MATH-F-307: Syllabus (étudiant) d'exercices

André Madeira Cortes
Nikita Marchant

Table des matières

1 Séance 1

Exercice 1. *Construisez un graphe simple et connexe sur 8 sommets tel que chaque sommet est contenu dans exactement trois arêtes. Pouvez-vous faire la même chose avec 9 sommets ?*

Exercice 2. *Dans un groupe de personnes, il y a toujours deux individus qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.*

1. *Formalisez cette propriété dans le vocabulaire des graphes.*
2. *Démontrez cette propriété (par l'absurde).*

Par l'absurde : Il n'existe pas de $e_1, e_2 : deg(e_1) = deg(e_2)$.

$0 \leq deg(e_1 \leq n - 1$

(...)

Exercice 3. *Soit $n \geq 2$ et soit G un graphe simple avec $2n$ sommets et $n^2 + 1$ arêtes. Montrez que G contient un triangle.*

Exercice 4. *Soit G un graphe simple avec $2p$ sommets. On suppose que le degré de chaque sommet est au moins égal à p. Démontrez que ce graphe est connexe.*

Exercice 5. *Soit G un graphe simple.*

1. *On suppose que G est connexe et que x est un sommet de G de degré 1. Prouvez que $G \setminus \{x\}$ est connexe.*
2. *Déduisez-en que, si G est connexe et $|V(G)| = n \geq 2$, alors G contient au moins $n - 1$ arêtes.*

Exercice 6. *Donnez un graphe simple et connexe sur au moins 5 sommets qui est :*

- *hamiltonien et eulérien ;*
- *hamiltonien et non eulérien ;*
- *non hamiltonien et eulérien ;*
- *non hamiltonien et non eulérien.*

Exercice 7. *Le graphe 1 est-il isomorphe à un (ou à plusieurs) des graphes ci-dessous ?*

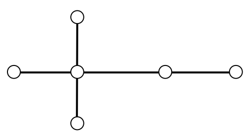


Figure 1

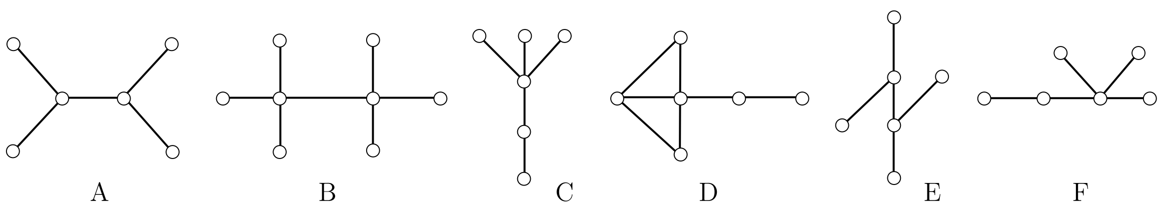


Figure 2

Exercice 8. *Les graphes suivants sont-ils isomorphes ? (Ne vous contentez pas d'une justification approximative : essayez de démontrer rigoureusement vos affirmations.)*

