MATH-F-307: Syllabus (étudiant) d'exercices

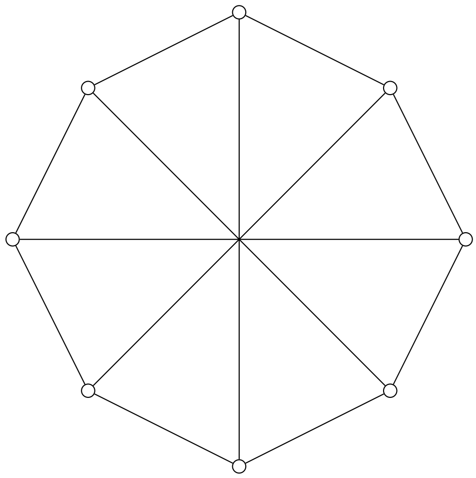
André Madeira Cortes
Nikita Marchant

Table des matières

1 Séance 1

Exercice 1. *Construisez un graphe simple et connexe sur 8 sommets tel que chaque sommet est contenu dans exactement trois arêtes. Pouvez-vous faire la même chose avec 9 sommets ?*

Les sommets d'un graphe à un nombre pair de sommets sont de degré impair. Voici donc un exemple pour $n = 8$.



Le nombre d'arêtes est donc de

$$\frac{n * d(v)}{2} = \frac{8 * 3}{2} = 12$$

Pas possible pour n=9 car

$$\frac{n * d(v)}{2} = \frac{9 * 3}{2} \not\in \mathbb{N}$$

Exercice 2. *Dans un groupe de personnes, il y a toujours deux individus qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.*

1. *Formalisez cette propriété dans le vocabulaire des graphes.*
2. *Démontrez cette propriété (par l'absurde).*

1. Soit Γ un graphe à n sommets.

$$\exists u, v \in V(\Gamma) \text{ tq } deg(u) = deg(v)$$

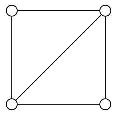
2. Par l'absurde : Supposons que

$$\nexists e_1, e_2 : deg(e_1) = deg(e_2)$$

Les degrés sont tous compris entre 0 et n-1 (c'est à dire qu'on a un sommet pour chaque degré). Il existe donc un sommet qui est isolé (celui de degré 0) et un sommet qui est relié à “tous” les autres sommets (celui de degré n-1), ce qui est impossible.

Exercice 3. *Soit $n \geq 2$ et soit G un graphe simple avec $2n$ sommets et n^2+1 arêtes. Montrez par récurrence que G contient un triangle.*

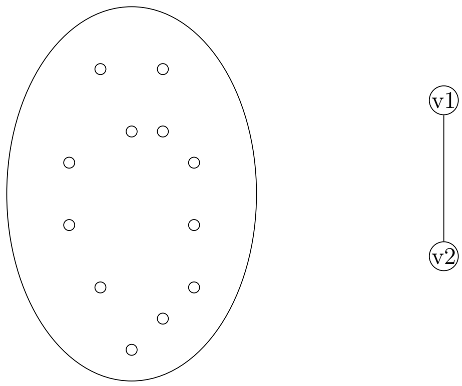
Cas de base : Pour $n = 2$ nous avons donc 4 sommets et 5 arêtes. En voici un exemple :



Récurrence : Supposons le résultat vrai pour n. Vérifions qu'il l'est également pour n+1.

Sommets : $2(n+1) = 2n+2$. Arêtes : $(n+1)^2+1 = n^2+2n+2$

On peut construire un graphe sur $2n$ sommets avec n^2 arêtes sans triangle (par hypothèse d'induction).



Nous avons donc à gauche 2n sommets avec n^2 arêtes et à droite 2 sommets supplémentaires avec 1 arête les reliant. Arrivant donc à $2n+2$ sommets, on doit encore placer $2n+1$ arêtes. Il y a deux façons de le faire :

1. On ajoute une arête vers v_1 ou v_2 à chacun des 2n sommets. Il en reste une à placer. Si, par exemple, on la place entre v_1 et un des sommets à gauche, on a créé un triangle.
2. On fait partir les arêtes de v_1 seulement. Il en reste une à placer. Si on la place en v_2, on crée alors un triangle.

Exercice 4. *Soit G un graphe simple avec 2p sommets. On suppose que le degré de chaque sommet est au moins égal à p. Démontrez que ce graphe est connexe.*

Démontrons par l'absurde : Supposons que le graphe ne soit pas connexe.

Soient x et y deux sommets tels qu'il n'existe pas de chemin entre x et y. Vu que $\forall v : deg(v) \geq p$, x a au moins p voisins (et y aussi). Les voisins de x sont différents des voisins de y, sinon il existerait un chemin entre x et y.

Le graphe est donc composé de $\underbrace{1+p}_{\text{x et ses voisins}} + \underbrace{1+p}_{\text{y et ses voisins}} = 2p+2$ sommets. Ceci est impossible, car l'énoncé dit que le graphe est composé de 2p sommets.

Exercice 5. *Soit G un graphe simple.*

1. *On suppose que G est connexe et que x est un sommet de G de degré 1. Prouvez que $G \setminus \{x\}$ est connexe.*
2. *Déduisez-en que, si G est connexe et $|V(G)| = n \geq 2$, alors G contient au moins $n - 1$ arêtes.*

a) Soient u et v des sommets de $G \setminus \{x\}$. Si G est connexe, il existe un chemin de u à v dans G. Si x est dans ce chemin, vu qu'il est de degré 1, le chemin fait un "aller-retour" en x. Donc, le sommet avant x et le sommet après x dans le chemin sont le même. On peut donc supprimer x sans que le reste du chemin soit "déconnecté". Donc, le chemin existant toujours de u à v dans $G \setminus \{x\}$, celui-ci est bel et bien connexe.

b) Par induction sur n. Pour n=2, le graphe est connexe et contient une arête (entre les deux sommets). Supposons vrai pour tout graphe connexe à n-1 sommets. Soit G un graphe connexe à n sommets. On distingue 2 cas.

1. Il existe un sommet x de degré 1 et, au vu de la réponse (a), $G \setminus \{x\}$ est connexe et avec n-1 sommets. Donc, par l'hypothèse de récurrence, il possède n-2 arêtes. Ces arêtes sont encore dans G et on doit ajouter l'arête menant à x, donc G a n-1 arêtes.
2. Tous les sommets sont de degré au moins 2. Notons m le nombre d'arêtes.

$$2m = \sum_{x \in G} d(x) \geq 2n$$

Donc $m \geq n > n - 1$

Dans tous les cas, G a au moins n-1 arêtes.

