MATH-F307 - Mathématiques Discrètes
Laurent La Fuente
Notes de cours

André Madeira Cortes

Nikita Marchant

Table des matières

1 Théorie des Graphes

1.1 Définitions

Définition 1
Un graphe Γ est un triplet (V, E, γ) où V est un ensemble fini dont les éléments sont appelés sommets, E est un ensemble fini dont les éléments sont appelés arêtes, γ est une fonction $\gamma : E \to Paires(V)$. On nottera le plus souvent $\Gamma = (V, E)$ en omettant la fonction γ.

Soit $\gamma(e) = \{x, y\}$ pour $e \in E, x, y \in V$:

1. *On dit que x et y sont adjacents.*
2. *On dit que e est incidente à x et y.*

Définition 2
Soit $\Gamma = (V, E, \gamma)$ un graphe.

1. *$\gamma(e) = \{x, x\}$ pour $e \in E, x \in V$ est appellé un lacet.*
2. *Si au moins 2 arêtes sont incidentes à 2 mêmes sommets, on les appelle arêtes multiples.*
3. *Un graphe est simple s'il n'a ni lacet, ni arêtes multiples. Dans ce cas, on omet la fonction γ,on note $\Gamma = (V, E)$ et E est identifié un sous-ensemble de Paires(V).*

Définition 3
Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe. Le degré d'un sommet $v \in V$ est le nombre d'arêtes incidentes à v, les lacets comptant pour 2 arêtes. On note le degré de v par deg(V).

Exemple
Dans la figure suivante, nous avons 2 sommets de degré 4 et 6 sommets de degré 1.

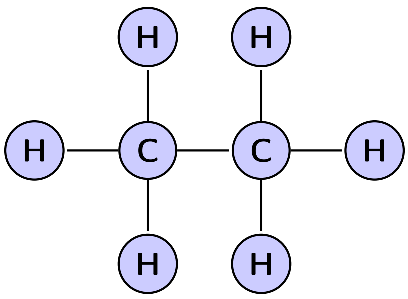


FIGURE 1 – Exemple degrés des sommets dans la molécule C_2H_6.

Théorème 1
Soit $\Gamma = (V, E)$, alors

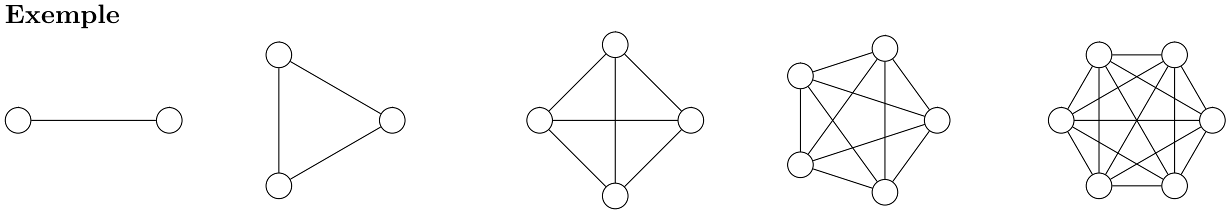
$$\sum_{i=1}^{\#V} deg(v_i) = 2\#E$$

Démonstration
Chaque arête contribue 2 fois dans la somme des degrés.

Corollaire
La somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.

Définition 4
Le graphe complet K_n est le graphe simple à n sommets pour lequel chaque paire de sommets est une arête.

Exemple



Définition 5
Un graphe $\Gamma' = (U, F)$ est un sous-graphe de $\Gamma = (V, E)$ si $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$. On nottera $\Gamma' \leq \Gamma$.

Exemple
$K_m \leq K_n$ *si* $m \leq n$.

Exercice
Montrer que K_m possède $q = \frac{1}{2}n(n-1)$ arêtes.

