MATH-F-307: Syllabus d'exercices

Table des matières

1 Séance 1

Exercice 1. Construisez un graphe simple et connexe sur 8 sommets tel que chaque sommet est contenu dans exactement trois arêtes. Pouvez-vous faire la même chose avec 9 sommets ?

Exercice 2. Dans un groupe de personnes, il y a toujours deux individus qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.

1. Formalisez cette propriété dans le vocabulaire des graphes.
2. Démontrez cette propriété (par l'absurde).

Exercice 3. Soit $n \geq 2$ et soit G un graphe simple avec $2n$ sommets et $n^2 + 1$ arêtes. Montrez que G contient un triangle.

Exercice 4. Soit G un graphe simple avec $2p$ sommets. On suppose que le degré de chaque sommet est au moins égal à p. Démontrez que ce graphe est connexe.

Exercice 5. Soit G un graphe simple.

1. On suppose que G est connexe et que x est un sommet de G de degré 1. Prouvez que $G \setminus \{x\}$ est connexe.
2. Déduisez-en que, si G est connexe et $|V(G)| = n \geq 2$, alors G contient au moins $n - 1$ arêtes.

Exercice 6. Donnez un graphe simple et connexe sur au moins 5 sommets qui est :

- hamiltonien et eulérien ;
- hamiltonien et non eulérien ;
- non hamiltonien et eulérien ;
- non hamiltonien et non eulérien.

Exercice 7. Le graphe

est-il isomorphe à un (ou à plusieurs) des graphes ci-dessous ?

Exercice 8. Les graphes suivants sont-ils isomorphes ? (Ne vous contentez pas d'une justification approximative : essayez de démontrer rigoureusement vos affirmations.)

FIGURE 1 –

FIGURE 2 –

FIGURE 3 –

2 Séance 2

Exercice 9. Terminez les exercices de la séance 1.

Exercice 10. Considérez la grille $n \times n$, le graphe obtenu selon la Figure 4, avec n un naturel ≥ 3. Démontrez que n est pair si et seulement si le graphe est hamiltonien.

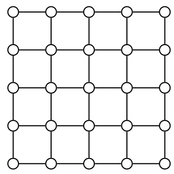

FIGURE 4 – Grille 5×5.

Exercice 11. Prouvez que pour tout $n \geq 3$, le graphe complet K_n possède exactement $\frac{1}{2}(n-1)!$ cycles hamiltoniens.

Exercice 12. Combien d'arbres couvrants possèdent les deux graphes de la Figure 5 ?

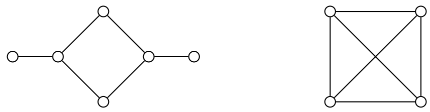

FIGURE 5 –

Exercice 13. Montrez que tous les alcools $C_nH_{2n+1}OH$ sont des molécules dont le graphe est un arbre, en sachant que les valences de C, O et de H sont respectivement $4, 2, 1$.

Exercice 14. Démontrez que si un graphe hamiltonien $G = (V, E)$ est biparti selon la bipartition $V = A \cup B$, alors $|A| = |B|$. En déduire que $K_{n,m}$, le graphe biparti complet, est hamiltonien si et seulement si $m = n \geq 2$.

Exercice 15. Pour chaque graphe de la Figure 6, déterminez si

1. le graphe est hamiltonien,
2. le graphe est eulérien,
3. le graphe est biparti.

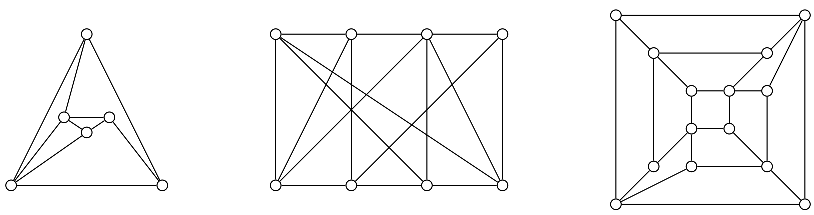

FIGURE 6 –

3 Séance 3

Exercice 16. Construisez un code de Gray d'ordre 5 sur base du code de Gray d'ordre 4 ci-dessous.
0000,0100,1100,1000,1010,1110,0110,0010,0011,0111,1111,1011,1001,1101,0101,0001

Exercice 17. Dans le graphe ci-dessous, on donne un couplage de cardinal maximal. En utilisant la preuve du théorème de König vue au cours, trouvez un transversal de cardinal minimal.

transversal.png

Exercice 18. Sur $\mathbb{R}^2$, on définit les relations suivantes :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y',$$

$$(x, y)\mathcal{S}(x', y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

Est-ce que les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des ordres ?

Exercice 19. Considérons le graphe biparti (bipartition donnée par une coloration des sommets) ci-dessous. Sur l'ensemble de ses sommets, on définit la relation $u \leq v$ pour u, v des sommets tels que u est un sommet rouge et $\{u, v\}$ est une arête. On pose aussi $u \leq u$ pour tout sommet u.

Konig.png

(a) Vérifiez que $\leq$ est un ordre partiel.

(b) Construisez une partition des sommets par k chaînes et trouvez une antichaîne contenant k éléments.

(c) Déduisez-en un couplage de cardinalité maximale et un transversal de cardinalité minimale.

(d) (Bonus) Sur base de ce qui est fait ci-dessus, prouvez que le théorème de König implique le théorème de Dilworth.

4 Séance 4

Exercice 20. L'ensemble $\{2^m | m \in \mathbb{Z}\}$ forme-t-il un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication usuelle ?

Exercice 21. L'ensemble $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ avec l'addition définie par

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

(où $x_i + y_i$ est le résultat d'une addition modulo 2) forme-t-il un groupe ?

Exercice 22. En appliquant l'algorithme d'Euclide à a et b ci-dessous, calculer :
- le PGCD(a, b),
- x et y tels que $ax + by = \text{PGCD}(a, b)$,

Les différentes valeurs de a et b sont :

(i) $a = 12, b = 34$,

(ii) $a = 13, b = 34$,

(iii) $a = 13, b = 31$,

Exercice 23. (i) Trouver un entier x tel que le reste de la division de $50x$ par 71 donne 1.

(ii) Trouver un entier x tel que le reste de la division de $50x$ par 71 donne 63.

(iii) Trouver un entier x tel que le reste de la division de $43x$ par 64 donne 1.

Exercice 24. Dans le système RSA, prenons $p = 11$, $q = 13$ et $e = 7$. Que vaut alors s ? Si 99 est le message à coder, quel est le message crypté ? Vérifier en décriptant le message.