

# MATH-F-307: Syllabus (étudiant) d'exercices

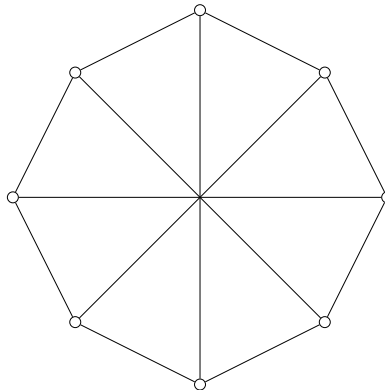
André MADEIRA CORTES  
Nikita MARCHANT

## Table des matières

1	Séance 1	3
2	Séance 2	6
3	Séance 3	7
4	Séance 4	9
5	Séance 5	10
6	Séance 6 et 7	12
7	Séance 8 et 9	16

## 1 Séance 1

**Exercice 1.** Construisez un graphe simple et connexe sur 8 sommets tel que chaque sommet est contenu dans exactement trois arêtes. Pouvez-vous faire la même chose avec 9 sommets ?



Pas possible pour  $n=9$ .

**Exercice 2.** Dans un groupe de personnes, il y a toujours deux individus qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.

1. Formalisez cette propriété dans le vocabulaire des graphes.
2. Démontrez cette propriété (par l'absurde).

1. Soit  $\Gamma$  un graphe à  $n$  sommets.  $\exists u, v \in V(\Gamma)$  tq  $\deg(u) = \deg(v)$
2. Par l'absurde : Supposons que  $\nexists e_1, e_2 : \deg(e_1) = \deg(e_2)$ .

Les degrés sont tous compris entre 0 et  $n-1$  (c'est à dire qu'on a un sommet pour chaque degré). Il existe donc un sommet qui est isolé (celui de degré 0) et un sommet qui est relié à "tous" les autres sommets (celui de degré  $n-1$ ), ce qui est impossible.

**Exercice 3.** Soit  $n \geq 2$  et soit  $G$  un graphe simple avec  $2n$  sommets et  $n^2 + 1$  arêtes. Montrez que  $G$  contient un triangle.

**Exercice 4.** Soit  $G$  un graphe simple avec  $2p$  sommets. On suppose que le degré de chaque sommet est au moins égal à  $p$ . Démontrez que ce graphe est connexe.

Démontrons par l'absurde : Supposons que le graphe ne soit pas connexe.

Soient  $x$  et  $y$  deux sommets tels qu'il n'existe pas de chemin entre  $x$  et  $y$ . Vu que  $\forall v : \deg(v) \geq p$ ,  $x$  a au moins  $p$  voisins (et  $y$  aussi). Les voisins de  $x$  sont différents des voisins de  $y$ , sinon il existerait un chemin entre  $x$  et  $y$ .

Le graphe est donc composé de  $\underbrace{1+p}_{x \text{ et ses voisins}} + \underbrace{1+p}_{y \text{ et ses voisins}} = 2p+2$  sommets. Ceci est impossible, car l'énoncé dit que le graphe est composé de  $2p$  sommets.

**Exercice 5.** Soit  $G$  un graphe simple.

1. On suppose que  $G$  est connexe et que  $x$  est un sommet de  $G$  de degré 1. Prouvez que  $G \setminus \{x\}$  est connexe.
2. Déduisez-en que, si  $G$  est connexe et  $|V(G)| = n \geq 2$ , alors  $G$  contient au moins  $n - 1$  arêtes.

**Exercice 6.** *Donnez un graphe simple et connexe sur au moins 5 sommets qui est :*

- *hamiltonien et eulérien ;*
- *hamiltonien et non eulérien ;*
- *non hamiltonien et eulérien ;*
- *non hamiltonien et non eulérien.*