1.2 Chemins dans les graphes

Définition 6
Soit $\Gamma = (V, E)$ et $v, w \in V$. Un chemin de v à w de longueur n est une séquence alternée de $(n+1)$ sommets $v_0, v_1, ..., v_n$ et de n arêtes $e_1, e_2, ..., e_n$ de la forme

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n)$$

dans laquelle chaque e_i est incident à v_{i-1} et v_i pour $1 \leq i \leq n$ et $e_i \neq e_j, \forall i \neq j \in 1, ..., n$

Un chemin est simple si aucun sommet ne se répète sauf peut-être v_0 et v_n.

Dans un graphe simple on nottera juste la suite des sommets lorsque l'on décrit un chemin.

Définition 7
Un graphe $\Gamma = (V, E)$ est connexe si $\forall x, y \in V : \exists$ un chemin de x à y.

La composante connexe de Γ contenant x est le sous-graphe Γ' de Γ dont les sommets et les arêtes sont contenus dans un chemin de Γ démarrant en x.

Définition 8
Soit $\Gamma = (V, E)$ et $v \in V$.

Un cycle est un chemin de v à v.

Un cycle simple est un cycle de v à v dans lequel aucun sommet n'est répété (mis à part le départ et l'arrivée).

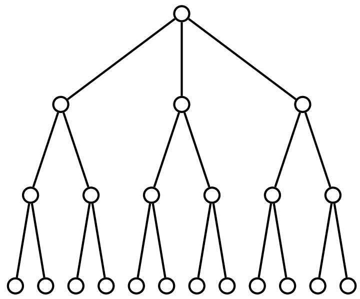
1.3 Arbres

1.3.1 Définitions

Définition 9
Un arbre est un graphe simple connexe qui ne contient aucun cycle.

Définition 10
Dans un arbre, les sommets de degré 1 sont appellés les feuilles.

Exemple



Proposition 1
Si T est un arbre avec $p \geq 2$ sommets, alors T contient au moins 2 feuilles.

Démonstration
T a p sommets. Tous les chemins sont de longueur inférieure ou égale à p. Considérons un chemin $v_0, v_1, ..., v_r$ pour $v_i \in V$, $i = 0, ..., r$ de longueur maximale. Alors, v_0 et v_r sont de degré 1.

Théorème 2
Soit T un graphe simple à p sommets. Alors les 3 assertions suivantes sont équivalentes :

i T *est un arbre.*

ii T *a* $(p-1)$ *arêtes et aucun cycle.*

iii T *a* $(p-1)$ *arêtes et est connexe.*

Démonstration
(**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) ***: Montrer qu'un arbre à p sommets a (p-1) arêtes.***

Par récurrence :

1. *$p = 1$ OK*
2. *Supposons que ce soit vrai pour tout arbre à $k \geq 1$ sommets et montrons le pour un arbre à (k+1) sommets. Soit T un tel arbre, il a au moins 2 feuilles. Enlevons une de ces feuilles ainsi que l'arête incidente. On obtient un arbre T' à k sommets. Par l'hypothese de récurrence : T' a (k-1) arêtes, donc T a k arêtes.*

(**ii**) $\Rightarrow$ (**iii**) ***: Supposons (ii) et T ne soit pas connexe.***

Notons $T_1, T_2, ..., T_t$ les composantes connexes de T avec $t \geq 2$. Chaque T_i est un arbre, pour $1 \leq i \leq t$ (car pas de cycle). Soit p_i le nombre de sommets de T_i, alors chaque T_i a $(p_i - 1)$ arêtes.

$$\sum_{i=1}^{t} p_i = p$$

et *donc* $\Rightarrow t = 1$

$$p - 1 = \sum_{i=1}^{t} (p_i - 1) = p - t$$

(iii) ⇒ (i) ***: Supposons que T ne soit pas un arbre.***

Alors, T contient un cycle C. Enlevons une arête de C. On obtient le sous-graphe T' de T qui est toujours connexe. Si T' contient un cycle, alors on itère le processus. Sinon, T' est un arbre à p sommets qui a strictement moins que (p-1) arêtes.

