

MATH-F307 - Mathématiques Discrètes  
Laurent LA FUENTE  
Notes de cours

André MADEIRA CORTES  
Nikita MARCHANT

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Théorie des Graphes</b>	<b>3</b>
1.1	Définitions . . . . .	3
1.2	Chemins dans les graphes . . . . .	4
1.3	Arbres . . . . .	5
1.3.1	Définitions . . . . .	5
1.3.2	Arbres couvrants et arbres à poids . . . . .	6
1.4	Isomorphisme . . . . .	6
1.5	Graphes hamiltoniens . . . . .	7
1.6	Graphes Eulériens . . . . .	8
1.7	Application : le problème du voyageur de commerce (TSP) . . . . .	9
1.7.1	Énoncé du problème . . . . .	9
1.7.2	Arbres couvrant minimum . . . . .	10
1.8	Ordres partiels . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Arithmétique Modulaire</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Combinatoire énumérative</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Théorie des Codes</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Transformées de Fourier discrètes</b>	<b>15</b>

# 1 Théorie des Graphes

## 1.1 Définitions

### Définition 1

Un graphe  $\Gamma$  est un triplet  $(V, E, \gamma)$  où  $V$  est un ensemble fini dont les éléments sont appelés sommets,  $E$  est un ensemble fini dont les éléments sont appelés arêtes,  $\gamma$  est une fonction  $\gamma : E \rightarrow \text{Paires}(V)$ . On nottera le plus souvent  $\Gamma = (V, E)$  en omettant la fonction  $\gamma$ .

Soit  $\gamma(e) = \{x, y\}$  pour  $e \in E, x, y \in V$  :

1. On dit que  $x$  et  $y$  sont adjacents.
2. On dit que  $e$  est incidente à  $x$  et  $y$ .

### Définition 2

Soit  $\Gamma = (V, E, \gamma)$  un graphe.

1.  $\gamma(e) = \{x, x\}$  pour  $e \in E, x \in V$  est appelé un lacet.
2. Si au moins 2 arêtes sont incidentes à 2 mêmes sommets, on les appelle arêtes multiples.
3. Un graphe est simple s'il n'a ni lacet, ni arêtes multiples. Dans ce cas, on omet la fonction  $\gamma$ , on note  $\Gamma = (V, E)$  et  $E$  est identifié un sous-ensemble de  $\text{Paires}(V)$ .

### Définition 3

Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe. Le degré d'un sommet  $v \in V$  est le nombre d'arêtes incidentes à  $v$ , les lacets comptant pour 2 arêtes. On note le degré de  $v$  par  $\deg(v)$ .

### Exemple

Dans la figure suivante, nous avons 2 sommets de degré 4 et 6 sommets de degré 1.

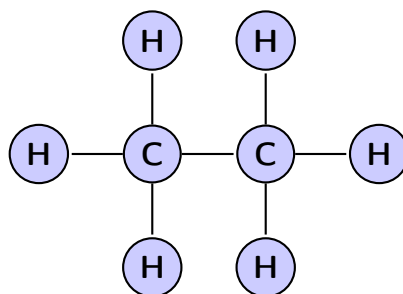


FIGURE 1 – Exemple degrés des sommets dans la molécule  $C_2H_6$ .

### Théorème 1

Soit  $\Gamma = (V, E)$ , alors

$$\sum_{i=1}^{\#V} \deg(v_i) = 2\#E$$

### Démonstration

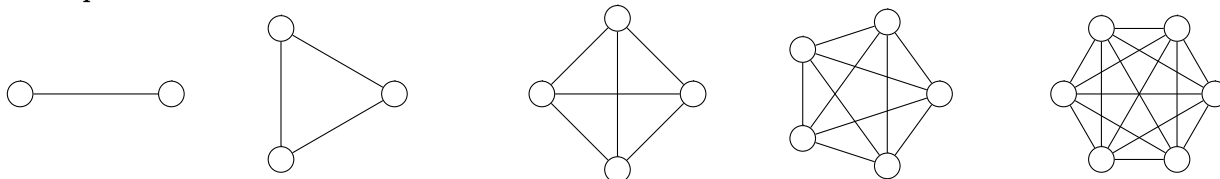
Chaque arête contribue 2 fois dans la somme des degrés.

### Corollaire

La somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.

**Définition 4**

Le graphe complet  $K_n$  est le graphe simple à  $n$  sommets pour lequel chaque paire de sommets est une arête.