**Exercice 7.** *Le graphe 1 est-il isomorphe à un (ou à plusieurs) des graphes ci-dessous ?*

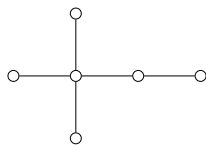


FIGURE 1

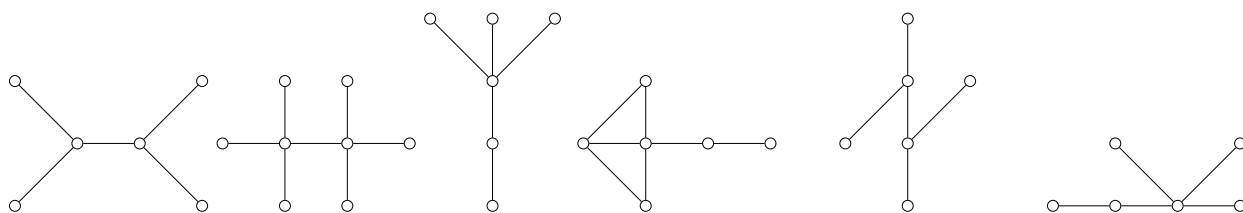


FIGURE 2

Le troisième et le sixième.

**Exercice 8.** Les graphes suivants sont-ils isomorphes ? (Ne vous contentez pas d'une justification approximative : essayez de démontrer rigoureusement vos affirmations.)



FIGURE 3

Non isomorphes.



FIGURE 4

Non isomorphes.

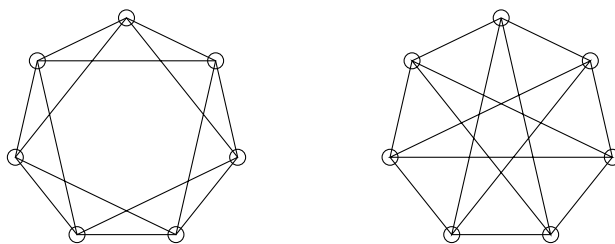


FIGURE 5

Isomorphes.

## 2 Séance 2

**Exercice 9.** Considérez la grille  $n \times n$ , le graphe obtenu selon la Figure 6, avec  $n$  un naturel  $\geq 3$ . Démontrez que  $n$  est pair si et seulement si le graphe est hamiltonien.

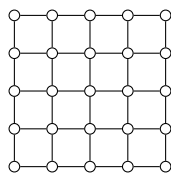


FIGURE 6 – Grille  $5 \times 5$ .

Nous cherchons à prouver que tout graphe du style de la figure 6 avec un  $n$  pair est un graphe hamiltonien. C'est à dire  $n$  pair  $\Leftrightarrow$  graphe hamiltonien.

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

**Exercice 10.** Prouvez que pour tout  $n \geq 3$ , le graphe complet  $K_n$  possède exactement  $\frac{1}{2}(n-1)!$  cycles hamiltoniens.

**Exercice 11.** Combien d'arbres couvrants possèdent les deux graphes de la Figure 7?

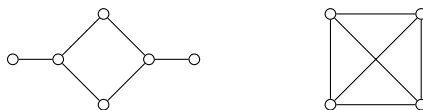
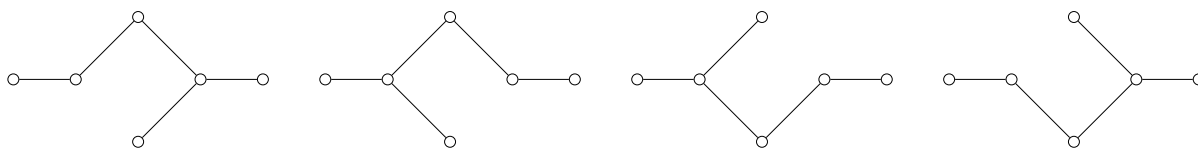


FIGURE 7

**Graphe de gauche :** Il existe 4 arbres couvrants



**Graphe de droite :** Il existe 40 arbres couvrants. Trop nombreux pour que je les dessine tous.

**Exercice 12.** Montrez que tous les alcools  $C_nH_{2n+1}OH$  sont des molécules dont le graphe est un arbre, en sachant que les valences de C, O et de H sont respectivement 4, 2, 1.

**Exercice 13.** Démontrez que si un graphe hamiltonien  $G = (V, E)$  est biparti selon la bipartition  $V = A \cup B$ , alors  $|A| = |B|$ . En déduire que  $K_{n,m}$ , le graphe biparti complet, est hamiltonien si et seulement si  $m = n \geq 2$ .

**Exercice 14.** Pour chaque graphe de la Figure 8, déterminez si

1. le graphe est hamiltonien,
2. le graphe est eulérien,
3. le graphe est biparti.

