditulis "$p \leftrightarrow q$".

Contoh 1:

Dengan tabel kebenaran perlihatkan bahwa: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ adalah sebuah tautologi!

Tabel Kebenaran:

| **p** | **q** | **$p \rightarrow q$** | **~p** | **$\sim p \vee q$** | **$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$** |
|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | S | B | B |
| B | S | S | S | S | B |
| S | B | B | B | B | B |
| S | S | B | B | B | B |

Contoh 2:

Tunjukan bahwa bahwa: $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ adalah sebuah tautologi!

Tabel Kebenaran:

| **p** | **q** | **$p \wedge q$** | **$p \rightarrow q$** | **$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$** |
|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B |
| B | S | S | S | B |
| S | B | S | B | B |
| S | S | S | B | B |

**5.4 CONTINGENSI**

Jika pada semua nilai kebenaran menghasilkan nilai F/S dan T/B, maka disebut **formula campuran (*contingent*).**

Contoh:

Tunjukkan bahwa **[(p∧q) → r] → p** adalah contingent!

| **p** | **q** | **r** | **p∧q** | **(p∧q) → r** | **[(p∧q) → r] →p** |
|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B |
| B | B | S | B | S | B |
| B | S | B | S | B | B |
| B | S | S | S | B | B |
| S | B | B | S | B | S |
| S | B | S | S | B | S |
| S | S | B | S | B | S |
| S | S | S | S | B | S |

### 5.5 KONVERS, INVERS, DAN KONTRAPOSISI

Perhatikan pernyataan di bawah ini! ~ ∧ ∨ ⇒ ⇔

**"Jika suatu bendera adalah bendera RI maka ada warna merah pada bendera tersebut"**

Bentuk umum implikasi di atas adalah "**p → q**" dengan

p : Bendera RI

q : Bendera yang ada warna merahnya.

Dari implikasi diatas dapat dibentuk tiga implikasi lainnya yaitu :

1. **KONVERS**, yaitu **q → p**

   Sehingga implikasi diatas menjadi :

   " Jika suatu bendera ada warna merahnya, maka bendera tersebut adalah bendera RI".

2. **INVERS**, yaitu **~p → ~q**

   Sehingga implikasi diatas menjadi :

   " Jika suatu bendera bukan bendera RI, maka pada bendera tersebut tidak ada warna merahnya".

3. **KONTRAPOSISI**, yaitu **~q → ~p**

   Sehingga implikasi di atas menjadi :

   " Jika suatu bendera tidak ada warna merahnya, maka bendera tersebut bukan bendera RI".

Suatu hal yang penting dalam logika adalah kenyataan bahwa suatu implikasi selalu ekuivalen dengan kontraposisinya, akan tetapi tidak demikian halnya dengan invers dan konversnya.

Hal ini dapat dilihat dari tabel kebenaran berikut

| **p** | **q** | **~p** | **~q** | **p → q** | **q → p** | **~p → ~q** | **~q → ~p** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | S | S | B | B | B | B |
| B | S | S | B | S | B | B | S |
| S | B | B | S | B | S | S | B |
| S | S | B | B | B | B | B | B |

## 5.5 INGKARAN KONVERS, INVERS, DAN KONTRAPOSISI

**Contoh:**

Tentukan ingkaran atau negasi konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi berikut.

"Jika suatu bendera adalah bendera RI maka bendera tersebut berwarna merah dan putih"

<u>Penyelesaian</u>

Misal p : Suatu bendera adalah bendera RI

q : Bendera tersebut berwarna merah dan putih

maka kalimatnya menjadi $p \rightarrow q$ atau jika menggunakan operator dan maka $p \rightarrow q$ ekuivalen(sebanding/≈) dengan $\sim p \vee q$. Sehingga

1. **Negasi dari implikasi**

   Implikasi : $(p \rightarrow q) \approx \sim p \vee q$

   Negasinya : $\sim(\sim p \vee q) \approx p \wedge \sim q$

   Kalimatnya :"Suatu bendera adalah bendera RI dan bendera tersebut tidak berwarna merah dan putih".

2. **Negasi dari konvers**

   Konvers : $q \rightarrow p \approx \sim q \vee p$

   Negasinya : $\sim(\sim q \vee p) \approx q \wedge \sim p$

   Kalimatnya : "Ada/Terdapat bendera berwarna merah dan putih tetapi bendera tersebut bukan bendera RI".

3. **Negasi dari invers**

   Invers : $\sim p \rightarrow \sim q \approx \sim(\sim p) \vee \sim q) \approx p \wedge \sim q$

   Negasinya : $\sim(p \wedge \sim q) \approx \sim p \vee q$

   Kalimatnya : "Suatu bendera bukan bendera RI atau bendera tersebut berwarna merah dan putih".

**4. Negasi dari kontraposisi**

Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p \approx \sim(\sim q) \vee \sim p \approx q \vee \sim p$

Negasinya : $\sim(q \vee \sim p) \approx \sim q \wedge p$

Kalimatnya : " Suatu bendera tidak berwarna merah dan putih dan bendera tersebut adalah bendera RI".

## 5.6 EKUIVALENSI LOGIKA

Pada tautologi, dan juga kontradiksi, dapat dipastikan bahwa jika dua buah ekspresi logika adalah tautologi, maka kedua buah ekspresi logika tersebut ekuivalen secara logis, demikian pula jika keduanya kontradiksi. Persoalannya ada pada *contingent*, karena memiliki semua nilai B dan S. Tetapi jika urutan B dan S atau sebaliknya pada tabel kebenaran tetap pada urutan yang sama maka tetap disebut ekuivalen secara logis. Perhatikan pernyataan berikut :

**Contoh:**

1. Dewi sangat cantik dan peramah.
2. Dewi peramah dan sangat cantik.

Kedua pernyataan di atas, tanpa dipikir panjang, akan dikatakan ekuivalen atau sama saja. Dalam bentuk ekspresi logika dapat ditulis sebagai berikut :

A = Dewi sangat cantik.

B = Dewi peramah.

Maka ekspresi logikanya :

1. $A \wedge B$
2. $B \wedge A$

Jika dikatakan kedua buah ekspresi logika tersebut ekuivalen secara logis maka dapat ditulis $A \wedge B \equiv B \wedge A$. Ekuivalensi logis dari kedua ekspresi logika tersebut dapat dibuktikan dengan tabel kebenaran sebagai berikut ini :

| A | B | A∧B | B∧A |
|---|---|---|---|
| B | B | B | B |
| B | S | S | S |
| S | B | S | S |
| S | S | S | S |

Pembuktian dengan tabel kebenaran diatas, walaupun setiap ekspresi logika memiliki nilai B dan S, tetapi karena memiliki urutan yang sama, maka secara logis tetap dikatakan ekuivalen. Tetapi jika urutan B dan S tidak sama, maka tidak bisa dikatakan ekuivalen secara logis. Tabel kebenaran merupakan alat untuk membuktikan kebenaran ekuivalensi secara logis. Kesimpulan diambil berdasarkan hasil dari tabel kebenaran tersebut. Lihat pernyataan berikut ini :

**Contoh:**

1. Badu tidak pandai, atau dia tidak jujur.
2. Adalah tidak benar jika Badu pandai dan jujur.

Secara intuitif dapat ditebak bahwa kedua pernyataan di atas sebenarnya sama, tetapi bagaimana jika dibuktikan dengan menggunkan tabel kebenaran berdasarkan ekspresi logika.

Adapun langkah-langkahnya adalah :

1. Ubah dahulu argumen di atas ke dalam bentuk ekspresi/notasi logika.

   Misal : A = Badu pandai

   B = Badu jujur

   Maka kalimatnya menjadi

   1. $\sim A \vee \sim B$
   2. $\sim(A \wedge B)$

2. Buat tabel kebenarannya

| **A** | **B** | **~A** | **~B** | **$A \wedge B$** | **$\sim A \vee \sim B$** | **$\sim(A \wedge B)$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | S | S | B | S | S |
| B | S | S | B | S | B | B |
| S | B | B | S | S | B | B |
| S | S | B | B | S | B | B |

Perhatikan ekspresi di atas! Meskipun kedua ekspresi logika di atas memiliki nilai kebenaran yang sama, ada nilai B dan S, keduanya baru dikatakan ekuivalen secara logis jika dihubungkan dengan perangkai ekuivalensi dan akhirnya menghasilkan tautologi.

3. Tambahkan perangkai biimplikasi untuk menghasilkan tautologi

| **$\sim A \vee \sim B$** | **$\sim(A \wedge B)$** | **$\sim A \vee \sim B \leftrightarrow \sim(A \wedge B)$** |
|---|---|---|
| S | S | B |
| B | B | B |
| B | B | B |

| | | |
|---|---|---|
| B | B | B |

Jika hasilnya adalah tautologi (bernilai T semua), maka dikatakan bahwa kedua argumen tersebut ekuivalen secara logis.

**LATIHAN:**

1. Jika p, q, r adalah proposisi. Buatlah Kalimat yang menyatakan ekspresi logika dibawah ini dan buatlah table kebenarannya untuk masing-masing ekspresi logika berikut:
   a. $(p \oplus q) \rightarrow \sim r$
   b. $(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \wedge r)$
   c. $(p \vee \sim q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$
   d. $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
   e. $(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge r)$

# Daftar Pustaka


Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

UNIVERSITAS
MERCU BUANA

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Argumen

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 06 | 15048 | Tim Dosen |


### Abstract

Argumen adalah suatu pernyataan tegas yang diberikan oleh sekumpulan proposisi $P_1$, $P_2$, .........,$P_n$ yang disebut premis (hipotesa/asumsi) dan menghasilkan proposisi Q yang lain yang disebut konklusi (kesimpulan).


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu membuat kesimpulan dari beberapa premis yang ada, dan mempu membuktikan apakah kesimpulan yang diambil valid atau tidak dengan menggunakan tabel kebenaran..

# Isi

# ARGUMEN

## 6.1 MENGENAL ARGUMEN

**Argumen** adalah suatu pernyataan tegas yang diberikan oleh sekumpulan proposisi $P_1$, $P_2$, .........,$P_n$ yang disebut **premis** (hipotesa/asumsi) dan menghasilkan proposisi Q yang lain yang disebut **konklusi** (kesimpulan).

Secara umum di notasikan dengan

$$\underbrace{P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n}_{\text{Premis}} \vdash \underbrace{Q}_{\text{Konklusi}}$$

atau dapat juga ditulis

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \end{array}\right\} \text{Premis}$$

$$\overline{\phantom{P_1}}\ \big\}\ \text{Konklusi}$$

Nilai kebenaran suatu argumen ditentukan sebagai berikut :

" *Suatu argumen $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n \vdash Q$ dikatakan benar (valid) jika Q bernilai benar untuk semua premis yang benar dan argumen dalam keadaan selain itu dikatakan salah (invalid/fallacy)".*

Dengan kata lain, suatu argumen dikatakan valid apabila untuk sembarang pernyataan yang disubtitusikan ke dalam premis, jika semua premis benar maka konklusinya juga benar. Sebaliknya jika semua premis benar tetapi konklusinya ada yang salah maka argumen tersebut dikatakan *invalid* (fallacy).

Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

| | |
|---|---|
| ***(premis 1)*** | $p_1$ |
| ***(premis 2)*** | $p_2$ |
| ***(premis ke n)*** | $p_n$ |
| **(Kesimpulan/konklusi)** | $q$ |

yang dalam hal ini, $p_1$, $p_2$, …, $p_n$ disebut hipotesis (atau premis), dan $q$ disebut konklusi (kesimpulan).

Jadi suatu argumen dikatakan *valid* **jika dan hanya jika** proposisi $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ adalah sebuah **Tautologi**.

**Contoh:**

1. Premis

   $P_1$ : Jika Office dan Delphi diperlukan maka semua orang akan belajar komputer

   $P_2$ : Office dan Delphi diperlukan

   Konklusi

   Q : Jadi, Semua orang akan belajar komputer

   Jika ditulis dalam bentuk notasi logika

   Misal p : Office dan Delphi diperlukan

   q : Semua orang belajar komputer

   Maka argumen diatas dapat ditulis :

   P1= $p \rightarrow q$

   P2= p

   ---

   Q = $\therefore q$

2. Misal p : Saya suka kalkulus

   q : Saya lulus ujian kalkulus

   Maka argumen

   $P_1$ : Jika saya suka kalkulus, maka saya akan lulus ujian kalkulus

   $P_2$ : Saya lulus ujian kalkulus

   Q $\therefore$ Saya lulus ujian kalkulus (valid)

   Notasi dapat ditulis:

   P1= $p \rightarrow q$

   P2= q

   ---

   Q = $\therefore p$

Untuk mengetahui suatu argumen apakah valid atau tidak maka dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Tentukan premis dan konklusi argumen
2. Buat tabel yang menunjukkan nilai kebenaran untuk semua premis dan konklusi.
3. Carilah baris kritis yatitu baris diman semua premis bernilai benar.
4. Dalam baris kritis tersebut, jika nilai kesimpulan semuanya benar maka argumen tersebut valid. Jika diantara baris kritis tersebut ada baris dengan nilai konklusi salah maka argumen tersebut tidak valid.

**Contoh:**

Tentukan apakah argumen berikut ini valid atau invalid

a) P1= $p \vee (q \vee r)$

P2= $\sim r$

Q = $\therefore\ p \vee q$

b) P1= $p \rightarrow (q \vee \sim r)$

P2= $q \rightarrow (p \wedge r)$

Q= $\therefore\ p \rightarrow r$

Penyelesaian

a)

| **p** | **q** | **r** | **q∨r** | **p∨(q∨r) (Premis 1/P1)** | **~r (Premis 2/P2)** | **P1 ∧ P2** | **p∨q (konklusi)** | **P1∧P2 → Q** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | S | S | B | B |
| B | B | S | B | B | B | B | B | B |
| B | S | B | B | B | S | S | B | B |
| B | S | S | S | B | B | B | B | B |
| S | B | B | B | B | S | S | B | B |
| S | B | S | B | B | B | B | B | B |
| S | S | B | B | B | S | S | S | B |
| S | S | S | S | S | B | S | S | B |

Jadi Argumen diatas adalah valid

b) Silahkan Anda kerjakan!.

### 6.2 ATURAN PENARIKAN KESIMPULAN

Penarikan Kesimpulan dilakukan dari berbagai pernyataan yang diketahui nilai kebenarannya yang disebut *premis.*

Kemudian dengan menggunakan prinsip-prinsip logika diperoleh pernyataan baru yang disebut *kesimpulan/konklusi*, yang diturunkan dari premis yang ada. Penarikan Kesimpulan seperti itu sering disebut *argumentasi.*

Prinsip-prinsip logika yang dipakai dalam penarikan kesimpulan sebagai berikut:

1. Argumen dikatakan sah:

   Konjungsi dari premis-premis yang diketahui diimplikasikan dengan konklusi hasilnya tautology.

2. Argumen dikatakan tidak sah:

   Konjungsi dari premis-premis yang diketahui diimpikasikan dengan konklusi hasinya bukan tautologi.

Jika premis-premis diketahui adalah p dan q dan konklusinya r maka prinsip-prinsip logika tersebut dapat dinyatakan dengan premis-premis dan konklusi sebagai berikut:

1. Argumentasi yang sah:

   $[(p \wedge q) \rightarrow r]$ = tautologi

2. Argumen yang tidak sah:

   $[(p \wedge q) \rightarrow r] \neq$ tautology

Jadi

Suatu argumentasi dikatakan sah jika premis-premisnya benar maka konklusinya juga benar.

Jika premis-premis yang diketahui adalah p dan q, dan konklusinya r maka argumentasinya disajikan dalam susunan sebagai berikut:

**Premis 1: p**

**Premis 2 : q**

---

**Konkusi: $\therefore$ r**

Pernyataan p disebut premis 1 dan pernytaan q disebut premis 2.