**Exemple****Définition 5**

Un graphe  $\Gamma' = (U, F)$  est un sous-graphe de  $\Gamma = (V, E)$  si  $U \subseteq V$  et  $F \subseteq E$ . On nottera  $\Gamma' \leq \Gamma$ .

**Exemple**

$K_m \leq K_n$  si  $m \leq n$ .

**Exercice**

Montrer que  $K_m$  possède  $q = \frac{1}{2}n(n-1)$  arêtes.

**1.2 Chemins dans les graphes****Définition 6**

Soit  $\Gamma = (V, E)$  et  $v, w \in V$ . Un chemin de  $v$  à  $w$  de longueur  $n$  est une séquence alternée de  $(n+1)$  sommets  $v_0, v_1, \dots, v_n$  et de  $n$  arêtes  $e_1, e_2, \dots, e_n$  de la forme

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$$

dans laquelle chaque  $e_i$  est incident à  $v_{i-1}$  et  $v_i$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $e_i \neq e_j, \forall i \neq j \in 1, \dots, n$

Un chemin est simple si aucun sommet ne se répète sauf peut-être  $v_0$  et  $v_n$ .

Dans un graphe simple on nottera juste la suite des sommets lorsque l'on décrit un chemin.

**Définition 7**

Un graphe  $\Gamma = (V, E)$  est connexe si  $\forall x, y \in V : \exists$  un chemin de  $x$  à  $y$ .

La composante connexe de  $\Gamma$  contenant  $x$  est le sous-graphe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  dont les sommets et les arêtes sont contenus dans un chemin de  $\Gamma$  démarrant en  $x$ .

**Définition 8**

Soit  $\Gamma = (V, E)$  et  $v \in V$ .

Un cycle est un chemin de  $v$  à  $v$ .

Un cycle simple est un cycle de  $v$  à  $v$  dans lequel aucun sommet n'est répété (mis à part le départ et l'arrivée).

### 1.3 Arbres

#### 1.3.1 Définitions

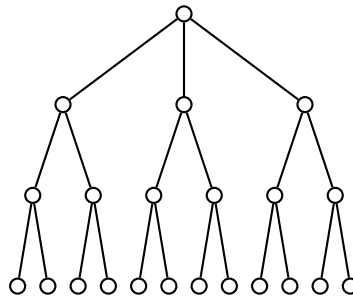
##### Définition 9

Un arbre est un graphe simple connexe qui ne contient aucun cycle.

##### Définition 10

Dans un arbre, les sommets de degré 1 sont appelés les feuilles.

##### Exemple



##### Proposition 1

Si  $T$  est un arbre avec  $p \geq 2$  sommets, alors  $T$  contient au moins 2 feuilles.

##### Démonstration

$T$  a  $p$  sommets. Tous les chemins sont de longueur inférieure ou égale à  $p$ . Considérons un chemin  $v_0, v_1, \dots, v_r$  pour  $v_i \in V$ ,  $i = 0, \dots, r$  de longueur maximale. Alors,  $v_0$  et  $v_r$  sont de degré 1.

##### Théorème 2

Soit  $T$  un graphe simple à  $p$  sommets. Alors les 3 assertions suivantes sont équivalentes :

- i  $T$  est un arbre.
- ii  $T$  a  $(p - 1)$  arêtes et aucun cycle.
- iii  $T$  a  $(p - 1)$  arêtes et est connexe.

##### Démonstration

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : **Montrer qu'un arbre à  $p$  sommets a  $(p-1)$  arêtes.**

Par récurrence :

1.  $p = 1$  OK

2. Supposons que ce soit vrai pour tout arbre à  $k \geq 1$  sommets et montrons le pour un arbre à  $(k+1)$  sommets. Soit  $T$  un tel arbre, il a au moins 2 feuilles. Enlevons une de ces feuilles ainsi que l'arête incidente. On obtient un arbre  $T'$  à  $k$  sommets. Par l'hypothèse de récurrence :  $T'$  a  $(k-1)$  arêtes, donc  $T$  a  $k$  arêtes.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : **Supposons (ii) et  $T$  ne soit pas connexe.**

Notons  $T_1, T_2, \dots, T_t$  les composantes connexes de  $T$  avec  $t \geq 2$ . Chaque  $T_i$  est un arbre, pour  $1 \leq i \leq t$  (car pas de cycle). Soit  $p_i$  le nombre de sommets de  $T_i$ , alors chaque  $T_i$  a  $(p_i - 1)$  arêtes.