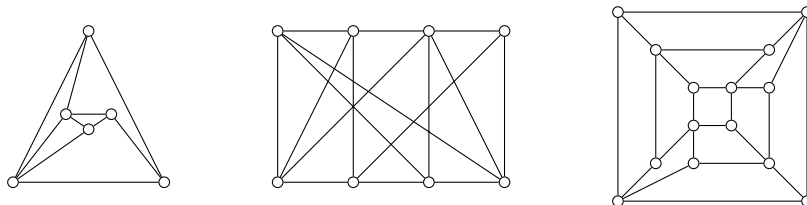


FIGURE 8

### 3 Séance 3

**Exercice 15.** Construisez un code de Gray d'ordre 5 sur base du code de Gray d'ordre 4 ci-dessous.

0000,0100,1100,1000,1010,1110,0110,0010,0011,0111,1111,1011,1001,1101,0101,0001

**Exercice 16.** Dans le graphe ci-dessous, on donne un couplage de cardinal maximal. En utilisant la preuve du théorème de König vue au cours, trouvez un transversal de cardinal minimal.

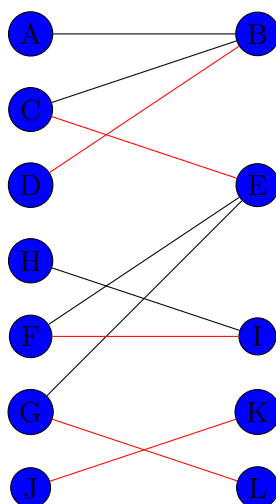


FIGURE 9

**Exercice 17.** Sur  $\mathbb{R}^2$ , on définit les relations suivantes :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y',$$

$$(x, y)\mathcal{S}(x', y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

Est-ce que les relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont des ordres ?

**Exercice 18.** Considérons le graphe biparti (bipartition donnée par une coloration des sommets) ci-dessous. Sur l'ensemble de ses sommets, on définit la relation  $u \leq v$  pour  $u, v$  des sommets tels que  $u$  est un sommet rouge et  $\{u, v\}$  est une arête. On pose aussi  $u \leq u$  pour tout sommet  $u$ .

- (a) Vérifiez que  $\leq$  est un ordre partiel.
- (b) Construisez une partition des sommets par  $k$  chaînes et trouvez une antichaîne contenant  $k$  éléments.
- (c) Déduisez-en un couplage de cardinalité maximale et un transversal de cardinalité minimale.
- (d) (Bonus) Sur base de ce qui est fait ci-dessus, prouvez que le théorème de König implique le théorème de Dilworth.

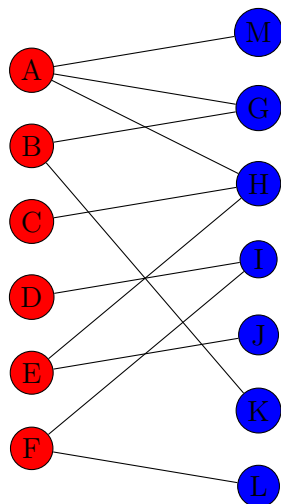


FIGURE 10



## 4 Séance 4

**Exercice 19.** L'ensemble  $\{2^m | m \in \mathbb{Z}\}$  forme-t-il un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication usuelle ?

Soit  $X = 2^m, m \in \mathbb{Z}$  et  $(X, .)$  le groupe à analyser.

$\forall x, y \in \mathbb{Z} : 2^x * 2^y = 2^{x+y} \in X$  car  $(x + y) \in \mathbb{Z}$ . L'ensemble  $X$  forme donc bien un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication.

**Exercice 20.** L'ensemble  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$  avec l'addition définie par

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(où  $x_i + y_i$  est le résultat d'une addition modulo 2) forme-t-il un groupe ?

Il faut tester si les 3 propriétés d'un groupe sont respectées.

1. Associativité : Chaque composante est calculée avec la forme  $x_i + y_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .  $\mathbb{Z}_2$  est associatif, l'addition est faite composante par composante, donc  $\mathbb{Z}_2^n$  est associatif. Il faut donc à présent montrer que  $(x_i + y_i) + z_i = x_i + (y_i + z_i)$ .