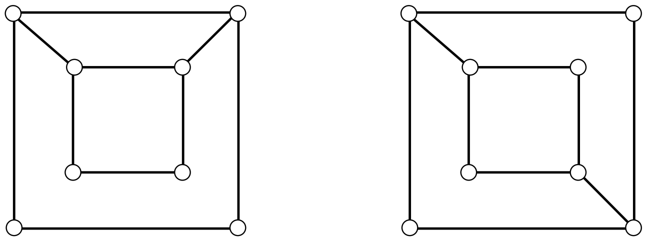


Figure 3

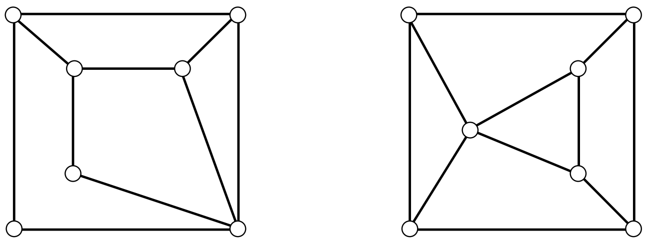


Figure 4

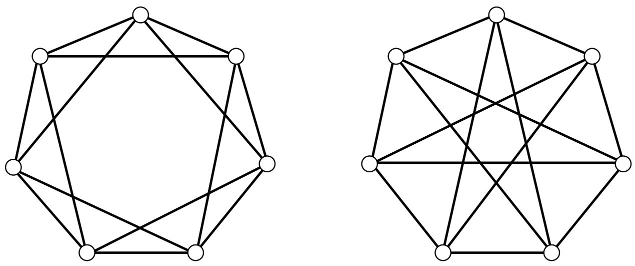


Figure 5

2 Séance 2

Exercice 9. *Considérez la grille $n \times n$, le graphe obtenu selon la Figure 6, avec n un naturel ≥ 3. Démontrez que n est pair si et seulement si le graphe est hamiltonien.*

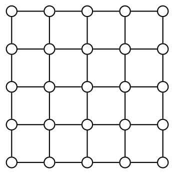


FIGURE 6 – Grille 5×5.

Nous cherchons à prouver que tout graphe du style de la figure 6 avec un n pair est un graphe hamiltonien. C'est à dire n pair $\Leftrightarrow$ graphe hamiltonien.

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

Exercice 10. *Prouvez que pour tout $n \geq 3$, le graphe complet K_n possède exactement $\frac{1}{2}(n-1)!$ cycles hamiltoniens.*

Exercice 11. *Combien d'arbres couvrants possèdent les deux graphes de la Figure 7 ?*

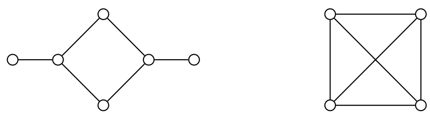


FIGURE 7

Exercice 12. *Montrez que tous les alcools $C_nH_{2n+1}OH$ sont des molécules dont le graphe est un arbre, en sachant que les valences de C, O et de H sont respectivement $4, 2, 1$.*

Exercice 13. *Démontrez que si un graphe hamiltonien $G = (V, E)$ est biparti selon la bipartition $V = A \cup B$, alors $|A| = |B|$. En déduire que $K_{n,m}$, le graphe biparti complet, est hamiltonien si et seulement si $m = n \geq 2$.*

Exercice 14. *Pour chaque graphe de la Figure 8, déterminez si*

1. *le graphe est hamiltonien,*
2. *le graphe est eulérien,*
3. *le graphe est biparti.*

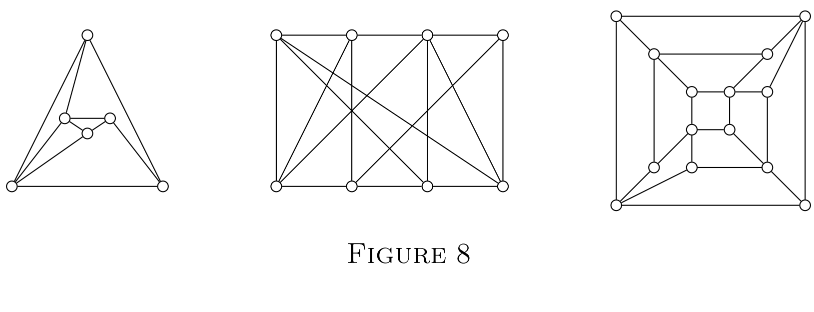


FIGURE 8

3 Séance 3

Exercice 15. *Construisez un code de Gray d'ordre 5 sur base du code de Gray d'ordre 4 ci-dessous.*
0000,0100,1100,1000,1010,1110,0110,0010,0011,0111,1111,1011,1001,1101,0101,0001