Exercice 6. *Donnez un graphe simple et connexe sur au moins 5 sommets qui est :*

- *hamiltonien et eulérien ;*
- *hamiltonien et non eulérien ;*
- *non hamiltonien et eulérien ;*
- *non hamiltonien et non eulérien.*

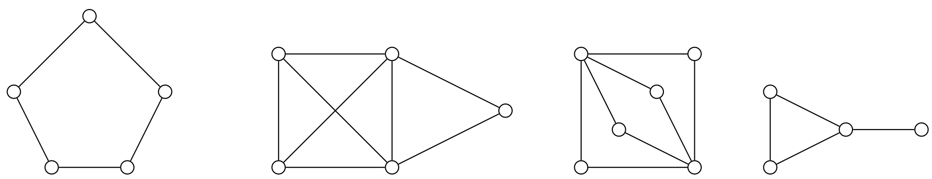


Figure 1 – Exemples pour chaque question, de gauche à droite.

Pour le quatrième, tout graphe contenant une feuille est une réponse possible.

Exercice 7. *Le graphe de la figure 2 est-il isomorphe à un (ou à plusieurs) des graphes de la figure 3 ?*

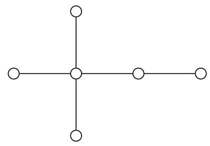


Figure 2

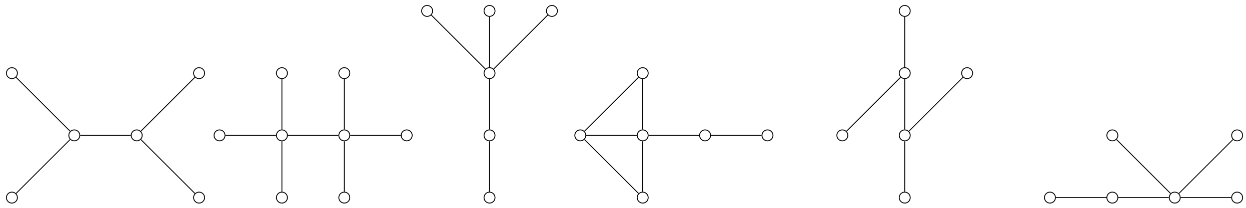


Figure 3

Le troisième et le sixième.

Exercice 8. *Les graphes suivants sont-ils isomorphes ? (Ne vous contentez pas d'une justification approximative : essayez de démontrer rigoureusement vos affirmations.)*

Figure 4

Non isomorphes.

Figure 5

Non isomorphes (il existe un sommet de degré 2 dans le graphe de gauche, tandis qu'aucun sommet du graphe de droite est de degré 2).

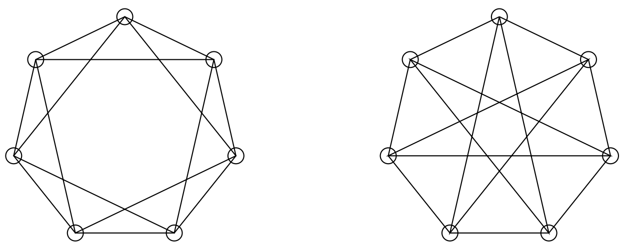


Figure 6

Isomorphes.

2 Séance 2

Exercice 9. *Considérez la grille $n \times n$, le graphe obtenu selon la Figure 7, avec n un naturel ≥ 3. Démontrez que n est pair si et seulement si le graphe est hamiltonien.*

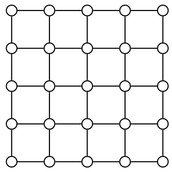
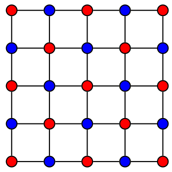


FIGURE 7 – Grille 5×5.

Nous cherchons à prouver que tout graphe du style de la figure 7 avec un n pair est un graphe hamiltonien. C'est à dire n pair $\Leftrightarrow$ graphe hamiltonien.

$\Leftarrow$ Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ et le graphe a $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ sommets, c'est à dire un nombre impair de sommets.

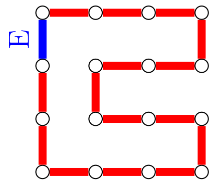
Or, le graphe est biparti (via les diagonales).



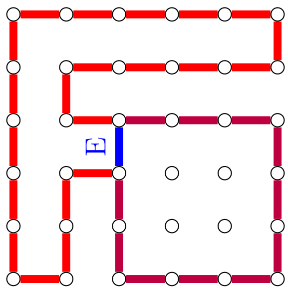
Si le graphe est hamiltonien, cela veut dire qu'il contient un cycle d'ordre impair, ce qui contredit G biparti.

$\Rightarrow$ Démontrons par récurrence sur $2n \geq 4$ que la grille contient un cycle hamiltonien contenant une arête spécifique (pour nous faciliter la tâche) que l'on nommera "E".

Cas de base n=4 : OK



Étape d'induction



Dans la grille $(2n + 2) \times (2n + 2)$, nous avons une sous-grille (en mauve) qui est de taille $2n \times 2n$. Par hypothèse d'induction, il existe un cycle hamiltonien contenant l'arête E. Dans ce cycle, si on élimine l'arête E et on rajoute le chemin en rouge (qui est composé des sommets "+2"), nous obtenons un cycle hamiltonien.

Exercice 10. *Prouvez que pour tout $n \geq 3$, le graphe complet K_n possède exactement $\frac{1}{2}(n-1)!$ cycles hamiltoniens.*

Cas de base n=3, il s'agit d'un triangle. Ce graphe a $\frac{1}{2}(3-1)! = 1$ cycle hamiltonien.

Récurrence Supposons vrai pour K_n. Nous savons donc que K_n possède $\frac{1}{2}(n-1)!$ cycles hamiltoniens.

Pour K_{n+1}, nous construisons n cycles hamiltoniens supplémentaires en ajoutant le nouveau sommet entre 2 sommets quelconques de chaque cycle.

Donc, pour K_{n+1} nous avons $\frac{1}{2}(n-1)!n = \frac{1}{2}n!$ cycles hamiltoniens.