Tanda $\therefore$ dibaca ”Jadi” atau ”Oleh karena itu”.

## A. MODUS PONEN

Modus ponen atau penalaran langsung adalh salah satu metode inferensi dimana jika diketahui implikasi ” Bila p maka q ” yang diasumsikan bernilai benar dan antasenden (p) benar. Supaya implikasi $p \rightarrow q$ bernilai benar, maka q juga harus bernilai benar.

Modus Ponen disajikan dalam susunan sebagai berikut:

**Premis 1: $p \rightarrow q$**

**Premis 2 : p**

---

**Konkusi: $\therefore$ q**

Prinsip-prinsip logika yang dipakai dalam Modus Ponens adalah

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

Modus Ponens dikatakan sah jika pernyataan **$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$** maka hsilnya sebuah tautologi. Dengan demikian, untuk menguji sah atau tidaknya Modus Ponens dapat ditentukan dengan menggunakan tabel nilai kebenaran.

**Perhatikan contoh berikut:**

(P1): Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. $p \rightarrow q$

*(P2):* Air laut surut setelah gempa di laut. $p$

Q: Jadi tsunami datang $\therefore q$

**<u>Penyelesaian</u>:**

Misalkan: *p* adalah proposisi "Air laut surut setelah gempa di laut" dan

*q* adalah proposisi "tsunami datang"

Tabel Kebenarannya adalah:

| **p** | **q** | **p→q** | **(p→q)∧p** | **[(p→q)∧p] → q** |
|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B |
| B | S | S | S | B |
| S | B | B | S | B |
| S | S | B | S | B |

Nilai kebenaran pada kolom terakhir menunjukan bahwa **[(p→q)∧p] →q** adalah sebuah tautologi. Jadi Modus Ponens adalah argumentasi yang sah.

**B. MODUS TOLLENS**

Bentuk modus tollens mirip dengan modus ponen, hanya saja premis kedua dan kesimpulan merupakan kontraposisi premis pertama modus ponen. Hal ini mengingatkan bahwa suatu implikasi selalu ekuivalen dengan kontraposisinya.

Jika diketahui premis-premisnya p →q dan ~q maka dapat diambil kesimpulan/konklusi ~p. Penarikan kesimpulan seperti itu disebut dengan Modus Tollens atau Kaidah Penolakan.

Modus Tolens disajikan dalam susunan sebagai berikut:

**Premis 1: p→q**

**Premis 2 : ~q**

**Konkusi: ∴~p**

Prinsip-prinsip logika yang dipakai dalam Modus Ponens adalah

**[(p→q)∧~q] →~p**

Modus Pollens dikatakan sah jika pernyataan **[(p→q)∧~q] →~p** maka hasilnya sebuah tautologi. Dengan demikian, untuk menguji sah atau tidaknya Modus Pollens dapat ditentukan dengan menggunakan tabel nilai kebenaran.

**Perhatikan contoh berikut:**

Periksa kesahihan argumen berikut ini:

(P1): Jika 5 lebih kecil dari 4, maka 5 adalah bilangan prima. $p \rightarrow q$

(P2) : 5 adalah bukan bilangan prima. $\sim q$

(Q): Jadi 5 tidak lebih kecil dari 4 $\therefore \sim p$

**Penyelesaian:**

p = 5 lebih kecil dari 4

q = 5 adalah bilangan prima

**Tabel Kebenarannya:**

| **p** | **q** | **$p \rightarrow q$** | **$\sim q$** | **$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$** | **$\sim p$** | **$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | S | S | S | B |
| B | S | S | B | S | S | B |
| S | B | B | S | S | B | B |
| S | S | B | B | B | B | B |

Nilai kebenaran pada kolom terakhir menunjukan bahwa **$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$** adalah sebuah tautologi. Jadi Modus Pollens adalah argumentasi yang sah.

## C. PENAMBAHAN DISJUNGTIF (ADDITION)

Inferensi penambahan disjungtif didasarkan atas fakta bahwa suatu kalimat dapat digeneralisasikan dengan penghubung ”$\vee$”. Alasannya adalah karena penghubung ”$\vee$” bernilai benar jika salah satu komponennya bernilai benar.

Misalnya saya mengatakan ”Langit berwarna biru” (bernilai benar). Kalimat tersebut tetap akan bernilai benar jika ditambahkan kalimat lain dengan penghubung ”$\vee$”. Misalnya ”Langit berwarna biru atau bebek adalah binatang menyusui”. Kalimat tersebut tetap bernilai benar meskipun kalimat ”Bebek adalah binatang menyusui”, merupakan kalimat yang bernilai salah.

Addition dapat ditulis:

**p** atau **q**

———— ————

**$\therefore p \vee q$** **$\therefore p \vee q$**

**Contoh:**

Simon adalah siswa SMU

————————————————————————

∴ Simon adalah siswa SMU atau SMP

**D. PENYEDERHAAN KONJUNGTIF (SIMPLIFICATION)**

Inferensi ini merupakan kebalikan dari inferensi penambahan disjungtif. Jika beberapa kalimat dihubungkan dengan operator ”$\wedge$”, maka kalimat tersebut dapat diambil salah satunya secara khusus (penyempitan kalimat).

Simplification dapat ditulis

| | | |
|---|---|---|
| **$p \wedge q$** | **atau** | **$p \wedge q$** |
| **———** | | **———** |
| **$\therefore$ p** | | **$\therefore$ q** |

**Contoh:**

Langit berwarna biru dan bulan berbentuk bulat

——————————————————————————————

∴ Langit berwarna biru atau ∴ Bulan berbentuk bulat

**E. SILOGISME DISJUNGTIF**

Prinsip dasar Silogisme Disjungtif (Disjunctive syllogism) adalah kenyataan bahwa apabila kita dihadapkan pada satu diantara dua pilihan yang ditawarkan (A atau B). Sedangkan kita tidak memilih/tidak menyukai A, maka satu-satunua pilihan adalah memilih B. Begitu juga sebaliknya.

Silogisme Disjungtif dapat ditulis:

| | | |
|---|---|---|
| **$p \vee q$** | **atau** | **$p \vee q$** |
| **$\sim p$** | | **$\sim q$** |
| **————** | | **————** |
| **$\therefore$ q** | | **$\therefore$ p** |

Prinsip-prinsip logika yang dipakai dalam Silogisme Hipotesis adalah

$$[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$$

Silogisme dikatakan sah jika pernyataan **$[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$** maka hasilnya sebuah tautologi. Dengan demikian, untuk menguji sah atau tidaknya Silogisme Disjungtif dapat ditentukan dengan menggunakan tabel nilai kebenaran:

**Perhatikan Contoh berikut:**

P1: Buku logikaku ada di tasku atau tertinggal di rumah $p \vee q$

P2: Buku logikaku tidak ada ditasku $\sim p$

---

Q :Jadi, Buku logikaku tertinggal dirumah $q$

**Penyelesaian:**

p : Buku logikaku ada ditas

q : Buku logikaku tertinggal di rumah

**Tabel Kebenarannya:**

| **p** | **q** | **$p \vee q$** | **$\sim p$** | **$(p \vee q) \wedge \sim p$** | **$[(p \vee q) \wedge \sim p] \to q$** |
|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | S | S | B |
| B | S | B | S | S | B |
| S | B | B | B | B | B |
| S | S | S | B | S | B |

Nilai kebenaran pada kolom terakhir menunjukan bahwa **$[(p \vee q) \wedge \sim p] \to q$** adalah sebuah tautologi. Jadi Silogisme disjungtif adalah argumentasi yang sah.

**Contoh lain:**

P1 = Saya pergi ke mars atau ke bulan

P2 = Saya tidak pergi ke mars

———————————————————————

Q = $\therefore$ Saya pergi ke bulan

## F. SILOGISME HIPOTESIS (TRANSITIVITY)

Prinsip silogisme hipotesis adalah sifat transitif pada implikasi. Jika implikasi $p \to q$ dan $q \to r$ keduanya bernilai benar, maka implikasi $p \to r$ bernilai benar pula.

Silogisme menggunakan sifat menghantar atau transitif dari pernyataan implikasi.

Transitivity dapat ditulis:

**Premis 1: $p \to q$**

**Premis 2 : $q \to r$**

---

**Konkusi: $\therefore p \to r$**

Prinsip-prinsip logika yang dipakai dalam Silogisme Hipotesis adalah

**$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$**

Silogisme dikatakan sah jika pernyataan **$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$** maka hasilnya sebuah tautologi. Dengan demikian, untuk menguji sah atau tidaknya Silogisme dapat ditentukan dengan menggunakan tabel nilai kebenaran:

**Perhatikan Contoh berikut:**

P1: Jika Arimbi selesai makan maka ia mengantuk. $p \to q$

P2: Jika ia mengantuk maka ia akan tidur selama lima menit. $q \to r$

---

Q : Jadi, Jika Arimbi selesai makan maka ia akan tertidur selama lima menit $p \to r$

**Penyelesaian:**

p : Arimbi selesai makan

q : Arimbi mengantuk

r : Arimbi akan tidur selama lima menit

**Tabel Kebenaranya:**

| **p** | **q** | **r** | **$p \to q$** | **$q \to r$** | **$(p \to q) \wedge (q \to r)$** | **$p \to r$** | **$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | S | B | S | S | S | B |
| B | S | B | S | B | S | B | B |
| B | S | S | S | B | S | S | B |
| S | B | B | B | B | B | B | B |
| S | B | S | B | S | S | B | B |
| S | S | B | B | B | B | B | B |
| S | S | S | B | B | B | B | B |

Nilai kebenaran pada kolom terakhir menunjukan bahwa **$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$** adalah sebuah tautologi. Jadi Silogisme hipotesis adalah argumentasi yang sah.

**Contoh Lain:**

P1 = Jika hari hujan maka tanahnya menjadi berlumpur

P2 = Jika tanahnya berlumpur maka sepatu saya akan kotor

———————————————————————————————

Q = $\therefore$ Jika hari hujan maka sepatu saya akan kotor.

## G. KONJUNGSI

Jika ada dua kalimat yang masing-masing benar, maka gabungan kedua kalimat tersebut dengan menggunakan penghubung "$\wedge$" juga bernilai benar.

Konjungsi

**p**

**q**

**——**

$\therefore$ **p$\wedge$q**

## H. DILEMA

Kadang-kadang, dalam kalimat yang dihubungkan dengan penghubung ”$\vee$”, masing-masing kalimat dapat mengimplikasikan sesuatu yang sama. Berdasarkan hal itu maka suatu kesimpulan dapat diambil.

Dilema :

**p$\vee$q**

**p$\rightarrow$r**

**q$\rightarrow$r**

**———**

$\therefore$**r**

**Latihan:**

1. Buatlah proposisi dan tabel kebenaran, kemudian ujilah sah/tidaknya susunan argumentasi berikut:

    **Premis 1: ~q$\rightarrow$p**

    **Premis 2 : q$\vee$~p**

    **Konkusi: $\therefore$q**

2. Buatlah proposisi dan tabel kebenaran, kemudian ujilah sah/tidaknya susunan argumentasi berikut:

    **Premis 1: p$\rightarrow$q**

    **Premis 2 : r $\rightarrow$~q**

    **Konkusi: $\therefore$p$\rightarrow$~r**

3. Diketahui :

    Premis 1: Jika semua sekolah memiliki teknologi informasi dankomunikasi semua sekolah memiliki sambungan internet.

    Premis 2: Jika siswa banyak memiliki sumber belajar tambahan maka beberapa sekolah tidak memilki sambungan ke internet.

Buktikanlah argumentasi berikut $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$ valid atau tidak valid!

4. Diketahui sebuah argumen atau penarikan kesimpulan sbb:

   P1: Jika saya menghabiskan waktu untuk bermain, maka saya tidak belajar.

   P2: Jika saya tidak belajar, maka saya tidak lulus ujian.

   P3: Jika saya lulus ujian, maka kuliah saya cepat selesai.

   P4: Kuliah saya tidak cepat selesai.

   ---

   Q : Saya menghabiskan waktu untuk bermain

   Pertanyaannya:

   1) Uraikan seluruh pernyataan diatas menjadi pernyataan tunggal
   2) Buatlah notasi matematika untuk setiap pernyataan diatas.
   3) Tuliskan notasi matematika untuk argumen diatas.
   4) Buktikan apakah penarikan kesimpulan diatas valid atau tidak.

# Daftar Pustaka

Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

MERCU BUANA

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Bank Soal Pra-UTS

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 07 | 15048 | Tim Dosen |


### Abstract

Bank soal berisi kumpulan soal dan pembahasan, serta layihan soal sesuai dengan materi logika matematika mulai dari himpunan, komposis fungsi, proposisi, dan argumen.


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu mengerjakan soal yang berhubungan dengan himpunan, komposisi fungsi, proposisi, dan penarikan kesimpulan.

Isi

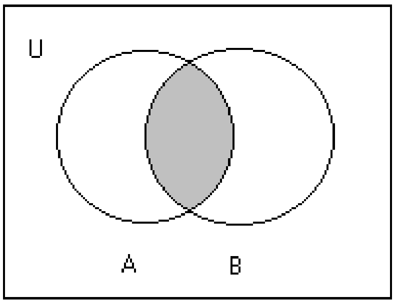
# BANK SOAL PRA-UTS

## 7.1 Soal dan Pembahasan

1. Jika $A$ = {2, 4, 6, 8, 10} dan $B$ = {4, 10, 14, 18} carilah $A \cap B$!

   **Jawab**

   $A \cap B$ = {4, 10}

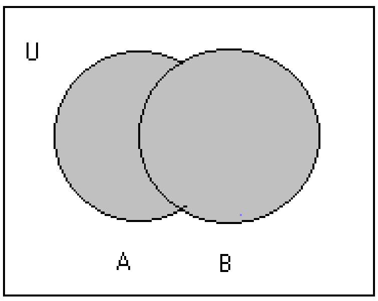



2. Jika $A$ = { 2, 5, 8 , 10} dan $B$ = { 7, 5, 22 }, carilah $A \cup B$!

   **Jawab**

   $A \cup B$ = { 2, 5, 7, 8, 10, 22 }

   Diagram venn:

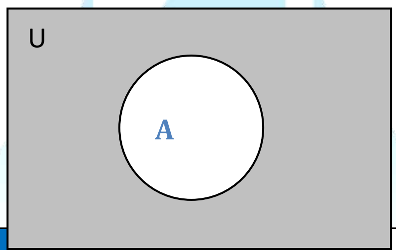



3. Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 10 }, jika $A$ = {1, 3, 5, 7, 9}, carilah A'!

   **Jawab**

   A' = {2, 4, 6, 8, 10}

   Diagram venn:

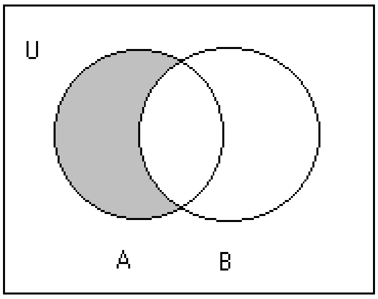


4. Jika $A$ = { 1, 2, 3, ..., 10 } dan $B$ = { 2, 4, 6, 8}, carilah $A - B$!

**jawab**

$A - B$ = { 1, 3, 5, 7, 9, 10 }

Diagram venn:

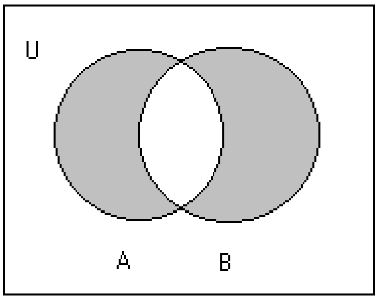



5. Jika $A$ = {1, 2, 4, 6 } dan $B$ = { 2, 3, 5,7 }, carilah $A \oplus B$!

**jawab**

$A \oplus B$ = { 1,3, 4, 5, 6 ,7}

Diagram venn:




6. Sebuah kelas terdiri dari 100 orang siswa. Pada pelajaran olahraga 25 orang siswa mengambil bulu tangkis, 20 orang mengambil basket, 16 orang siswa mengambil renang. Selain itu terdapat 5 siswa orang yang mengambil ketiganya, 2 oarang siswa mengambil bulu tangkis dan renang, 3 orang siswa mengambil basket dan renang, dan 58 orang siswa tidak mengambil ketiga-tiganya. Ditanya:

   a) Tentukanlah n (A), n (B), n (C), n ($A \cap C$), n ($B \cap C$), n ($A \cup B \cup C$), n ($A \cap B \cap C$)!!!

   b) Hitunglah siswa yang hanya mengambil bulu tangkis dan basket / n ($A \cap B$) !!!