Exercice 16. *Dans le graphe ci-dessous, on donne un couplage de cardinal maximal. En utilisant la preuve du théorème de König vue au cours, trouvez un transversal de cardinal minimal.*

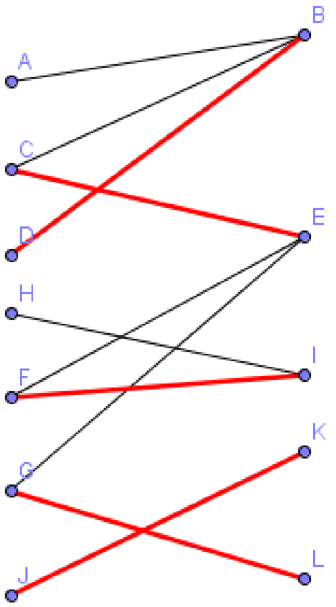


FIGURE 9

Exercice 17. *Sur* $\mathbb{R}^2$*, on définit les relations suivantes :*

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y',$$

$$(x, y)\mathcal{S}(x', y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

Est-ce que les relations $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{S}$ *sont des ordres ?*

Exercice 18. *Considérons le graphe biparti (bipartition donnée par une coloration des sommets) ci-dessous. Sur l'ensemble de ses sommets, on définit la relation $u \leq v$ pour u, v des sommets tels que u est un sommet rouge et $\{u, v\}$ est une arête. On pose aussi $u \leq u$ pour tout sommet u.*

(a) Vérifiez que $\leq$ est un ordre partiel.

(b) Construisez une partition des sommets par k chaînes et trouvez une antichaîne contenant k éléments.

(c) Déduisez-en un couplage de cardinalité maximale et un transversal de cardinalité minimale.

(d) (Bonus) Sur base de ce qui est fait ci-dessus, prouvez que le théorème de König implique le théorème de Dilworth.

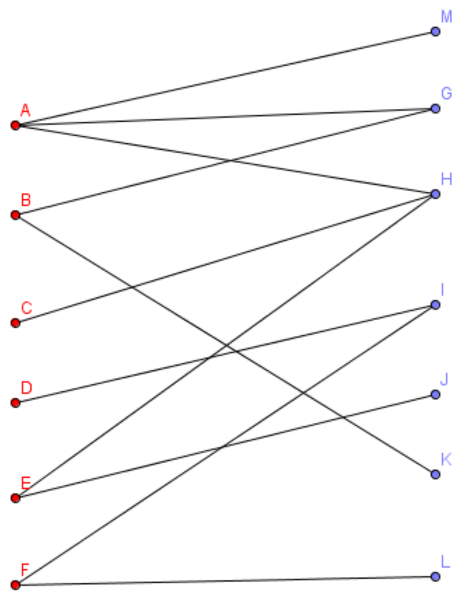


Figure 10

4 Séance 4

Exercice 19. *L'ensemble* $\{2^m | m \in \mathbb{Z}\}$ *forme-t-il un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication usuelle ?*

Soit $X = 2^m, m \in \mathbb{Z}$ et $(X, .)$ le groupe à analyser.

$\forall x, y \in \mathbb{Z} : 2^x * 2^y = 2^{x+y} \in X$ car $(x + y) \in \mathbb{Z}$. L'ensemble X forme donc bien un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication.

Exercice 20. *L'ensemble* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ *avec l'addition définie par*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(où $x_i + y_i$ *est le résultat d'une addition modulo* 2*) forme-t-il un groupe ?*

Il faut tester si les 3 propriétés d'un groupe sont respectées.

1. Associativité : Chaque composante est calculée avec la forme $x_i + y_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. $\mathbb{Z}_2$ est associatif, l'adition est faite composante par composante, donc Z_2^n est associatif. Il faut donc à présent montrer que $(x_i + y_i) + z_i = x_i + (y_i + z_i)$.

