
PRÁCTICA 3: Test de hipótesis.

DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

El software R dispone de un programa específico (**t.test**) para realizar test de hipótesis paramétricos, básicamente para la media, en el supuesto de que nuestros datos proceden de distribuciones normales. Trabajaremos con el fichero "HIPER200.Rdata", sencillo y simple conjunto de datos que utilizamos en la sesión anterior de intervalos de confianza. Concretamente veremos el uso del contraste de una media o de dos medias, donde todos los parámetros (medias y varianzas) son desconocidos.

<u>**Primer supuesto**: Contraste sobre una media en base a una muestra aleatoria.</u>

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$C = \{\lvert T \rvert > t_{n-1,\alpha/2}\}$	$2P(T > \lvert T_o \rvert)$

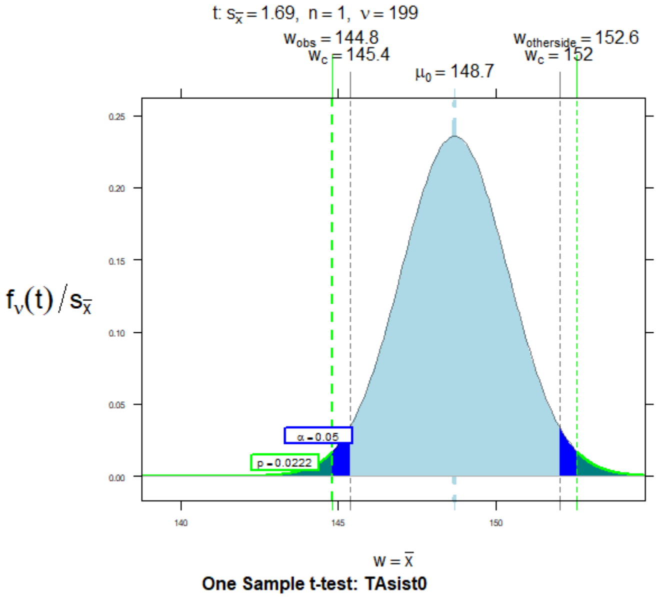
Para la variable TAsist0 (TA sistólica inicial en mm Hg) planteamos el test bilateral que la media poblacional vale 148.7 mmHg, mediante la siguiente línea de comando

t.test(TAsist0,alternative="two.sided", mu=148.7)

Su salida de resultados comprende

```
        One Sample t-test

data:  TAsist0
t = -2.305, df = 199, p-value = 0.0222
alternative hypothesis: true mean is not equal to
148.7
95 percent confidence interval:
 141.4728 148.1372
sample estimates:
mean of x
  144.805
```



que nos muestra el valor del estadístico (-2.305), los grados de libertad (199) de la distribución t-Student y su valor-p (bilateral, como corresponde al contraste planteado). Si tomásemos $\alpha = 0.05$ el contraste es significativo

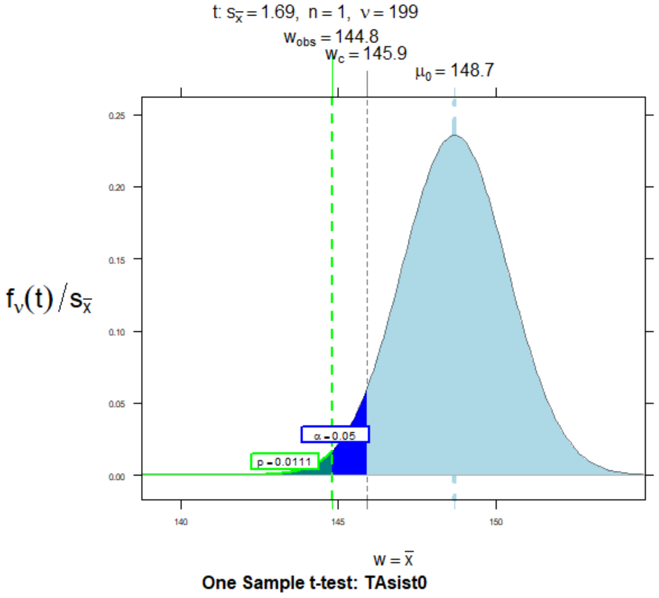
$(p < \alpha)$ y el intervalo de confianza para la media μ con coeficiente de confianza $1-\alpha = 0.95$ es [141.4728,148.1372] que no contiene al valor de la hipótesis nula 148.7.