Penyelesaian:

a. $n(A) = 25$ siswa

$n(B) = 20$ siswa

$n(C) = 16$ siswa

$n(A \cap C) = 7$ siswa

$n(B \cap C) = 8$ siswa

$n(A \cup B \cup C)' = 100 - 58 = 42$ siswa

$n(A \cap B \cap C) = 5$ siswa

b. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$42 = 25 + 20 + 16 - n(A \cap B) - 7 - 8 + 5$

$42 = 61 - 10 - n(A \cap B)$

$42 = 51 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 51 - 42$

$= 9$ siswa

Jadi banyaknya siswa yang mengambil bulu tangkis dan basket adalah 9 siswa.

7. Misalkan $A$ dan $B$ himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

***Bukti***:

$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A')$ (Definisi operasi selisih)

$= (A \cup B) \cap (A \cup A')$ (Hukum distributif)

$= (A \cup B) \cap U$ (Hukum komplemen)

$= A \cup B$ (Hukum identitas)

8. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan $A$ dan $B$, bahwa

(i) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$ dan

(ii) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

***Bukti***:

(i) $A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cap B)$ (H. distributif)

$= U \cap (A \cap B)$ (H. komplemen)

$= A \cup B$ (H. identitas)

(ii) $A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B)$ (H. distributif)

$= \varnothing \cup (A \cap B)$ (H. komplemen)

$= A \cap B$ (H. identitas)

**dapat melalui dualitas dari (i)**

$A \cap (A' \cup B) = \{ A \cap (A \cup B) \} \cap (A' \cup B)$ (H. Penyerapan)

$= A \cap \{ (A \cup B) \cap (A' \cup B) \}$ (H. Asosiatif)

$= A \cap \{ (A \cup A') \cup B) \}$ (H. distributif)

$= A \cap (\varnothing \cup B)$ (H. Komplement)

$= A \cap B$ (H. Identitas)

9. Tunjukkan apakah penarikan kesimpulan berikut ini valid atau tidak:

P1: Jika Arimbi selesai makan maka ia mengantuk. $p \rightarrow q$

P2: Jika ia mengantuk maka ia akan tidur selama lima menit. $q \rightarrow r$

---

Q : Jadi, Jika Arimbi selesai makan maka ia akan tertidur selama lima menit. $p \rightarrow r$

Tabel Kebenaranya:

| p | q | r | $p \to q$ | $q \to r$ | $(p \to q) \wedge (q \to r)$ | $p \to r$ | $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B | B | B |
| B | B | S | B | S | S | S | B |
| B | S | B | S | B | S | B | B |
| B | S | S | S | B | S | S | B |
| S | B | B | B | B | B | B | B |
| S | B | S | B | S | S | B | B |
| S | S | B | B | B | B | B | B |
| S | S | S | B | B | B | B | B |

Argumen diatas adalah **valid**.

10. Tunjukkan apakah penarikan kesimpulan berikut ini valid atau tidak:

P1: Jika seseorang adalah mahasiswa UMB akan ia pintar. $p \to q$

P2: Orang itu tidak pintar. $\sim q$

---

Q : Jadi, orang itu bukan mahasiswa UMB. $\sim p$

Tabel Kebenaran:

| p | q | $(p \to q)$ | $\sim q$ | $(p \to q) \wedge \sim q$ | $\sim p$ | $[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | S | S | S | B |
| B | S | S | B | S | S | B |
| S | B | B | S | S | B | B |
| S | S | B | B | B | B | B |

Argumen diatas adalah **valid**.

11. Tunjukkan apakah penarikan kesimpulan berikut ini valid atau tidak:

P1: Jika seseorang adalah mahasiswa UMB akan ia pintar. $p \to q$

P2: Orang itu tidak pintar. $\sim q$

---

Q : Jadi, orang itu bukan mahasiswa UMB. ~p

Tabel Kebenaran:

| p | q | (p → q) | ~q | (p → q) ∧ ~q | ~p | [(p → q) ∧ ~q] → ~p |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | S | S | S | B |
| B | S | S | B | S | S | B |
| S | B | B | S | S | B | B |
| S | S | B | B | B | B | B |

Argumen diatas adalah **valid**.

12. Selidiki pernyataan di bawah ini apakah suatu tautologi, kontradiksi atau kontingensi!

( ~p ∧ q ) v ( q → p )

| p | q | ~ p | ~ p ∧ q | q → p | ( ~p ∧ q ) v ( q → p ) |
|---|---|---|---|---|---|
| B | B | S | S | B | B |
| B | S | S | S | B | B |
| S | B | B | B | S | B |
| S | S | B | S | B | B |

Karena pada tabel kebenaran di atas benar semua, maka pernyataan di atas suatu tautologi

13. "*Ani dapat berjalan-jalan ke pantai atau ke gunung pada liburan kali ini. Jika Ani berjalan-jalan ke gunung, dia harus membawa jaket yang tebal. Ani tidak ke pantai liburan ini. Karena itu Ani harus membawa jaket tebal* "

Apakah argumen tersebut sahih ?

Jika sahih buktikan dengan tabel kebenaran!

Jawaban: Misalkan,

*p* : Ani berjalan-jalan ke pantai

*q* : Ani berjalan-jalan ke gunung

*r* : Ani harus membawa jaket ebal

Argumen pada soal dapat dituliskan :

*p* ∨ *q*

*q* → *r*

~*p*

-------------

*r*

Untuk membuktikan kesahihan argumen, harus diperlihatkan bahwa
$[(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim p] \rightarrow r$ merupakan tautologi.

Dengan tabel kebenaran,

| *p* | *q* | *r* | *p* ∨ *q* | *q* → *r* | ~*p* | (p ∨ q) ∧ (q → r) ∧ ~*p* | [ (p ∨ q) ∧ (q → r) ∧ ~*p*] → r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | S | S | B |
| B | B | S | B | S | S | S | B |
| B | S | B | B | B | S | S | B |
| B | S | S | B | B | S | S | B |
| S | B | B | B | B | B | B | B |
| S | B | S | B | S | B | S | B |
| S | S | B | S | B | B | S | B |
| S | S | S | S | B | B | S | B |

Dengan menggunakan tabel tersebut terbukti bahwa

$$[(p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg p] \rightarrow r \quad \text{merupakan tautologi.}$$

Maka,dapat disimpulkan argumen dalam soal sahih

14. Hitung berapa bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 200 yang habis dibagi 4 atau 7 atau 9?

Jawaban:

Misalkan :

A = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 4,

B = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 7,

C = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 9

Dengan menggunakan prinsip inklusi eksklusi, banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 4 atau 7 atau 9 yaitu :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$= \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{36} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{63} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{252} \right\rfloor$$
$$= 50 + 28 + 22 - 7 - 5 - 3 + 0 = 85$$

15. Diberikan dua buah *multiset* berikut:

*A* : {1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4} dan *B* : {1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4}.

Tentukan:

**a)** $A \cap B$

**b)** $A \cup B$

**c)** $A - B$

**d)** $A + B$

Jawaban:

a) {1, 1, 2, 2, 4, 4}

b) {1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4}

c) {1, 1, 1, 3, 3, 3, 3}

d) {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4}

## 7.2 Latihan Soal

1. Jika U= {a, b, c, . . . i}, A= { a, i}, B= {a, b, c} , dan C= {a, g, h}.

   Carilah:

   a. $A \cap B \cap C$
   b. $A \cup (B \cap C)$
   c. $A \cup B \cup C$
   d. $A' \cap (B \cup C)$
   e. $(A \cup B) \cap C'$

2. Tuliskan notasi matematika dari himpunan berikut ini!

   a. A = {2, 4, 6, 8, …}
   b. B = {1, 3, 5, 7, …}
   c. C = {1, 4, 8, 16, 32, …}

d. D = {-2, -4, -6, -8,  …}
e. E = {-1, -3, -5, -7, …}

3. Sebanyak 1232 orang mahasiswa mengambil kuliah bahasa Inggris, 879 orang mengambil kuliah bahasa Perancis, dan 114 orang megambil kuliah bahasa Jerman. Sebanyak 103 orang mengambil kuliah bahasa Inggris dan Perancis, 23 orang megambil kuliah bahasa Inggris dan Jerman, dan 14 orang mengambil bahasa Perancis dan Jerman. Jika 2092 orang mengambil paling sedikit satu buah kuliah bahasa Inggris, bahasa Perancis, dan bahasa Jerman. Berapa banyak mahasiswa yang mengambil kuliah ketiga bahasa tersebut?

4. Di antara 100 mahasiswa, 32 orang mempelajari matematika , 20 orang mempelajari fisika, 45 orang mempelajari biologi, 15 mempelajari matematika dan biologi, 7 mempelajari matematika dan fisika, 10 mempelajari fisika dan biologi, dan 30 tidak mempelajari satupun di antara ketiga bidang tersebut. Hitunglah banyaknya mahasiswa yang mempelajari ketiganya!

5. Diket f (x) = $x^2$ - 4 dan g (x) = 2x + 3

Ditanya

a. Carilah rumus (f o g) (x) dan (g o f) (x)
b. Buktikan bahwa (f o g) (2) = f (g(2))
   Dan (g o f) (2) = g (f (2))

6. Diket f (x) = $2x^2$ - 2 dan g (x) = x - 3

Ditanya

a. Carilah rumus (f o g) (x) dan (g o f) (x)
b. Buktikan bahwa (f o g) (2) = f (g(2))
   Dan (g o f) (2) = g (f (2))

7. Diket f (x) = $x^2$ + 2 dan g (x) = 2x - 3

Ditanya

a. Carilah rumus (f o g) (x) dan (g o f) (x).
b. Buktikan bahwa (f o g) (3) = f (g(3))
   Dan (g o f) (3) = g (f (3))

8. Diket f (x) = $2x^2 - 2$, g (x) = x - 3 dan h (x) = x

Ditanya

a. Carilah rumus (f o g) (x) , (g o f) (x), (g o h) (x), dan (h o f) (x).
b. Buktikan bahwa (f o g) (2) = f (g (2))
c. Buktikan bahwa (g o f) (2) = g (f (2))
d. Buktikan bahwa (g o h) (2) = g (h (2))
e. Buktikan bahwa (h o f) (2) = h (f (2))

9. Diketahui fungsi $f(x) = 3x - 9$, $g(x) = \frac{1}{3}x$, dan $h(x) = 9x$.

a. Carilah rumus (f o g) (x) , (g o f) (x), (g o h) (x), dan (h o f) (x)
*b.* Buktikan bahwa *( f o g ) (3) = f( g (3))*
*c.* Buktikan bahwa *(g o h ) (3) = g ( h (3))*
*d.* Buktikan bahwa *( g o f ) (3) = g( f (3))*
*e.* Buktikan bahwa *( h o f ) (3) = h ( f (3))*

10. Misalkan A dan B himpunan.

Tunjukan bahwa (A – B) – C = (A – C) – B

11. Jika A dan B masing-masing adalah himpunan,

buktikan bahwa $(A \oplus B) \cap A = A \cap B'$

12. Buatlah pernyataan yang menyatakan notasai matematika berikut dan buatlah tabel kebenaran untuk penyataan-pernyataan tersebut:

a. $p \wedge \sim q$

b. $(p \rightarrow q) \wedge \sim p$

c. $\sim p \rightarrow (q \vee \sim q)$

d. $p \rightarrow (q \vee r)$

e. $(p \rightarrow \sim q) \wedge \sim r$

f. $(\sim p \wedge q) \rightarrow r$

g. $p \rightarrow (\sim q \vee \sim r)$

13. Periksalah validitas penarikan kesimpulan berikut ini:

P1 : Jika dua sisi sebuah segitiga tidak sama, maka besar sudut yang berhadapan adalah tidak sama.

P2 : Dua sisi sebuah segitiga sama.

---

Q : Besar sudut yang berhadapan sama.

14. Periksalah validitas penarikan kesimpulan berikut ini:

P1 : Jika 15 adalah bilangan prima, maka 5 tidak membagi 15.

P2 : 5 membagi 15.

---

Q : 15 bukan bilangan prima.

15. Diketahui sebuah argumen atau penarikan kesimpulan sebagai berikut:

P1: Jika saya menghabiskan waktu untuk bermain, maka saya tidak belajar.

P2: Jika saya tidak belajar, maka saya tidak lulus ujian.

P3: Jika saya lulus ujian, maka kuliah saya cepat selesai.

P4: Kuliah saya tidak cepat selesai.

---

Q : Saya menghabiskan waktu untuk bermain

Pertanyaannya:

a. Uraikan seluruh pernyataan diatas menjadi pernyataan tunggal
b. Buatlah notasi matematika untuk setiap pernyataan diatas.
c. Tuliskan notasi matematika untuk argumen diatas.
d. Buktikan apakah penarikan kesimpulan diatas valid atau tidak.

16. Selidiki apakah pernyataan-pernyataan di bawah ini suatu tautologi, kontradiksi atau kontingensi!

    a. $( p \wedge q ) \rightarrow p$

    b. $( p \rightarrow q ) \rightarrow [ ( \sim q \wedge r ) \rightarrow ( r \wedge p ) ]$

    c. $( p \vee q ) \rightarrow ( \sim p \rightarrow q )$

17. Selidiki apakah pernyataan di bawah ini tautologi, kontradiksi atau kontingensi

    a. $( p \vee q ) \rightarrow ( \sim p \rightarrow r )$

    b. $[( p \rightarrow q ) \wedge ( q \rightarrow p )] \rightarrow ( p \rightarrow q )$

    c. $( p \wedge q ) \wedge ( p \rightarrow \sim q )$

18. Selidiki apakah pernyataan di bawah ini implikasi logis, ekwivalen logis atau tidak kedua-duanya!

    a. $[( p \wedge q ) \rightarrow r] \equiv [( p \rightarrow \sim q ) \vee r]$

    b. $[( p \rightarrow q ) \rightarrow r] \rightarrow ( p \vee q )$

    c. $[p \rightarrow ( q \rightarrow r )] \equiv [( p \wedge q ) \rightarrow r]$

# Daftar Pustaka

Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Aljabar Boolean

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 08 | 15048 | Tim Dosen |


### Abstract

Aljabar Boolean adalah sistem aljabar yang berisi set S dengan dua operasi penjumlahan yang dilambangkan dengan tanda tambah (+) dan perkalian yang dilambangkan dengan tanda titik (.)


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu membuat tabel kebenaran dengan menggunakan prinsip aljabar boolean.

# ALJABAR BOOLEAN

## 8.1 Definisi

Aljabar Boolean adalah sistem aljabar yang berisi set S dengan dua operasi penjumlahan yang dilambangkan dengan tanda tambah (+) dan perkalian yang dilambangkan dengan tanda titik (.). Pada prinsipnya, materi Aljabar Boolean mirip dengan materi tentang Proposisi. Perbedaan antara Proposisi dengan Aljabar Boolean adalah:

- Pada pernyataan Proposisi, penulisan nilai sebuah pernyataan dapat ditulis dengan ”B” untuk *Benar* dan ”S” untuk *Salah*. Sedang pada pernyataan Aljabar Boolean, penulisan nilai kebenaran ditulis dengan ”1” untuk nilai *Benar* dan ”0” untuk *Salah*. Sebagai catatan tambahan, penggunaan ”1” untuk *Benar* dan ”0” untuk *Salah* ini dikenal dengan istilah *Logic High* atau menyatakan nilai logika dengan ”Logika Tinggi”. Sebaliknya, dengan menggunakan *Logic Low*, nilai Benar akan menggunakan ”0” dan Salah menggunakan ”1”.
- Operasi-operasi menggunakan logika yang sama, namun notasinya berbeda. Hal ini dipaparkan lebih jelas pada subbab-subbab berikut ini.