Exercice 21. *En appliquant l'algorithme d'Euclide à a et b ci-dessous, calculer :*
- le PGCD(a, b),
- x *et* y *tels que* $ax + by = PGCD(a, b)$*,*
Les différentes valeurs de a et b sont :

(i) $a = 12, b = 34$,

(ii) $a = 13, b = 34$,

(iii) $a = 13, b = 31$,

Exercice 22. *(i) Trouver un entier* x *tel que le reste de la division de* $50x$ *par* 71 *donne* 1.

(ii) Trouver un entier x *tel que le reste de la division de* $50x$ *par* 71 *donne* 63.

(iii) Trouver un entier x *tel que le reste de la division de* $43x$ *par* 64 *donne* 1.

Exercice 23. *Dans le système RSA, prenons* $p = 11$, $q = 13$ *et* $e = 7$. *Que vaut alors s ? Si* 99 *est le message à coder, quel est le message crypté ? Vérifier en décriptant le message.*

5 Séance 5

Exercice 24. *Montrer le résultat suivant : si $a \equiv b \ (mod\ n)$ et $c \equiv d \ (mod\ n)$, alors*

$$a + c \equiv b + d \ (mod\ n) \text{ et } a.c \equiv b.d \ (mod\ n).$$

$a \equiv b \ (mod\ n) \Rightarrow b - a = kn \qquad c \equiv d \ (mod\ n) \Rightarrow d - c = ln$

Exercice 25. *Montrer que, si $a \equiv b \ (mod\ n)$, alors*

$$a + c \equiv b + c \ (mod\ n) \ \forall c \in \mathbb{Z}$$

et

$$a.c \equiv b.c \ (mod\ n) \ \forall c \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 26. *Prouver que, si $a \equiv b \ (mod\ n)$, alors $a^k \equiv b^k \ (mod\ n)$ pour tout entier $k > 0$.*

$a^k \equiv b^k \ (mod\ n) \Rightarrow b^k - a^k = xn \Leftrightarrow ln(b^k - a^k) = ln(xn) \Leftrightarrow \frac{ln(b^k)}{ln(a^k)} = ln(xn) \Leftrightarrow \frac{\cancel{k}ln(b)}{\cancel{k}ln(a)} = ln(xn) \Leftrightarrow ln(b) - ln(a) = ln(xn) \Leftrightarrow b - a = xn \Rightarrow a \equiv b \ (mod\ n)$

Exercice 27. *Trouver toutes les solutions aux congruences suivantes :*

- $2x \equiv 3 \ (mod\ 4)$ *avec* $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *;*
- $2x \equiv 2 \ (mod\ 4)$ *avec* $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *;*
- $2x \equiv 3 \ (mod\ 5)$ *avec* $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 28. *Soient a, b deux entiers. Montrer que*

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = ppcm(a, b)\mathbb{Z}$$

et

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = pgcd(a, b)\mathbb{Z}.$$

Sous-question 1 :

Soit $m = ppcm(a, b)$. Nous pouvons en déduire 3 propriétés :

1. $\frac{a}{m}$
2. $\frac{b}{m}$
3. si $\frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$, alors $\frac{m}{z}$

Nous voulons donc prouver que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. Pour ce faire, nous devons montrer que l'un est inclus dans l'autre, et vice-versa.

($\subseteq$) Soit $z \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$, i.e. $\exists k, k' \in \mathbb{Z}$ $\qquad z = ak = bk' \Leftrightarrow \frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$

Montrer que $z \in m\mathbb{Z}$.
Par la propriété 3, $\frac{m}{z} \Leftrightarrow z \in m\mathbb{Z}$

($\supseteq$) Soit $z \in m\mathbb{Z}$, i.e. $\frac{m}{z}$

Montrer que $z \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$, i.e. $\frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$.