**Exercice 21.** En appliquant l'algorithme d'Euclide à  $a$  et  $b$  ci-dessous, calculer :

- le PGCD( $a, b$ ),
- $x$  et  $y$  tels que  $ax + by = \text{PGCD}(a, b)$ ,

Les différentes valeurs de  $a$  et  $b$  sont :

- (i)  $a = 12, b = 34$ ,
- (ii)  $a = 13, b = 34$ ,
- (iii)  $a = 13, b = 31$ ,

**Exercice 22.** (i) Trouver un entier  $x$  tel que le reste de la division de  $50x$  par 71 donne 1.

(ii) Trouver un entier  $x$  tel que le reste de la division de  $50x$  par 71 donne 63.

(iii) Trouver un entier  $x$  tel que le reste de la division de  $43x$  par 64 donne 1.

**Exercice 23.** Dans le système RSA, prenons  $p = 11, q = 13$  et  $e = 7$ . Que vaut alors  $s$  ? Si 99 est le message à coder, quel est le message crypté ? Vérifier en décryptant le message.

## 5 Séance 5

**Exercice 24.** Montrer le résultat suivant : si  $a \equiv b \pmod{n}$  et  $c \equiv d \pmod{n}$ , alors

$$a + c \equiv b + d \pmod{n} \text{ et } a.c \equiv b.d \pmod{n}.$$

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b - a = kn \qquad c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow d - c = ln$$

**Exercice 25.** Montrer que, si  $a \equiv b \pmod{n}$ , alors

$$a + c \equiv b + c \pmod{n} \quad \forall c \in \mathbb{Z}$$

et

$$a.c \equiv b.c \pmod{n} \quad \forall c \in \mathbb{Z}.$$

**Exercice 26.** Prouver que, si  $a \equiv b \pmod{n}$ , alors  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$  pour tout entier  $k > 0$ .

$$a^k \equiv b^k \pmod{n} \Rightarrow b^k - a^k = xn \Leftrightarrow \ln(b^k - a^k) = \ln(xn) \Leftrightarrow \frac{\ln(b^k)}{\ln(a^k)} = \ln(xn) \Leftrightarrow \frac{k \ln(b)}{k \ln(a)} = \ln(xn) \Leftrightarrow \ln(b) - \ln(a) = \ln(xn) \Leftrightarrow b - a = xn \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

**Exercice 27.** Trouver toutes les solutions aux congruences suivantes :

- $2x \equiv 3 \pmod{4}$  avec  $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  ;
- $2x \equiv 2 \pmod{4}$  avec  $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  ;
- $2x \equiv 3 \pmod{5}$  avec  $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ .

Que pouvez-vous en déduire ?

**Exercice 28.** Soient  $a, b$  deux entiers. Montrer que

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \text{ppcm}(a, b)\mathbb{Z}$$

et

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \text{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}.$$

**Sous-question 1 :**

Soit  $m = \text{ppcm}(a, b)$ . Nous pouvons en déduire 3 propriétés :

1.  $\frac{a}{m}$
2.  $\frac{b}{m}$
3. si  $\frac{a}{z}$  et  $\frac{b}{z}$ , alors  $\frac{m}{z}$

Nous voulons donc prouver que  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ . Pour ce faire, nous devons montrer que l'un est inclus dans l'autre, et vice-versa.

( $\subseteq$ ) Soit  $z \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ , i.e.  $\exists k, k' \in \mathbb{Z} \quad z = ak = bk' \Leftrightarrow \frac{a}{z} \text{ et } \frac{b}{z}$

Montrer que  $z \in m\mathbb{Z}$ .

Par la propriété 3,  $\frac{m}{z} \Leftrightarrow z \in m\mathbb{Z}$

( $\supseteq$ ) Soit  $z \in m\mathbb{Z}$ , i.e.  $\frac{m}{z}$

Montrer que  $z \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ , i.e.  $\frac{a}{z}$  et  $\frac{b}{z}$ .