$$\sum_{i=1}^t p_i = p$$

et

donc  $\Rightarrow t = 1$

$$p - 1 = \sum_{i=1}^t (p_i - 1) = p - t$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : **Supposons que  $T$  ne soit pas un arbre.**

Alors,  $T$  contient un cycle  $C$ . Enlevons une arête de  $C$ . On obtient le sous-graphe  $T'$  de  $T$  qui est toujours connexe. Si  $T'$  contient un cycle, alors on itère le processus. Sinon,  $T'$  est un arbre à  $p$  sommets qui a strictement moins que  $(p-1)$  arêtes.

### 1.3.2 Arbres couvrants et arbres à poids

#### Définition 11

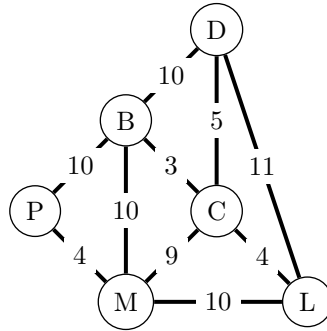
Un arbre couvrant dans un graphe  $\Gamma$  est un arbre qui est un sous-graphe de  $\Gamma$  et qui contient tous les sommets de  $\Gamma$ .

Dans certains problèmes, certaines arêtes sont plus importantes que d'autres. En théorie des graphes, on modélise cela en assignant une valeur à chaque arête.

#### Définition 12

Un arbre à poids est un couple  $(\Gamma, w)$  où  $\Gamma$  est un arbre  $w$  est une fonction  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Le nombre  $w(e)$  est appelé le poids de l'arête  $e$ .

#### Exemple



## 1.4 Isomorphisme

#### Définition 13

Deux graphes  $\Gamma_1 = (V_1, E_1, \gamma_1)$  et  $\Gamma_2 = (V_2, E_2, \gamma_2)$  sont isomorphes s'il existe une bijection  $f : V_1 \rightarrow V_2$  et une bijection  $g : E_1 \rightarrow E_2$  telles que  $\forall e \in E_1 : e$  est incident à  $v, w \in V_1$  ssi  $g(e)$  est incident à  $f(v), f(w) \in V_2$ . Le couple  $(f, g)$  est appelé un isomorphisme de graphe et on note  $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ .

Deux graphes isomorphes ont les mêmes propriétés.