Par la propriété 1, $\frac{a}{m}$

$\frac{m}{z} \Rightarrow \frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$

Par la propriété 2, $\frac{b}{m}$

Sous-question 2 :

Exercice 29. *Montrer que*

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$$

mais que

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

6 Séance 6 et 7

Exercice 30. *Soient A et B deux ensembles finis avec $|A| = a$ et $|B| = b$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Que valent :*

(i) $|A \times B|$,

(ii) $|B^A|$ *où* $B^A := \{f : A \to B\}$,

(iii) $|\{f : A \to B : f \text{ est une injection de } A \text{ dans } B\}|$,

(iv) $|\operatorname{Sym} A|$ *où* $\operatorname{Sym} A$ *est l'ensemble des permutations de* A.

(i) $a \cdot b$

(ii) b^a

(iii) Si $\#B < \#A$ pas d'injection possible, donc vaut zéro. Sinon, $(b - a + 1) \cdot ... \cdot (b - a) \cdot b = \frac{b!}{(b-a)!}$

(iv) $a!$

Exercice 31. *Quels sont les ensembles F non vides ayant la propriété suivante :*

(i) pour tout ensemble X, $|F^X| = 1$?

(ii) pour tout ensemble Y, $|Y^F| = 1$?

(i) $|F| = 1$

(ii) Ensemble vide (mais pas possible par énoncé)

Exercice 32. *Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. Démontrer :*

(i) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective ;

(ii) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective ;

(iii) $g \circ f$ bijective $\Rightarrow$ (f injective et g surjective).

(i) Si f non injective, deux éléments a_1 et a_2 différents de A vont être envoyés par f sur un élément b de B. De plus, ces deux éléments vont être envoyés par g o f sur un même élément c de C, car g (f (a_1)) = g(b) = c = g(b) = g (f (a_2))

(ii) On sait que $\forall c \in C, \exists a \in A$ tel que g o f (a) = c. On veut montrer que g est surjective. C'est à dire que $\forall c \in C, \exists b \in B$ tel que g (b) = c. Ceci est vérifié en prenant b = f(a).

(iii) Implication de (i) et (ii)

Exercice 33. *Donner une preuve bijective de l'identité de somme parallèle $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.*

Voir syllabus année passée page 8.

Exercice 34. *Donner deux démonstrations de*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ .$$

Première démonstration :

Via le Binôme de Newton, on sait que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Si on pose x=1 et y=1, on a :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \cdot \underbrace{1^k}_{=1}$$
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Deuxième démonstration :

$\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments.

$$|\{0,1\}^n| = 2^n$$

Exercice 35. *Qu'obtient-on comme identité sur les coefficients binomiaux en écrivant*

$$(x+y)^{2n} = (x+y)^n(x+y)^n \text{ ?}$$

(Voir avec assistants)

Exercice 36. *Qu'obtient-on en dérivant la formule du binôme ?*

(Voir avec assistants)

Exercice 37. *Trouver le nombre de solutions de l'équation* $x+y+z+w = 15$, *dans les naturels.*

$\binom{s+d-1}{d-1} = \binom{15+4-1}{4-1} = \binom{18}{3}$

Exercice 38. *Combien l'équation*

$$x+y+z+t+u = 60$$

possède-t-elle de solutions entières (x, y, z, t, u) *telles que*

$$x > 0\ , \quad y \geqslant 9\ , \quad z > -2\ , \quad t \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad u > 10 \quad ?$$

On doit procéder à un changement de variables.

$x' = x - 1 \Leftrightarrow x = x' + 1 \qquad y' = y - 9 \Leftrightarrow y = y' + 9 \qquad z' = z + 1 \Leftrightarrow z = z' - 1$
$t' = t \qquad u' = u - 11 \Leftrightarrow u = u' + 11$

$x' + y' + z' + t' + u' = 60 - 1 - 9 + 1 - 11 = 40$

$\binom{s+d-1}{d-1} = \binom{40+5-1}{5-1} = \binom{44}{4}$

Exercice 39. *Trouver le nombre de solutions de l'inéquation*

$$x+y+z+t \leqslant 6$$

(i) dans les naturels ;
(ii) dans les entiers > 0 *;*
(iii) dans les entiers, avec comme contraintes supplémentaires $x > 2$, $y > -2$, $z > 0$ *et* $t > -3$.