Par la propriété 1,  $\frac{a}{m}$

$$\frac{m}{z} \Rightarrow \frac{a}{z} \text{ et } \frac{b}{z}$$

Par la propriété 2,  $\frac{b}{m}$

**Sous-question 2 :**

**Exercice 29.** Montrer que

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$$

mais que

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

## 6 Séance 6 et 7

**Exercice 30.** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis avec  $|A| = a$  et  $|B| = b$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ). Que valent :

- (i)  $|A \times B|$ ,
- (ii)  $|B^A|$  où  $B^A := \{f : A \rightarrow B\}$ ,
- (iii)  $|\{f : A \rightarrow B : f \text{ est une injection de } A \text{ dans } B\}|$ ,
- (iv)  $|\text{Sym } A|$  où  $\text{Sym } A$  est l'ensemble des permutations de  $A$ .

- (i)  $a \cdot b$
- (ii)  $b^a$
- (iii) Si  $\#B < \#A$  pas d'injection possible, donc vaut zéro. Sinon,  $(b - a + 1) \cdot \dots \cdot (b - a) \cdot b = \frac{b!}{(b-a)!}$
- (iv)  $a!$

**Exercice 31.** Quels sont les ensembles  $F$  non vides ayant la propriété suivante :

- (i) pour tout ensemble  $X$ ,  $|F^X| = 1$  ?
- (ii) pour tout ensemble  $Y$ ,  $|Y^F| = 1$  ?

- (i)  $|F| = 1$
- (ii) Ensemble vide (mais pas possible par énoncé)

**Exercice 32.** Soient  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  deux fonctions. Démontrer :

- (i)  $g \circ f$  injective  $\Rightarrow f$  injective ;
- (ii)  $g \circ f$  surjective  $\Rightarrow g$  surjective ;
- (iii)  $g \circ f$  bijective  $\Rightarrow (f$  injective et  $g$  surjective).

- (i) Si  $f$  non injective, deux éléments  $a_1$  et  $a_2$  différents de  $A$  vont être envoyés par  $f$  sur un élément  $b$  de  $B$ . De plus, ces deux éléments vont être envoyés par  $g \circ f$  sur un même élément  $c$  de  $C$ , car  $g(f(a_1)) = g(b) = c = g(b) = g(f(a_2))$
- (ii) On sait que  $\forall c \in C, \exists a \in A$  tel que  $g \circ f(a) = c$ . On veut montrer que  $g$  est surjective. C'est à dire que  $\forall c \in C, \exists b \in B$  tel que  $g(b) = c$ . Ceci est vérifié en prenant  $b = f(a)$ .
- (iii) Implication de (i) et (ii)

**Exercice 33.** Donner une preuve bijective de l'identité de somme parallèle  $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1}$ .

Voir syllabus année passée page 8.

**Exercice 34.** Donner deux démonstrations de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Première démonstration :

Via le Binôme de Newton, on sait que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Si on pose  $x=1$  et  $y=1$ , on a :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \cdot \underbrace{1^k}_{=1}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Deuxième démonstration :

$\binom{n}{k}$  est le nombre de sous-ensembles à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.

$$|\{0,1\}^n| = 2^n$$

**Exercice 35.** *Qu'obtient-on comme identité sur les coefficients binomiaux en écrivant*

$$(x+y)^{2n} = (x+y)^n (x+y)^n ?$$

(Voir avec assistants)

**Exercice 36.** *Qu'obtient-on en dérivant la formule du binôme ?*

(Voir avec assistants)

**Exercice 37.** *Trouver le nombre de solutions de l'équation  $x+y+z+w=15$ , dans les naturels.*

$$\binom{s+d-1}{d-1} = \binom{15+4-1}{4-1} = \binom{18}{3}$$

**Exercice 38.** *Combien l'équation*

$$x+y+z+t+u=60$$

*possède-t-elle de solutions entières  $(x,y,z,t,u)$  telles que*

$$x > 0, \quad y \geq 9, \quad z > -2, \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad u > 10 \quad ?$$

On doit procéder à un changement de variables.

$$\begin{aligned} x' = x - 1 &\Leftrightarrow x = x' + 1 & y' = y - 9 &\Leftrightarrow y = y' + 9 & z' = z + 1 &\Leftrightarrow z = z' - 1 \\ t' = t & & u' = u - 11 &\Leftrightarrow u = u' + 11 & & \end{aligned}$$

$$x' + y' + z' + t' + u' = 60 - 1 - 9 + 1 - 11 = 40$$

$$\binom{s+d-1}{d-1} = \binom{40+5-1}{5-1} = \binom{44}{4}$$

**Exercice 39.** *Trouver le nombre de solutions de l'inéquation*

$$x+y+z+t \leq 6$$

(i) *dans les naturels ;*

(ii) *dans les entiers  $> 0$  ;*

(iii) *dans les entiers, avec comme contraintes supplémentaires  $x > 2, y > -2, z > 0$  et  $t > -3$ .*

Même chose que les exos précédents (réponse dans un prochain épisode...).