Si deseamos resolver un test unilateral (izquierda("less") o derecha("greater")) solo debemos elegir la opción adecuada en el menú desplegado. Si deseamos que la hipótesis alternativa sea menor que 148.7 debemos ejecutar

t.test(TAsist0, alternative="less", mu=148.7)

```
        One Sample t-test

data:  TAsist0
t = -2.305, df = 199, p-value = 0.0111
alternative hypothesis: true mean is less than 148.7
95 percent confidence interval:
     -Inf 147.5974
sample estimates:
mean of x
  144.805
```



Ahora, si tomamos $\alpha = 0.05$ el contraste es significativo $(p < \alpha)$ y la cota superior de confianza para la media μ con coeficiente de confianza $1-\alpha = 0.95$ es $(-\infty, 147.5974]$ que no contiene al valor de la hipótesis nula 148.7. Sin embargo, con $\alpha = 0.01$ el contraste es no significativo $(p > \alpha)$ y la cota superior de confianza para la media μ con coeficiente de confianza $1-\alpha = 0.99$ es $(-\infty, 148.7679]$.

<u>**Segundo supuesto**: Contraste sobre la diferencia de dos medias en base a muestras aleatorias independientes.</u>

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$T = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-\Delta_0}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$C = \left\{\lvert T\rvert > t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}\right\}$	$2P(T > \lvert T_o\rvert)$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$T = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-\Delta_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}}$	$C = \left\{\lvert T\rvert > t_{f,\alpha/2}\right\}$	$2P(T > \lvert T_o\rvert)$

Ahora elegimos la variable Peso, y deseamos comparar los valores medios de dicha variable para los grupos de individuos con Actividad Física escasa (1) y con Actividad Física moderada (2). Para ello, seleccionamos los valores de las variables peso y actividad física de individuos con valores "escasa" y "moderada" en Actividad Física mediante el siguiente comando

HIP_em <- subset(HIPER200, subset=(act_fisi=="escasa" | act_fisi=="moderada"), select=c(peso,act_fisi))

y hay que volver a aplicar el comando factor() para dejar sólo los niveles "escasa" y "moderada":

HIP_em$act_fisi<-factor(HIP_em$act_fisi)

Posteriormente, realizamos los contrastes indicados

t.test(HIP_em$peso~HIP_em$act_fisi,alternative="two.sided",var.equal=TRUE)
t.test(HIP_em$peso~HIP_em$act_fisi,alternative="two.sided",var.equal=FALSE)

Los resultados de dichas comparaciones, según sea la hipótesis inicial sobre las varianzas, son:

```
        Two Sample t-test

data:  HIP_em$peso by HIP_em$act_fisi
t = 0.50373, df = 157, p-value = 0.6152
alternative  hypothesis:  true  difference  in
means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -3.178880  5.355351
sample estimates:
  mean in group escasa mean in group moderada
              68.58824               67.50000
```

```
        Welch Two Sample t-test

data:  HIP_em$peso by HIP_em$act_fisi
t = 0.50947, df = 156.9, p-value = 0.6111
alternative hypothesis: true difference in
means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -3.130807  5.307277
sample estimates:
  mean in group escasa mean in group moderada
              68.58824               67.50000
```

Para tomar la decisión adecuada, debemos previamente realizar el contraste de igualdad de varianzas

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$C = \left\{F < F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2} \text{ o } F > F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}\right\}$	$2\min\{p_1, p_2\}$

