

MATH-F-307: Syllabus (étudiant) d'exercices

André MADEIRA CORTES
Nikita MARCHANT

Table des matières

1	Séance 1	3
2	Séance 2	5
3	Séance 3	6
4	Séance 4	8
5	Séance 5	9
6	Séance 6 et 7	11
7	Séance 8 et 9	15

1 Séance 1

Exercice 1. Construisez un graphe simple et connexe sur 8 sommets tel que chaque sommet est contenu dans exactement trois arêtes. Pouvez-vous faire la même chose avec 9 sommets ?

Exercice 2. Dans un groupe de personnes, il y a toujours deux individus qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.

1. Formalisez cette propriété dans le vocabulaire des graphes.
2. Démontrez cette propriété (par l'absurde).

Par l'absurde : Il n'existe pas de $e_1, e_2 : \deg(e_1) = \deg(e_2)$.

$$0 \leq \deg(e_1) \leq n - 1$$

(...)

Exercice 3. Soit $n \geq 2$ et soit G un graphe simple avec $2n$ sommets et $n^2 + 1$ arêtes. Montrez que G contient un triangle.

Exercice 4. Soit G un graphe simple avec $2p$ sommets. On suppose que le degré de chaque sommet est au moins égal à p . Démontrez que ce graphe est connexe.

Exercice 5. Soit G un graphe simple.

1. On suppose que G est connexe et que x est un sommet de G de degré 1. Prouvez que $G \setminus \{x\}$ est connexe.
2. Déduisez-en que, si G est connexe et $|V(G)| = n \geq 2$, alors G contient au moins $n - 1$ arêtes.

Exercice 6. Donnez un graphe simple et connexe sur au moins 5 sommets qui est :

- hamiltonien et eulérien ;
- hamiltonien et non eulérien ;
- non hamiltonien et eulérien ;
- non hamiltonien et non eulérien.

Exercice 7. Le graphe 1 est-il isomorphe à un (ou à plusieurs) des graphes ci-dessous ?

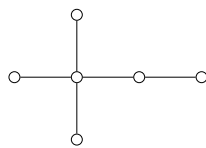


FIGURE 1

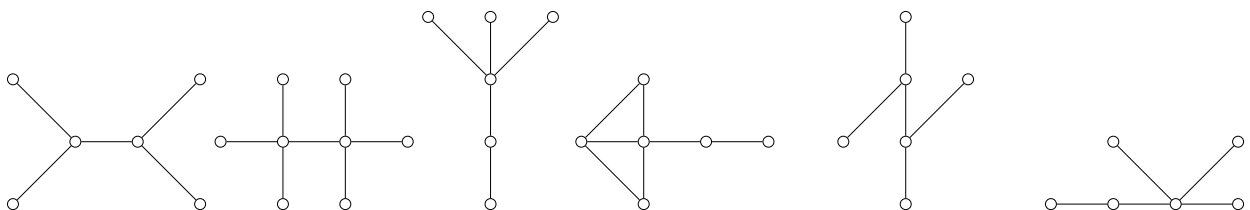


FIGURE 2

Exercice 8. *Les graphes suivants sont-ils isomorphes ? (Ne vous contentez pas d'une justification approximative : essayez de démontrer rigoureusement vos affirmations.)*



FIGURE 3



FIGURE 4

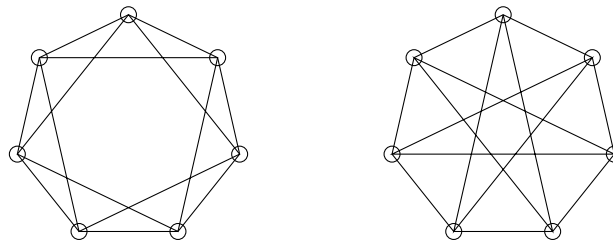


FIGURE 5

2 Séance 2

Exercice 9. Considérez la grille $n \times n$, le graphe obtenu selon la Figure 6, avec n un naturel ≥ 3 . Démontrez que n est pair si et seulement si le graphe est hamiltonien.