**Exercice 40.** Avec les lettres du mot *MISSISSIPPI*, combien peut-on écrire de mots différents de 11 lettres ?

Lettres du mot : 1 M, 4 I, 4 S, 2 P

Mots de 11 lettres :  $\frac{11!}{(4!)(4!)(2!)(1!)}$

**Exercice 41.** Avec les lettres du mot

*HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA*

(“poisson” en hawaïen), combien peut-on écrire de mots différents de 21 lettres ne comprenant pas deux lettres U côte à côte ?

Faire mots de 12 lettres sans U. Rajouter probabilité de mettre les U dans les 13 places qui restent pour faire des mots de 21 lettres. Donc,  $\binom{13}{9}$

**Exercice 42.** Si  $0 \leq m \leq n$ , que vaut

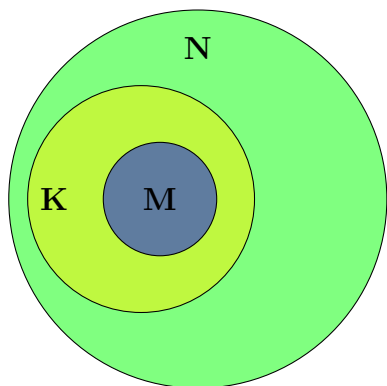
$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} \quad ?$$

(Hint : essayer une preuve bijective.)

Preuve version "étudiant" :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} &= \sum_{k=m}^n \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=m}^n \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=m}^n \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \frac{(n-m)!}{(n-m)!} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^n \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{m} \sum_{k=m}^n \binom{n-m}{k-m} \quad \text{On pose } r = k - m \\ &= \binom{n}{m} \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n-m}{r} 1^r 1^{n-m-r} \quad \text{Formule du binôme de Newton} \\ &= \binom{n}{m} (1+1)^{n-m} = \binom{n}{m} 2^{n-m} \end{aligned}$$

Preuve bijective version assistants :



Fixons  $0 \leq m \leq n$

Comptons de 2 manières différentes le nombre de triples  $(M, K, N)$  où  $M \subseteq K \subseteq N$  et  $|M| = m$ ,  $|N| = n$ ,  $|K| = k$

1. On choisit un ensemble de taille  $m$  dans  $N$  : il y a  $\binom{n}{m}$  façons de choisir
2.  $K$  peut avoir  $m+1, \dots, n$  éléments

1. On choisit un ensemble de taille  $m$  dans  $N$  : il y a  $\binom{n}{m}$  façons de choisir

Ensuite, nous complétons cet ensemble  $M$  pour obtenir  $K$ , c'est à dire il y a

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} = 2^{n-m} \quad \text{choix}$$

Donc au total il y a  $\binom{n}{m} 2^{n-m}$  choix.

2.  $K$  peut avoir  $m+1$ , ...,  $n$  éléments

1. **S'il y en a  $m$**  : on choisit  $m$  éléments parmi  $n$  et  $m$  éléments parmi ces  $m$  éléments, c'est à dire  $\binom{m}{m} \binom{n}{m}$
2. **S'il y en a  $m+1$**  : on choisit  $m+1$  éléments parmi  $n$  et  $m$  éléments parmi ces  $m+1$  éléments, c'est à dire  $\binom{m+1}{m} \binom{n}{m+1}$
3. **S'il y en a  $n$**  : on choisit  $n$  éléments parmi  $n$  et  $m$  éléments parmi ces  $n$  éléments, c'est à dire  $\binom{n}{m} \binom{n}{n}$

Il suffit de tout sommer (car "ou exclusif"). Donc :

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

**Exercice 43.** Si on jette simultanément  $n$  dés identiques, combien de résultats différents peut-on obtenir ? (Deux résultats sont considérés comme équivalents s'ils ont le même nombre de 1, le même nombre de 2, ..., le même nombre de 6.)