Exercice 11. *Combien d'arbres couvrants possèdent les deux graphes de la Figure 8 ?*

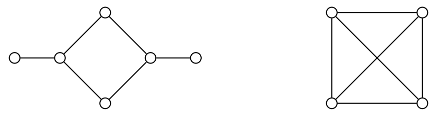
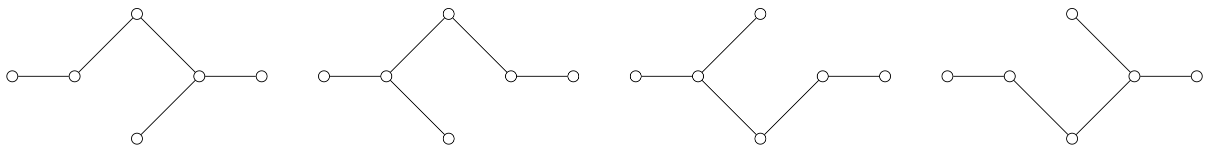


Figure 8

Graphe de gauche : Il existe 4 arbres couvrants

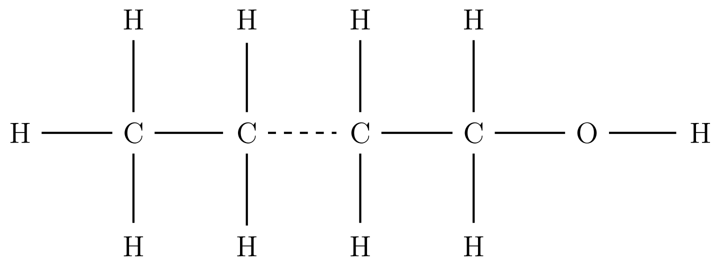


Graphe de droite : Il existe 16 arbres couvrants. Trop nombreux pour que je les dessine tous.

Exercice 12. *Montrez que tous les alcools $C_nH_{2n+1}OH$ sont des molécules dont le graphe est un arbre, en sachant que les valences de C, O et de H sont respectivement $4, 2, 1$.*

$$\sum_{v \in V} deg(v) = (n \cdot 4) + (2n+1) \cdot 1 + (1 \cdot 2) + (1 \cdot 1) = 6n + 4 = 2(3n+2)$$

Donc, $|E| = 3n + 2$. Or, $|V| = 3n + 3$. Or, G connexe. $\Rightarrow$ G est un arbre.



Les graphes correspondants sont des arbres, avec la molécule 0 comme racine, et à sa gauche et droite les sous-arbres.

Exercice 13. *Démontrez que si un graphe hamiltonien $G = (V, E)$ est biparti selon la bipartition $V = A \cup B$, alors $|A| = |B|$. En déduire que $K_{n,m}$, le graphe biparti complet, est hamiltonien si et seulement si $m = n \geq 2$.*

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti, avec $V = A \cup B$. Si G est hamiltonien, il possède un cycle passant par tous les sommets.

Vu que ce cycle ne peut qu'alterner les sommets entre A et B, par définition de la bipartition, $|A| = |B|$.

Si $K_{n,m}$ est hamiltonien alors $m = n$ par ce qui précède. Et si $m = n$ alors $A = a_1, \cdots, a_n$ et $B = b_1, \cdots, b_n$.

Voici le cycle hamiltonien :

$$C = a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \cdots a_n b_n a_1$$

Exercice 14. *Pour chaque graphe de la Figure 9, déterminez si*

1. *le graphe est hamiltonien,*
2. *le graphe est eulérien,*
3. *le graphe est biparti.*

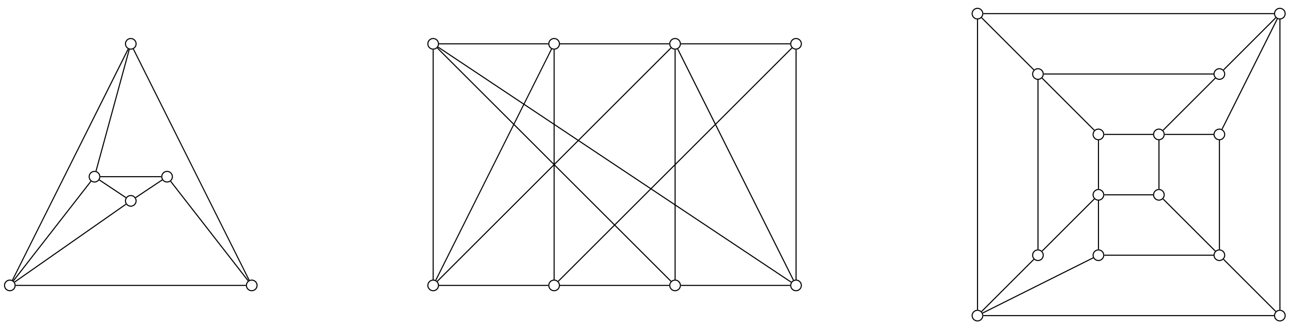
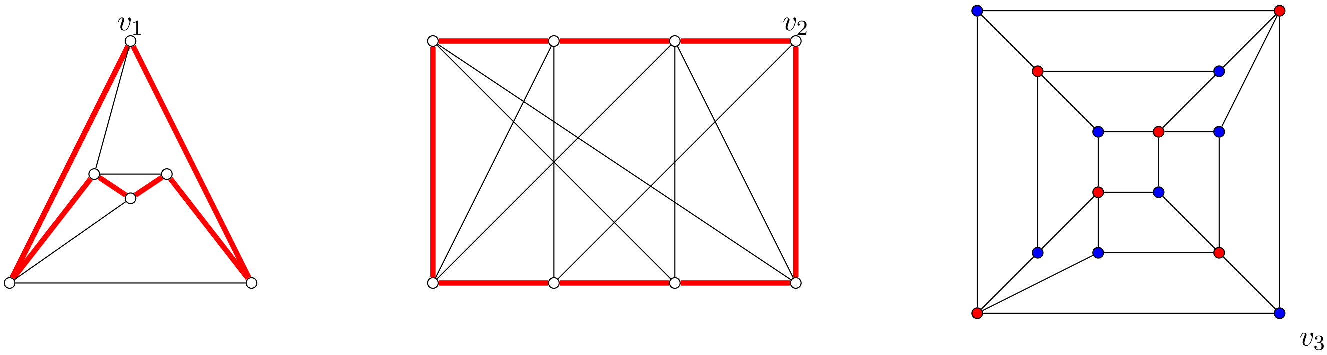


FIGURE 9

Graphe 1 : Hamiltonien (voir chemin rouge). Non-eulérien ($deg(v_1) = 3$). Non-biparti car K_3.