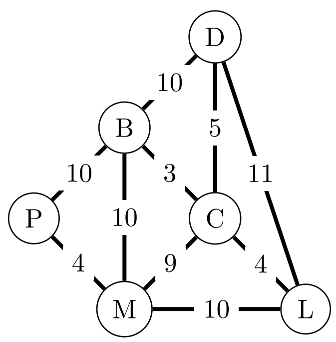
1.3.2 Arbres couvrants et arbres à poids

Définition 11
Un arbre couvrant dans un graphe Γ est un arbre qui est un sous-graphe de Γ et qui contient tous les sommets de Γ.

Dans certains problèmes, certaines arêtes sont plus importantes que d'autres. En théorie des graphes, on modélise cela en assignant une valeur à chaque arête.

Définition 12
Un arbre à poids est un couple (Γ, w) où Γ est un arbre w est une fonction $w : E \to \mathbb{R}^+$. Le nombre w(e) est appelé le poids de l'arête e.

Exemple



1.4 Isomorphisme

Définition 13
Deux graphes $\Gamma_1 = (V_1, E_1, \gamma_1)$ et $\Gamma_2 = (V_2, E_2, \gamma_2)$ sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V_1 \to V_2$ et une bijection $g : E_1 \to E_2$ telles que $\forall e \in E_1$: e est incident à v,w $\in V_1$ ssi g(e) est incident à f(v),f(w) $\in V_2$. Le couple (f,g) est appelé un isomorphisme de graphe et on note $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$.

Deux graphes isomorphes ont les mêmes propriétés.