#### Exemple

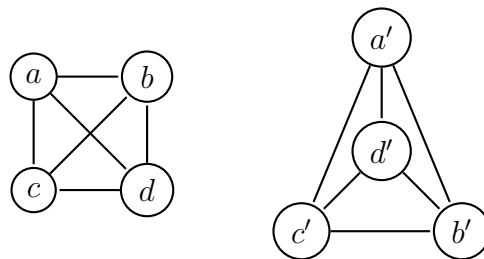


FIGURE 2 – Deux graphes isomorphes

## 1.5 Graphes hamiltoniens

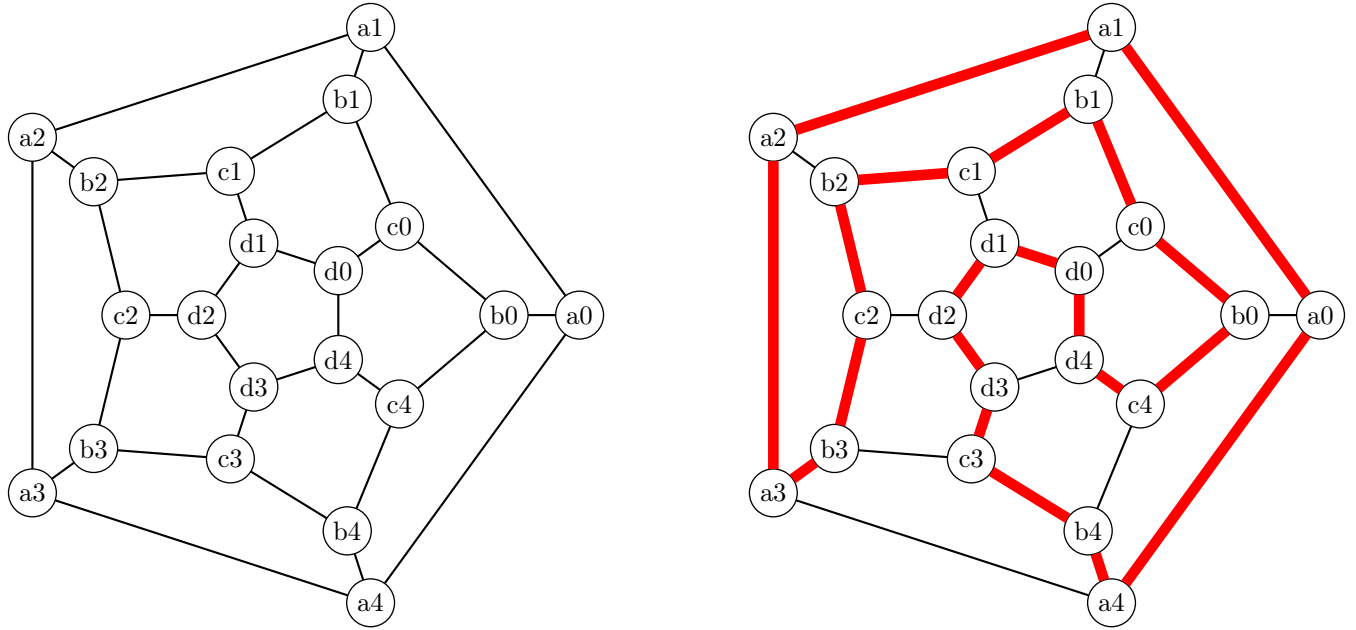


FIGURE 3 – Graphe hamiltonien et cycle hamiltonien

STUFF MISSING HERE

### Théorème 3 (Dirac 1950)

Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe simple avec  $p \geq 3$  sommets. Si  $\forall v \in V : \deg(v) \geq \frac{1}{2}p$ , alors  $\Gamma$  est Hamiltonien.

### Démonstration

$\Gamma$  est connexe. Soit  $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  un plus long chemin simple dans  $\Gamma$  avec  $v_0 \neq v_k, k < p$ .

$\deg(v_0) \geq \frac{p}{2}$ , tous les sommets adjacents à  $v_0$  sont dans  $\{v_1, \dots, v_k\}$

$\deg(v_k) \geq \frac{p}{2}$ , tous les sommets adjacents à  $v_k$  sont dans  $\{v_0, \dots, v_{k-1}\}$

Comme  $k < p$ , il doit exister  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  tel que  $\{v_i, v_k\} \in E$  et  $\{v_0, v_{i+1}\} \in E$ . On obtient un cycle  $\tilde{C} = (v_0, v_1, \dots, v_i, v_k, v_{k-1}, \dots, v_{i+1}, v_0)$

On ne peut pas étendre  $\tilde{C}$  est un cycle Hamiltonien.

Supposons :

$\exists y \in \tilde{C} \Rightarrow$  On peut supposer que  $\{v_j, y\} \in E$  pour  $j = \{0, \dots, k\}$ .

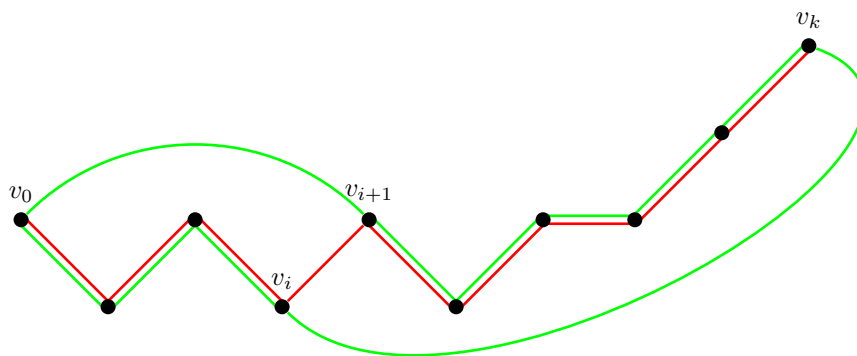
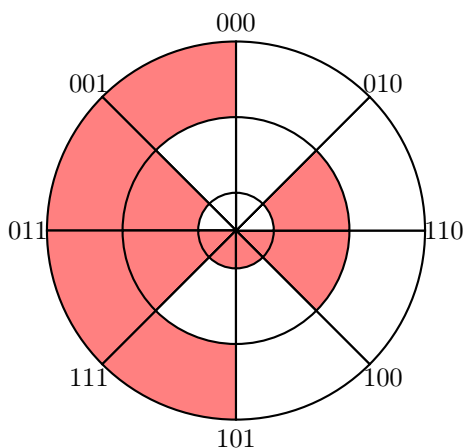
$\Rightarrow$  On construit un chemin  $\overline{C} = (y, v_j, v_{j-1}, \dots, v_0, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i, v_{i-1}, \dots, v_{j-1})$ .  $\overline{C}$  est un chemin plus long que  $C$ .