Graphe 2 : Hamiltonien (voir chemin rouge). Non-eulérien ($deg(v_2) = 3$). Non-biparti car K_3.

Graphe 3 : Non-hamiltonien car $|A| \neq |B|$. Non-eulérien ($deg(v_3) = 3$). Biparti.



3 Séance 3

Exercice 15. *Construisez un code de Gray d'ordre* 5 *sur base du code de Gray d'ordre* 4 *suivant : 0000,0100,1100,1000,1010,1110,0110,0010,0011,0111,1111,1011,1001,1101,0101,0001*

Pour consuire le code de Gray d'ordre $n+1$ à partir du code de Gray d'ordre n, il suffit de rajouter un 0 à chaque élément, dans l'ordre, puis repartir dans le sens inverse en rajoutant des 1.

Donc, le code de Gray d'ordre 5 est :

00000, 01000, 11000, 10000, 10100, 11100, 01100, 00100, 00110, 01110, 11110, 10110, 10010, 11010, 01010, 00010,

00011, 01011, 11011, 10011, 10111, 11111, 01111, 00111, 00101, 01101, 11101, 10101, 10001, 11001, 01001, 00001

Exercice 16. *Dans le graphe ci-dessous, on donne un couplage de cardinal maximal. En utilisant la preuve du théorème de König vue au cours, trouvez un transversal de cardinal minimal.*

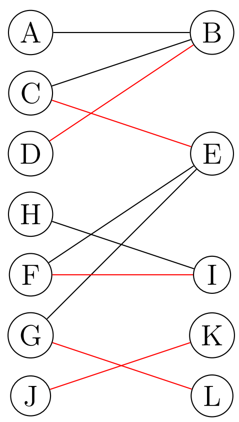


FIGURE 10

Soit M le groupe des sommets du couplage de cardinalité maximale. Le théorème de König dit que la cardinalité maximale d'un couplage est égale à la cardinalité minimum d'un transversal dans un graphe biparti.

Pour chaque arête de M, choisir une extrémité de W. Commençant par un sommet non couplé :

→ la mettre dans U si il existe un chemin alterné terminant en ce sommet ;

→ sinon mettre l'autre extrémité de B dans U.

CE : ∃ chemin HIFE avec $HI \notin M, FE \notin M, IF \in M$ et $H \notin M \to U = \{E\}$

DB : ∃ chemin $AB \notin M$ avec $A \notin M \to U = \{E, B\}$

FI : ∃ chemin $HI \notin M$ avec $H \notin M \to U = \{E, B, I\}$

GL : ∄ chemin alterné finissant en L $\to U = \{B, E, G, I\}$

JK : ∄ chemin alterné finissant en K $\to U = \{B, E, G, I, J\}$

On peut vérifier que c'est bien un transversal.

Exercice 17. *Sur $\mathbb{R}^2$, on définit les relations suivantes :*

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y',$$

$$(x,y)\mathcal{S}(x',y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

Est-ce que les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des ordres ?

Un ordre est une relation :

1. Réflexive : $(x \leq x)$
2. Transitive : $(x \leq y \; et \; y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$
3. Antisymétrique : $(x \leq y \; et \; y \leq x) \Rightarrow x = y$

$<$ Amusez-vous pour le reste, c'est trop long à retranscrire et j'ai plus le temps $>$

Exercice 18. *Considérons le graphe biparti (bipartition donnée par une coloration des sommets) ci-dessous. Sur l'ensemble de ses sommets, on définit la relation $u \leq v$ pour u, v des sommets tels que u est un sommet rouge et $\{u, v\}$ est une arête. On pose aussi $u \leq u$ pour tout sommet u.*

(a) Vérifiez que $\leq$ est un ordre partiel.

(b) Construisez une partition des sommets par k chaînes et trouvez une antichaîne contenant k éléments.

(c) Déduisez-en un couplage de cardinalité maximale et un transversal de cardinalité minimale.

(d) (Bonus) Sur base de ce qui est fait ci-dessus, prouvez que le théorème de König implique le théorème de Dilworth.

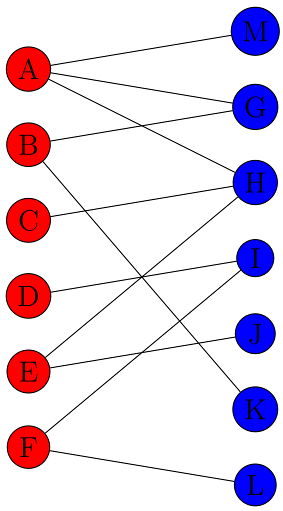


FIGURE 11

(a) Clairement $\forall v \in V \qquad v \leq v$

Si $u \leq v$ et $v \leq t$, on a deux situations :

- On a soit $u \in B, v, t \in W$. Mais vu que le graphe est biparti $\Rightarrow v = t$ et donc $u \leq v = t \Rightarrow u \leq t$
- Soit $u, v \in B$ et $t \in W$. G biparti $\Rightarrow u = v$ et donc $u = v \leq t \Rightarrow u \leq t$

Si $u \leq v$ et $v \leq u$:

- Supposons $u \in B$ et $v \in W$ alors $v \leq u$ est impossible.
- Sinon $u, v \in B$ ou $u, v \in W$. G biparti $\Rightarrow u = v$.

(b) On sait partitionner les sommets en 7 chaînes (arêtes sommets-disjoints + sommets isolés) : AM, BG, CH, DI, EJ, FL et K

L'anti-chaîne qui contient 7 éléments est $W = \{M, G, H, I, J, K, L\}$

(c) Les six arêtes sélectionnées en (b) forment un couplage maximal. Un transversal est $V \backslash \{\text{anti-chaîne}\}$ donc, dans ce cas-ci, $B = \{A, B, C, D, E, F\}$

(d) On remarque que l'ensemble des chaînes à 2 éléments donne un couplage et le complémentaire d'une anti-chaîne A est un transversal car toute arête a au moins un sommet dans le complémentaire de A, sinon on a 2 éléments dans A qui son comparables.