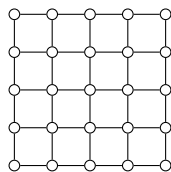


FIGURE 6 – Grille 5×5 .

Nous cherchons à prouver que tout graphe du style de la figure 6 avec un n pair est un graphe hamiltonien. C'est à dire n pair \Leftrightarrow graphe hamiltonien.

\Rightarrow

\Leftarrow

Exercice 10. Prouvez que pour tout $n \geq 3$, le graphe complet K_n possède exactement $\frac{1}{2}(n-1)!$ cycles hamiltoniens.

Exercice 11. Combien d'arbres couvrants possèdent les deux graphes de la Figure 7 ?

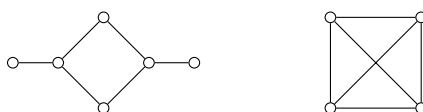


FIGURE 7

Exercice 12. Montrez que tous les alcools $C_nH_{2n+1}OH$ sont des molécules dont le graphe est un arbre, en sachant que les valences de C, O et de H sont respectivement 4, 2, 1.

Exercice 13. Démontrez que si un graphe hamiltonien $G = (V, E)$ est biparti selon la bipartition $V = A \cup B$, alors $|A| = |B|$. En déduire que $K_{n,m}$, le graphe biparti complet, est hamiltonien si et seulement si $m = n \geq 2$.

Exercice 14. Pour chaque graphe de la Figure 8, déterminez si

1. le graphe est hamiltonien,
2. le graphe est eulérien,
3. le graphe est biparti.

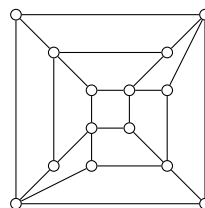
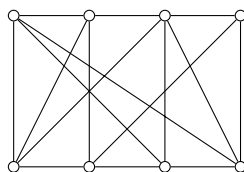
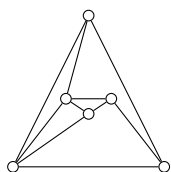


FIGURE 8

3 Séance 3

Exercice 15. Construisez un code de Gray d'ordre 5 sur base du code de Gray d'ordre 4 ci-dessous.

0000,0100,1100,1000,1010,1110,0110,0010,0011,0111,1111,1011,1001,1101,0101,0001

Exercice 16. Dans le graphe ci-dessous, on donne un couplage de cardinal maximal. En utilisant la preuve du théorème de König vue au cours, trouvez un transversal de cardinal minimal.

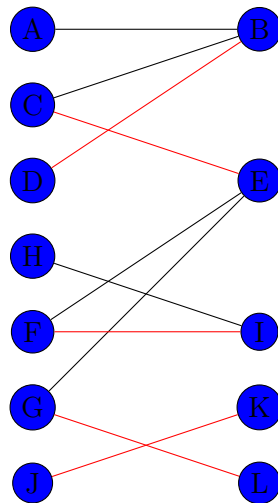


FIGURE 9

Exercice 17. Sur \mathbb{R}^2 , on définit les relations suivantes :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y',$$

$$(x, y)\mathcal{S}(x', y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

Est-ce que les relations \mathcal{R} et \mathcal{S} sont des ordres ?

Exercice 18. Considérons le graphe biparti (bipartition donnée par une coloration des sommets) ci-dessous. Sur l'ensemble de ses sommets, on définit la relation $u \leq v$ pour u, v des sommets tels que u est un sommet rouge et $\{u, v\}$ est une arête. On pose aussi $u \leq u$ pour tout sommet u .

- (a) Vérifiez que \leq est un ordre partiel.
- (b) Construisez une partition des sommets par k chaînes et trouvez une antichaîne contenant k éléments.
- (c) Déduisez-en un couplage de cardinalité maximale et un transversal de cardinalité minimale.
- (d) (Bonus) Sur base de ce qui est fait ci-dessus, prouvez que le théorème de König implique le théorème de Dilworth.