## 8.2 Operator Logika pada Aljabar Boolean

Pada aljabar Boolean juga dikenal operasi-operasi logika seperti pada materi Proposisi. Di sini juga dibedakan antara operasi dasar dengan operasi turunan. Kesemuanya menggunakan notasi masing-masing untuk operator logikanya.

### 8.2.1 Operator Dasar

Ada tiga operator dasar yang terdiri dua buah operator binary, yaitu operator AND (untuk logika DAN) dan operator OR (untuk logika ATAU), dan sebuah operator unary, yaitu operator NOT (untuk logika NEGASI). Ketiganya dapat dijelaskan sebagai berikut:

**1. Operator AND.**

Notasi Aljabar Booleannya adalah sebuah titik (· ). Sebagai perban-dingan, pada Proposisi notasinya adalah ”$\wedge$”.

Contoh:

”p dan q” ditulis **p.q** atau bisa juga ditulis **pq** (tanpa titik)

Tabel kebenarannya:

| *p* | *q* | *p.q* |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Perhatikan bahwa untuk memudahkan penulisan (bandingkan dengan konversi desimal ke biner), nilai *Salah* didahulukan.

**2. Operator OR.**

Notasi Aljabar Booleannya adalah sebuah tanda tambah ( + ). Perbandingannya, pada Proposisi notasinya adalah ”∨”.

Contoh:

”p atau q”, ditulis **p + q**

Tabel kebenarannya:

| *p* | *q* | *p + q* |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**3. Operator NOT.**

Notasi Aljabar Boolennya adalah dengan memberikan tanda bar diatas variabel atau dengan tanda aksen (petik tunggal penutup) setelah variabel. Perbandingannya, pada Proposisi notasinya adalah ”~”.

Contoh:

”Not p” atau ”negasi p”, ditulis $\overline{\mathbf{p}}$ atau bisa ditulis **p’**.

Tabel kebenarannya:

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Contoh Soal:

Untuk setiap kalimat di bawah ini, buatlah notasi matematikanya dengan menggunakan Aljabar Boolean dan buat juga tabel kebenarannya!

1. Hari hujan dan udara dingin.
2. Hari hujan atau udara dingin.
3. Hari hujan dan udara tidak dingin.
4. Hari tidak hujan atau udara dingin.
5. Hari tidak hujan dan udara tidak dingin.
6. Hari tidak hujan atau udara tidak dingin.

Penyelesaian:

1. Hari hujan dan udara dingin

   p = ”hari hujan”

   q = ”udara dingin”

   p.q = ”hari hujan dan udara dingin”

   Notasinya: p.q

Tabel Kebenarannya:

| *p* | *q* | *p.q* |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

2. Hari hujan atau udara dingin

   p = ”hari hujan”

   q = ”udara dingin”

   p + q = ”hari hujan atau udara dingin”

   Notasinya: p + q

   Tabel kebenarannya:

| *p* | *q* | *p + q* |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

3. Hari hujan dan udara tidak dingin

   p = ”hari hujan”

   $\bar{q}$ = ”udara tidak dingin”

   p . $\bar{q}$ = ”hari hujan dan udara tidak dingin”

   Notasinya: p . $\bar{q}$

Tabel kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $\overline{q}$ | $p \, . \, \overline{q}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

4. Hari tidak hujan atau udara dingin

   $\overline{p}$ = "hari tidak hujan"

   q = "udara dingin"

   $\overline{p}$ + q = "hari tidak hujan atau udara dingin"

   Notasinya: $\overline{p} + q$

   Tabel kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $\overline{p} + q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

5. Tidak benar bahwa hari hujan dan udara dingin.

   $\overline{p}$ = hari tidak hujan

   $\overline{q}$ = udara tidak dingin

   $\overline{p} \, . \, \overline{q}$ = tidak benar bahwa hari hujan dan udara dingin

   Notasinya: $\overline{p} \, . \, \overline{q}$

Tabel kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $\overline{p}\cdot\overline{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

6. Tidak benar bahwa hari hujan atau udara dingin

   $\overline{\text{p}}$ = ”hari tidak hujan”

   $\overline{\text{q}}$ = ”udara tidak dingin”

   $\overline{\text{p}}$+ $\overline{\text{q}}$ = ”tidak benar bahwa hari hujan atau udara dingin”

   Notasinya: $\overline{\text{p}}$ + $\overline{\text{q}}$

   Tabel kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $\overline{p}+\overline{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

### 8.2.2 Operator Turunan

Seperti pada proposisi, logika matematika pada materi aljabar Boolean juga memiliki operasi-operasi yang diturunkan dari operasi-operasi dasar. Contoh yang paling sederhana adalah operasi $p\bar{q} + \bar{p}q$ . Operasi ini dikenal sebagai operasi *Exclusive-OR* atau Eksklusif-ATAU dengan operator XOR.

Operasi-operasi turunan lainnya antara lain operasi Not-AND (disingkat NAND), operasi Not-OR (disingkat NOR), dan sebagainya. Operasi-operasi ini sebenarnya tidak menggunakan operator khusus (kecuali operator XOR) karena sebenarnya dapat diturunkan dengan menggunakan operator-operator dasar. Operator logika XOR sendiri menggunakan notasi $\oplus$ .

## 1. Operasi XOR.

Notasi Aljabar Booleannya adalah ”⊕”. Perbandingannya, pada Proposisi adalah ”I”.

Contoh:

”p XOR q”, ditulis **p ⊕ q** atau $p\bar{q} + \bar{p}q$ atau $\bar{p}q + p\bar{q}$

Tabel kebenarannya:

| p | q | p ⊕ q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

## 2. Operasi NAND (Not-AND)

Contohnya adalah kalimat ”Tidak benar bahwa hari hujan dan udara dingin”.

Kalimat ini dapat dinotasikan sebagai $\overline{p \,.\, q}$ atau **(p . q)’**.

Tabel kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $p.q$ | $\overline{p\,.\,q}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

**3. Operasi NOR (Not-OR)**

Contohnya adalah kalimat ”Tidak benar bahwa hari hujan atau udara dingin”.

Kalimat ini dapat dinotasikan sebagai $\overline{p+q}$ atau **(p + q)’**.

Tabel kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $p+q$ | $\overline{p+q}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

**Soal Latihan dan Jawaban**

Buatlah Kalimat dan buktikan dengan menggunakan Tabel Kebenarannya!

1. $p\,.\,\overline{q}$
2. $\overline{p} + q$
3. $\overline{p}\,.\,\overline{q}$
4. $\overline{p+q}$

5. $\overline{p \cdot q}$

6. p ⊕ q

**Jawaban**

1. p . $\bar{q}$ = Awan mendung dan udara tidak dingin

Tabel Kebenaranya:

| $p$ | $q$ | $\bar{q}$ | $p \cdot \bar{q}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

2. $\bar{p}$ + q = Yanto tidak cerdas atau Nilai ujian Bagus

Tabel kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{p} + q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

3. $\bar{p} \cdot \bar{q}$ = Susi tidak kaya dan susi tidak cantik

Tabel kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p} \cdot \bar{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

4. $\overline{p + q}$ = Tidak benar bahwa saya tidur atau saya belajar

   Tabel kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $p + q$ | $\overline{p + q}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

6. $\overline{p \,.\, q}$ = Tidak benar bahwa saya makan dan minum

   Tabel kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $p.q$ | $\overline{p \,.\, q}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

7. p ⊕ q = Saya lahir di Jakarta atau saya lahir di Bandung

   Tabel kebenarannya:

| p | q | p ⊕ q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

# Daftar Pustaka

Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Konversi Bentuk Fungsi

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 09 | 15048 | Tim Dosen |


### Abstract

Konversi Bentuk Fungsi terdiri dari 2 macam yaitu penjumlahan dari hasil kali (SOP) dan perkalian dari hasil jumlah (POS).


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu mencari nilai SOP dan POS, serta mampu merubah kebentuk kanonik SOP dan POS..

# KONVERSI BENTUK FUNGSI

## 9.1 Bentuk Kanonik

Ada dua macam bentuk kanonik:

- Penjumlahan dari hasil kali (sum-of-product atau SOP)
- Perkalian dari hasil jumlah (product-of-sum atau POS)

Contoh:

1. f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz → SOP

   Setiap suku (term) disebut minterm

2. g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')

   (x' + y + z')(x' + y' + z) → POS

   Setiap suku (term) disebut maxterm

**Bentuk Baku**

Contohnya:

f(x, y, z) = y' + xy + x'yz (bentuk baku SOP

f(x, y, z) = x(y' + z)(x' + y + z') (bentuk baku POS)

**Setiap minterm/maxterm mengandung literal lengkap**

| x | y | Minterm | | Maxterm | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Suku | Lambang | Suku | Lambang |
| 0 | 0 | x'y' | m0 | x + y | M0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | x’y | m1 | x + y’ | M1 |
| 1 | 0 | xy’ | m2 | x’ + y | M2 |
| 1 | 1 | x y | m3 | x’ + y’ | M3 |

| | | | Minterm | | Maxterm | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | y | z | Suku | Lambang | Suku | Lambang |
| 0 | 0 | 0 | x’y’z’ | m0 | x + y + z | M0 |
| 0 | 0 | 1 | x’y’z | m1 | x + y + z’ | M1 |
| 0 | 1 | 0 | x‘y z’ | m2 | x + y’+z | M2 |
| 0 | 1 | 1 | x’y z | m3 | x + y’+z’ | M3 |
| 1 | 0 | 0 | x y’z’ | m4 | x’+ y + z | M4 |
| 1 | 0 | 1 | x y’z | m5 | x’+ y + z’ | M5 |
| 1 | 1 | 0 | x y z’ | m6 | x’+ y’+ z | M6 |
| 1 | 1 | 1 | x y z | m7 | x’+ y’+ z’ | M7 |

Contoh soal:

Nyatakan tabel kebenaran di bawah ini dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

| x | y | z | f(x, y, z) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Penyelesaian:

(a) SOP

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$

atau (dengan menggunakan lambang minterm),

$$f(x, y, z) = m1 + m4 + m7 = \sum (1, 4, 7)$$

(b) POS

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$$

$$(x' + y + z')(x' + y' + z)$$

atau dalam bentuk lain,

$$f(x, y, z) = M0\ M2\ M3\ M5\ M6 = \prod(0, 2, 3, 5, 6)$$

Contoh soal:

Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

Penyelesaian:

(a) SOP

$x = x(y + y')$

$= xy + xy'$

$= xy\,(z + z') + xy'(z + z')$

$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$

$y'z = y'z\,(x + x')$

$= xy'z + x'y'z$

Jadi $f(x, y, z) = x + y'z$

$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z$

$= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz$

atau $f(x, y, z) = m1 + m4 + m5 + m6 + m7 = \Sigma\,(1,4,5,6,7)$

(b) POS

$f(x, y, z) = x + y'z$

$= (x + y')(x + z)$

$x + y' = x + y' + zz'$

$= (x + y' + z)(x + y' + z')$

$x + z = x + z + yy'$

$= (x + y + z)(x + y' + z)$

Jadi, $f(x, y, z) = (x + y' + z)(x + y' + z')(x + y + z)(x + y' + z)$

$= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$

atau $f(x, y, z) = M0M2M3 = \prod(0, 2, 3)$

## 9.2 Konversi Antar Bentuk Kanonik

Misalkan

$f(x, y, z) \quad = \Sigma\ (1, 4, 5, 6, 7)$

dan f ’adalah fungsi komplemen dari f,

$f'(x, y, z) = \Sigma\ (0, 2, 3) = m0 + m2 + m3$

Dengan menggunakan hukum De Morgan, kita dapat memperoleh fungsi f dalam bentuk POS:

$$
\begin{aligned}
f'(x, y, z) &= (f'(x, y, z))' = (m0 + m2 + m3)' \\
&= m0' \,.\, m2' \,.\, m3' \\
&= (x'y'z')' \ (x'y\,z')' \ (x'y\,z)' \\
&= (x + y + z)\ (x + y' + z)\ (x + y' + z') \\
&= M0\ M2\ M3 \\
&= \prod\ (0,2,3)
\end{aligned}
$$

Jadi, $f(x, y, z) = \Sigma\ (1, 4, 5, 6, 7) = \prod\ (0,2,3)$.

Kesimpulan: $mj' = Mj$

Contoh soal:

Nyatakan

$f(x, y, z)= \prod\ (0, 2, 4, 5)$ dan

$g(w, x, y, z) = \Sigma(1, 2, 5, 6, 10, 15)$

dalam bentuk SOP.

Penyelesaian:

$f(x, y, z) \quad = \Sigma\ (1, 3, 6, 7)$

$g(w, x, y, z) \quad = \prod\ (0, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14)$

**Latihan soal:**

Carilah bentuk kanonik SOP dan POS dari $f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$

Penyelesaian:

(a) SOP

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= y' + xy + x'yz' \\ &= y' (x + x') (z + z') + xy (z + z') + x'yz' \\ &= (xy' + x'y') (z + z') + xyz + xyz' + x'yz' \\ &= xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xyz' + x'yz' \end{aligned}$$

atau $f(x, y, z) = m0+ m1 + m2+ m4+ m5+ m6+ m7$

(b) POS

$f(x, y, z) = M3 = x + y' + z'$

Contoh:

1. Cari bentuk standar dari $f(x,y) = x'$ .

   Jawab

   $f(x,y) = x' . (y + y')$

   $= x' y + x' y'$ ***{bentuk standar SOP}***

   $= m0 + m1$

   dengan $mj' = Mj$

   maka:

   $f'(x,y) = x y' + x y$

   $(f'(x,y))' = ( x + y' ) ( x + y )$ ***{bentuk standar POS}***

   $= M2M3$

2. Cari bentuk standar dari $f(x,y,z) = y' + x y +x' y z'$

   Jawab

f(x,y,z) = y’ + x y + x’ y z’ ***{lengkapi literal pada tiap suku}***

= y’ ( x + x’ ) ( z + z’ ) + x y ( z + z’ ) + x’ y z’

= ( x y’ + x’ y’ ) ( z + z’ ) + x y z + z y x’ + x’ y z’

= xy’z + xy’z’ + x’y’z + x’y’z’ + xyz + xyz’ + x’yz’

= m0 + m1 + m2 + m4 + m5 + m6 + m7

atau

f(x,y,z) = x + y’ + z’

= M3

3. Carilah bentuk kanonik dari soal berikut:

f(x,y) = x’ y + x y

Jawab

Tabel nilainya:

| x | y | Minterm | | | Maxterm | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Term | Des | Value | Term | Des | Value |
| 0 | 0 | x' y’ | m0 | 0 | x + y | M0 | 0 |
| 0 | 1 | x' y | m1 | 1 | x + y’ | M1 | 1 |
| 1 | 0 | x y' | m2 | 1 | x' + y | M2 | 1 |
| 1 | 1 | x y | m3 | 0 | x' + y’ | M3 | 0 |

Dari tabel diperoleh:

Nilai 1 : minterm : f(x,y) = m1 + m2 = $\sum(1,2)$

Nilai 0 :maxterm : f(x,y) = M0 . M3 = $\prod(0,3)$

Cara konversi:

f(x,y) = x' y' + x y = m0 + m3 ***{lihat tabelnya}***

maka dual-nya adalah:

f'(x,y) = ( x' + y' ) . ( x + y )

f(x,y) = ( x + y ) . ( x' + y' ) = M0 . M3

4. Carilah bentuk kanonik dari soal berikut:
   f(x,y,z) = F = x' y' z + x y' z' + x y z

   Jawab

   Tabel nilainya:

| x | y | z | Minterm | Maxterm | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | x' y' z' | x + y + z | 0 |
| 0 | 0 | 1 | x' y' z | x + y + z' | 1 |
| 0 | 1 | 0 | x' y z' | x + y' + z | 0 |
| 0 | 1 | 1 | x' y z | x + y' + z' | 0 |
| 1 | 0 | 0 | x y' z' | x' + y + z | 1 |
| 1 | 0 | 1 | x y' z | x' + y + z' | 0 |
| 1 | 1 | 0 | x y z' | x' + y' + z | 0 |
| 1 | 1 | 1 | x y z | x' + y' + z' | 1 |

Jadi f(x,y,z) = m1 + m4 + m7 = $\sum(1,4,7)$

= M0 . M2 . M3 . M5 . M6 = $\prod(0,2,3,5,6)$

Cara Konversinya:

Dari tabel diperoleh:

f'(x,y,z) = x' y' z' + x' y z' + x 'y z +x y' z +x y z'

dual:

F' = ( x' + y' + z' ) . ( x' + y + z' ) . ( x' + y + z ) . ( x + y' + z ) . ( x + y + z' )

Sehingga

f(x,y.z) = ( x + y + z ) . ( x + y' + z ) . ( x + y' + z' ) . ( x' + y + z' ) . ( x' + y' + z )

= M0 . M2 . M3 . M5 . M6

5. Carilah bentuk kanonik dari soal berikut:

f(x,y,z) = F = x y' z + x y' z' + x y z

Jawab

Tabel nilainya:

| x | y | z | Minterm | Maxterm | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | x' y' z' | x + y + z | 0 |
| 0 | 0 | 1 | x' y' z | x + y + z' | 0 |
| 0 | 1 | 0 | x' y z' | x + y' + z | 0 |
| 0 | 1 | 1 | x' y z | x + y' + z' | 0 |
| 1 | 0 | 0 | x y' z' | x' + y + z | 1 |
| 1 | 0 | 1 | x y' z | x' + y + z' | 1 |
| 1 | 1 | 0 | x y z' | x' + y' + z | 0 |
| 1 | 1 | 1 | x y z | x' + y' + z' | 1 |

Jadi f(x,y,z) = x y' z' + x y' z + x y z

= m4 + m5 + m7

= $\sum(4,5,7)$

f(x,y,z) = M0 . M1. M2 . M3 . M6

= ∏(0,1,2,3,6)

6. Carilah bentuk kanonik dari soal berikut:

f(x,y,z) = F = x' y’ z + x y’ z + x y’ z’ + x y z

Jawab

Tabel nilainya:

| x | y | z | Minterm | Maxterm | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | x' y’ z’ | x + y + z | 0 |
| 0 | 0 | 1 | x' y’ z | x + y + z’ | 1 |
| 0 | 1 | 0 | x' y z’ | x + y’ + z | 0 |
| 0 | 1 | 1 | x' y z | x + y’ + z’ | 0 |
| 1 | 0 | 0 | x y’ z’ | x' + y + z | 1 |
| 1 | 0 | 1 | x y’ z | x' + y + z’ | 1 |
| 1 | 1 | 0 | x y z’ | x' + y’ + z | 0 |
| 1 | 1 | 1 | x y z | x' + y’ + z’ | 1 |

Jadi f(x,y,z) = x + y + z’ + x y’ z’ + x y’ z + x y z

= m1+ m4 + m5 + m7

= ∑(1,4,5,7)

f(x,y,z) = M0 . M1. M2 . M3 . M6

= ∏(0,2,3,6)

7. Carilah bentuk kanonik dari soal berikut:

f(x,y,z) = F = x' y’ z + x y’ z’ + x y z

Jawab

Tabel nilainya:

| x | y | z | Minterm | Maxterm | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | x' y’ z’ | x + y + z | 0 |
| 0 | 0 | 1 | x' y’ z | x + y + z’ | 1 |
| 0 | 1 | 0 | x' y z’ | x + y’ + z | 0 |
| 0 | 1 | 1 | x' y z | x + y’ + z’ | 0 |
| 1 | 0 | 0 | x y’ z’ | x' + y + z | 1 |
| 1 | 0 | 1 | x y’ z | x' + y + z’ | 0 |
| 1 | 1 | 0 | x y z’ | x' + y’ + z | 0 |
| 1 | 1 | 1 | x y z | x' + y’ + z’ | 1 |

Jadi f(x,y,z) = x' y’ z + x y’ z’ + x y z

= m1+ m4 + m7

= $\sum(1,4,7)$

f(x,y,z) = M0 . M2 . M3 . M5. M6

= $\prod(0,2,3,5,6)$

8. Carilah bentuk kanonik dari soal berikut:

f(x,y,z) = F = x' y’ z + x y’ z’ + x y z

Jawab

Tabel nilainya:

| x | y | z | Minterm | Maxterm | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | x' y' z' | x + y + z | 0 |
| 0 | 0 | 1 | x' y' z | x + y + z' | 1 |
| 0 | 1 | 0 | x' y z' | x + y' + z | 0 |
| 0 | 1 | 1 | x' y z | x + y' + z' | 0 |
| 1 | 0 | 0 | x y' z' | x' + y + z | 1 |
| 1 | 0 | 1 | x y' z | x' + y + z' | 1 |
| 1 | 1 | 0 | x y z' | x' + y' + z | 0 |
| 1 | 1 | 1 | x y z | x' + y' + z' | 0 |

Jadi f(x,y,z) = x' y' z + x y' z' + x y' z

= m1+ m4 + m5

= $\sum(1,4,5)$

f(x,y,z) = M0 . M2 . M3 . M6. M7

= $\prod(0,2,3,6,7)$

# Daftar Pustaka

Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

MODUL PERKULIAHAN

# Logika Matematika

## Rangkaian Logika

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 10 | 15048 | Tim Dosen |


### Abstract

Untuk mengimplementasikan fungsi-fungsi logika digunakan rangkaian logika. Fungsi Boolean yang diekspresikan dengan AND, OR, NOT, NOR, NAND, XOR dan XNOR menjadi lebih mudah diimplementasikannya dengan dengan menggunakan gerbang logika digital.


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu membedakan gerbang dasar dan gerbang turunan, mampu membuat rangkaian sederhana dan membuat tabel kebenarannya

Isi

# RANGKAIAN LOGIKA

## 10.1 Gerbang Logika

Untuk mengimplementasikan fungsi-fungsi logika digunakan rangkaian logika. Fungsi Boolean yang diekspresikan dengan AND, OR, NOT, NOR, NAND, XOR dan XNOR menjadi lebih mudah diimplementasikannya dengan dengan menggunakan gerbang logika digital.

Faktor-faktor utama dalam pembentukan gerbang logika adalah sebagai berikut:

1. Kemudahan pembentukan gerbang dengan komponen fisik.
2. Pertimbangan ekonomis dalam fabrikasi komponen fisik.
3. Kemungkinan perluasan gerbang dengan lebih dari dua input (masukkan).
4. Sifat-sifat dasar dari operator biner seperti komunitatif dan asosiatif.
5. Kemampuan gerbang untuk mengimplementasikan fungsi Boolean atau konjungsi dengan gerbang-gerbang lain.

Untuk membuat rangkaian logika, dibutuhkan gerbang logika. Pada dasarnya gerbang logika hampir sama dengan fungsi boolean. Dimana fungsi boolean dapat dibedakan menjadi 2 yaitu fungsi dasar dan fungsi turunan, begitu pula dengan gerbang logika. Gerbang logika juga dapat dibedakan menjadi 2 yaitu:

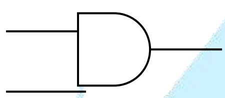
1. Gerbang Dasar.
2. Gerbang Turunan.

## 10.2 GERBANG DASAR

Ada tiga gerbang dasar yang kita pelajari pada bab ini, yaitu:

1. AND.

   Gambar gerbang AND:

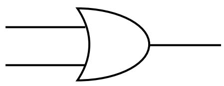
   

   Tabel Kebenaran:

| $p$ | $q$ | $p.q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

2. OR

   Gambar gerbang OR:

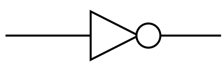


   Tabel Kebenaran:

| $p$ | $q$ | $p + q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

3. NOT

   Gambar gerbang NOT:



   Tabel Kebenaran:

| $p$ | $\bar{p}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |

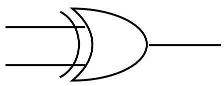
| | |
|---|---|
| 1 | 0 |

## 10.3 GERBANG TURUNAN

Seperti juga pada aljabar boolean yang telah kita pelajari pada bab-bab sebelumnya, ada pula gerbang turunan, antara lain:

1. XOR

   Gambar Gerbang XOR:



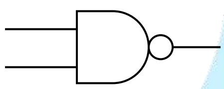
   Tabel Kebenaran:

| p | q | p ⊕ q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

   Operasi XOR adalah identik dengan $p\bar{q} + \bar{p}q$ .

2. NAND (Not-AND)

   Gambar Gerbang NAND:



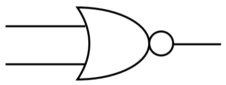
   Contoh dalam kalimat: Tidak benar bahwa udara dingin dan hari hujan.

   Tabel Kebenaran:

| $p$ | $q$ | $p.q$ | $\overline{p \,.\, q}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

3. NOR (Not-OR)

   Gambar Gerbang NOR:

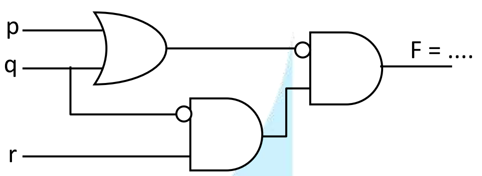
   Contoh Kalimat: Tidak benar bahwa udara dingin atau hari hujan.

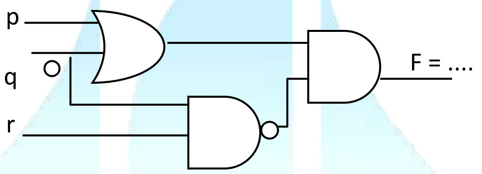
   Tabel Kebenaran:

| $p$ | $q$ | $p + q$ | $\overline{p + q}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

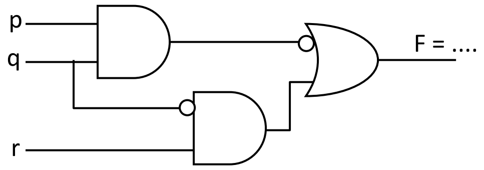
Contoh Rangkaian Logika:

Carilah nilai F dari rangkaian logika berikut:

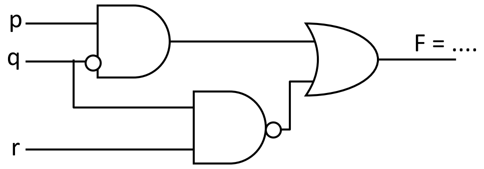
a. 


b. 

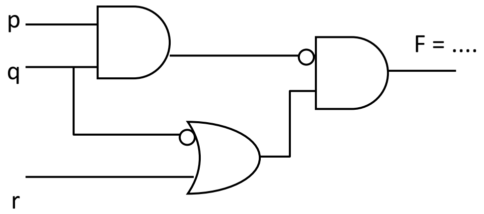
c.



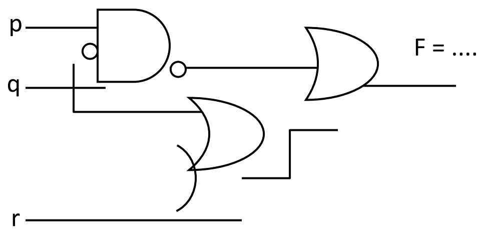

d.




e.




f.




Penyelesaian

a. $F = \overline{(p + q)} \;.\; (\bar{q} \;.\; r)$

b. $F = (p + \bar{q}) \;.\; \overline{(\bar{q} \;.\; r)}$

c. $F = \overline{(p \;.\; q)} + (\bar{q} \;.\; r)$

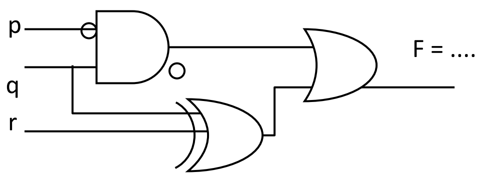
d. $F = (p + \bar{q}) + \overline{(\bar{q} \,.\, r)}$

e. $F = \overline{(p + q)} \,.( \bar{q} + r)$

f. $F = \overline{(\bar{p} \,.q)} + (q \oplus r)$

## Latihan Soal dan Jawaban

1. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini!



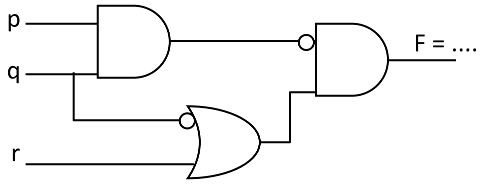

Penyelesaian:

$F = \overline{(\bar{p} \,.q)} + (q \oplus r)$

Tabel Kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{p}$ | $\bar{p}.q$ | $\overline{(\bar{p} \,.q)}$ | $q \oplus r$ | $F = \overline{(\bar{p} \,.q)} + (q \oplus r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

2. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini!



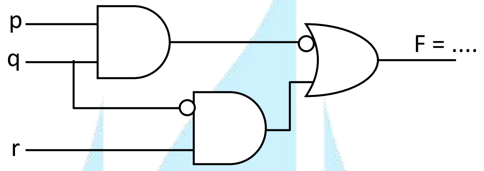

Penyelesaian

F = $\overline{(p+q)}.(\bar{q}+r)$

Tabel Kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{q}$ | $p+q$ | $\overline{(p+q)}$ | $\bar{q}+r$ | $F=\overline{(p+q)}.(\bar{q}+r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

3. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini!



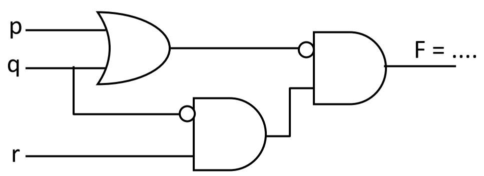
Penyelesaian

F = $\overline{(p\,.\,q)} + (\,\overline{q}\,.\,r)$

Tabel Kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\overline{q}$ | $p.q$ | $\overline{(p\,.\,q)}$ | $\overline{q}.r$ | $F = \overline{(p\,.\,q)} + (\,\overline{q}.r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

4. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini!




Penyelesaian:

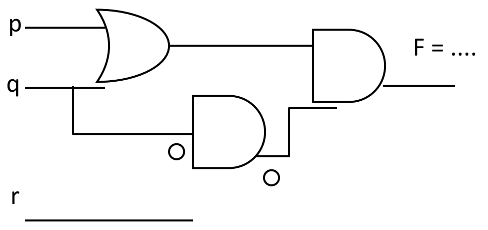
$F = \overline{(p + q)}\ .\ (\,\overline{q}\,.\,r)$

*Tabel Kebenaran:*

| $p$ | $q$ | $r$ | $\overline{q}$ | $p+q$ | $\overline{(p+q)}$ | $\overline{q}.r$ | $F = \overline{(p+q)}\ .\ (\,\overline{q}\,.\,r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

5. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini!