4 Séance 4

Exercice 19. *L'ensemble* $\{2^m | m \in \mathbb{Z}\}$ *forme-t-il un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication usuelle ?*

Soit $X = 2^m, m \in \mathbb{Z}$ et $(X, .)$ le groupe à analyser.

1. $\forall x, y \in \mathbb{Z} : 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y} \in X$ car $(x + y) \in \mathbb{Z}$
2. (Associativité) $\forall m, n, 0 \in \mathbb{Z} : 2^m \cdot (2^n \cdot 2^0) = 2^m \cdot 2^{n+0} = 2^{m+n+0} = 2^{m+n} \cdot 2^0 = (2^m \cdot 2^n) \cdot 2^0$
3. (Élément neutre) $2^m \cdot 2^0 = 2^{m+0} = 2^m = 2^0 \cdot 2^m = 1 \cdot 2^m$
4. (Opposé) $2^m \cdot 2^{-m} = 2^{m+(-m)} = 2^0 = 1$

L'ensemble forme donc bien un groupe.

Exercice 20. *L'ensemble* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ *avec l'addition définie par*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

(où $x_i + y_i$ *est le résultat d'une addition modulo 2) forme-t-il un groupe ?*

Il faut tester si les 3 propriétés d'un groupe sont respectées.

1. (Associativité) OK : l'addition dans $\mathbb{Z}_2$ est associative donc elle l'est également pour chaque composante.
2. (Élément neutre) $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^n$
3. (Opposé) $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n : (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$. Donc chaque élément est son propre inverse.

Exercice 21. *En appliquant l'algorithme d'Euclide à a et b ci-dessous, calculer :*
- *le PGCD(a, b),*
- x *et* y *tels que* $ax + by = PGCD(a, b)$,

Les différentes valeurs de a et b sont :

(i) $a = 12, b = 34$,
(ii) $a = 13, b = 34$,
(iii) $a = 13, b = 31$,

(i) pgcd(34,12)

$34 = 12 \cdot 2 + 10$
$12 = 10 \cdot 1 + 2$
$10 = 2 \cdot 5 + 0$
pgcd(a,b) $= 2$

$2 = 12 \cdot 3 - 34$

(ii) pgcd(34,13)

$34 = 13 \cdot 2 + 8$
$13 = 8 \cdot 1 + 5$
$8 = 5 \cdot 1 + 3$
$5 = 3 \cdot 1 + 2$
$3 = 2 \cdot 1 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$
pgcd(a,b) $= 1$

$1 = 5 \cdot 34 - 13 \cdot 13$

(iii) pgcd(31,13)

$31 = 13 \cdot 2 + 5$
$13 = 5 \cdot 2 + 3$
$5 = 3 \cdot 1 + 2$
$3 = 2 \cdot 1 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$
pgcd(a,b) $= 1$

$1 = 12 \cdot 13 - 5 \cdot 31$

Exercice 22. *(i) Trouver un entier x tel que le reste de la division de $50x$ par 71 donne 1.*
(ii) Trouver un entier x tel que le reste de la division de $50x$ par 71 donne 63.
(iii) Trouver un entier x tel que le reste de la division de $43x$ par 64 donne 1.

(i) x = 27
(ii) x = 1701
(iii) x = 3

Exercice 23. *Dans le système RSA, prenons $p = 11$, $q = 13$ et $e = 7$. Que vaut alors s ? Si 99 est le message à coder, quel est le message crypté ? Vérifier en décriptant le message.*

<MISSING>

5 Séance 5

Exercice 24. *Montrer le résultat suivant : si $a \equiv b \ (mod\ n)$ et $c \equiv d \ (mod\ n)$, alors*

$$a + c \equiv b + d \ (mod\ n) \text{ et } a.c \equiv b.d \ (mod\ n).$$

· $n|a - b$ et $n|c - d \Rightarrow n|(a - b + c - d) \Leftrightarrow n|a + c - (b + d) \Leftrightarrow a + c \equiv b + d(mod\ n)$

· $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d) \Rightarrow n|(c(a - b) + b(c - d)) \Rightarrow n|ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd(mod\ n)$

Exercice 25. *Montrer que, si $a \equiv b \ (mod\ n)$, alors*

$$a + c \equiv b + c \ (mod\ n) \ \forall c \in \mathbb{Z}$$

et

$$a.c \equiv b.c \ (mod\ n) \ \forall c \in \mathbb{Z}.$$

$\forall c \in \mathbb{Z}, c \equiv c(mod\ n)$

Utiliser l'exércice précédent pour prouver.

Exercice 26. *Prouver que, si $a \equiv b \ (mod\ n)$, alors $a^k \equiv b^k \ (mod\ n)$ pour tout entier $k > 0$.*

$a^k \equiv b^k \ (mod\ n) \Rightarrow b^k - a^k = xn \Leftrightarrow ln(b^k - a^k) = ln(xn) \Leftrightarrow \frac{ln(b^k)}{ln(a^k)} = ln(xn) \Leftrightarrow \frac{\cancel{k}ln(b)}{\cancel{k}ln(a)} = ln(xn) \Leftrightarrow ln(b) - ln(a) = ln(xn) \Leftrightarrow b - a = xn \Rightarrow a \equiv b \ (mod\ n)$

Exercice 27. *Trouver toutes les solutions aux congruences suivantes :*

- $2x \equiv 3 \ (mod\ 4)$ *avec* $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *;*
- $2x \equiv 2 \ (mod\ 4)$ *avec* $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *;*
- $2x \equiv 3 \ (mod\ 5)$ *avec* $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Que pouvez-vous en déduire ?

- Pour $x \equiv 0/1/2/3$ (mod 4) on a $2x \equiv 0/2/4(= 0)/6(= 2)$ (mod 4). Il y a donc pas de solution dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- Pour $x \equiv 0/1/2/3$ (mod 4) on a $2x \equiv 0/2/4(= 0)/6(= 2)$ (mod 4). Donc, $x \equiv 1(mod\ 4)$ ou $x \equiv 3(mod\ 4)$ sont donc des solutions dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- Pour $x \equiv 0/1/2/3/4$ (mod 5) on a $2x \equiv 0/2/4/6(= 1)/8(= 3)$ (mod 5). Donc, $x \equiv 4(mod\ 5)$ est la seule solution dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

On peut en déduire le Théorème de Gauss : La congruence $ax \equiv b(mod\ n)$ a une et une seule solution dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi pgcd(a,n) = 1

Exercice 28. *Soient a, b deux entiers. Montrer que*

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = ppcm(a,b)\mathbb{Z}$$

et

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = pgcd(a,b)\mathbb{Z}.$$

Sous-question 1 :

Soit $m = ppcm(a,b)$. Nous pouvons en déduire 3 propriétés :

1. $\frac{a}{m}$
2. $\frac{b}{m}$
3. si $\frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$, alors $\frac{m}{z}$

Nous voulons donc prouver que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. Pour ce faire, nous devons montrer que l'un est inclus dans l'autre, et vice-versa.

