MATH-F307 - Mathématiques Discrètes
Laurent La Fuente
Notes de cours

André Madeira Cortes

Nikita Marchant

Table des matières

1 Théorie des Graphes

1.1 Définitions

***Définition* 1.1** Un graphe Γ est un triplet (V, E, γ) où V est un ensemble fini dont les éléments sont appelés sommets, E est un ensemble fini dont les éléments sont appelés arêtes, γ est une fonction $\gamma : E \to Paires(V)$. On nottera le plus souvent $\Gamma = (V, E)$ en omettant la fonction γ.

Soit $\gamma(e) = \{x, y\}$ pour $e \in E, x, y \in V$:

1. On dit que x et y sont adjacents.
2. On dit que e est incidente à x et y.

***Définition* 1.2** Soit $\Gamma = (V, E, \gamma)$ un graphe.

1. $\gamma(e) = \{x, x\}$ pour $e \in E, x \in V$ est appellé un lacet.
2. Si au moins 2 arêtes sont incidentes à 2 mêmes somments, on les appelle arêtes multiples.
3. Un graphe est simple s'il n'a ni lacet, ni arêtes multiples. Dans ce cas, on omet la fonction γ,on note $\Gamma = (V, E)$ et E est identifié un sous-ensemble de Paires(V).

***Définition* 1.3** Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe. Le degré d'un sommet $v \in V$ est le nombre d'arêtes incidentes à v, les lacets comptant pour 2 arêtes. On note le degré de v par deg(V).

Exemple Dans la figure suivante, nous avons 2 sommets de degré 4 et 6 sommets de degré 1.

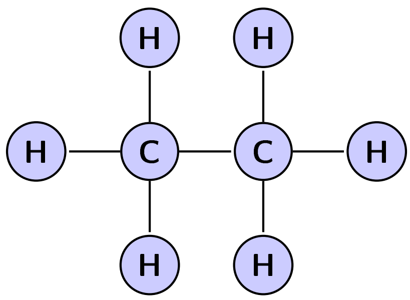

FIGURE 1 – Exemple degrés des sommets dans la molécule C_2H_6.

***Théorème* 1.1** Soit $\Gamma = (V, E)$, alors

$$\sum_{i=1}^{\#V} deg(v_i) = 2\#E$$

Démonstration Chaque arête contribue 2 fois dans la somme des degrés.

Corollaire La somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.

***Définition* 1.4** Le graphe complet K_n est le graphe simple à n sommets pour lequel chaque paire de sommets est une arête.

Exemple <Dessin des graphes complets $K_1 K_5$>

***Définition* 1.5** Un graphe $\Gamma' = (U, F)$ est un sous-graphe de $\Gamma = (V, E)$ si $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$. On nottera $\Gamma' \leq \Gamma$.

Exemple $K_m \leq K_n$ si $m \leq n$.

Exercice Montrer que K_m possède $q = \frac{1}{2}n(n-1)$ arêtes.

1.2 Chemins dans les graphes

***Définition* 1.6** Soit $\Gamma = (V, E)$ et $v, w \in V$. Un chemin de v à w de longueur n est une séquence alternée de $(n+1)$ sommets $v_0, v_1, ..., v_n$ et de n arêtes $e_1, e_2, ..., e_n$ de la forme

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n)$$

dans laquelle chaque e_i est incident à v_{i-1} et v_i pour $1 \leq i \leq n$ et $e_i \neq e_j, \forall i \neq j \in 1, ..., n$

Un chemin est simple si aucun sommet ne se répète sauf peut-être v_0 et v_n.

Dans un graphe simple on nottera juste la suite des sommets lorsque l'on décrit un chemin.

***Définition* 1.7** Un graphe $\Gamma = (V, E)$ est connexe si $\forall x, y \in V$: $\exists$ un chemin de x à y.

La composante connexe de Γ contenant x est le sous-graphe Γ' de Γ dont les sommets et les arêtes sont contenus dans un chemin de Γ démarrant en x.

***Définition* 1.8** Soit $\Gamma = (V, E)$ et $v \in V$.

Un cycle est un chemin de v à v.

Un cycle simple est un cycle de v à v dans lequel aucun sommet n'est répété (mis à part le départ et l'arrivée).