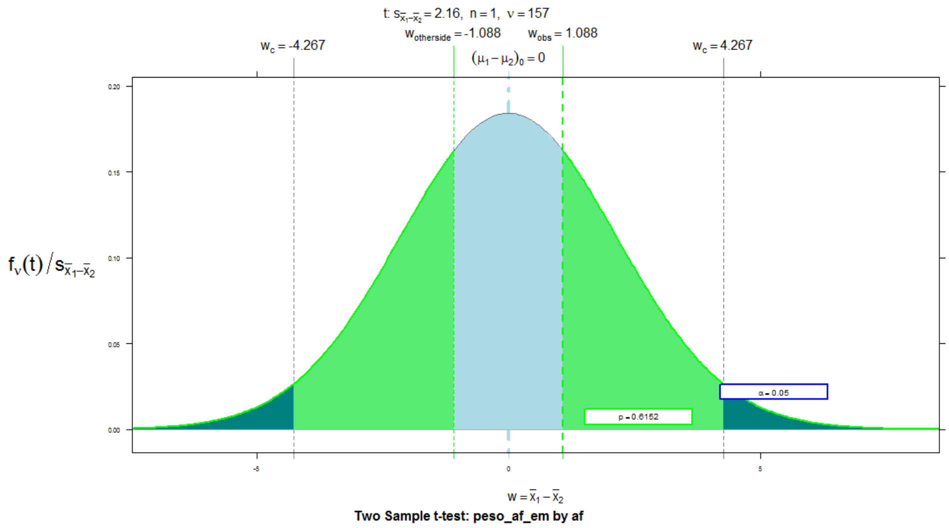
mediante la siguiente línea de código

var.test(HIP_em$peso~HIP_em$act_fisi,alternative="two.sided")

```
        F test to compare two variances

data:  HIP_em$peso by HIP_em$act_fisi
F = 1.3889, num df = 84, denom df = 73, p-value = 0.1518
alternative  hypothesis:  true  ratio  of  variances  is  not
equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.8853392 2.1636189
sample estimates:
ratio of variances
          1.388933
```

Para el test de igualdad de varianza (`1.3889`), su valor-p asociado es (`0.1518`). A un valor usual de $\alpha = 0.05$ concluimos que tenemos un test no significativo $(p > \alpha)$ para las varianzas, y debemos mirar solo el cuadro correspondiente a varianzas iguales. Así, el valor del estadístico es 0.50373, los grados de libertad de la t-Student son 157 y un valor–p de 0.6152. Para este valor alto $(p > \alpha)$, la conclusión es la de un test no significativo.



<u>**Tercer supuesto**: Contraste sobre la diferencia de medias en base a muestras aleatorias dependientes.</u>

Para el caso de muestras emparejadas

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_d = \Delta_0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_d \neq \Delta_0$	$T = \dfrac{\bar{d} - \Delta_0}{s_d / \sqrt{n}}$	$C = \left\{ \left\| T \right\| > t_{n-1,\alpha/2} \right\}$	$2P(T > \|T_o\|)$

deseamos comparar los valores medios de las variables TAD inicial (TAdias0) y TAD final (TAdias1), pero solamente para las personas con más de 25 años. Previamente, debemos seleccionar dichos casos y guardarlos en un nuevo fichero de datos HIPER200_25 mediante los siguientes comandos:

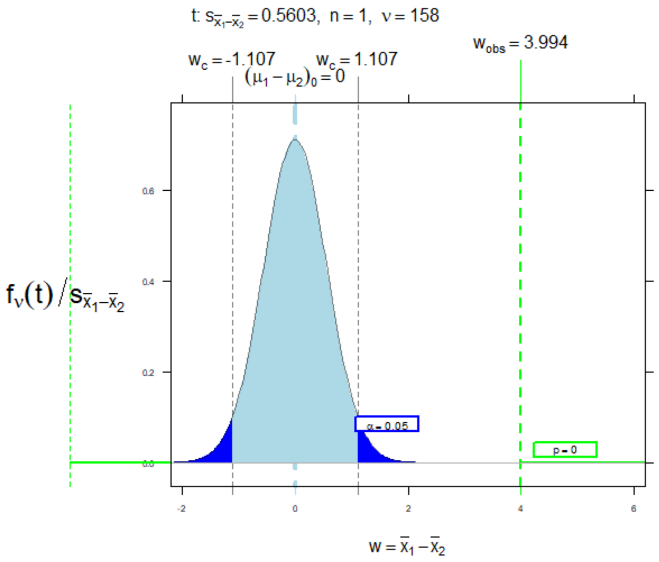
```
HIPER200_25 <- subset(HIPER200, subset=edad > 25, select=c(TAdias1, TAdias0))
t.test(HIPER200_25$TAdias0,HIPER200_25$TAdias1,alternative="two.sided",paired=TRUE)
rm(HIPER200_25)
```

Creamos un nuevo subconjunto de datos HIPER200_25 con los datos necesarios para el contraste, activamos dicho conjunto de datos, ejecutamos el test de este apartado y finalmente eliminamos dicho subconjunto de datos. El resultado del contrate de muestras dependientes es

```
      Paired t-test

data:  HIPER200_25$TAdias0 and HIPER200_25$TAdias1
t = 7.1277, df = 158, p-value = 3.43e-11
alternative hypothesis: true difference in means is
not equal to 0
95 percent confidence interval:
 2.887046 5.100375
sample estimates:
mean of the differences
               3.993711
```

En esta caso el valor del estadístico del contraste vale 7.1277 y los grados de libertad de la T-Student son 158, lo que permite obtener un valor-p bilateral < 0.0000, claramente el test es significativo $(p < \alpha)$.



Paired t-test: HIPER200_25$TAdias0 and HIPER200_25$TAdias1

<u>Cuarto supuesto</u><u>: Contraste sobre media(s) cuando la(s) varianza(s) es(son) conocida(s)</u>

Se deja para el alumno los contrastes de medias en el supuesto de varianza(s) conocida(s) con la librería **BSDA**. El caso más simple de una muestra

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$C = \{\lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}\}$	$2P(Z > \lvert Z_o \rvert)$

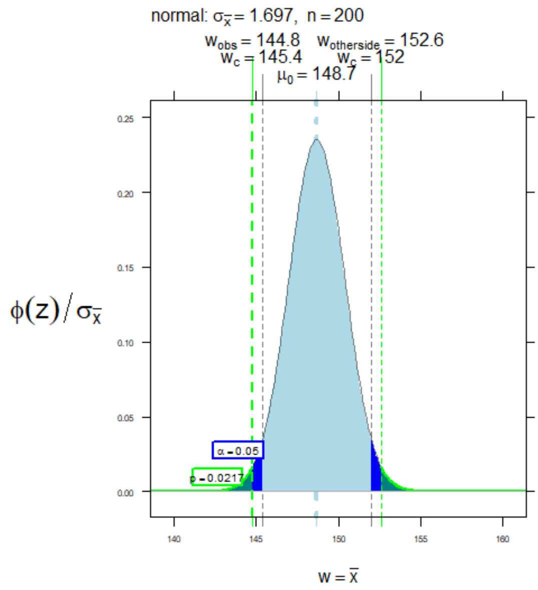
Lo podemos ver con el ejemplo de comparar si la media poblacional de la variable TAsist0 (TA sistólica inicial en mm Hg) vale 148.7 mmHg suponiendo que **sigma=24**. El contraste se realizaría mediante la siguiente línea de comando

library(BSDA)
z.test(TAsist0,alternative="two.sided", mu=148.7, sigma.x=24)

y su salida es

```
      One-sample z-Test

data:  TAsist0
z = -2.2952, p-value = 0.02172
alternative  hypothesis:  true  mean  is  not  equal  to
148.7
95 percent confidence interval:
 141.4788 148.1312
sample estimates:
mean of x
  144.805
```