Penyelesaian:

$F = (p + q) . \overline{(\bar{q} . r)}$

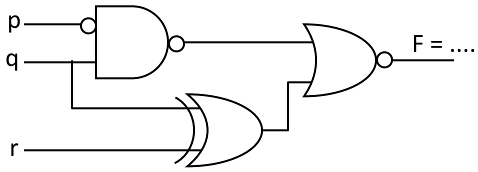
*Tabel Kebenaran:*

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{q}$ | $p+q$ | $\bar{q}.r$ | $\overline{(\bar{q} . r)}$ | $F = (p + q) . \overline{(\bar{q} . r)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

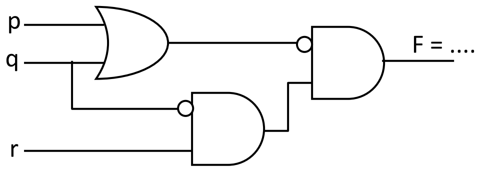
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

**Latihan:**

1. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini.




2. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini



# Daftar Pustaka

Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

MERCU BUANA

UNIVERSITAS

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Metode Peta Karnaugh I

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | **11** | **15048** | Tim Dosen. |


### Abstract

Metode pemetaan yang dikenalkan oleh Karnaugh, disebut Peta Karnaugh (*Karnaugh Map*). Metode Peta Karnaugh merupakan metode grafis untuk menyederhanakan fungsi boolean. Metode pemetaan dapat meminimalisasi fungsi yang kompleks.


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu menyelesaikan fungsi menggunakan metode peta karnaugh baik 2 variabel atau 3 variabel.

# Isi

# METODE PETA KARNAUGH I

### 11.1 Definisi

Metode pemetaan yang dikenalkan oleh Karnaugh, disebut Peta Karnaugh (*Karnaugh Map*). Metode Peta Karnaugh merupakan metode grafis untuk menyederhanakan fungsi boolean. Metode pemetaan dapat meminimalisasi fungsi yang kompleks. Rangkaian logika yang kompleks merupakan merupakan implementasi dari fungsi Boolean yang memberikan ekspresi yang kompleks pula.

Peta Karnaugh digambarkan dengan kotak bujur sangkar. Peta Karnaugh adalah sebuah diagram/peta yang terbentuk dari kotak-kotak (berbentuk bujur sangkar) yang bersisian. Setiap kotak merepresentasikan minterm. Jumlah kotak dan minterm tergantung pada berapa jumlah variabel dari fungsi Boolean. N variabel dalam fungsi Boolean diimplementasikan dengan $2^N$ kotak.

### 11.2 Peta Karnaugh Dua

Untuk 2 variabel terdapat 4 bentuk minterm, dan peta membentuk 4 bujursangkar. Setiap bujursangkar digunakan untuk 1 bentuk minterm. Setiap baris dan kolom ditandai dengan sebuah nilai antara 0 dan 1. Kombinasi 0 dan 1 dari setiap baris dan setiap kolom membentuk semua kemungkinan bentuk minterm dari 2 variabel.

Misalkan dua variabel dalam fungsi boolean adalah x dan y. Baris pada peta karnaugh untuk variabel x dan kolom untuk variabel y. Setiap kotak merepresentasikan minterm dari kombinasi dari kombinasi baris dan kolom yang bersesuaian. Dibawah ini diberikan cara-cara yang lazim digunakan dalam menggambarkan peta Karnaugh. Tapi kita akan lebih sering mengguanakan cara penyajian yang kedua.

| | y | y′ |
|---|---|---|
| x | 11 | 10 |
| x′ | 01 | 00 |

Penyajian 1

| | y | y′ |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| x | xy | x y′ |
| x′ | x′y | x′y′ |

Penyajian 2

| | y | y′ |
|---|---|---|
| x | m3 | m1 |
| x′ | m2 | m0 |

Penyajian 3

Perhatikan bahwa dua kotak yang bertetangga hanya berbeda satu kotak literal. Misalnya Kotak xy dan xy′, hanya berbeda pada literal kedua (y′ dan y), sedangakan literal pertama sama (yaitu x). Jika minterm pada setiap kotak direpresentasikan dengan string biner, maka dua kotak yang bertetangga hanya berbeda 1 bit (contohnya 11 dan 10 pada kedua kotak tersebut hanya berbeda satu bit, yaitu pada bit kedua).

**Contoh1:**

Diberikan fungsi boolean yang diprepresentasikan dengan tabel kebenaran dibawah ini. Petakan fungsi tersebut ke peta Karnaugh!

| x | y | f(x,y) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Penyelesaian:

Fungsi boolean yang merepresentasikan tabel kebenaran adalah f(x,y) = xy′ + xy. Tempatkan 1 didalam kotak peta karnaugh untuk kombinasi nilai x dan y yang bersesuaian (dalam hal ini 1 0 dan 1 1)

| | y | y′ |
|---|---|---|
| x | 1 | 1 |
| x′ | 0 | 0 |

Jadi hasil sederhana dari soal diatas adalah f(x ,y) = x

**Contoh2:**

Dengan menggunakan Peta Karnaugh, sederhanakan fungsi berikut:

F = x′y + xy′ + xy

Penyelesaiannya:

Sesuai dengan bentuk minterm, maka 3 bujursangjar dalam Peta Karnaugh 2 dimensi diisi dengan 1.

Selanjutnya dilakukan pengelompokan semua 1 yang ada dengan membuat kumpulan kotak bujursangkar kecil $2^N$. Buatlah kelompok yang sebesar-besarnya.

Perhatikan gambar berikut ini:

| | y | y' |
|---|---|---|
| x | 1 | 1 |
| x' | 1 | 0 |

Cara menentukan bentuk sederhana dari hasil pengelompokan adalah:

- Carilah variabel mana saja yang memiliki nilai yang sama dalam kelompok tersebut.
- Selanjutnya tentukan bentuk hasil pengelompokan diatas.

Jadi hasil bentuk sederhana dari soal diatas adalah:

F = x + y

### 11.3 Peta Karnaugh Tiga Variabel

Untuk 3 variabel terdapat 8 bentuk minterm. Untuk Fungsi boolean dengan tiga variabel (misalkan x, y, dan z), jumlah kotak di dalam peta karnaugh meningkat menjadi $2^3 = 8$.

Baris pada peta karnaugh untuk variabel x dan kolom untuk variabel yz. Antara satu kolom dengan kolom berikutnya hanya berbeda satu bit. Setiap kotak merepresentasikan minterm dari kombinasi baris dan kolom yang bersesuaian.

| | yz | yz' | y'z' | y'z |
|---|---|---|---|---|
| x | xyz | xyz' | x y'z' | x y'z |
| x' | x' yz | x' yz' | x' y'z' | x' y'z |

**Atau**

| | yz | yz' | y'z' | y'z |
|---|---|---|---|---|
| x | 111 | 110 | 100 | 101 |
| x' | 011 | 010 | 000 | 001 |

Perhatikan urutan disusun sedemikian rupa sehingga setiap dua kotak yang bertetangga hanya berbeda satu bit.

**Contoh1:**

Gambarkan peta Karnaugh untuk f(x, y, z) = x′ yz′ + xyz′ + xyz!

Penyelesaian:

x′ yz′ = 010

xyz′ = 110

xyz = 111

Kotak-kotak yang merepresentasikan minterm 010, 110, dan 111 diisi dengan 1, sedangkan kotak-kotak yang tidak dipakai diisi dengan 0.

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 1 | 0 | 0 |
| x′ | 0 | 1 | 0 | 0 |

Jadi bentuk paling sederhananya adalah f(x, y, z) = xy + yz′

**Contoh2:**

Gambarkan peta karnaugh untuk fungsi f(x, y, z) = xz′ + y

Penyelesaian:

(i) xz′ :

x → semua kotak pada baris ke-1

z′ → semua kotak kolom ke-2 dan kolom ke-3

isi kotak yang beririsan dengan 1.

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x′ | 0 | 0 | 0 | 0 |

(ii) y :

y → semua kotak pada kolom ke-1 dan kolom ke-2

isi kotak-kotak pada kolom 1 dan 2 dengan 1

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 1 | 0 | 0 |
| x′ | 1 | 1 | 0 | 0 |

(iii) Gabungkan (i) dan (ii) dan isikan kotak-kotak yang kosong dengan 0.

Peta karnaugh untuk fungsi f(x, y, z) = xz′ + y aalah:

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 1 | 1 | 0 |
| x′ | 1 | 1 | 0 | 0 |

**Contoh 3:**

Gambarkan peta Karnaught untuk fungsi f(x,y,z) = xy′ + z + x′y′z′ dan carilah bentuk sederhananya!

Penyelesaiannya:

(i) xy′ :

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 1 | 1 |
| x′ | 0 | 0 | 0 | 0 |

(ii) z :

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x′ | 1 | 0 | 0 | 1 |

(iii) x′y′z′ :

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x′ | 0 | 0 | 1 | 0 |

Gabungkan (i), (ii) dan (iii)

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 0 | 1 | 1 |
| x′ | 1 | 0 | 1 | 1 |

Bentuk paling sederhananya adalah f(x,y,z) = y**′** + z

**Contoh 4:**

Gambarkan peta Karnaught untuk fungsi f(x,y,z) = x**′**y + xz**′** + x**′**y**′**z**′** dan carilah bentuk sederhananya!

Penyelesaiannya:

(iv) x**′**y **:**

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x′ | 1 | 1 | 0 | 0 |

(v) xz**′ :**

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x′ | 0 | 0 | 0 | 0 |

(vi) x**′**y**′**z**′ :**

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x′ | 0 | 0 | 1 | 0 |

Gabungkan (i), (ii) dan (iii)

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x′ | 1 | 1 | 1 | 0 |

Bentuk paling sederhananya adalah f(x,y,z) = z′ + x′y

**Latihan Soal:**

1. Gambarkan peta Karnaught untuk tabel berikut dan cari bentuk sederhananya!

| w | x | y | f(x,y,z) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**Penyelesaiannya**:

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| x | | | | |
| x′ | | | | |

Bentuk Paling sederhananya adalah ....

2. Gambarkan peta Karnaught untuk fungsi f(x,y,z) = x + xy'z' + x'y'z' dan carilah bentuk sederhananya!

**Penyelesaiannya:**

| | yz | yz' | y'z' | y'z |
|---|---|---|---|---|
| x | | | | |
| x' | | | | |

Bentuk Paling sederhananya adalah ....

3. Gambarkan peta Karnaught untuk fungsi f(x,y,z) = x + y'z + x'y'z + xyz dan carilah bentuk sederhananya!

**Penyelesaiannya:**

| | yz | yz' | y'z' | y'z |
|---|---|---|---|---|
| x | | | | |
| x' | | | | |

Bentuk Paling sederhananya adalah ....

4. Gambarkan peta Karnaught untuk fungsi f(x,y,z) = y + y'z + xyz' dan carilah bentuk sederhananya!

**Penyelesaiannya:**

| | yz | yz' | y'z' | y'z |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | | | | |
| x′ | | | | |

Bentuk Paling sederhananya adalah ....

# Daftar Pustaka


Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Metode Peta Karnaugh II

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 12 | 15048 | Tim Dosen. |


### Abstract

Peta Karnaugh digambarkan dengan kotak bujur sangkar. Peta Karnaugh adalah sebuah diagram/peta yang terbentuk dari kotak-kotak (berbentuk bujur sangkar) yang bersisian. Setiap kotak merepresentasikan minterm.


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu menyelesaian fungsi menggunakan metode peta karnaugh baik 4 variabel, 5 variabel ataupun 6 variabel.

# Isi

# METODE PETA KARNAUGH II

## 12.1 Peta Karnaugh Empat Variabel

Pendefinisian Peta Karnaugh Empat Variabel sama dengan yang lain, yaitu perubahan ke baris/kolom sebelum dan sesudahnya hanya memiliki 1 buah perubahan saja.

<u>*Cara menggunakan Peta Karnaugh:*</u>

Sesudah dilakukan pengelompokan maka selanjutnya dengan menentukan hasil dari pengelompokan tersebut. Caranya sama seperti pada dua variabel dan tiga variabel yaitu mencari variabel-variabel yang memiliki nilai yang sama.

Misalkan empat variabel didalam fungsi boolean adalah w, x, y, dan z.  Jumlah kotak di dalam peta karnaugh meningkat menjadi $2^4$ = 16. Baris pada peta karnaugh untuk variabel wx dan kolom untuk variabel yz.  Baris pertama diidentifikasi nilai 11 (menyataka wx), baris kedua dengan 10 (menyatakan wx′), baris ketiga denga 00 (menyatakan w′x′), dan baris keempat dengan 01 (menyatakan w′x). Kolom pertama diidentifikasi nilai 11 (menyataka yz), baris kedua dengan 10 (menyatakan yz′), baris ketiga denga 00 (menyatakan y′z′), dan baris keempat dengan 01 (menyatakan y′z). Perhatikanlah bahwa antara satu kolom dengan kolom berikutnya hanya berbeda satu bit. Setiap kotak merepresentasikan minterm dari kombinasi baris dan kolom yang bersesuaian.

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | wxyz | wxyz′ | wxy′z′ | wxy′z |
| wx′ | wx′yz | wx′yz′ | wx′y′z′ | wx′y′z |
| w′x′ | w′x′yz | w′x′yz′ | w′x′y′z′ | w′x′y′z |
| w′x | w′xyz | w′xyz′ | w′xy′z′ | w′xy′z |

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | 1111 | 1110 | 1100 | 1101 |
| wx′ | 1011 | 1010 | 1000 | 1001 |
| w′x′ | 0011 | 0010 | 0000 | 0001 |
| w′x | 0111 | 0110 | 0100 | 0101 |

**Contoh:**

Diberikan fungsi boolean yang direpresentasikan dengan tabel kebenaran dibawah ini, petakan tabel tersebut ke peta karnaugh!

| w | x | y | z | f(w, x, y, z) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Tinjau hanya nilai fungsi yang memberikan 1. Fungsi boolean yang merepresentasikan tabel kebenaran adalah f(w, x, y, z) = w′x′y′z + w′xyz′ + w′xyz + wxyz′

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | 0 | 1 | 0 | 0 |
| wx′ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| w′x′ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| w′x | 1 | 1 | 0 | 0 |

**12.2 Teknik Minimisasi Fungsi Boolean dengan Peta Karnaugh**

Pengguanaan peta karnaugh dalam penyederhanaan fungsi boolean dilakukan dengan cara menggabungkan kotak-kotak yang bernilai 1 dan saling beririsan.

Kelompok kotak membentuk kotak yang bernilai 1 dapat membentuk:

1. Pasangan (dua) : dua buah 1 yang bertetangga

   Contoh:

   Sederhanakanlah fungsi f(w,x,y,z) = wxyz + wxyz′ dengan menggunakan peta karnaugh!

   Penyelesaian:

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | 1 | 1 | 0 | 0 |
| wx′ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| w′x′ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| w′x | 0 | 0 | 0 | 0 |

   Jadi hasil bentuk sederhanya adalah f(w,x.y,z) = wxy

   Bukti secara aljabar:

   f(w,x,y,z) = wxyz + wxyz′

   = wxy (z + z′)

   = wxy(1)

   = wxy

2. Kuad (empat) : empat buah 1 yang bertetangga

   Contoh:

   Sederhanakanlah fungsi f(w,x,y,z) = wxy′z′ + wxy′z + wxyz + wxyz′ dengan menggunakan peta karnaugh!

   Penyelesaian:

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | 1 | 1 | 1 | 1 |
| wx′ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| w′x′ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| w′x | 0 | 0 | 0 | 0 |

   Jadi hasil bentuk sederhanya adalah f(w,x.y,z) = wx

3. Oktet (delapan) : delapan buah 1 yang bertetangga

   Contoh:

   Sederhanakanlah fungsi f(w,x,y,z) = wxy′z′ + wxy′z + wxyz′ + *wxyz* + *wx′y′z′* + *wx′y′* z + wx′*yz* + *wx′yz′* dengan menggunakan peta karnaugh!