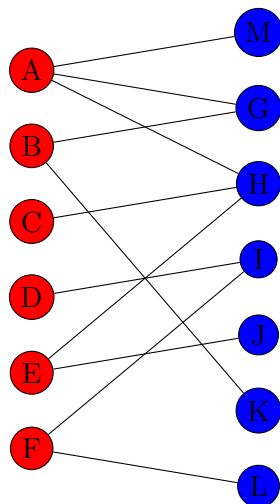


FIGURE 10

4 Séance 4

Exercice 19. L'ensemble $\{2^m | m \in \mathbb{Z}\}$ forme-t-il un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication usuelle ?

Soit $X = 2^m, m \in \mathbb{Z}$ et $(X, .)$ le groupe à analyser.

$\forall x, y \in \mathbb{Z} : 2^x * 2^y = 2^{x+y} \in X$ car $(x + y) \in \mathbb{Z}$. L'ensemble X forme donc bien un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication.

Exercice 20. L'ensemble $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ avec l'addition définie par

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(où $x_i + y_i$ est le résultat d'une addition modulo 2) forme-t-il un groupe ?

Il faut tester si les 3 propriétés d'un groupe sont respectées.

1. Associativité : Chaque composante est calculée avec la forme $x_i + y_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. \mathbb{Z}_2 est associatif, l'addition est faite composante par composante, donc \mathbb{Z}_2^n est associatif. Il faut donc à présent montrer que $(x_i + y_i) + z_i = x_i + (y_i + z_i)$.

Exercice 21. En appliquant l'algorithme d'Euclide à a et b ci-dessous, calculer :

- le PGCD(a, b),
- x et y tels que $ax + by = \text{PGCD}(a, b)$,

Les différentes valeurs de a et b sont :

- (i) $a = 12, b = 34$,
- (ii) $a = 13, b = 34$,
- (iii) $a = 13, b = 31$,

Exercice 22. (i) Trouver un entier x tel que le reste de la division de $50x$ par 71 donne 1.

(ii) Trouver un entier x tel que le reste de la division de $50x$ par 71 donne 63.

(iii) Trouver un entier x tel que le reste de la division de $43x$ par 64 donne 1.

Exercice 23. Dans le système RSA, prenons $p = 11, q = 13$ et $e = 7$. Que vaut alors s ? Si 99 est le message à coder, quel est le message crypté ? Vérifier en décryptant le message.

5 Séance 5

Exercice 24. Montrer le résultat suivant : si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$, alors

$$a + c \equiv b + d \pmod{n} \text{ et } a.c \equiv b.d \pmod{n}.$$

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b - a = kn \qquad c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow d - c = ln$$

Exercice 25. Montrer que, si $a \equiv b \pmod{n}$, alors

$$a + c \equiv b + c \pmod{n} \quad \forall c \in \mathbb{Z}$$

et

$$a.c \equiv b.c \pmod{n} \quad \forall c \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 26. Prouver que, si $a \equiv b \pmod{n}$, alors $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ pour tout entier $k > 0$.

$$a^k \equiv b^k \pmod{n} \Rightarrow b^k - a^k = xn \Leftrightarrow \ln(b^k - a^k) = \ln(xn) \Leftrightarrow \frac{\ln(b^k)}{\ln(a^k)} = \ln(xn) \Leftrightarrow \frac{k \ln(b)}{k \ln(a)} = \ln(xn) \Leftrightarrow \ln(b) - \ln(a) = \ln(xn) \Leftrightarrow b - a = xn \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

Exercice 27. Trouver toutes les solutions aux congruences suivantes :

- $2x \equiv 3 \pmod{4}$ avec $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;
- $2x \equiv 2 \pmod{4}$ avec $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;
- $2x \equiv 3 \pmod{5}$ avec $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 28. Soient a, b deux entiers. Montrer que

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \text{ppcm}(a, b)\mathbb{Z}$$

et

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \text{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}.$$

Sous-question 1 :

Soit $m = \text{ppcm}(a, b)$. Nous pouvons en déduire 3 propriétés :

1. $\frac{a}{m}$
2. $\frac{b}{m}$
3. si $\frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$, alors $\frac{m}{z}$

Nous voulons donc prouver que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. Pour ce faire, nous devons montrer que l'un est inclus dans l'autre, et vice-versa.