Exemple

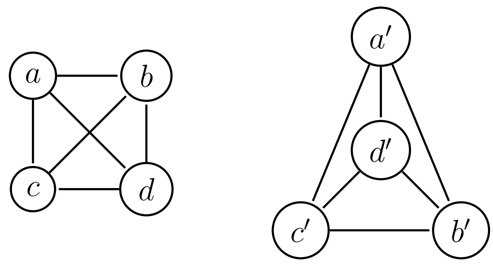


FIGURE 2 – Deux graphes isomorphes

1.5 Graphes hamiltoniens

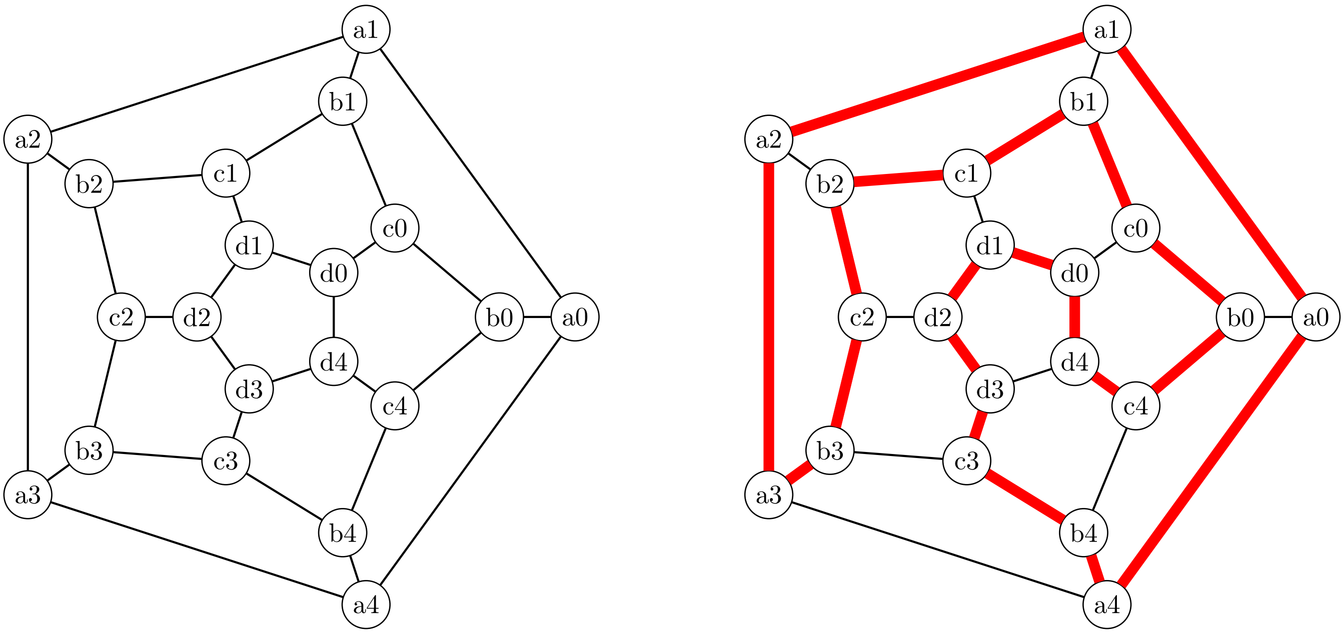


FIGURE 3 – Graphe hamiltonien et cycle hamiltonien

STUFF MISSING HERE

Théorème 3 (Dirac 1950)
Soit $\Gamma = (V, E)$ *un graphe simple avec* $p \geq 3$ *sommets. Si* $\forall v \in V : deg(v) \geq \frac{1}{2}p$, *alors* Γ *est Hamiltonien.*

Démonstration
Γ *est connexe. Soit* $C = (v_0, v_1, ..., v_k)$ *un plus long chemin simple dans* Γ *avec* $v_0 \neq v_k, k < p$.

$deg(v_0) \geq \frac{p}{2}$, *tous les sommets adjacents à* v_0 *sont dans* $\{v_1, ..., v_k\}$

$deg(v_k) \geq \frac{p}{2}$, *tous les sommets adjacents à* v_k *sont dans* $\{v_0, ..., v_{k-1}\}$

Comme $k < q$, *il doit exister* $i \in \{0, ..., k-1\}$ *tel que* $\{v_i, v_k\} \in E$ *et* $\{v_0, v_{i+1}\} \in E$. *On obtient un cycle* $\widetilde{C} = (v_0, v_1, ..., v_i, v_k, v_{k-1}, ..., v_{i+1}, v_0)$

On nq(?) $\widetilde{C}$ *est un cycle Hamiltonien.*

Supposons :

$\exists y \in \widetilde{C} \Rightarrow$ *On peut supposer que* $\{v_j, y\} \in E$ *pour* $j = \{0, ..., k\}$.

$\Rightarrow$ *On construit un chemin* $\overline{C} = (y, v_j, v_{j-1}, ...v_0, v_{i+1}, ..., v_k, v_i, v_{i-1}, ..., v_{j-1})$. $\overline{C}$ *est un chemin plus long que* C.
<Second Dessin>

Illustration : Code de Gray
Un code de Gray d'ordre n est un arrangement cyclique de 2^n mots binaires de longueur n tels que 2 mots adjacents ne diffèrent qu'en une seule position.

Exemple

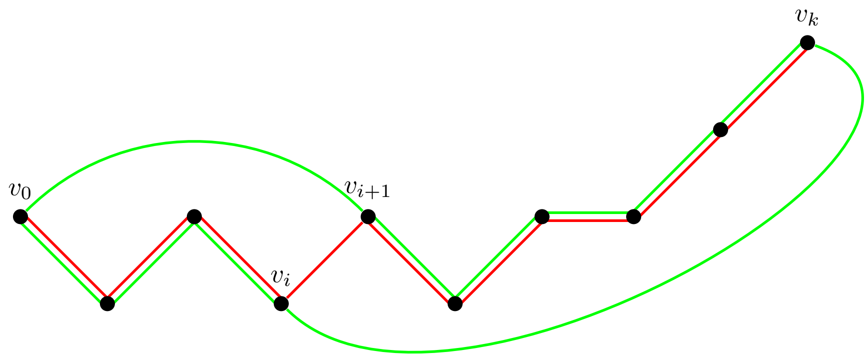
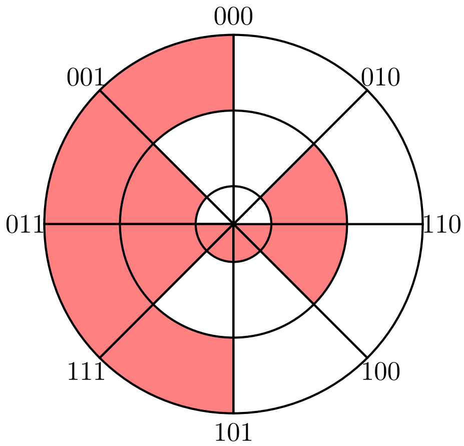


