

MATH-F307 - Mathématiques Discrètes  
Laurent LA FUENTE  
Notes de cours

André MADEIRA CORTES  
Nikita MARCHANT

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Théorie des Graphes</b>	<b>3</b>
1.1	Définitions . . . . .	3
1.2	Chemins dans les graphes . . . . .	4
1.3	Arbres . . . . .	4
1.4	Graphes Eulériens . . . . .	7
1.5	Application : le problème du voyageur de commerce (TSP) . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Arithmétique Modulaire</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Combinatoire énumérative</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Théorie des Codes</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Transformées de Fourier discrètes</b>	<b>11</b>

# 1 Théorie des Graphes

## 1.1 Définitions

**Définition 1.1** Un graphe  $\Gamma$  est un triplet  $(V, E, \gamma)$  où  $V$  est un ensemble fini dont les éléments sont appelés sommets,  $E$  est un ensemble fini dont les éléments sont appelés arêtes,  $\gamma$  est une fonction  $\gamma : E \rightarrow \text{Paires}(V)$ . On notera le plus souvent  $\Gamma = (V, E)$  en omettant la fonction  $\gamma$ .

Soit  $\gamma(e) = \{x, y\}$  pour  $e \in E, x, y \in V$  :

1. On dit que  $x$  et  $y$  sont adjacents.
2. On dit que  $e$  est incidente à  $x$  et  $y$ .

**Définition 1.2** Soit  $\Gamma = (V, E, \gamma)$  un graphe.

1.  $\gamma(e) = \{x, x\}$  pour  $e \in E, x \in V$  est appelé un lacet.
2. Si au moins 2 arêtes sont incidentes à 2 mêmes sommets, on les appelle arêtes multiples.
3. Un graphe est simple s'il n'a ni lacet, ni arêtes multiples. Dans ce cas, on omet la fonction  $\gamma$ , on note  $\Gamma = (V, E)$  et  $E$  est identifié un sous-ensemble de  $\text{Paires}(V)$ .

**Définition 1.3** Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe. Le degré d'un sommet  $v \in V$  est le nombre d'arêtes incidentes à  $v$ , les lacets comptant pour 2 arêtes. On note le degré de  $v$  par  $\deg(v)$ .

**Exemple** Dans la figure suivante, nous avons 2 sommets de degré 4 et 6 sommets de degré 1.

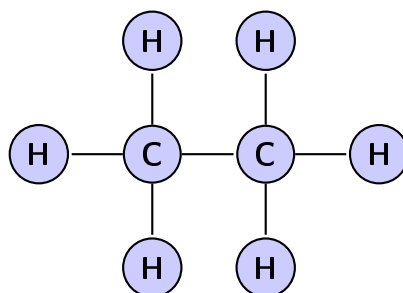


FIGURE 1 – Exemple degrés des sommets dans la molécule  $C_2H_6$ .

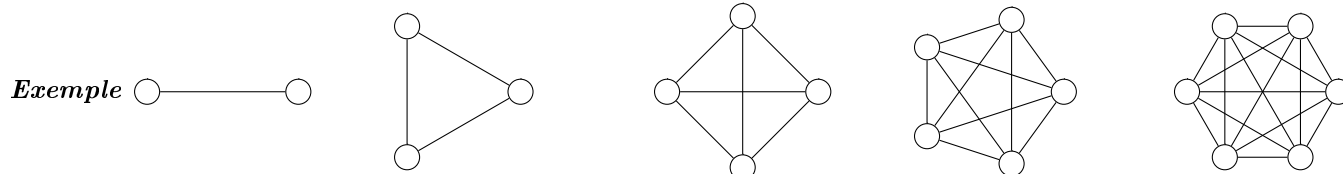
**Théorème 1.1** Soit  $\Gamma = (V, E)$ , alors

$$\sum_{i=1}^{\#V} \deg(v_i) = 2\#E$$

**Démonstration** Chaque arête contribue 2 fois dans la somme des degrés.

**Corollaire** La somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.

**Définition 1.4** Le graphe complet  $K_n$  est le graphe simple à  $n$  sommets pour lequel chaque paire de sommets est une arête.



**Définition 1.5** Un graphe  $\Gamma' = (U, F)$  est un sous-graphe de  $\Gamma = (V, E)$  si  $U \subseteq V$  et  $F \subseteq E$ . On notera  $\Gamma' \leq \Gamma$ .

**Exemple**  $K_m \leq K_n$  si  $m \leq n$ .

**Exercice** Montrer que  $K_m$  possède  $q = \frac{1}{2}n(n-1)$  arêtes.

## 1.2 Chemins dans les graphes

**Définition 1.6** Soit  $\Gamma = (V, E)$  et  $v, w \in V$ . Un chemin de  $v$  à  $w$  de longueur  $n$  est une séquence alternée de  $(n + 1)$  sommets  $v_0, v_1, \dots, v_n$  et de  $n$  arêtes  $e_1, e_2, \dots, e_n$  de la forme

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$$

dans laquelle chaque  $e_i$  est incident à  $v_{i-1}$  et  $v_i$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $e_i \neq e_j, \forall i \neq j \in 1, \dots, n$

Un chemin est simple si aucun sommet ne se répète sauf peut-être  $v_0$  et  $v_n$ .

Dans un graphe simple on nottera juste la suite des sommets lorsque l'on décrit un chemin.

**Définition 1.7** Un graphe  $\Gamma = (V, E)$  est connexe si  $\forall x, y \in V : \exists$  un chemin de  $x$  à  $y$ .