(\subseteq) Soit $z \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$, i.e. $\exists k, k' \in \mathbb{Z} \quad z = ak = bk' \Leftrightarrow \frac{a}{z} \text{ et } \frac{b}{z}$

Montrer que $z \in m\mathbb{Z}$.

Par la propriété 3, $\frac{m}{z} \Leftrightarrow z \in m\mathbb{Z}$

(\supseteq) Soit $z \in m\mathbb{Z}$, i.e. $\frac{m}{z}$

Montrer que $z \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$, i.e. $\frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$.

Par la propriété 1, $\frac{a}{m}$

$$\frac{m}{z} \Rightarrow \frac{a}{z} \text{ et } \frac{b}{z}$$

Par la propriété 2, $\frac{b}{m}$

Sous-question 2 :

Exercice 29. Montrer que

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$$

mais que

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

6 Séance 6 et 7

Exercice 30. Soient A et B deux ensembles finis avec $|A| = a$ et $|B| = b$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Que valent :

- (i) $|A \times B|$,
- (ii) $|B^A|$ où $B^A := \{f : A \rightarrow B\}$,
- (iii) $|\{f : A \rightarrow B : f \text{ est une injection de } A \text{ dans } B\}|$,
- (iv) $|\text{Sym } A|$ où $\text{Sym } A$ est l'ensemble des permutations de A .

- (i) $a \cdot b$
- (ii) b^a
- (iii) Si $\#B < \#A$ pas d'injection possible, donc vaut zéro. Sinon, $(b - a + 1) \cdot \dots \cdot (b - a) \cdot b = \frac{b!}{(b-a)!}$
- (iv) $a!$

Exercice 31. Quels sont les ensembles F non vides ayant la propriété suivante :

- (i) pour tout ensemble X , $|F^X| = 1$?
- (ii) pour tout ensemble Y , $|Y^F| = 1$?

- (i) $|F| = 1$
- (ii) Ensemble vide (mais pas possible par énoncé)

Exercice 32. Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux fonctions. Démontrer :

- (i) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ;
- (ii) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective ;
- (iii) $g \circ f$ bijective $\Rightarrow (f$ injective et g surjective).

- (i) Si f non injective, deux éléments a_1 et a_2 différents de A vont être envoyés par f sur un élément b de B . De plus, ces deux éléments vont être envoyés par $g \circ f$ sur un même élément c de C , car $g(f(a_1)) = g(b) = c = g(b) = g(f(a_2))$
- (ii) On sait que $\forall c \in C, \exists a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$. On veut montrer que g est surjective. C'est à dire que $\forall c \in C, \exists b \in B$ tel que $g(b) = c$. Ceci est vérifié en prenant $b = f(a)$.
- (iii) Implication de (i) et (ii)

Exercice 33. Donner une preuve bijective de l'identité de somme parallèle $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.

Voir syllabus année passée page 8.

Exercice 34. Donner deux démonstrations de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Première démonstration :

Via le Binôme de Newton, on sait que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Si on pose $x=1$ et $y=1$, on a :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \cdot \underbrace{1^k}_{=1}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Deuxième démonstration :

$\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments.

$$|\{0,1\}^n| = 2^n$$

Exercice 35. *Qu'obtient-on comme identité sur les coefficients binomiaux en écrivant*

$$(x+y)^{2n} = (x+y)^n (x+y)^n ?$$

(Voir avec assistants)

Exercice 36. *Qu'obtient-on en dérivant la formule du binôme ?*

(Voir avec assistants)

Exercice 37. *Trouver le nombre de solutions de l'équation $x+y+z+w=15$, dans les naturels.*

$$\binom{s+d-1}{d-1} = \binom{15+4-1}{4-1} = \binom{18}{3}$$

Exercice 38. *Combien l'équation*

$$x+y+z+t+u=60$$

possède-t-elle de solutions entières (x,y,z,t,u) telles que

$$x > 0, \quad y \geq 9, \quad z > -2, \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad u > 10 \quad ?$$