<Second Dessin>

Illustration : Code de Gray

Un code de Gray d'ordre  $n$  est un arrangement cyclique de  $2^n$  mots binaires de longueur  $n$  tels que 2 mots adjacents ne diffèrent qu'en une seule position.

### Exemple

FIGURE 4 – Les 2 chemins,  $C$  en rouge,  $\tilde{C}$  en vert.

Le code de Gray ci-dessus provient d'un cycles Hamiltonien.

<dessin cube et cycle>

Un code de Gray d'ordre  $(n+1)$  se construit à partir d'un code de Gray d'ordre  $n$  comme suit :

1. On écrit le code de Gray donné d'ordre  $n$  en ajoutant à la fin de chaque mot un zéro.
2. On le fait suivre par le même code de Gray parcouru dans l'autre sens et en ajoutant à la fin de chaque mot un 1.

## 1.6 Graphes Eulériens

### Définition 14

Un cycle Eulérien dans un graphe  $\Gamma$  est un cycle qui contient toutes les arêtes de  $\Gamma$ . Un graphe est Eulérien s'il contient un cycle Eulérien.

### Exemple

SOME EXAMPLE

### Proposition 2

Si un graphe est Eulérien, alors tous ses sommets sont de degré pair.



**Lemme**

Soit  $\Gamma$  un graphe dans lequel chaque sommet est de degré pair, alors l'ensemble  $E$  se partitionne en une union de cycles (arête-)disjointe.

**Exemple**

<DRAWING 3 CYCLES>

**Démonstration**

Par récurrence, sur le nombre d'arêtes

1. Le lemme est vrai pour  $q = 2$ .
2. Supposons qu'il soit vrai pour tout graphe à  $q \leq k$  arêtes et montrons-le pour un graphe à  $(k+1)$  arêtes.
3. Soit  $v_0$  un sommet de  $\Gamma$ . On démarre un chemin en  $v_0$  et on le suit jusqu'à ce qu'un sommet soit répété 2 fois. On le note  $v_j$  et  $C$  le cycle de  $v_j$  à  $v_j$ .
4. Soit  $\Gamma'$  le sous-graphe de  $\Gamma$ , obtenu par  $V = V'$  et  $E' = E \setminus C$ .  $\Gamma'$  a  $\#E' \leq k$  arêtes. Par hypothèse de récurrence, les arêtes de  $\Gamma'$  se partitionnent en une union arête-disjointe de cycles  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ .
5. Donc,  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$  est une partition arête-disjointe des arêtes de  $\Gamma$ .
6. RECHECK THIS DEMO, SEEMS FISHY

**Théorème 4**

Soit  $\Gamma$  un graphe connexe. Alors,  $\Gamma$  est eulérien si et seulement si chaque sommet a un degré pair.

**Démonstration**

$\Rightarrow$  OK par proposition précédente.

$\Leftarrow$  Par le Lemme :  $E$  se partitionne en une union (arête-)disjointe de cycles  $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ .

1. Si  $n=1$ , c'est bon.
2. Si  $n > 1$ , comme  $\Gamma$  est connexe,  $\exists$  une arête incidente à un  $v \in C_1$  et un  $w \notin C_1$ . Cette arête est dans  $C_j$  pour un  $j = 2, \dots, n$  (car on a une partition de  $E$ ). On attache ce cycle en  $v$ . S'il reste des cycles dans la partition, on itère ce procédé jusqu'à avoir utilisé tous les cycles.

## 1.7 Application : le problème du voyageur de commerce (TSP)

### 1.7.1 Énoncé du problème

Énoncé : Un vendeur de livres démarre de chez lui et doit visiter un certain nombre de librairies avant de rentrer chez lui. Comment doit-il choisir sa route pour minimiser la distance parcourue ?