(Voir avec assistants)

## 7 Séance 8 et 9

**Exercice 44.** De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 30 marches, si on monte à chaque pas soit d'une seule marche soit de deux marches à la fois ?

**Exercice 45.** Que vaut le déterminant de la matrice  $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

Soit  $M_n$  la matrice de dimension  $n \times n$  de l'exercice.

Si on calcule le déterminant selon la première ligne, on a

$$|M_n| = \underbrace{1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |M_{n-1}|}_{\text{En enlevant première ligne, première colonne}} + \underbrace{(-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot |X|}_{\text{En enlevant première ligne, deuxième colonne}} = |M_{n-1}| + |X|$$

(X étant la sous-matrice de  $M_n$  à laquelle on a enlevé la première ligne et première colonne (DESSIN). Nous pouvons voir que pour calculer le déterminant de X, en appliquant la même méthode on a  $1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |M_{n-2}| = |M_{n-2}|$ .

Maintenant qu'on a le déterminant de X, nous pouvons le remplacer dans la première formule :

$$|M_n| = |M_{n-1}| + |M_{n-2}|$$

On retombe sur Fibo.

**Exercice 46.** Que vaut

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad ?$$

**Exercice 47.** Prouver que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1},$$

où  $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est le nombre d'or.

**Exercice 48.** Résoudre les récurrences

- |  |                           |
|--|---------------------------|
| (i) $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$ , | $a_0 = 1$                 |
| (ii) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ pour $n \geq 2$ ,   | $a_0 = -1, \quad a_1 = 1$ |
| (iii) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ pour $n \geq 2$ ,  | $a_0 = 1, \quad a_1 = 9$  |

**Exercice 49.** Résoudre les récurrences

- |   |   |
|---|---|
| (i) $a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n$ pour $n \geq 0$ , | $a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$ |
| (ii) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$    |   |

**Exercice 50.** Résoudre la récurrence

$$\begin{aligned} a_{n+2} - (2 \cos \alpha) a_{n+1} + a_n &= 0 \quad \forall n \geq 0 \\ a_1 &= \cos \alpha, \quad a_2 = \cos 2\alpha \end{aligned}$$



**Exercice 51.** Résoudre les récurrences

- (i)  $a_n + 2a_{n-1} = n + 3$  pour  $n \geq 1$   $a_0 = 3$   
(ii)  $a_{n+2} + 8a_{n+1} - 9a_n = 8 \cdot 3^{n+1}$  pour  $n \geq 0$   $a_0 = 2, \quad a_1 = -6$   
(iii)  $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2^n + n$  pour  $n \geq 0$

**Exercice 52.** Avec l'alphabet  $\{A, B, C\}$ , combien peut-on écrire de mots de  $n$  lettres dans lesquels on ne trouve pas

- (i) deux lettres  $A$  côte-à-côte ?  
(ii) deux lettres  $A$  ni deux lettres  $B$  côte-à-côte ?  
(iii) deux lettres  $A$  ni deux lettres  $B$  ni deux lettres  $C$  côte-à-côte ?

- (i)  
(ii)  $a_n$  mots qui finissent par  $A$ ,  $b_n$  mots qui finissent par  $B$ ,  $c_n$  mots qui finissent par  $C$ .  
(iii)

**Exercice 53.** Donner le comportement asymptotique des suites  $T(n)$  pour chacune des récurrences suivantes :

- (i)  $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$   
(ii)  $T(n) = 16T(\lceil n/4 \rceil) + n^2$   
(iii)  $T(n) = 7T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$   
(iv)  $T(n) = T(n-1) + n$

**Exercice 54.** Résoudre la récurrence

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \quad \forall n \geq 2$$
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2$$

**Exercice 55.** (Examen août 2011.) Combien y a-t-il de matrices  $2 \times n$  à coefficients entiers vérifiant les deux conditions suivantes ?

- Dans chacune des deux lignes, chacun des entiers  $1, 2, \dots, n$  apparaît une et une seule fois.
- Dans chacune des  $n$  colonnes, les deux coefficients diffèrent d'au plus 1.