On doit procéder à un changement de variables.

$$\begin{aligned} x' = x - 1 &\Leftrightarrow x = x' + 1 & y' = y - 9 &\Leftrightarrow y = y' + 9 & z' = z + 1 &\Leftrightarrow z = z' - 1 \\ t' = t & & u' = u - 11 &\Leftrightarrow u = u' + 11 & & \end{aligned}$$

$$x' + y' + z' + t' + u' = 60 - 1 - 9 + 1 - 11 = 40$$

$$\binom{s+d-1}{d-1} = \binom{40+5-1}{5-1} = \binom{44}{4}$$

Exercice 39. *Trouver le nombre de solutions de l'inéquation*

$$x+y+z+t \leq 6$$

(i) *dans les naturels ;*

(ii) *dans les entiers > 0 ;*

(iii) *dans les entiers, avec comme contraintes supplémentaires $x > 2, y > -2, z > 0$ et $t > -3$.*

Même chose que les exos précédents (réponse dans un prochain épisode...).

Exercice 40. Avec les lettres du mot *MISSISSIPPI*, combien peut-on écrire de mots différents de 11 lettres ?

Lettres du mot : 1 M, 4 I, 4 S, 2 P

Mots de 11 lettres : $\frac{11!}{(4!)(4!)(2!)(1!)}$

Exercice 41. Avec les lettres du mot

HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA

(“poisson” en hawaïen), combien peut-on écrire de mots différents de 21 lettres ne comprenant pas deux lettres U côte à côte ?

Faire mots de 12 lettres sans U. Rajouter probabilité de mettre les U dans les 13 places qui restent pour faire des mots de 21 lettres. Donc, $\binom{13}{9}$

Exercice 42. Si $0 \leq m \leq n$, que vaut

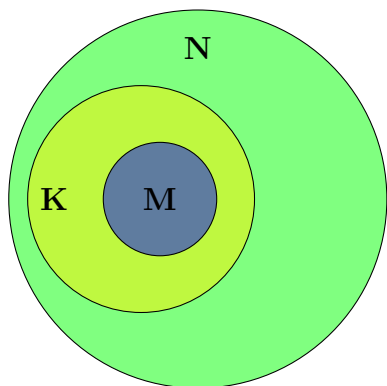
$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} \quad ?$$

(Hint : essayer une preuve bijective.)

Preuve version "étudiant" :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} &= \sum_{k=m}^n \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=m}^n \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=m}^n \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \frac{(n-m)!}{(n-m)!} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^n \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{m} \sum_{k=m}^n \binom{n-m}{k-m} \quad \text{On pose } r = k - m \\ &= \binom{n}{m} \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n-m}{r} 1^r 1^{n-m-r} \quad \text{Formule du binôme de Newton} \\ &= \binom{n}{m} (1+1)^{n-m} = \binom{n}{m} 2^{n-m} \end{aligned}$$

Preuve bijective version assistants :



Fixons $0 \leq m \leq n$

Comptons de 2 manières différentes le nombre de triples (M, K, N) où $M \subseteq K \subseteq N$ et $|M| = m$, $|N| = n$, $|K| = k$

1. On choisit un ensemble de taille m dans N : il y a $\binom{n}{m}$ façons de choisir
2. K peut avoir m éléments, $m+1$, ..., n éléments

1. On choisit un ensemble de taille m dans N : il y a $\binom{n}{m}$ façons de choisir

Ensuite, nous complétons cet ensemble M pour obtenir K , c'est à dire il y a

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} = 2^{n-m} \quad \text{choix}$$

Donc au total il y a $\binom{n}{m} 2^{n-m}$ choix.

2. K peut avoir $m+1, \dots, n$ éléments

1. **S'il y en a m** : on choisit m éléments parmi n et m éléments parmi ces m éléments, c'est à dire $\binom{m}{m} \binom{n}{m}$
2. **S'il y en a $m+1$** : on choisit $m+1$ éléments parmi n et m éléments parmi ces $m+1$ éléments, c'est à dire $\binom{m+1}{m} \binom{n}{m+1}$
3. **S'il y en a n** : on choisit n éléments parmi n et m éléments parmi ces n éléments, c'est à dire $\binom{n}{m} \binom{n}{n}$

Il suffit de tout sommer (car "ou exclusif"). Donc :

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

Exercice 43. Si on jette simultanément n dés identiques, combien de résultats différents peut-on obtenir ? (Deux résultats sont considérés comme équivalents s'ils ont le même nombre de 1, le même nombre de 2, ..., le même nombre de 6.)

