MATH-F307 - Mathématiques Discrètes
Laurent La Fuente
Notes de cours

André Madeira Cortes

Nikita Marchant

Table des matières

1 Théorie des Graphes **3**
1.1 Définitions 3
1.2 Chemins dans les graphes 4
1.3 Arbres 4

2 Arithmétique Modulaire **5**

3 Combinatoire énumérative **6**

4 Théorie des Codes **7**

5 Transformées de Fourier discrètes **8**

1 Théorie des Graphes

1.1 Définitions

Définition 1.1. *Un graphe Γ est un triplet (V, E, γ) où V est un ensemble fini dont les éléments sont appelés sommets, E est un ensemble fini dont les éléments sont appelés arêtes, γ est une fonction $\gamma : E \to Paires(V)$. On nottera le plus souvent $\Gamma = (V, E)$ en omettant la fonction γ.*

Soit $\gamma(e) = \{x, y\}$ pour $e \in E, x, y \in V$:

1. *On dit que x et y sont adjacents.*
2. *On dit que e est incidente à x et y.*

Définition 1.2. *Soit $\Gamma = (V, E, \gamma)$ un graphe.*

1. *$\gamma(e) = \{x, x\}$ pour $e \in E, x \in V$ est appellé un lacet.*
2. *Si au moins 2 arêtes sont incidentes à 2 mêmes somments, on les appelle arêtes multiples.*
3. *Un graphe est simple s'il n'a ni lacet, ni arêtes multiples. Dans ce cas, on omet la fonction γ,on note $\Gamma = (V, E)$ et E est identifié un sous-ensemble de Paires(V).*

Définition 1.3. *Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe. Le degré d'un sommet $v \in V$ est le nombre d'arêtes incidentes à v, les lacets comptant pour 2 arêtes. On note le degré de v par deg(V).*

Exemple. *Dans la figure suivante, nous avons 2 sommets de degré 4 et 6 sommets de degré 1.*

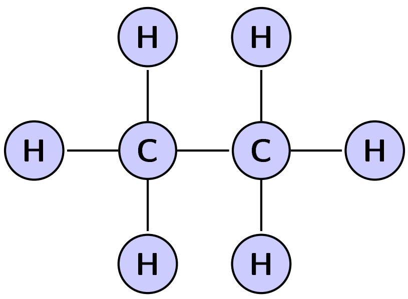

FIGURE 1 – Exemple degrés des sommets dans la molécule C_2H_6.

Théorème 1.1. *Soit $\Gamma = (V, E)$, alors*

$$\sum_{i=1}^{\#V} deg(v_i) = 2\#E$$

Démonstration. *Chaque arête contribue 2 fois dans la somme des degrés.*

Corollaire. *La somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.*

Définition 1.4. *Le graphe complet K_n est le graphe simple à n sommets pour lequel chaque paire de sommets est une arête.*

Exemple. *<Dessin des graphes complets K_1K_5>*

Définition 1.5. *Un graphe $\Gamma' = (U, F)$ est un sous-graphe de $\Gamma = (V, E)$ si $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$. On nottera $\Gamma' \leq \Gamma$.*

Exemple. $K_m \leq K_n$ *si* $m \leq n$.

Exercice. *Montrer que K_m possède $q = \frac{1}{2}n(n-1)$ arêtes.*

1.2 Chemins dans les graphes

Définition 1.6.

Définition 1.7.

Définition 1.8.

1.3 Arbres

Définition 1.9.

Définition 1.10.

Exemple.

Proposition 1.1.

Démonstration.

Théorème 1.2.

Démonstration.

2 Arithmétique Modulaire

3 Combinatoire énumérative

4 Théorie des Codes

5 Transformées de Fourier discrètes