# MATH-F-112 - Mathématiques
# Exercices - Module A
# Nicolas Richard

Renato Costa Ribeiro

25 septembre 2015

# Table des matières

# Chapitre 1

# Logique

**Rappel :**

**Logique**

NON/NOT

| A | $\neg A$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Conjonction/ET/AND

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Disjonction/OU/OR

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Implication

| $A \Rightarrow B$ |
|---|
| 1 |
| 1 |
| 0 |
| 1 |

**Démonstration par récurrence**

On veut une propriété $P(m)$ por tout $m \in \mathbb{N}$

· Cas de base :
Montrons $P(0)$

- <u>Cas récursif :</u>
  Supposons que $P(m)$ est vrai pour $m = k$ ($k \in \mathbb{N}$ quelconque) et montrons $P(m)$ pour $m = k + 1$

- <u>Remarque :</u>
  $P(k)$ s'appelle l'hypothèse de récurrence

**1.1**

a. $B \Rightarrow G$

b. $R \Rightarrow S$

c. $(P \vee N) \Rightarrow A$

d. $H \Rightarrow \neg V$

e. $O \Rightarrow P$

f. $(O \Rightarrow N) \wedge (N \Rightarrow O)$

g. $D \Rightarrow C$

h. $\neg C \Rightarrow \neg I$

i. $D \Rightarrow C$

j. $E \Rightarrow N$

k. $(T \wedge N) \Rightarrow I$

l. $I \Rightarrow P$

m. $V \Rightarrow D$

**1.2**

(1). $A \vee B \vee C$

(2). $C \Rightarrow A$

(3). $B \Rightarrow (A \vee C)$

Pour savoir si A est le coupable il faut : $(1) \wedge (2) \wedge (3)$

| | | | $A \vee B \vee C$ | $C \Rightarrow A$ | | $B \Rightarrow (A \vee C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **B** | **C** | **(1)** | **(2)** | $A \vee C$ | **(3)** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Comme nous pouvons le constater, la dernière colonne uprouve que $(1) \wedge (2) \wedge (3) \Leftrightarrow A$. A est donc le coupable.

### 1.3

a. Faux. Faisons une table de vérité pour le cas où $P \Rightarrow L$ et $L \Rightarrow P$. Le résultat n'est pas le même. L'affirmation est donc fausse.

| $P$ | $L$ | $P \Rightarrow L$ | $L \Rightarrow P$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

b. Vrai. $E \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow P$.

c. Faux. $(P \vee T) \not\Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg T)$

| $P$ | $T$ | $\neg T$ | $P \vee T$ | $P \Rightarrow \neg T$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

d. Vrai. $R \Rightarrow H$

e. Vrai. $N \Rightarrow F$

f. Faux. $(D \Rightarrow P) \not\Leftrightarrow (\neg D \Rightarrow \neg P)$

| $D$ | $P$ | $D \Rightarrow P$ | $\neg D \Rightarrow \neg P$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

g. Vrai. $(D \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow \neg D)$

**1.9**

b. Démontrons que $\forall m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ :

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + ... + m^3}_{\sum_{i=1}^{m} i^3} = \frac{m^2(m+1)^2}{4} \quad (1.1)$$

· <u>Cas de base :</u>
Lorsque $m = 1$, on a bien que :

$$\underbrace{1^3 + ... + m^3}_{=1} = \underbrace{\frac{m^2(m+1)^2}{4}}_{=1}$$

· <u>Cas récursif :</u>
Supposon que l'on sait que :

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Montrons alors l'équation (1.1) lorsque $m = k + 1$ (pour un $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$) :

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= 1^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 \\
&= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4) \\
\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

$$ok$$