La composante connexe de  $\Gamma$  contenant  $x$  est le sous-graphe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  dont les sommets et les arêtes sont contenus dans un chemin de  $\Gamma$  démarrant en  $x$ .

**Définition 1.8** Soit  $\Gamma = (V, E)$  et  $v \in V$ .

Un cycle est un chemin de  $v$  à  $v$ .

Un cycle simple est un cycle de  $v$  à  $v$  dans lequel aucun sommet n'est répété (mis à part le départ et l'arrivée).

## 1.3 Arbres

**Définition 1.9** Un arbre est un graphe simple connexe qui ne contient aucun cycle.

**Définition 1.10** Dans un arbre, les sommets de degré 1 sont appelés les feuilles.

**Exemple** <Dessin Arbre>

**Proposition 1.1** Si  $T$  est un arbre avec  $p \geq 2$  sommets, alors  $T$  contient au moins 2 feuilles.

**Démonstration**  $T$  a  $p$  sommets. Tous les chemins sont de longueur inférieure ou égale à  $p$ . Considérons un chemin  $v_0, v_1, \dots, v_r$  pour  $v_i \in V, i = 0, \dots, r$  de longueur maximale. Alors,  $v_0$  et  $v_r$  sont de degré 1.

**Théorème 1.2** Soit  $T$  un graphe simple à  $p$  sommets. Alors les 3 assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $T$  est un arbre.
2.  $T$  a  $(p - 1)$  arêtes et aucun cycle.
3.  $T$  a  $(p - 1)$  arêtes et est connexe.

**Démonstration** <Démonstration en 2 parties>.

<- COURS 2 MISSING ->

**Théorème 1.3** (Dirac 1950) Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe simple avec  $p \geq 3$  sommets. Si  $\forall v \in V : \deg(v) \geq \frac{1}{2}p$ , alors  $\Gamma$  est Hamiltonien.

**Démonstration**  $\Gamma$  est connexe. Soit  $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  un plus long chemin simple dans  $\Gamma$  avec  $v_0 \neq v_k, k < p$ .

$\deg(v_0) \geq \frac{p}{2}$ , tous les sommets adjacents à  $v_0$  sont dans  $\{v_1, \dots, v_k\}$

$\deg(v_k) \geq \frac{p}{2}$ , tous les sommets adjacents à  $v_k$  sont dans  $\{v_0, \dots, v_{k-1}\}$

Comme  $k < p$ , il doit exister  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  tel que  $\{v_i, v_k\} \in E$  et  $\{v_0, v_{i+1}\} \in E$ . On obtient un cycle  $\tilde{C} = (v_0, v_1, \dots, v_i, v_k, v_{k-1}, \dots, v_{i+1}, v_0)$

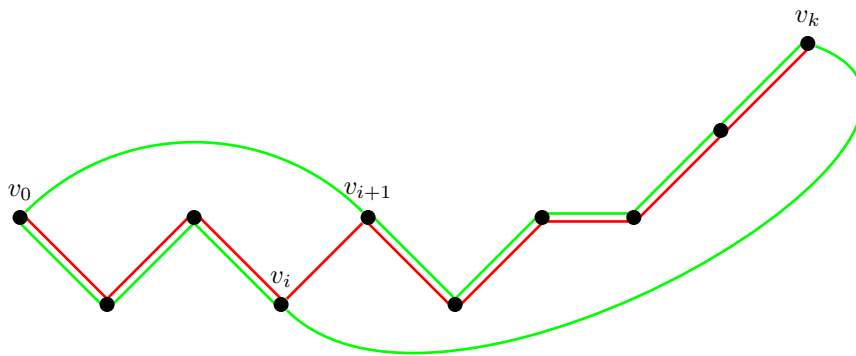


FIGURE 2 – Les 2 chemins,  $C$  en rouge,  $\tilde{C}$  en vert.

On nq(?)  $\tilde{C}$  est un cycle Hamiltonien.

Supposons :

$\exists y \in \tilde{C} \Rightarrow$  On peut supposer que  $\{v_j, y\} \in E$  pour  $j = \{0, \dots, k\}$ .

$\Rightarrow$  On construit un chemin  $\overline{C} = (y, v_j, v_{j-1}, \dots, v_0, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i, v_{i-1}, \dots, v_{j-1})$ .  $\overline{C}$  est un chemin plus long que  $C$ .

<Second Dessin>

Illustration : Code de Gray

Un code de Gray d'ordre  $n$  est un arrangement cyclique de  $2^n$  mots binaires de longueur  $n$  tels que 2 mots adjacents ne diffèrent qu'en une seule position.

**Exemple** <dessin cercles concentriques>

Le code de Gray ci-dessus provient d'un cycles Hamiltonien.

<dessin cube et cycle>

Un code de Gray d'ordre  $(n+1)$  se construit à partir d'un code de Gray d'ordre  $n$  comme suit :

1. On écrit le code de Gray donné d'ordre  $n$  en ajoutant à la fin de chaque mot un zéro.
2. On le fait suivre par le même code de Gray parcouru dans l'autre sens et en ajoutant à la fin de chaque mot un 1.

**1.4 Graphes Eulériens**

**1.5 Application : le problème du voyageur de commerce (TSP)**

## 2 Arithmétique Modulaire



### 3 Combinatoire énumérative

## 4 Théorie des Codes

## 5 Transformées de Fourier discrètes