# MATH-F307 - Mathématiques Discrètes
# Laurent La Fuente
# Notes de cours

André Madeira Cortes

Nikita Marchant

# Table des matières

# 1 Théorie des Graphes

## 1.1 Définitions

**Définition 1.1.** *Un graphe* $\Gamma$ *est un triplet* $(V, E, \gamma)$ *où* $V$ *est un ensemble fini dont les éléments sont appelés sommets,* $E$ *est un ensemble fini dont les éléments sont appelés arêtes,* $\gamma$ *est une fonction* $\gamma : E \to Paires(V)$*. On nottera le plus souvent* $\Gamma = (V, E)$ *en omettant la fonction* $\gamma$*.*

*Soit* $\gamma(e) = \{x, y\}$ *pour* $e \in E, x, y \in V$ *:*

1. *On dit que* $x$ *et* $y$ *sont adjacents.*
2. *On dit que* $e$ *est incidente à* $x$ *et* $y$*.*

**Définition 1.2.** *Soit* $\Gamma = (V, E, \gamma)$ *un graphe.*

1. $\gamma(e) = \{x, x\}$ *pour* $e \in E, x \in V$ *est appellé un lacet.*
2. *Si au moins 2 arêtes sont incidentes à 2 mêmes somments, on les appelle arêtes multiples.*
3. *Un graphe est simple s'il n'a ni lacet, ni arêtes multiples. Dans ce cas, on omet la fonction* $\gamma$*,on note* $\Gamma = (V, E)$ *et* $E$ *est identifié un sous-ensemble de Paires(V).*

**Définition 1.3.** *Soit* $\Gamma = (V, E)$ *un graphe. Le degré d'un sommet* $v \in V$ *est le nombre d'arêtes incidentes à* $v$*, les lacets comptant pour 2 arêtes. On note le degré de* $v$ *par deg(V).*

**Exemple.** *Dans la figure suivante, nous avons 2 sommets de degré 4 et 6 sommets de degré 1.*

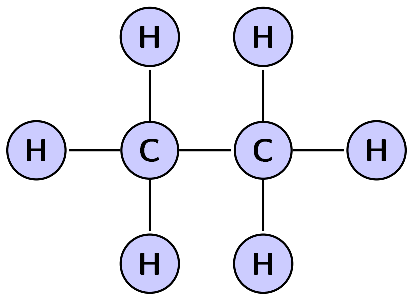


FIGURE 1 – Exemple degrés des sommets dans la molécule $C_2H_6$.

**Théorème 1.1.** *Soit* $\Gamma = (V, E)$*, alors*

$$\sum_{i=1}^{\#V} deg(v_i) = 2\#E$$

**Démonstration.** *Chaque arête contribue 2 fois dans la somme des degrés.*

**Corollaire.** *La somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.*

**Définition 1.4.** *Le graphe complet* $K_n$ *est le graphe simple à* $n$ *sommets pour lequel chaque paire de sommets est une arête.*

**Exemple.** *<Dessin des graphes complets* $K_1K_5$*>*

**Définition 1.5.** *Un graphe* $\Gamma' = (U, F)$ *est un sous-graphe de* $\Gamma = (V, E)$ *si* $U \subseteq V$ *et* $F \subseteq E$*. On nottera* $\Gamma' \leq \Gamma$*.*

**Exemple.** $K_m \leq K_n$ *si* $m \leq n$*.*

**Exercice.** *Montrer que* $K_m$ *possède* $q = \frac{1}{2}n(n-1)$ *arêtes.*

## 1.2 Chemins dans les graphes

**Définition 1.6.** *Soit $\Gamma = (V, E)$ et $v, w \in V$. Un chemin de $v$ à $w$ de longueur $n$ est une séquence alternée de $(n+1)$ sommets $v_0, v_1, ..., v_n$ et de $n$ arêtes $e_1, e_2, ..., e_n$ de la forme*

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n)$$

*dans laquelle chaque $e_i$ est incident à $v_{i-1}$ et $v_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $e_i \neq e_j, \forall i \neq j \in 1, ..., n$*

*Un chemin est simple si aucun sommet ne se répète sauf peut-être $v_0$ et $v_n$.*

*Dans un graphe simple on nottera juste la suite des sommets lorsque l'on décrit un chemin.*

**Définition 1.7.** *Un graphe $\Gamma = (V, E)$ est connexe si $\forall x, y \in V : \exists$ un chemin de $x$ à $y$.*

*La composante connexe de $\Gamma$ contenant $x$ est le sous-graphe $\Gamma'$ de $\Gamma$ dont les sommets et les arêtes sont contenus dans un chemin de $\Gamma$ démarrant en $x$.*

**Définition 1.8.** *Soit $\Gamma = (V, E)$ et $v \in V$.*

*Un cycle est un chemin de $v$ à $v$.*

*Un cycle simple est un cycle de $v$ à $v$ dans lequel aucun sommet n'est répété (mis à part le départ et l'arrivée).*

## 1.3 Arbres

**Définition 1.9.** *Un arbre est un graphe simple connexe qui ne contient aucun cycle.*

**Définition 1.10.** *Dans un arbre, les sommets de degré 1 sont appellés les feuilles.*

**Exemple.** *<Dessin Arbre>*

**Proposition 1.1.** *Si $T$ est un arbre avec $p \geq 2$ sommets, alors $T$ contient au moins 2 feuilles.*

**Démonstration.** *$T$ a $p$ sommets. Tous les chemins sont de longueur inférieure ou égale à $p$. Considérons un chemin $v_0, v_1, ..., v_r$ pour $v_i \in V$, $i = 0, ..., r$ de longueur maximale. Alors, $v_0$ et $v_r$ sont de degré 1.*

**Théorème 1.2.** *Soit $T$ un graphe simple à $p$ sommets. Alors les 3 assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$T$ est un arbre.*
2. *$T$ a $(p-1)$ arêtes et aucun cycle.*
3. *$T$ a $(p-1)$ arêtes et est connexe.*

**Démonstration.** *<Démonstration en 2 parties>.*

# 2 Arithmétique Modulaire

# 3 Combinatoire énumérative

# 4 Théorie des Codes

# 5 Transformées de Fourier discrètes