Penyelesaian:

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | 1 | 1 | 1 | 1 |
| wx′ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| w′x′ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| w′x | 0 | 0 | 0 | 0 |

Jadi hasil bentuk sederhanya adalah f(w,x.y,z) = wx +  wx′

**Latihan soal**

1. Dengan menggunakan Peta Karnaugh, sederhanakanlah fungsi-fungsi berikut ini:

   *F = wxyz + wxz′ + w′xy + x′y′z′ + w′xy′ + wx′y*

   **Penyelesaian:**

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | 1 | 1 | 1 | |
| wx′ | 1 | 1 | 1 | |
| w′x′ | | | 1 | |
| w′x | 1 | 1 | 1 | 1 |

Jadi hasil bentuk sederhanya adalah

*F = wy + w′x + y′z′*

2. Dengan menggunakan Peta Karnaugh, sederhanakanlah fungsi berikut ini!

   F = yz + wxz + xy′z′ + x′yz′ + wxyz′ + w′xyz′

**Penyelesaian**:

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | 1 | 1 | 1 | 1 |
| wx′ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| w′x′ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| w′x | 1 | 1 | 1 | 0 |

Jadi Bentuk sederhananya adalah

F = y + wx + xz′

3. Dengan menggunakan Peta Karnaugh, sederhanakanlah fungsi berikut ini:

F = xyz + wxy′z + x′yz + xz′ + x′yz′

**Penyelesaian:**

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | 1 | 1 | 1 | 1 |
| wx′ | 1 | 1 | | |
| w′x′ | 1 | 1 | | |
| w′x | 1 | 1 | 1 | |

Jadi Bentuk sederhananya adalah

F = y + wx + xz′

4. Dengan menggunakan Peta Karnaugh, sederhanakanlah fungsi berikut ini:

F = wx + w′xyz + w′x′y + w′xz′ + wy

**Penyelesaian:**

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | 1 | 1 | 1 | 1 |
| wx′ | 1 | 1 | | |
| w′x′ | 1 | 1 | | |
| w′x | 1 | 1 | 1 | |

Jadi bentuk sederhananya adalah:

F = y + wx + xz′

**Latihan:**

1. Dengan menggunakan peta karnaugh, sederhanakanlah fungsi berikut ini:

f(w,x,y,z) = wxy′z′ + wxy′z + wx′y′z′ + wx′y′z

**Penyelesaian:**

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | | | | |
| wx′ | | | | |
| w′x′ | | | | |
| w′x | | | | |

2. Dengan menggunakan Peta Karnaugh, sederhanakanlah fungsi-fungsi berikut ini:

   f(w,x,y,z) = wxyz + wxz′ + w′xy + x′y′z′ + w′xy′ + wx′y

   **Penyelesaian:**

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | | | | |
| wx′ | | | | |
| w′x′ | | | | |
| w′x | | | | |

3. Dengan menggunakan Peta Karnaugh, sederhanakanlah fungsi-fungsi berikut ini:

   f(w,x,y,z) = w′x′y′ + x′yz′ + w′xyz′ + wx′y′

   **Penyelesaian**:

| | yz | yz′ | y′z′ | y′z |
|---|---|---|---|---|
| wx | | | | |
| wx′ | | | | |
| w′x′ | | | | |
| w′x | | | | |

### 12.2 Peta Karnaugh Lima dan Enam Variabel

Pendefinisian Peta Karnaugh Lima dan Enam variabel sama seperti yang lainnya juga yaitu perubahan ke baris/kolom sebelum dan sesudahnya hanya memiliki 1 buah perubahan saja. Penentuan kelompok dapat dilakukan dengan memperlakukan sistem cermin terhadap garis batas tersebut. Peta Karnaugh untuk Lima variabel dibuat dengan anggapan ada dua buah peta pada empat variabel yang disambungkan. Demikian juga dengan enam variabel, dianggap ada dua peta empat variabel yang disambungkan. Setiap subpeta ditandai dengan garis ganda ditengah-tengahnya. Dua kotak dianggap bertetangga jika fisik berdekatan dan merupakan pencerminan terhadap garis ganda.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | yza | yz′a | y′z′a | y′za |
| wx | wxyza | wxyz′a | wxy′z′a | wxy′za |
| wx′ | wx′yza | wx′yz′a | wx′y′z′a | wx′y′za |
| w′x′ | w′x′yza | w′x′yz′a | w′x′y′z′a | w′x′y′za |
| w′x | w′xyza | w′xyz′a | w′xy′z′a | w′xy′za |

| | | | |
|---|---|---|---|
| y′za′ | y′z′a′ | yz′a′ | yza′ |
| wxy′za′ | wxy′z′a′ | wxyz′a′ | wxyza′ |
| wx′y′za′ | wx′y′z′a′ | wx′yz′a′ | wx′yza′ |
| w′x′y′za′ | w′x′y′z′a | w′x′yz′a′ | w′x′yza′ |
| w′xy′za′ | w′xy′z′a′ | w′xyz′a′ | w′xyza′ |

# Daftar Pustaka

Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Kasus Kasus

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 13 | 15048 | Tim Dosen. |


### Abstract

Rangkaian *half adder* merupakan dasar penjumlahan bilangan biner yang masing-masing hanya terdiri dari satu bit, oleh karena itu dinamakan penjumlah tak lengkap.


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu menyelesaian kasus lampu lalu lintas mulai dari membuat tabel, membuat rangkaian, menyederhanakan fungsi menggunakan metode peta karnaugh.

# STUDI KASUS

# LAMPU LALU-LINTAS

### 13.1 Prinsip Half Adder

Adalah suatu operasi penjumlahan dua bit biner tanpa menyertakan carry-in nya.
Rangkaian *half adder* merupakan dasar penjumlahan bilangan biner yang masing-masing hanya terdiri dari satu bit, oleh karena itu dinamakan penjumlah tak lengkap.

1. Jika A=0 dan B=0 dijumlahkan, hasilnya S (*Sum*) = 0.
2. Jika A=0 dan B=1 dijumlahkan, hasilnya S (*Sum*) = 1.
3. Jika A=1 dan B=1 dijumlahkan, hasilnya S (*Sum*) = 0. dengan nilai pindahan Cy(*Carry Out*) = 1.

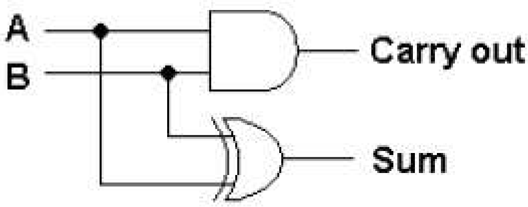
Dengan demikian, *half adder* memiliki 2 masukan (A dan B) dan dua keluaran (Sum dan Carry)

Half adder ini dapat dibuat tabel kebenarannya sebagai berikut:

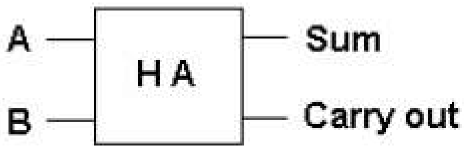
| INPUT | | OUTPUT | |
|---|---|---|---|
| A | B | CARRY | SUM |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Dari tabel diatas, terlihat bahwa nilai logika dari *Sum* sama dengan nilai logika dari gerbang XOR, sedangkan nilai logika Carry sama dengan nilai dari gerbang logika AND.

Dari tabel kebenaran tersebut dapat dirancang rangkaian kombinasionalnya menjadi:




Sedangkan diagram menurut rangkaian kombinasional di atas, half adder tersebut menjadi:




Gambar Peta Karnaugh

Sum

| | y | y' |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| x' | 1 | 0 |

Carry

| | y | y' |
|---|---|---|
| x | 1 | 1 |
| x' | 1 | 0 |

**Kasus Dengan Input 3 variabel**

Misalkan: Ada 3 buah inputan yaitu A, B, C. Dan menghasilkan Output S (Sum), dan C (Carry)!

Buatlah:

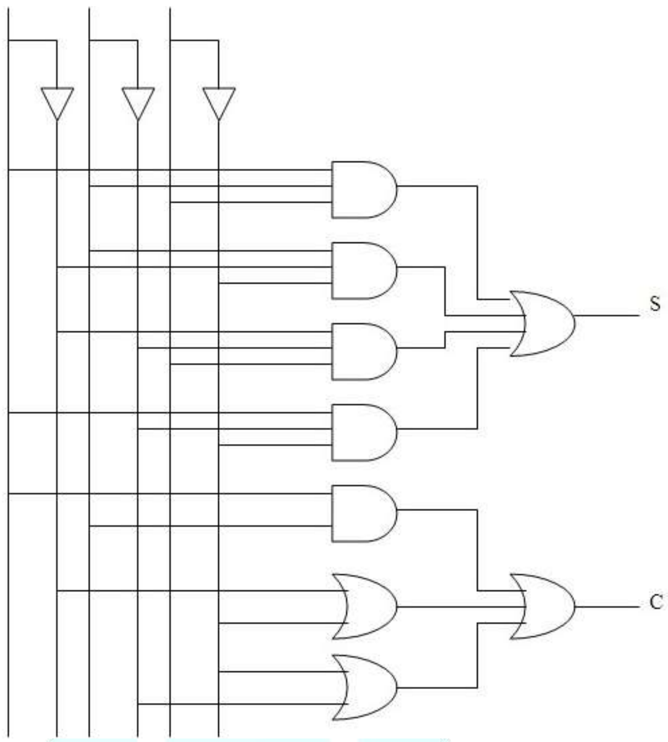
- Tabel input output
- Rangkaian awal
- Tulis output dalam bentuk SOP
- Sederhanakan menggunakan peta karnaugh
- Gambar rangkaian dari hasil penyederhanaan

**Penyelesaian:**

Tabel input output

| Input | | | Output | |
|---|---|---|---|---|
| **A** | **B** | **C** | **S** | **C** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Gambar Rangkaian awal:



**SOP**

S: 001 + 010 + 100 + 111

A′B′C + A′BC′ + AB′C′ + ABC

C: 011 + 101 + 110 + 111

A′BC + AB′C + ABC′ + ABC

**Peta Karnaugh Sum**

| | BC | BC′ | B′C′ | B′C |
|---|---|---|---|---|
| A | | | | |
| A′ | | | | |

**F(A,B,C) = AC + B′C + A′BC′**

**Peta Karnaugh Carry**

| | BC | BC′ | B′C′ | B′C |
|---|---|---|---|---|
| A | | | | |
| A′ | | | | |

**F(A,B,C) = AB + BC + AB′C**

**Rangkaian Hasil Akhir:**

Coba buat sendiri ya

**Latihan1:**

Anda diminta untuk merancang sebuah rangkaian logika untuk mengatur lampu lalu lintas dengan ketentuan siklus nyala lampu sebagai berikut:

Lampu merah menyala terlebih dahulu sebanyak 3 detik, disusul lampu merah dan kuning bersamaan selama 2 detik, kuning selama 1 detik, lalu hijau sebanyak 2 detik, kemudian kembali ke merah lagi. Input rangkaian ialah angka biner ,x,y,z yang diperoleh dari generator bilangan dengan *clock* 1 detik.

a. Tuliskan tabel kebenaran input-output untuk kasus ini!
b. Tuliskan bentuk fungsi untuk masing-masing lampu dalam bentuk kanonik SOP!
c. Dengan menggunakan peta karnaugh, sederhanakan fungsi-fungsi tersebut!
d. Buat rangkaian logikanya

**Contoh soal dan Pembahasan 4 variabel input:**

1. Kasus: Anda diminta untuk merancang sebuah rangkaian logika untuk mengatur lampu lalu lintas dengan ketentuan siklus nyala lampu sebagai berikut: Lampu merah menyala terlebih dahulu sebanyak 7 detik, disusul lampu merah dan kuning bersamaan selama 2 detik, lalu hijau sebanyak 5 detik, kuning selama 2 detik, kemudian kembali ke merah lagi. Input rangkaian ialah angka biner $x_3\ x_2\ x_1\ x_0$ yang diperoleh dari generator bilangan biner dengan *clock* 1 detik.

   a. Tuliskan tabel kebenaran (tabel input-output) untuk kasus ini!

   JAWAB:

| INPUT | | | | OUTPUT | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **w** | **x** | **y** | **z** | **M** | **K** | **H** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

b. Tuliskan bentuk fungsi untuk masing-masing lampu dalam bentuk kanonik SOP!

JAWAB:

*Boleh menggunakan variabel $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$!*

M(w,x,y,z) = Σ(0,1,2,3,4,5,6,7,8)

= w'x'y'z' + w'x'y'z + w'x'yz' + w'x'yz + w'xy'z' + w'xy'z + w'xyz' + w'xyz + w'x'y'z

K(w,x,y,z) = Σ(7,8,14,15)

= w'xyz + wx'y'z' + wxyz' + wxyz

H(w,x,y,z) = Σ(9,10,11,12,13)

= wx'y'z + wx'yz' + wx'yz + wxy'z' + wxy'z

c. Dengan menggunakan peta karnaugh, sederhanakan fungsi-fungsi tersebut!

JAWAB:

M(w,x,y,z) = w’x’y’z’ + w’x’y’z + w’x’yz’ + w’x’yz + w’xy’z’ + w’xy’z + w’xyz’ + w’xyz + w’x’y’z

| | Yz | yz' | y'z’ | y'z |
|---|---|---|---|---|
| wx | | | | |
| wx’ | | | 1 | |
| w'x’ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| w'x | 1 | 1 | 1 | 1 |

**M(w,x,y,z) = w’ + x’y’z’**

K(w,x,y,z) = w’xyz + wx’y’z’ + wxyz’ + wxyz

| | Yz | yz' | y'z’ | y'z |
|---|---|---|---|---|
| wx | 1 | 1 | | |
| wx’ | | | 1 | |
| w'x’ | | | 1 | |
| w'x | | | | |

**K(w,x,y,z) = x’y’z’ + wxy**

H(w,x,y,z) = wx’y’z + wx’yz’ + wx’yz + wxy’z’ + wxy’z

| | Yz | yz' | y'z’ | y'z |
|---|---|---|---|---|
| wx | | | 1 | 1 |
| wx’ | 1 | 1 | | 1 |
| w'x’ | | | | |
| w'x | | | | |

**H(w,x,y,z) = wxy’ + wx’y + wy’z = w(xy’ + y’z) = w((x ⊕ y) + y’z)**

d. Buat rangkaian logikanya hanya dengan menggunakan gerbang NOT serta gerbang AND dan OR *dua-input*!

(Anda boleh menggunakan *w x y z* sebagai pengganti $x_3$ $x_2$ $x_1$ $x_0$ )

**Latihan 2:**

1. Anda diminta untuk merancang sebuah rangkaian logika untuk mengatur lampu lalu lintas dengan ketentuan siklus nyala lampu sebagai berikut:

Lampu merah menyala terlebih dahulu sebanyak 8 detik, disusul lampu merah dan kuning bersamaan selama 2 detik, kuning selama 2 detik, lalu hijau sebanyak 4 detik, kemudian kembali ke merah lagi. Input rangkaian ialah angka biner w,x,y,z yang diperoleh dari generator bilangan dengan *clock* 1 detik.

a. Tuliskan tabel kebenaran input-output untuk kasus ini!
b. Tuliskan bentuk fungsi untuk masing-masing lampu dalam bentuk kanonik SOP!
c. Dengan menggunakan peta karnaugh, sederhanakan fungsi-fungsi tersebut!
d. Buat rangkaian logikanya

2. Anda diminta untuk merancang sebuah rangkaian logika untuk mengatur lampu lalu lintas dengan ketentuan siklus nyala lampu sebagai berikut:

Lampu merah menyala terlebih dahulu sebanyak 4 detik, disusul lampu kuning selama 3 detik, lalu lampu merah dan kuning bersamaan selama 4 detik,, lalu hijau sebanyak 5 detik, kemudian kembali ke merah lagi. Input rangkaian ialah angka biner w,x,y,z yang diperoleh dari generator bilangan dengan *clock* 1 detik.

a. Tuliskan tabel kebenaran input-output untuk kasus ini!
b. Tuliskan bentuk fungsi untuk masing-masing lampu dalam bentuk kanonik SOP!
c. Dengan menggunakan peta karnaugh, sederhanakan fungsi-fungsi tersebut!
d. Buat rangkaian logikanya

3. Anda diminta untuk merancang sebuah rangkaian logika untuk mengatur lampu lalu lintas dengan ketentuan siklus nyala lampu sebagai berikut:

Lampu merah menyala terlebih dahulu sebanyak 7 detik, disusul lampu merah dan kuning bersamaan selama 2 detik, lalu hijau sebanyak 5 detik, kuning selama 2 detik, kemudian kembali ke merah lagi. Input rangkaian ialah angka biner w,x,y,z yang diperoleh dari generator bilangan dengan *clock* 1 detik.

a. Tuliskan tabel kebenaran input-output untuk kasus ini!
b. Tuliskan bentuk fungsi untuk masing-masing lampu dalam bentuk kanonik SOP!
c. Dengan menggunakan peta karnaugh, sederhanakan fungsi-fungsi tersebut!
d. Gambarkan rangkaian logikanya!

