

MATH-F-112 - MATHÉMATIQUES
Exercices - Module A

Renato COSTA RIBEIRO

25 septembre 2015

Table des matières

1	Logique
---	---------

2

Chapitre 1

Logique

Rappel :

Logique

NON/NOT	
A	$\neg A$
0	1
1	0

Conjonction/ET/AND		
A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjonction/OU/OR		
A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implication		
A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Démonstration par récurrence

On veut une propriété $P(m)$ por tout $m \in \mathbb{N}$

· Cas de base :

Montrons $P(0)$

· Cas récursif :

Supposons que $P(m)$ est vrai pour $m = k$ ($k \in \mathbb{N}$ quelconque) et montrons $P(m)$ pour $m = k + 1$

· Remarque :

$P(k)$ s'appelle l'hypothèse de récurrence

1.1

- | | | | |
|-------------------------------|---|---------------------------------|----------------------|
| a. $B \Rightarrow G$ | e. $O \Rightarrow P$ | i. $D \Rightarrow C$ | m. $V \Rightarrow D$ |
| b. $R \Rightarrow S$ | f. $(O \Rightarrow N) \wedge (N \Rightarrow O)$ | j. $E \Rightarrow N$ | |
| c. $(P \vee N) \Rightarrow A$ | g. $D \Rightarrow C$ | k. $(T \wedge N) \Rightarrow I$ | |
| d. $H \Rightarrow \neg V$ | h. $\neg C \Rightarrow \neg I$ | l. $I \Rightarrow P$ | |

1.2

- (1). $A \vee B \vee C$
- (2). $C \Rightarrow A$
- (3). $B \Rightarrow (A \vee C)$

Pour savoir si A est le coupable il faut : $(1) \wedge (2) \wedge (3)$

A	B	C	$A \vee B \vee C$ (1)	$C \Rightarrow A$ (2)	$A \vee C$	$B \Rightarrow (A \vee C)$ (3)	$(1) \wedge (2) \wedge (3)$	$(1) \wedge (2) \wedge (3) \Leftrightarrow A$
0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Comme nous pouvons le constater, la dernière colonne uprouve que $(1) \wedge (2) \wedge (3) \Leftrightarrow A$. A est donc le coupable.

1.3

- a. Faux. Faisons une table de vérité pour le cas où $P \Rightarrow L$ et $L \Rightarrow P$. Le résultat n'est pas le même. L'affirmation est donc fausse.

P	L	$P \Rightarrow L$	$L \Rightarrow P$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

- b. Vrai. $E \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow P$.

- c. Faux. $(P \vee T) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \neg T)$

P	T	$\neg T$	$P \vee T$	$P \Rightarrow \neg T$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

- d. Vrai. $R \Rightarrow H$

- e. Vrai. $N \Rightarrow F$

- f. Faux. $(D \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\neg D \Rightarrow \neg P)$

D	P	$D \Rightarrow P$	$\neg D \Rightarrow \neg P$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

- g. Vrai. $(D \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow \neg D)$

1.9

- b. Démontrons que $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + m^3}_{\sum_{i=1}^m i^3} = \frac{m^2(m+1)^2}{4} \quad (1.1)$$

· Cas de base :

Lorsque $m = 1$, on a bien que :

$$\underbrace{1^3 + \dots + m^3}_{=1} = \frac{m^2(m+1)^2}{\underbrace{4}_{=1}}$$

· Cas récursif :

Supposon que l'on sait que :

$$\sum_{i=1}^k i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Montrons alors l'équation (1.1) lorsque $m = k + 1$ (pour un $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) :

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= 1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 \\ &= \sum_{i=1}^k i^3 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2}{4} (k^2 + 4k + 4) \\ \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

ok