FIGURE 4 – Les 2 chemins, C en rouge, $\widetilde{C}$ en vert.



Le code de Grey ci-dessus provient d'un cycles Hamiltonien.

<dessin cube et cycle>

Un code de Gray d'ordre (n+1) se construit à partir d'un code de Gray d'ordre n comme suit :

1. On écrit le code de Gray donné d'ordre n en ajoutant à la fin de chaque mot un zero.
2. On le fait suivre par le même code de Gray parcouru dans l'autre sens et en ajoutant à la fin de chaque mot un 1.

1.6 Graphes Eulériens

Définition 14
Un cycle Eulérien dans un graphe Γ *est un cycle qui contient toutes les arêtes de* Γ*. Un graphe est Eulérien s'il contient un cycle Eulérien.*

Exemple
SOME EXAMPLE

Proposition 2
Si un graphe est Eulérien, alors tous ses sommets sont de degré pair.

Lemme
Soit Γ un graphe dans lequel chaque sommet est de degré pair, alors l'ensemble E se partitionne en une union de cycles (arête-)disjointe.

Exemple
<DRAWING 3 CYCLES>

Démonstration
Par récurrence, sur le nombre d'arêtes

1. *Le lemme est vrai pour $q = 2$.*
2. *Supposons qu'il soit vrai pour tout graphe à $q \leq k$ arêtes et montrons-le pour un graphe à (k+1) arêtes.*
3. *Soit v_0 un sommet de Γ. On démarre un chemin en v_0 et on le suit jusqu'à ce qu'un sommet soit répété 2 fois. On le note v_j et C le cycle de v_j à v_j.*
4. *Soit Γ' le sous-graphe de Γ, obtenu par $V = V'$ et $E' = E \setminus C$. Γ' a $\#E' \leq k$ arêtes. Par hypothèse de récurence, les arêtes de Γ' se partitionnent en une union arête-disjointe de cycles $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$.*
5. *Donc, $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ est une partition arête-disjointe des arêtes de Γ.*
6. *RECHECK THIS DEMO, SEEMS FISHY*

Théorème 4
Soit Γ un graphe connexe. Alors, Γ est eulerien si et seulement si chaque sommet a un degré pair.

Démonstration
$\Rightarrow$ *OK par proposition précédente.*
$\Leftarrow$ *Par le Lemme : E se partitionne en une union (arête-)disjointe de cycles $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$.*

1. *Si n=1, c'est bon.*
2. *Si $n > 1$, comme Γ est connexe, $\exists$ une arête incidente à un $v \in C_1$ et un $w \notin C_1$. Cette arête est dans C_j pour un $j = 2, ..., n$ (car on a une partitien de E). On attache ce cycle en v. S'il reste des cycles dans la partition, on itère ce procédé jusqu'à avoir utilisé tous les cycles.*

1.7 Application : le problème du voyageur de commerce (TSP)

1.7.1 Énoncé du problème

Énoncé : Un vendeur de livres démarre de chez lui et doit visiter un certain nombre de librairies avant de rentrer chez lui. Comment doit-il choisir sa route pour minimiser la distance parcourue ?

Objet mathématique : Un graphe valué (à chaque arête est associé un nombre appelé poids) où les sommets représentent les librairies et les arêtes représentent les routes.