($\subseteq$) Soit $z \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$, i.e. $\exists k, k' \in \mathbb{Z}$ $\quad z = ak = bk' \Leftrightarrow \frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$

Montrer que $z \in m\mathbb{Z}$.

Par la propriété 3, $\frac{m}{z} \Leftrightarrow z \in m\mathbb{Z}$

($\supseteq$) Soit $z \in m\mathbb{Z}$, i.e. $\frac{m}{z}$

Montrer que $z \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$, i.e. $\frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$.

Par la propriété 1, $\frac{a}{m}$
Par la propriété 2, $\frac{b}{m}$ $\quad \frac{m}{z} \Rightarrow \frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$

Sous-question 2 :

Nous voulons prouver $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = pgcd(a,b)\mathbb{Z}$.

($\subseteq$) Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, alors $az_1 + bz_2 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Par définition du pgcd, $\exists y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $a = pgcd(a,b)y_1$ et $b = pgcd(a,b)y_2$.

Donc, $az_1 + bz_2 = pgcd(a,b)(y_1z_1 + y_2z_2) \in pgcd(a,b)\mathbb{Z}$

($\supseteq$) Soit $z \in \mathbb{Z}$ alors $pgcd(a,b)z \in pgcd(a,b)\mathbb{Z}$

On sait qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $pgcd(a,b) = ax + by$.

$\Rightarrow pgcd(a,b)z = axz + byx \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

Exercice 29. *Montrer que*

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$$

mais que

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

6 Séance 6 et 7

Exercice 30. *Soient A et B deux ensembles finis avec $|A| = a$ et $|B| = b$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Que valent :*

(i) $|A \times B|$,

(ii) $|B^A|$ *où* $B^A := \{f : A \to B\}$,

(iii) $|\{f : A \to B : f \text{ est une injection de } A \text{ dans } B\}|$,

(iv) $|\mathrm{Sym}\, A|$ *où* $\mathrm{Sym}\, A$ *est l'ensemble des permutations de* A.

(i) $a \cdot b$

(ii) b^a

(iii) Si $\#B < \#A$ pas d'injection possible, donc vaut zéro. Sinon :

$$(b - a + 1) \cdot ... \cdot (b - 1) \cdot b = \frac{b!}{(b - a)!}$$

(iv) $a!$

Exercice 31. *Quels sont les ensembles F non vides ayant la propriété suivante :*

(i) pour tout ensemble X, $|F^X| = 1$?

(ii) pour tout ensemble Y, $|Y^F| = 1$?

(i) $|F^X| = |F|^{|X|} = 1 \Rightarrow |F| = 1$

(ii) $|Y^F| = |Y|^{|F|} = 1 \Rightarrow |F| = 0$. Il s'agit d'un ensemble vide (mais pas possible par énoncé).

Exercice 32. *Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. Démontrer :*

(i) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective ;

(ii) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective ;

(iii) $g \circ f$ bijective $\Rightarrow$ (f injective et g surjective).

(i) Si f non injective, deux éléments a_1 et a_2 différents de A vont être envoyés par f sur un élément b de B. De plus, ces deux éléments vont être envoyés par g o f sur un même élément c de C, car g (f (a_1)) = g(b) = c = g(b) = g (f (a_2))

(ii) On sait que $\forall c \in C, \exists a \in A$ tel que g o f (a) = c. On veut montrer que g est surjective. C'est à dire que $\forall c \in C, \exists b \in B$ tel que g (b) = c. Ceci est vérifié en prenant b = f(a).

(iii) Implication de (i) et (ii)

Exercice 33. *Donner une preuve bijective de l'identité de somme parallèle $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.*

Voir syllabus année passée page 8.

Exercice 34. *Donner deux démonstrations de*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ .$$

Première démonstration :

Via le Binôme de Newton, on sait que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Si on pose x=1 et y=1, on a :

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \cdot \underbrace{1^k}_{=1} \\ 2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Deuxième démonstration :

$\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments.

$$|\{0,1\}^n| = 2^n$$

Exercice 35. *Qu'obtient-on comme identité sur les coefficients binomiaux en écrivant*

$$(x+y)^{2n} = (x+y)^n(x+y)^n \ ?$$

$$\sum_{k=0}^{2n} x^k y^{2n-k} = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}\right)^2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{j} x^{i+j} y^{2n-i-j}$$

Donc pour $k = i + j$, nous avons

$$\binom{2n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j=k}} \binom{n}{i}\binom{n}{j} = 2 \sum_{\substack{0 \leq i \leq j \leq n \\ i+j=k}} \binom{n}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i}$$

En particulier si $k = n$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

Exercice 36. *Qu'obtient-on en dérivant la formule du binôme ?*

(Voir avec assistants)

Exercice 37. *Trouver le nombre de solutions de l'équation $x+y+z+w=15$, dans les naturels.*

$$\binom{s+d-1}{d-1} = \binom{15+4-1}{4-1} = \binom{18}{3}$$

Exercice 38. *Combien l'équation*

$$x+y+z+t+u=60$$

possède-t-elle de solutions entières (x,y,z,t,u) telles que

$$x>0\ , \quad y\geqslant 9\ , \quad z>-2\ , \quad t\geqslant 0 \quad \textit{et} \quad u>10 \quad ?$$

On doit procéder à un changement de variables.

$x' = x-1 \Leftrightarrow x = x'+1 \qquad y' = y-9 \Leftrightarrow y = y'+9 \qquad z' = z+1 \Leftrightarrow z = z'-1$

$$t' = t \qquad u' = u-11 \Leftrightarrow u = u'+11$$

$$x'+y'+z'+t'+u' = 60-1-9+1-11 = 40$$

$$\binom{s+d-1}{d-1} = \binom{40+5-1}{5-1} = \binom{44}{4}$$

Exercice 39. *Trouver le nombre de solutions de l'inéquation*

$$x+y+z+t\leqslant 6$$

(i) dans les naturels ;

(ii) dans les entiers >0 ;

(iii) dans les entiers, avec comme contraintes supplémentaires $x>2$, $y>-2$, $z>0$ et $t>-3$.