(Voir avec assistants)

7 Séance 8 et 9

Exercice 44. De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 30 marches, si on monte à chaque pas soit d'une seule marche soit de deux marches à la fois ?

Exercice 45. Que vaut le déterminant de la matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

Soit M_n la matrice de dimension $n \times n$ de l'exercice.

Si on calcule le déterminant selon la première ligne, on a

$$|M_n| = \underbrace{1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |M_{n-1}|}_{\text{En enlevant première ligne, première colonne}} + \underbrace{(-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot |X|}_{\text{En enlevant première ligne, deuxième colonne}} = |M_{n-1}| + |X|$$

(X étant la sous-matrice de M_n à laquelle on a enlevé la première ligne et première colonne (DESSIN). Nous pouvons voir que pour calculer le déterminant de X, en appliquant la même méthode on a $1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |M_{n-2}| = |M_{n-2}|$.

Maintenant qu'on a le déterminant de X, nous pouvons le remplacer dans la première formule :

$$|M_n| = |M_{n-1}| + |M_{n-2}|$$

On retombe sur Fibon.

Exercice 46. Que vaut

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad ?$$

Exercice 47. Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1},$$

où $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

Exercice 48. Résoudre les récurrences

$$(i) \ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1 \text{ pour } n \geq 1, \quad a_0 = 1$$

$$(ii) \ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \text{ pour } n \geq 2, \quad a_0 = -1, \quad a_1 = 1$$

$$(iii) \ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \text{ pour } n \geq 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 9$$

Exercice 49. Résoudre les récurrences

$$(i) \ a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n \text{ pour } n \geq 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$

$$(ii) \ a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$$

Exercice 50. Résoudre la récurrence

$$\begin{aligned} a_{n+2} - (2 \cos \alpha) a_{n+1} + a_n &= 0 \quad \forall n \geq 0 \\ a_1 &= \cos \alpha, \quad a_2 = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Exercice 51. Résoudre les récurrences

- (i) $a_n + 2a_{n-1} = n + 3$ pour $n \geq 1$ $a_0 = 3$
(ii) $a_{n+2} + 8a_{n+1} - 9a_n = 8 \cdot 3^{n+1}$ pour $n \geq 0$ $a_0 = 2, \quad a_1 = -6$
(iii) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2^n + n$ pour $n \geq 0$

Exercice 52. Avec l'alphabet $\{A, B, C\}$, combien peut-on écrire de mots de n lettres dans lesquels on ne trouve pas

- (i) deux lettres A côte-à-côte ?
(ii) deux lettres A ni deux lettres B côte-à-côte ?
(iii) deux lettres A ni deux lettres B ni deux lettres C côte-à-côte ?

- (i)
(ii) a_n mots qui finissent par A , b_n mots qui finissent par B , c_n mots qui finissent par C .
(iii)

Exercice 53. Donner le comportement asymptotique des suites $T(n)$ pour chacune des récurrences suivantes :

- (i) $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$
(ii) $T(n) = 16T(\lceil n/4 \rceil) + n^2$
(iii) $T(n) = 7T(\lceil n/2 \rceil) + n^2$
(iv) $T(n) = T(n-1) + n$

Exercice 54. Résoudre la récurrence

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \quad \forall n \geq 2$$
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2$$

Exercice 55. (Examen août 2011.) Combien y a-t-il de matrices $2 \times n$ à coefficients entiers vérifiant les deux conditions suivantes ?

- Dans chacune des deux lignes, chacun des entiers $1, 2, \dots, n$ apparaît une et une seule fois.
- Dans chacune des n colonnes, les deux coefficients diffèrent d'au plus 1.