Quinto supuesto: Contraste sobre proporciones

De nuestro conjunto de datos HIPER200, podemos estar interesados en la proporción de hipertensos. Para el caso de una proporción

$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$C = \{\lvert Z\rvert > z_{\alpha/2}\}$	$2P(Z > \lvert Z_o\rvert)$

Podemos realizar el contraste para ver si dicha proporción alcanza el 20%. Ejecutamos el comando

table(es_hip)

y, como vemos que hay 36 hipertensos entre los 200 individuos del dataset, se haría lo siguiente:

prop.test(36, 200, p=0.20, alternative="two.sided",conf.level = 0.95, correct = FALSE)
binom.test(36, 200, p=0.20, alternative="two.sided",conf.level = 0.95) # test exacto

```
      1-sample proportions test without
continuity correction

data:  36 out of 200, null probability 0.2
X-squared = 0.5, df = 1, p-value = 0.4795
alternative hypothesis: true p is not equal
to 0.2
95 percent confidence interval:
 0.1329463 0.2391148
sample estimates:
   p
0.18
```

```
        Exact binomial test

data:  36 and 200
number of successes = 36, number of trials
= 200,
p-value = 0.5362
alternative hypothesis: true probability
of success is not equal to 0.2
95 percent confidence interval:
 0.1293689 0.2403811
sample estimates:
probability of success
                  0.18
```

Como se puede observar dicha hipótesis parece sostenible, tanto con el test asintótico (Wald) como con el método exacto.

Se puede estar interesado en ver si dicha proporción de hipertensos se mantiene por cada género, mediante el comando

prop.test(x = c(12, 24), n = c(106, 94), correct = FALSE)

$H_0: p_1 - p_2 = \Delta_0$ $H_1: p_1 - p_2 \neq \Delta_0$	$Z = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$	$C = \{\lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}\}$	$2P(Z > \lvert Z_o \rvert)$

cuyos resultados son

```
      2-sample test for equality of proportions
without continuity correction

data:  c(12, 24) out of c(106, 94)
X-squared = 6.8167, df = 1, p-value = 0.009031
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 -0.24892090 -0.03530231
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.1132075 0.2553191
```

Las proporciones observadas se distancian en un 14%, con estos tamaños muestrales nuestra conclusión es de un test significativo para $\alpha = 0.05$.

<u>**Sexto supuesto**: Tamaño muestral necesario para controlar los dos tipos de errores</u>

Para el contraste del cuarto supuesto ($H_0: \mu = \mu_0 = 150$ y $H_1: \mu \neq \mu_0 = 150$), podemos plantear obtener el tamaño muestral necesario para alcanzar una potencia dada $(\beta_\varphi(\mu) = 0.9)$ en un punto de la alternativa (μ_1) a 5 unidades de la hipótesis nula $(\mu_1 - \mu_0 = \pm 5)$, resolviendo el contraste con un nivel de significación adecuado $(\alpha = 0.05)$ y la varianza poblacional conocida $(\sigma = 24)$. La expresión del tamaño muestral es

$$n = \left(\frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)\sigma}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2 = \left[\frac{(1.96 + 1.2816) * 24}{5}\right]^2 = 242.09$$

El siguiente comando, de la librería **pwr**

```
library(pwr)
sigma<-24.0
mu0<-150
mu1<-155
d1<-(mu1-mu0)/sigma
## Tamaño muestral del test para una potencia de 0.9
pwr.norm.test(d=d1,n=NULL,sig.level=0.05,alternative="two.sided", power=0.9)
```

nos reporta lo siguiente:

```
Mean power calculation for normal distribution
with known variance

              d = 0.2083333
              n = 242.091
      sig.level = 0.05
          power = 0.9
    alternative = two.sided
```

Este cálculo también se puede realizar en la librería **TrialSize**, con el comando