Même chose que les exos précédents (réponse dans un prochain épisode...).

Exercice 40. *Avec les lettres du mot MISSISSIPPI, combien peut-on écrire de mots différents de 11 lettres ?*

Lettres du mot : 1 M, 4 I, 4 S, 2 P

Mots de 11 lettres :

$$\frac{\overbrace{11!}^{\text{11 lettres}}}{\underbrace{(4!)}_{=I}\underbrace{(4!)}_{=S}\underbrace{(2!)}_{=P}\underbrace{(1!)}_{=M}}$$

Exercice 41. *Avec les lettres du mot*

$$HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA$$

("poisson" en hawaïen), combien peut-on écrire de mots différents de 21 lettres ne comprenant pas deux lettres U côte à côte ?

Il y a deux étapes. Premièrement, il faut compter le nombre de mots possibles sans U. Ensuite, on rajoute la probabilité de mettre les 9 U dans les places qui restent.

Étape 1 : Sans les U, le mot contient 3 A, 2 H, 2 M, 2 N, 2K et 1 P.

$$\frac{12!}{3!2!2!2!2!1!}$$

Étape 2 : Nous avons donc un mot de 12 lettres. On doit placer les U soit entre 2 lettres, soit au début du mot, soit en fin de mot. Ceci veut dire qu'il y a 12 places possibles. Donc, le nombre de possibilités est de $\binom{13}{9}$.

Donc, au total, il y a :

$$\frac{12!}{3!2!2!2!2!1!} \cdot \binom{13}{9} \text{mots possibles}$$

Exercice 42. *Si* $0 \leqslant m \leqslant n$, *que vaut*

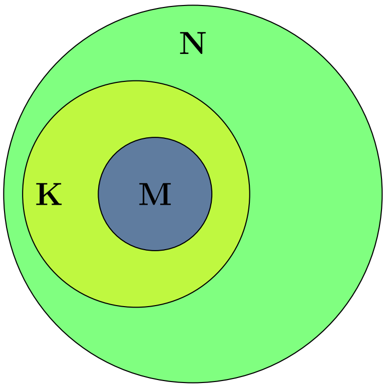
$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} \quad ?$$

(Hint : essayer une preuve bijective.)

Preuve version "étudiant" :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} &= \sum_{k=m}^{n} \frac{\cancel{k!}}{m!(k-m)!} \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} = \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \frac{(n-m)!}{(n-m)!} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^{n} \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{m} \sum_{k=m}^{n} \binom{n-m}{k-m} \qquad \text{On pose} \quad r = k-m \\
&= \binom{n}{m} \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n-m}{r} 1^r 1^{n-m-r} \qquad \text{Formule du binôme de Newton} \\
&= \binom{n}{m} (1+1)^{n-m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}
\end{aligned}$$

Preuve bijective version assistants :



Fixons $0 \leq m \leq n$ Comptons de 2 manières différentes le nombre de triples (M, K, N) où $M \subseteq K \subseteq N$ et |M| = m, |N| = n, |K| = k

1. On choisit un ensemble de taille m dans N : il y a $\binom{n}{m}$ façons de choisir
2. K peut avoir m éléments, m+1, ..., n éléments

1. On choisit un ensemble de taille m dans N : il y a $\binom{n}{m}$ façons de choisir

Ensuite, nous complétons cet ensemble M pour obtenir K, c'est à dire il y a

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} = 2^{n-m} \quad \text{choix}$$

Donc au total il y a $\binom{n}{m}2^{n-m}$ choix.

2. K peut avoir m éléments, m+1, ..., n éléments

1. **S'il y en a m :** on choisit m éléments parmi n et m éléments parmi ces m éléments, c'est à dire $\binom{m}{m}\binom{n}{m}$
2. **S'il y en a m+1 :** on choisit m+1 éléments parmi n et m éléments parmi ces m+1 éléments, c'est à dire $\binom{m+1}{m}\binom{n}{m+1}$
3. **S'il y en a n :** on choisit n éléments parmi n et m éléments parmi ces n éléments, c'est à dire $\binom{n}{m}\binom{n}{n}$

Il suffit de tout sommer (car "ou exclusif"). Donc :

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}2^{(n-m)}$$

Exercice 43. *Si on jette simultanément n dès identiques, combien de résultats différents peut-on obtenir ? (Deux résultats sont considérés comme équivalents s'ils ont le même nombre de 1, le même nombre de 2, . . . , le même nombre de 6.)*

(Voir avec assistants)

7 Séance 8 et 9

Exercice 44. *De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 30 marches, si on monte à chaque pas soit d'une seule marche soit de deux marches à la fois ?*

Soit u_n le nombre de façons différentes de monter n marches.

Nous avons $u_1 = 1$ (monter une marche) et $u_2 = 2$ (monter les deux marches à la fois ou deux fois une marche).

Pour arriver en haut de l'escalier de n+1 marches, on monte soit les 2 dernières marches d'un coup (u_{n-1} façons) soit la dernière marche toute seule (u_n façons). C'est à dire :

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad \forall n \geq 2$$

Donc $u_n = F_{n+1}$ (le n+1ème terme de la suite de Fibonacci). Par conséquent :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \right)$$

Donc :

$$u_{30} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{31} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{31} \right) = 1,346269 \cdot 10^6 = 1346269$$

Exercice 45. *Que vaut le déterminant de la matrice $n \times n$*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ?$$

Soit M_n la matrice de dimension $n \times n$ de l'exercice.

Si on calcule le déterminant selon la première ligne, on a

$$|M_n| = \underbrace{1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |M_{n-1}|}_{\text{En enlevant première ligne, première colonne}} + \underbrace{(-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot |X|}_{\text{En enlevant première ligne, deuxième colonne}} = |M_{n-1}| + |X|$$

.

(X étant la sous-matrice de M_n à laquelle on a enlevé la première ligne et première colonne (DESSIN). Nous pouvons voir que pour calculer le déterminant de X, en appliquant la même méthode on a $1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |M_{n-2}| = |M_{n-2}|$.

Maintenant qu'on a le déterminant de X, nous pouvons le remplacer dans la première formule :

$|M_n| = |M_{n-1}| + |M_{n-2}|$

On retombe sur Fibo.