1.3 Arbres

***Définition* 1.9** Un arbre est un graphe simple connexe qui ne contient aucun cycle.

***Définition* 1.10** Dans un arbre, les sommets de degré 1 sont appellés les feuilles.

Exemple <Dessin Arbre>

***Proposition* 1.1** Si T est un arbre avec $p \geq 2$ sommets, alors T contient au moins 2 feuilles.

Démonstration T a p sommets. Tous les chemins sont de longueur inférieure ou égale à p. Considérons un chemin $v_0, v_1, ..., v_r$ pour $v_i \in V$, $i = 0, ..., r$ de longueur maximale. Alors, v_0 et v_r sont de degré 1.

***Théorème* 1.2** Soit T un graphe simple à p sommets. Alors les 3 assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est un arbre.
2. T a $(p-1)$ arêtes et aucun cycle.
3. T a $(p-1)$ arêtes et est connexe.

Démonstration <Démonstration en 2 parties>.

<– COURS 2 MISSING –>

***Théorème* 1.3** (Dirac 1950) Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe simple avec $p \geq 3$ sommets. Si $\forall v \in V : deg(v) \geq \frac{1}{2}p$, alors Γ est Hamiltonien.

Démonstration Γ est connexe. Soit C $= (v_0, v_1, ..., v_k)$ un plus long chemin simple dans Γ avec $v_0 \neq v_k, k < p$.

$deg(v_0) \geq \frac{p}{2}$, tous les sommets adjacents à v_0 sont dans $\{v_1, ..., v_k\}$

$deg(v_k) \geq \frac{p}{2}$, tous les sommets adjacents à v_k sont dans $\{v_0, ..., v_{k-1}\}$

Comme $k < q$, il doit exister $i \in \{0, ..., k-1\}$ tel que $\{v_i, v_k\} \in E$ et $\{v_0, v_{i+1}\} \in E$. On obtient un cycle $\widetilde{C} = (v_0, v_1, ..., v_i, v_k, v_{k-1}, ..., v_{i+1}, v_0)$

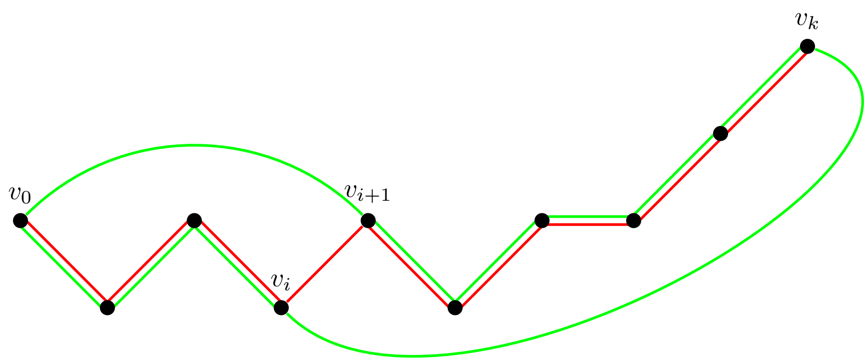

FIGURE 2 – Les 2 chemins, C en rouge, $\widetilde{C}$ en vert.

On nq(?) $\widetilde{C}$ est un cycle Hamiltonien.

Supposons :

$\exists y \in \widetilde{C} \Rightarrow$ On peut supposer que $\{v_j, y\} \in E$ pour $j = \{0, ..., k\}$.

$\Rightarrow$ On construit un chemin $\overline{C} = (y, v_j, v_{j-1}, ...v_0, v_{i+1}, ..., v_k, v_i, v_{i-1}, ..., v_{j-1})$. $\overline{C}$ est un chemin plus long que C.

<Second Dessin>

Illustration : Code de Gray

Un code de Gray d'ordre n est un arrangement cyclique de 2^n mots binaires de longueur n tels que 2 mots adjacents ne diffèrent qu'en une seule position.

Exemple <dessin cercles concentriques>

Le code de Grey ci-dessus provient d'un cycles Hamiltonien.

<dessin cube et cycle>

Un code de Gray d'ordre (n+1) se construit à partir d'un code de Gray d'ordre n comme suit :

1. On écrit le code de Gray donné d'ordre n en ajoutant à la fin de chaque mot un zero.
2. On le fait suivre par le même code de Gray parcouru dans l'autre sens et en ajoutant à la fin de chaque mot un 1.

1.4 Graphes Eulériens

1.5 Application : le problème du voyageur de commerce (TSP)

2 Arithmétique Modulaire

3 Combinatoire énumérative

4 Théorie des Codes

5 Transformées de Fourier discrètes