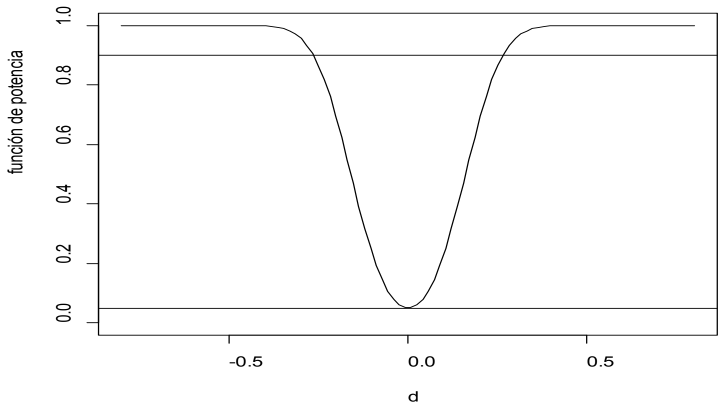
```
OneSampleMean.Equality(alpha=0.05, beta=0.1, sigma=20, margin=5)
```

La función de potencia para este test bilateral, con $d = (\mu_1 - \mu_0)/\sigma$, es

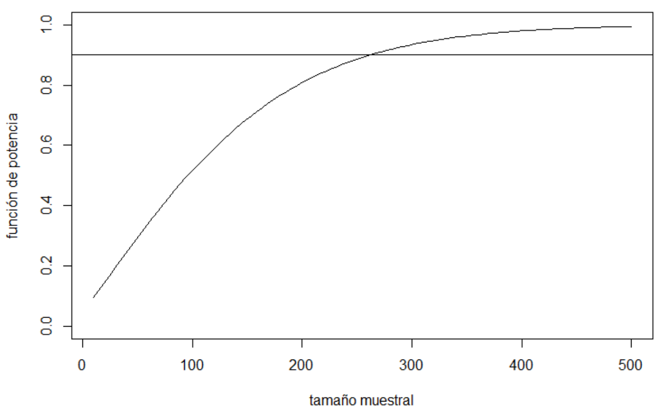
$$1 - \beta_\varphi(\mu_1) = P_{\mu_1}\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right)$$

$$\beta_\varphi(\mu_1) = P_{\mu_1}\left(\frac{\left|\bar{X} - \mu_1\right|}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right).$$

La gráfica resultante, en función de $d = (\mu_1 - \mu_0)/\sigma$ es



También es posible realizar una gráfica de la función de potencia frente al tamaño muestral para nuestro caso ($d = 5/24$)



EJERCICIOS:

1.- Para el fichero de datos "HIPER200.RData", se pide realizar los contrastes de hipótesis correspondientes para responder a las siguientes cuestiones:
a) ¿La tensión arterial sistólica inicial de los varones es menor que la tensión arterial inicial de las mujeres?
b) ¿La tensión arterial sistólica final para las personas que toman poca sal en las comidas es superior a la tensión arterial sistólica final para las personas restantes?
c) ¿El peso medio de las personas con escasa actividad física es superior al peso medio del resto de las personas?
d) ¿La proporción de fumadores es superior a la proporción de fumadoras?

2.- Tomar los primeros 30 valores de la variable Talla del fichero HIPER200.RData, y supuesto que los datos son normales con varianza desconocida, realizar el contraste bilateral $H_0 : \mu_0 = 160$. Calcular la potencia observada que se tiene para detectar una diferencia de 5 unidades respecto de $\mu_0 = 160$ o para el caso unilateral a la derecha obtener la potencia observada en un valor a 5 unidades de μ_0, en ambos casos se puede representar la función de potencia frente a los valores de la media; y la función de potencia frente al tamaño de la muestra.

3.- Con los datos de HIPER200.RData, realizar un estudio detallado del test, potencia observada y tamaño muestral, para realizar el contraste de que la proporción de varones que toman café es del 60%.