Exercice 46. *Que vaut*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad ?$$

Exercice 47. *Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1} \ ,$$

où $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

Exercice 48. *Résoudre les récurrences*

(i) $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1$ *pour* $n \geqslant 1$, $\quad a_0 = 1$

(ii) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ *pour* $n \geqslant 2$, $\quad a_0 = -1, \quad a_1 = 1$

(iii) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ *pour* $n \geqslant 2$, $\quad a_0 = 1, \quad a_1 = 9$

Exercice 49. *Résoudre les récurrences*

(i) $a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n$ *pour* $n \geqslant 0$, $\quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$

(ii) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$

Exercice 50. *Résoudre la récurrence*

$$a_{n+2} - (2\cos\alpha)a_{n+1} + a_n = 0 \quad \forall n \geqslant 0$$
$$a_1 = \cos\alpha, \quad a_2 = \cos 2\alpha$$

Exercice 51. *Résoudre les récurrences*

(i) $a_n + 2a_{n-1} = n + 3$ *pour* $n \geqslant 1$ $\quad a_0 = 3$

(ii) $a_{n+2} + 8a_{n+1} - 9a_n = 8 \cdot 3^{n+1}$ *pour* $n \geqslant 0$ $\quad a_0 = 2, \quad a_1 = -6$

(iii) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2^n + n$ *pour* $n \geqslant 0$

Exercice 52. *Avec l'alphabet $\{A, B, C\}$, combien peut-on écrire de mots de n lettres dans lesquels on ne trouve pas*

(i) deux lettres A côte-à-côte ?

(ii) deux lettres A ni deux lettres B côte-à-côte ?

(iii) deux lettres A ni deux lettres B ni deux lettres C côte-à-côte ?

(i)

(ii) a_n mots qui finissent par A, b_n mots qui finissent par B, c_n mots qui finissent par C.

(iii)

Exercice 53. *Donner le comportement asymptotique des suites $T(n)$ pour chacune des récurrences suivantes :*

(i) $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$

(ii) $T(n) = 16T(\lceil n/4 \rceil) + n^2$

(iii) $T(n) = 7T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$

(iv) $T(n) = T(n-1) + n$

Exercice 54. *Résoudre la récurrence*

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \quad \forall n \geqslant 2$$
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2$$

Exercice 55. *(Examen août 2011.) Combien y a-t-il de matrices* $2 \times n$ *à coefficients entiers vérifiant les deux conditions suivantes ?*

- *Dans chacune des deux lignes, chacun des entiers* $1, 2, \ldots, n$ *apparaît une et une seule fois.*
- *Dans chacune des* n *colonnes, les deux coefficients diffèrent d'au plus* 1*.*

8 Séance 10 et 11

Exercice 56. *Que vaut*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{1}{10^n} \quad ?$$

(Rappel : H_n est le n-ème nombre harmonique.)

Nous savons que

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = \frac{1}{1-x} ln(\frac{1}{1-x})$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} ln(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}) = \frac{10}{9} ln(\frac{10}{9}) = \frac{10}{9}(ln(10) - ln(9))$$

Exercice 57. *Trouver la fonction génératrice ordinaire de $(2^n + 3^n)_{n\in\mathbb{N}}$, en forme close.*

Posons :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \frac{1}{1-3x}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n) \cdot x^n = A(x) + B(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$$

Exercice 58. *(Examen janvier 2011.) Calculer la somme de chacune des séries suivantes.*

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} \frac{1}{10^n}$

a) Il s'agit de la FGO de

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} * ln(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}) = 2 * ln(2)$$

b) Nous savons que la FGO de $\left(\binom{n}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, k fixé est :

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Donc cette série vaut, pour $k = 2$ et $x = \frac{1}{10}$

$$\frac{(\frac{1}{10})^2}{(1-\frac{1}{10})^{2-1}} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{9^3}{1000}} = \frac{10}{729}$$

Exercice 59. *(Examen août 2011.) Calculer la somme de chacune des séries suivantes.*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

ATTENTION : n=1 dans chaque exercice !

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -1 + 2 = 1$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = \frac{1}{1/2} = 2$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ =??

Exercice 60. *Quelle est la FGO de* $(1, 1+3, 1+3+3^2, 1+3+3^2+3^3, \ldots)$ *?*

Posons la suite $a_n = \sum_{i=0}^{n} z^i$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La FGO de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot 1)x^n &= (\sum_{n=0}^{\infty} z^n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} 1x^n) \\
&= (\sum_{n=0}^{\infty} (zx)^n)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \\
&= \frac{1}{1-3x} \cdot \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{1}{(1-3x)(1-x)}
\end{aligned}$$

Exercice 61. *(Examen septembre 2015.) Résolvez par la méthode des fonctions génératrices l'équation de récurrence*

$$a_n - 3a_{n-1} = 4^n \quad \text{avec} \quad a_0 = 1.$$

Soit A(x) $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la FGO de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad , a_0 = 1 \qquad a_n = 4^n + 3a_{n-1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (4^n + 3a_{n-1}) x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n + 3x \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{=A(x)}
\end{aligned}$$

Donc : $(1-3x)A(x) = \frac{1}{1-4x} \Leftrightarrow A(x) = \frac{1}{(1-4x)(1-3x)} \Leftrightarrow A(x) = \frac{a}{1-4x} + \frac{b}{1-3x}$

Si on résout l'équation $1 = a(1-3x) + b(1-4x)$ on trouve $b = -3$ et $a = 4$.

Donc :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{4}{1-4x} - \frac{3}{1-3x} \\
&= 4 \cdot \frac{1}{1-4x} - 3 \cdot \frac{1}{1-3x} \\
&= 4 \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n) - 3 \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (4^{n+1} - 3^{n+1}) x^n
\end{aligned}$$

Par conséquent : $a_n = 4^{n+1} - 3^{n+1} \qquad \forall n \geq 0$

Exercice 62. *Un collectionneur excentrique rafolle des pavages de rectangles $2 \times n$ par des dominos verticaux 2×1 et horizontaux 1×2. Il paye sans hésiter 4€ par domino vertical et 1€ par domino horizontal. Pour combien de pavages sera-t-il prêt à payer n€ ?*

<La résolution de cet exo prends genre 3 ou 4 pages de calculs et explications donc je vais clairement pas la retranscrire>