4. Rancanglah sebuah sistem pengaman brankas di suatu bank dengan ketentuan sebagai berikut :

- Brankas diamankan dengan 4 buah kunci,
- terdapat 4 orang pemegang kunci,
- untuk membuka brankas minimal harus ada 3 orang yang memutar kunci secara bersamaan
- kunci tidak akan terbuka bila hanya 1 atau 2 orang saja yang memutar kunci,
- jika kunci dirusak dan kemudian pintu dibuka, maka alarm akan berbunyi.

Catatan : Pada pintu brankas terdapat sensor yang akan mendeteksi pintu dalam keadaan tertutup atau terbuka

# Daftar Pustaka

Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)

**MODUL PERKULIAHAN**

# Logika Matematika

## Bank Soal Pra-UAS

| Fakultas | Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
|---|---|---|---|---|
| Ilmu Komputer | Teknik Informatika | 14 | 15048 | Tim Dosen. |


### Abstract

Bank soal berisi kumpulan soal dan pembahasan, serta layihan soal sesuai dengan materi aljabar boolean, kanonik SOP dan POS, rangkaian logika, dan metode peta karnaugh.


### Kompetensi

Setelah membaca modul ini, mahasiswa diharapkan mampu mengerjakan soal aljabar boolean, mampu membuat rangkaian logika beserta tabel kebenarannya dan mampu menyelesaian soal fungsi menggunakan metode peta karnaugh.

# Isi

# Bank Soal Pra-UAS

## 14.1 SOAL DAN PEMBAHASAN

### A. Peta Karnaugh

Dengan menggunakan Peta Karnaugh, sederhanakanlah fungsi-fungsi berikut ini:

1. $F = xy + uvy + v\bar{x}\bar{y} + \bar{v}x\bar{y} + uvx\bar{y} + \bar{u}vx\bar{y}$
2. $F = vxy + uv\bar{x}y + \bar{v}xy + v\bar{y} + \bar{v}x\bar{y}$
3. $F = uv + \bar{u}vxy + \bar{u}\bar{v}x + \bar{u}v\bar{y} + ux$
4. $F = uvxy + uv\bar{y} + \bar{u}vx + \bar{v}\bar{x}\bar{y} + \bar{u}v\bar{x} + u\bar{v}x$
5. $F = \bar{u}x\bar{y} + v\bar{x}\bar{y} + ux\bar{y} + uv + xy$
6. $F = xy + uvy + v\bar{x}\bar{y} + \bar{v}x\bar{y} + uvx\bar{y} + \bar{u}vx\bar{y}$
7. $F = u\bar{v}x + \bar{u}v\bar{y} + \bar{u}\bar{v}x + vxy + v\bar{y} + uv$

**Penyelesaian:**

1. Diket $F = xy + uvy + v\bar{x}\bar{y} + \bar{v}x\bar{y} + uvx\bar{y} + \bar{u}vx\bar{y}$

   Ditanya

   Bentuk sederhananya?

   Jawab

   Peta Karnaugh:

| | uv | $u\bar{v}$ | $\bar{u}\bar{v}$ | $\bar{u}v$ |
|---|---|---|---|---|
| xy | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $x\bar{y}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\bar{x}\bar{y}$ | 1 | | | 1 |
| $\bar{x}y$ | 1 | | | |

Jadi hasil bentuk sederhananya adalah:

F = x + uv + v $\bar{y}$

2. Diket $F = vxy + uv\bar{x}y + \bar{v}xy + v\bar{y} + \bar{v}x\bar{y}$

Ditanya : Bentuk sederhananya?

Jawab

Peta Karnaugh:

| | uv | u $\bar{v}$ | $\bar{u}$ $\bar{v}$ | $\bar{u}$v |
|---|---|---|---|---|
| xy | 1 | 1 | 1 | 1 |
| x $\bar{y}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\bar{x}$ $\bar{y}$ | 1 | | | 1 |
| $\bar{x}$y | 1 | | | |

Jadi hasil bentuk sederhananya adalah:

F = x + uv + v $\bar{y}$

3. Diket $F = uv + \bar{u}vxy + \bar{u}\bar{v}x + \bar{u}v\bar{y} + ux$

Ditanya

Bentuk sederhananya?

Jawab

Peta Karnaugh:

| | uv | u $\bar{v}$ | $\bar{u}$ $\bar{v}$ | $\bar{u}$v |
|---|---|---|---|---|
| xy | 1 | 1 | 1 | 1 |
| x $\bar{y}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\bar{x}$ $\bar{y}$ | 1 | | | 1 |
| $\bar{x}$y | 1 | | | |

Jadi hasil bentuk sederhananya adalah:

F = x + uv + v $\bar{y}$

4. Diket $F = uvxy + uv\bar{y} + \bar{u}vx + \bar{v}\bar{x}\bar{y} + \bar{u}v\bar{x} + u\bar{v}x$

Ditanya

Bentuk sederhananya?

Jawab

Peta Karnaugh:

| | uv | $u\bar{v}$ | $\bar{u}\bar{v}$ | $\bar{u}v$ |
|---|---|---|---|---|
| xy | 1 | 1 | | 1 |
| $x\bar{y}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\bar{x}\bar{y}$ | 1 | | 1 | 1 |
| $\bar{x}y$ | | | | 1 |

Jadi hasil bentuk sederhananya adalah:

F = ux + $\bar{u}\,\bar{y}$ + uv

5. Diket $F = \bar{u}x\bar{y} + v\bar{x}\bar{y} + ux\bar{y} + uv + xy$

Ditanya Bentuk sederhananya?

Jawab

Peta Karnaugh:

| | uv | $u\bar{v}$ | $\bar{u}\bar{v}$ | $\bar{u}v$ |
|---|---|---|---|---|
| xy | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $x\bar{y}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\bar{x}\bar{y}$ | 1 | | | 1 |
| $\bar{x}y$ | 1 | | | |

Jadi hasil bentuk sederhananya adalah:

F = x + uv + v $\bar{y}$

6. Diket $F = xy + uvy + v\bar{x}\bar{y} + \bar{v}x\bar{y} + uvx\bar{y} + \bar{u}vx\bar{y}$

Ditanya

Bentuk sederhananya?

Jawab

Peta Karnaugh:

| | uv | $u\bar{v}$ | $\bar{u}\bar{v}$ | $\bar{u}v$ |
|---|---|---|---|---|
| xy | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $x\bar{y}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\bar{x}\bar{y}$ | 1 | | | 1 |
| $\bar{x}y$ | 1 | | | |

Jadi hasil bentuk sederhananya adalah:

F = x + uv + v $\bar{y}$

7. Diket $F = u\bar{v}x + \bar{u}v\bar{y} + \bar{u}\bar{v}x + vxy + v\bar{y} + uv$

Ditanya

Bentuk sederhananya?

Jawab

Peta Karnaugh:

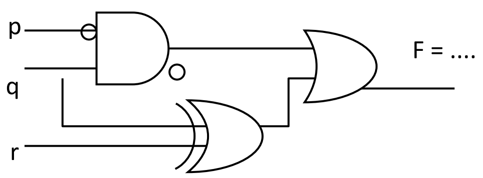
| | uv | u $\bar{v}$ | $\bar{u}$ $\bar{v}$ | $\bar{u}$v |
|---|---|---|---|---|
| xy | 1 | 1 | 1 | 1 |
| x $\bar{y}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\bar{x}$ $\bar{y}$ | 1 | | | 1 |
| $\bar{x}$y | 1 | | | |

Jadi hasil bentuk sederhananya adalah:

F = x + uv + v $\bar{y}$

**B. RANGKAIAN LOGIKA**

1. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini!




Penyelesaian:

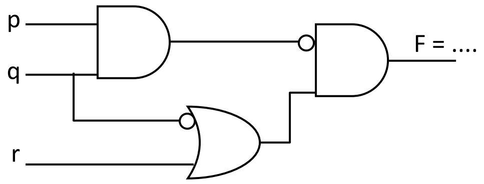
F = $\overline{(\bar{p}.q)}$ + (q ⊕ r)

Tabel Kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{p}$ | $\bar{p}.q$ | $\overline{(\bar{p}.q)}$ | $q \oplus r$ | $F = \overline{(\bar{p}.q)} + (q \oplus r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

2. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini!




Penyelesaian

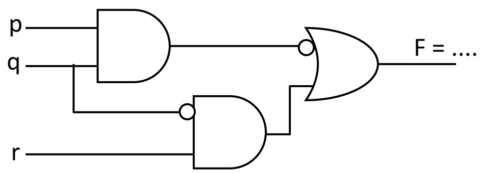
F = $\overline{(p+q)} . (\bar{q} + r)$

Tabel Kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{q}$ | $p+q$ | $\overline{(p+q)}$ | $\bar{q}+r$ | $F = \overline{(p+q)} . (\bar{q}+r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

3. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini!



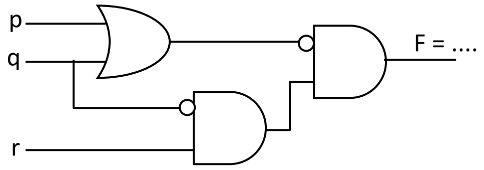

Penyelesaian

F = $\overline{(p\,.\,q)}$ + ( $\bar{q}$ . r)

Tabel Kebenarannya:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{q}$ | $p.q$ | $\overline{(p\,.\,q)}$ | $\bar{q}.r$ | $F = \overline{(p\,.\,q)} + (\bar{q}.r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

4. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini!



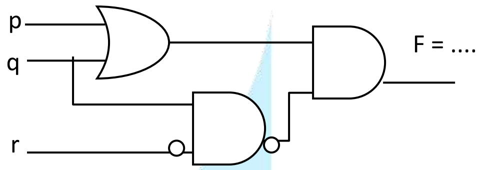

Penyelesaian:

$F = \overline{(p+q)} \cdot (\bar{q} \cdot r)$

*Tabel Kebenaran:*

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{q}$ | $p+q$ | $\overline{(p+q)}$ | $\bar{q}.r$ | $F = \overline{(p+q)} \cdot (\bar{q} \cdot r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

5. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini!




Penyelesaian:

$F = (p + q) . \overline{(\bar{q} . r)}$

*Tabel Kebenaran:*

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{q}$ | $p+q$ | $\bar{q}.r$ | $\overline{(\bar{q} . r)}$ | $F = (p + q) . \overline{(\bar{q} . r)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

## C. KONVERSI BENTUK FUNGSI

1. Nyatakan fungsi Boolean f(x, y, z) = x + y'z dalam bentuk kanonik SOP dan POS!

Penyelesaian:

(a) SOP

x = x(y + y')

= xy + xy'

= xy (z + z') + xy'(z + z')

= xyz + xyz' + xy'z + xy'z'

$y'z = y'z\,(x + x')$

$= xy'z + x'y'z$

Jadi $f(x, y, z) = x + y'z$

$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z$

$= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz$

atau $f(x, y, z) = m1 + m4 + m5 + m6 + m7 = \Sigma\,(1,4,5,6,7)$

(b) POS

$f(x, y, z) = x + y'z$

$= (x + y')(x + z)$

$x + y' = x + y' + zz'$

$= (x + y' + z)(x + y' + z')$

$x + z = x + z + yy'$

$= (x + y + z)(x + y' + z)$

Jadi, $f(x, y, z) = (x + y' + z)(x + y' + z')(x + y + z)(x + y' + z)$

$= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$

atau $f(x, y, z) = M0M2M3 = \prod(0, 2, 3)$

2. Carilah bentuk kanonik SOP dan POS dari $f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$

Penyelesaian:

(a) SOP

$f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$

$= y'\,(x + x')\,(z + z') + xy\,(z + z') + x'yz'$

$= (xy' + x'y')\,(z + z') + xyz + xyz' + x'yz'$

$= xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xyz' + x'yz'$

atau $f(x, y, z) = m0 + m1 + m2 + m4 + m5 + m6 + m7$

(b) POS

f(x, y, z) = M3 = x + y’ + z’

3. Carilah bentuk kanonik dari soal berikut:

f(x,y,z) = F = x’ y’ z + x y’ z’ + x y z

Penyelesaian

Tabel nilainya:

| x | y | z | Minterm | Maxterm | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | x' y’ z’ | x + y + z | 0 |
| 0 | 0 | 1 | x' y’ z | x + y + z’ | 1 |
| 0 | 1 | 0 | x' y z’ | x + y’ + z | 0 |
| 0 | 1 | 1 | x' y z | x + y’ + z’ | 0 |
| 1 | 0 | 0 | x y’ z’ | x' + y + z | 1 |
| 1 | 0 | 1 | x y’ z | x' + y + z’ | 0 |
| 1 | 1 | 0 | x y z’ | x' + y’ + z | 0 |
| 1 | 1 | 1 | x y z | x' + y’ + z’ | 1 |

Jadi f(x,y,z) = m1 + m4 + m7 = $\sum(1,4,7)$

= M0 . M2 . M3 . M5 . M6 = $\prod(0,2,3,5,6)$

## 14.2 Latihan

1. Diketahui sebuah penarikan kesimpulan sebagai berikut:

P1: ”Jika bemo beroda empat dan semua daun berwarna hijau, maka Jakarta Ibukota Brunei.”

P2: ”Jika tidak semua daun berwarna hijau, maka bemo beroda tiga.”

P3: ”Beberapa daun berwarna merah.”

Q : ”Jika Jakarta bukan ibukota Brunei, maka tidak semua daun berwarna hijau.”

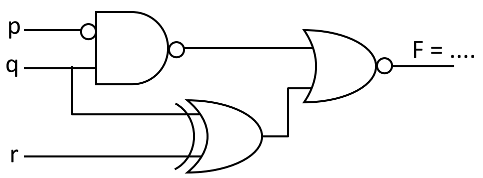
(Asumsikan tiga adalah bukan empat)

a. Uraikan seluruh proposisi di atas menjadi pernyataan-pernyataan tunggal. Gunakan hanya nama variabel p, q, r, s, dan t bila dibutuhkan.
b. Tuliskan notasi matematika untuk seluruh proposisi di atas.
c. Buktikan validitas argumen di atas.

2. Carilah bentuk kanonik dari soal berikut:

f(x,y,z) = F = x y’ z + x y’ z’ + x y z

3. Buatlah tabel kebenaran untuk rangkaian logika di bawah ini.




4. Buatlah rangkaian logika untuk fungsi logika berikut ini:

$$F = \overline{(xy + \bar{x}z)}.\overline{(y\bar{z})}$$

5. Dengan menggunakan Peta Karnaugh, sederhanakanlah fungsi-fungsi berikut ini:

$$F = uvxy + uv\bar{y} + \bar{u}vx + \bar{v}\bar{x}\bar{y} + \bar{u}v\bar{x} + u\bar{v}x$$

# Daftar Pustaka


Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan,* Universitas Mataram, Mataram.

Simangunsong Wilson, Matematika dasar, ( Jakarta: Erlangga, 2005)