Même chose que les exos précédents (réponse dans un prochain épisode...).

Exercice 40. *Avec les lettres du mot MISSISSIPPI, combien peut-on écrire de mots différents de 11 lettres ?*

Lettres du mot : 1 M, 4 I, 4 S, 2 P

Mots de 11 lettres : $\frac{11!}{(4!)(4!)(2!)(1!)}$

Exercice 41. *Avec les lettres du mot*

$$HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA$$

("poisson" en hawaïen), combien peut-on écrire de mots différents de 21 lettres ne comprenant pas deux lettres U côte à côte ?

Faire mots de 12 lettres sans U. Rajouter probabilité de mettre les U dans les 13 places qui restent pour faire des mots de 21 lettres. Donc, $\binom{13}{9}$

Exercice 42. *Si* $0 \leqslant m \leqslant n$*, que vaut*

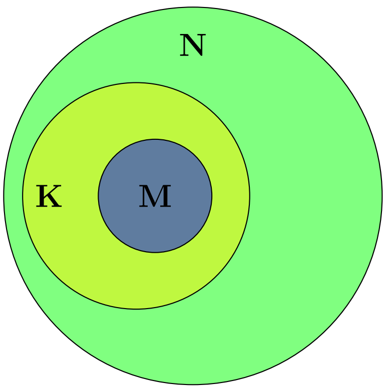
$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} \quad ?$$

(Hint : essayer une preuve bijective.)

Preuve version "étudiant" :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} &= \sum_{k=m}^{n} \frac{\cancel{k!}}{m!(k-m)!} \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} = \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \frac{(n-m)!}{(n-m)!} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^{n} \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{m} \sum_{k=m}^{n} \binom{n-m}{k-m} \qquad \text{On pose} \quad r = k-m \\
&= \binom{n}{m} \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n-m}{r} 1^r 1^{n-m-r} \qquad \text{Formule du binôme de Newton} \\
&= \binom{n}{m} (1+1)^{n-m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}
\end{aligned}$$

Preuve bijective version assistants :



Fixons $0 \leq m \leq n$
Comptons de 2 manières différentes le nombre de triples (M, K, N) où $M \subseteq K \subseteq N$ et |M| = m, |N| = n, |K| = k

1. On choisit un ensemble de taille m dans N : il y a $\binom{n}{m}$ façons de choisir
2. K peut avoir m éléments, m+1, ..., n éléments

1. On choisit un ensemble de taille m dans N : il y a $\binom{n}{m}$ façons de choisir

Ensuite, nous complétons cet ensemble M pour obtenir K, c'est à dire il y a

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} = 2^{n-m} \quad \text{choix}$$

Donc au total il y a $\binom{n}{m} 2^{n-m}$ choix.

2. K peut avoir m éléments, m+1, ..., n éléments

1. **S'il y en a m :** on choisit m éléments parmi n et m éléments parmi ces m éléments, c'est à dire $\binom{m}{m}\binom{n}{m}$
2. **S'il y en a m+1 :** on choisit m+1 éléments parmi n et m éléments parmi ces m+1 éléments, c'est à dire $\binom{m+1}{m}\binom{n}{m+1}$
3. **S'il y en a n :** on choisit n éléments parmi n et m éléments parmi ces n éléments, c'est à dire $\binom{n}{m}\binom{n}{n}$

Il suffit de tout sommer (car "ou exclusif"). Donc :

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m} 2^{(n-m)}$$

Exercice 43. *Si on jette simultanément n dès identiques, combien de résultats différents peut-on obtenir ? (Deux résultats sont considérés comme équivalents s'ils ont le même nombre de 1, le même nombre de 2, . . . , le même nombre de 6.)*

(Voir avec assistants)