<VALUED K5 GRAPH HERE>

Objectif : Trouver un cycle hamiltonien de poids minimal.

Remarque : Un graphe complet K_n à n sommets possède $\frac{1}{2}(n-1)!$ cycles hamiltoniens differents. Par exemple, pour $n = 10 \Rightarrow 181440$ cycles. On ne connait pas encore d'algorithme efficance qui donne une solution au problème.

1.7.2 Arbres couvrant minimum

Définition 15
Un arbre couvrant dans un graphe Γ est un arbre qui est un sous-graphe de Γ et qui contient tous les sommets de Γ.

Exemple
<GRAPH TO MIN SPANNING TREE EXAMPLES HERE>

Il existe un algorithme qui donne des arbres couvrants de poids minimum dans un graphe valué.

Algorithme de Kurskal :

i Choisir une arêtes de plus petit poids.
ii Choisir parmi les arêtes restantes une arête de plus petit poids dont l'inclusion ne crée pas un cycle.
iii Continuer jusqu'à obtenir un arbre couvrant.

Exemple
<GRAPH K5 WITH PATH HERE>

Remarque : Si C est un cycles hamiltonien dans un graphe Γ, alors $\forall e \in E$ arête de C : $C \setminus \{e\}$ est un arbre couvrant.

$\Rightarrow$ (Solution de TSP) $\geq$ (longueur minimum d'un arbre couvrant)

Mieux : Soit v un sommet de Γ. Tout cycle hamiltonien contient 2 arêtes incudentes à v. Le reste du chemin est un arbre couvrant de $\Gamma \setminus \{v\}$.

$\Rightarrow$ (Solution de TSP) $\geq$ ($\sum$ des longueurs des 2 plus courtes arêtes incidentes à v) $+$ (longueur minimum d'un arbre couvrant de $\Gamma \setminus \{v\}$)

Remarque : $\exists$ borne supérieure à TSP en utilisant des cycles euleriens.

1.8 Ordres partiels

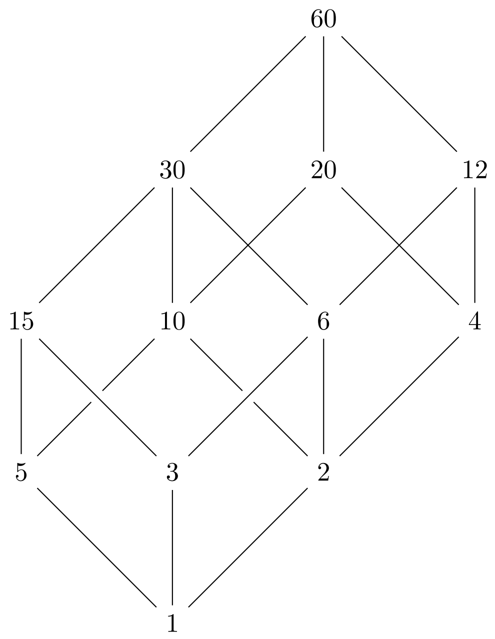
Définition 16
Soit P un ensemble. Un ordre partiel sur P est une relation sur P, c'est à dire un ensemble de couples $(p_1, p_2) \in P \times P$, noté $p1 \leq p2$ tel que :

1. $p \leq p$ *(réflexive)*
2. $(p \leq q$ *et* $q \leq p) \Rightarrow p = q$ *(anti-symétrique)*
3. $(p \leq q$ *et* $q \leq r) \Rightarrow p \leq r$ *(transitive)*

On note $(P, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné.

Exemple
1. $(\mathbb{N}, \leq)$
2. $(\mathbb{N}, |)$ *où* $a \mid b$ *si* $\exists c \in \mathbb{Z}$ *tel que* $a \cdot c = b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$

Un ordre partiel (bla bla bla)


60
30
20
12
15
10
6
4
5
3
2
1

2 Arithmétique Modulaire

3 Combinatoire énumérative

4 Théorie des Codes

5 Transformées de Fourier discrètes