MATH-F-112 - Mathématiques
Exercices - Module A
Nicolas Richard

Renato Costa Ribeiro

25 septembre 2015

Table des matières

Chapitre 1

Logique

Rappel :

Logique

NON/NOT

A	$\neg A$
0	1
1	0

Conjonction/ET/AND

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjonction/OU/OR

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implication

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Démonstration par récurrence

On veut une propriété $P(m)$ por tout $m \in \mathbb{N}$

· Cas de base :
Montrons $P(0)$

· Cas récursif :
Supposons que $P(m)$ est vrai pour $m = k$ ($k \in \mathbb{N}$ quelconque) et montrons $P(m)$ pour $m = k + 1$

· Remarque :
$P(k)$ s'appelle l'hypothèse de récurrence

1.1

a. $B \Rightarrow G$
b. $R \Rightarrow S$
c. $(P \vee N) \Rightarrow A$
d. $H \Rightarrow \neg V$
e. $O \Rightarrow P$
f. $(O \Rightarrow N) \wedge (N \Rightarrow O)$
g. $D \Rightarrow C$
h. $\neg C \Rightarrow \neg I$
i. $D \Rightarrow C$
j. $E \Rightarrow N$
k. $(T \wedge N) \Rightarrow I$
l. $I \Rightarrow P$
m. $V \Rightarrow D$

1.2

(1). $A \vee B \vee C$

(2). $C \Rightarrow A$

(3). $B \Rightarrow (A \vee C)$

Pour savoir si A est le coupable il faut : $(1) \wedge (2) \wedge (3)$

A	**B**	**C**	$A \vee B \vee C$ **(1)**	$C \Rightarrow A$ **(2)**	$A \vee C$	$B \Rightarrow (A \vee C)$ **(3)**	$(1) \wedge (2) \wedge (3)$	$(1) \wedge (2) \wedge (3) \Leftrightarrow A$
0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Comme nous pouvons le constater, la dernière colonne uprouve que $(1) \wedge (2) \wedge (3) \Leftrightarrow A$. A est donc le coupable.

1.3

a. Faux. Faisons une table de vérité pour le cas où $P \Rightarrow L$ et $L \Rightarrow P$. Le résultat n'est pas le même. L'affirmation est donc fausse.

P	L	$P \Rightarrow L$	$L \Rightarrow P$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

b. Vrai. $E \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow P$.

c. Faux. $(P \vee T) \not\Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg T)$

P	T	$\neg T$	$P \vee T$	$P \Rightarrow \neg T$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

d. Vrai. $R \Rightarrow H$

e. Vrai. $N \Rightarrow F$

f. Faux. $(D \Rightarrow P) \not\Leftrightarrow (\neg D \Rightarrow \neg P)$

D	P	$D \Rightarrow P$	$\neg D \Rightarrow \neg P$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

g. Vrai. $(D \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow \neg D)$

1.9

b. Démontrons que $\forall m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + ... + m^3}_{\sum_{i=1}^{m} i^3} = \frac{m^2(m+1)^2}{4} \tag{1.1}$$

· <u>Cas de base :</u>
Lorsque $m = 1$, on a bien que :

$$\underbrace{1^3 + ... + m^3}_{=1} = \underbrace{\frac{m^2(m+1)^2}{4}}_{=1}$$

- <u>Cas récursif :</u>
  Supposon que l'on sait que :

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Montrons alors l'équation (1.1) lorsque $m = k+1$ (pour un $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) :
On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= 1^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 \\
&= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2+4k+4) \\
\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&ok
\end{aligned}$$