Objet mathématique : Un graphe valué (à chaque arête est associé un nombre appelé poids) où les sommets représentent les librairies et les arêtes représentent les routes.

<VALUED K5 GRAPH HERE>

Objectif : Trouver un cycle hamiltonien de poids minimal.

Remarque : Un graphe complet  $K_n$  à  $n$  sommets possède  $\frac{1}{2}(n-1)!$  cycles hamiltoniens différents. Par exemple, pour  $n = 10 \Rightarrow 181440$  cycles. On ne connaît pas encore d'algorithme efficace qui donne une solution au problème.

### 1.7.2 Arbres couvrant minimum

#### Définition 15

Un arbre couvrant dans un graphe  $\Gamma$  est un arbre qui est un sous-graphe de  $\Gamma$  et qui contient tous les sommets de  $\Gamma$ .

#### Exemple

<GRAPH TO MIN SPANNING TREE EXAMPLES HERE>

Il existe un algorithme qui donne des arbres couvrants de poids minimum dans un graphe valué.

Algorithme de Kruskal :

- i Choisir une arête de plus petit poids.
- ii Choisir parmi les arêtes restantes une arête de plus petit poids dont l'inclusion ne crée pas un cycle.
- iii Continuer jusqu'à obtenir un arbre couvrant.

#### Exemple

<GRAPH K5 WITH PATH HERE>

Remarque : Si  $C$  est un cycle hamiltonien dans un graphe  $\Gamma$ , alors  $\forall e \in E$  arête de  $C$  :  $C \setminus \{e\}$  est un arbre couvrant.

$\Rightarrow$  (Solution de TSP)  $\geq$  (longueur minimum d'un arbre couvrant)

Mieux : Soit  $v$  un sommet de  $\Gamma$ . Tout cycle hamiltonien contient 2 arêtes incidentes à  $v$ . Le reste du chemin est un arbre couvrant de  $\Gamma \setminus \{v\}$ .

$\Rightarrow$  (Solution de TSP)  $\geq$  ( $\sum$  des longueurs des 2 plus courtes arêtes incidentes à  $v$ ) + (longueur minimum d'un arbre couvrant de  $\Gamma \setminus \{v\}$ )

Remarque :  $\exists$  borne supérieure à TSP en utilisant des cycles eulériens.

## 1.8 Ordres partiels

#### Définition 16

Soit  $P$  un ensemble. Un ordre partiel sur  $P$  est une relation sur  $P$ , c'est à dire un ensemble de couples  $(p_1, p_2) \in P \times P$ , noté  $p_1 \leq p_2$  tel que :

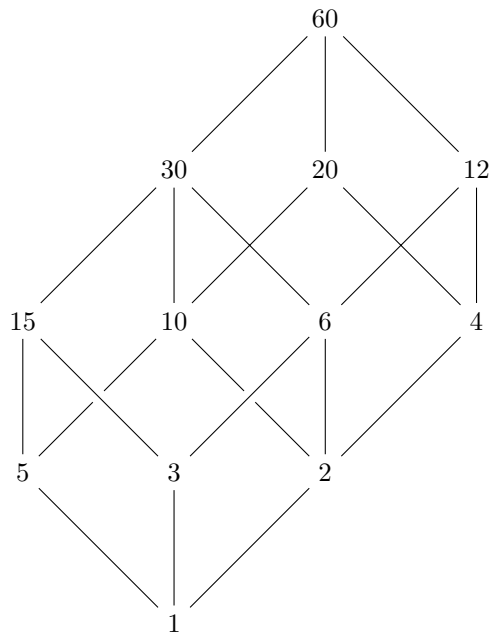
1.  $p \leq p$  (réflexive)
2.  $(p \leq q \text{ et } q \leq p) \Rightarrow p = q$  (anti-symétrique)
3.  $(p \leq q \text{ et } q \leq r) \Rightarrow p \leq r$  (transitive)

On note  $(P, \leq)$  un ensemble partiellement ordonné.

#### Exemple 1. $(\mathbb{N}, \leq)$

2.  $(\mathbb{N}, |)$  où  $a | b$  si  $\exists c \in \mathbb{Z}$  tel que  $a \cdot c = b$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ )

Un ordre partiel (bla bla bla)



## 2 Arithmétique Modulaire

### 3 Combinatoire énumérative

## 4 Théorie des Codes

## 5 Transformées de Fourier discrètes