ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT MÁY TÍNH

BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN
MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC (CO2011)

DYNAMICS OF LOVE

Giảng viên hướng dẫn:	Nguyễn An Khương
	Trần Hồng Tài
Sinh viên thực hiện:	Phạm Duy Quang - 2011899.
	Nguyễn Thành Quí - 2014291.
	Quách Minh Đức - 2010231.
	Nguyễn Khôi Nguyên - 2013923.
Nhóm:	73

Tp. Hồ Chí Minh, Tháng 12/2022

Mục lục

Danh sách thành viên và phân chia công việc

STT	Họ và tên	Mã số sinh viên	Nhiệm vụ	Đánh giá
1	Phạm Duy Quang	2011899	Exercise 3	100%
2	Nguyễn Thành Quí	2014291	Exercise 2 Exercise 5	100%
3	Quách Minh Đức	2010231	Exercise 4	100%
4	Nguyễn Khôi Nguyên	2013923	Exercise 1 Exercise 5	100%

Link dẫn đến Github về Bài tập lớn của nhóm 73: https://github.com/ULTIMATE-Mystery/Mathematical-Modeling-Assignment-HCMUT-Semester-221.git.

1 Tình yêu và hệ phương trình vi phân thường (ODEs)

1.1 Giới thiệu

Galileo Galilei từng nói rằng "Toán học là ngôn ngữ mà Chúa đã tạo ra để viết nên vũ trụ". Tình yêu cũng không là ngoại lệ, nó có thể được xây dựng từ toán học. Để đơn giản, ta sẽ nghiên cứu tình yêu *Romeo* dành cho *Juliet* cũng như tình yêu của *Juliet* đối với *Romeo*.

Đặt tình yêu của *Romeo* dành cho *Juliet* là *R(t)* và ngược lại tình yêu của *Juliet* đối với *Romeo* là *J(t)*.Gọi *R'(t)* là đạo hàm của *R(t)*, biểu diễn sự biến thiên của tình yêu của *Romeo* giành cho *Juliet* và chỉ phụ thuộc vào tình yêu của chàng dành cho nàng ($R(t)$) và tình yêu của nàng đối với chàng ($J(t)$). Tương tự, ta có *J'(t)* là đạo hàm của *J(t)*. Tình yêu giữa họ có thể được mô tả bởi Hệ động lực (DS)

$$\begin{cases} R'(t) = aR(t) + bJ(t) \\ J'(t) = cR(t) + dJ(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \tag{1}$$

Trong đó:

- R_0 và $J_0 \in \mathbb{R}$: biểu thị cho tình yêu của *Romeo* và *Juliet* ở thời điểm bắt đầu.
- $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: các hệ số biểu diễn mức độ tương tác giữa 1 người dành cho người còn lại.

1.2 Giải hệ phương trình vi phân thường

Nếu kí hiệu X, X' là vector cột và A là ma trận:

$$\text{X} = \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix} \qquad \text{X'} = \begin{bmatrix} R' \\ J' \end{bmatrix} \qquad \text{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

thì hệ (1) có thể biểu diễn dưới dạng :

$$X' = AX \tag{2}$$

Giả sử nghiệm của phương trình (2) có dạng:

$$X(t) = ve^{\lambda t} \tag{3}$$

có đồ thị là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ theo hướng v. Lấy đạo hàm 2 vế, ta được:

$$X'(t) = \lambda ve^{\lambda t} \tag{4}$$

Từ hệ (2), (3) và (4), ta có:

$$X'(t) = \lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t}$$

Vậy:

$$Av = \lambda v$$

Qua đó cho thấy rằng λ là một trị riêng của A và v là một vector riêng tương ứng.

Khi đó, đa thức đặc trưng p(λ) của ma trận A là:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = |(a-\lambda)(d-\lambda) - bc| = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

Vậy p(λ) là một đa thức bậc 2, biến là λ. Như ta đã biết, khi $p(\lambda) = 0$ có 3 trường hợp: 2 nghiệm thực phân biệt ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), nghiệm kép ($\lambda_1 = \lambda_2$) và 2 nghiệm phức liên hợp.

Trường hợp 1: Hai nghiệm thực phân biệt

$p(\lambda) = 0$ có 2 nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2.

Giả sử $v_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ và $v_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ là 2 vector riêng lần lượt tương ứng với λ_1 và λ_2.

Khi đó, nghiệm tổng quát là:

$$X(t) = \Phi(t)c = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

với $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \beta_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \beta_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$ và $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

Trong đó $\Phi(t)$ được gọi là **ma trận nghiệm cơ bản** (**Ma trận nghiệm cơ bản** là ma trận vuông mà những cột của nó là những nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (2)).

Trường hợp 2: Nghiệm kép

$p(\lambda) = 0$ có nghiệm kép λ_0.

Trong trường hợp này, $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$ với λ_0 là nghiệm của $p(\lambda)$ với bội số là 2.

(1) λ_0 có 2 vector riêng độc lập tuyến tính:

Giả sử $v_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ và $v_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ là 2 vector riêng độc lập tuyến tính đó.

Khi đó, nghiệm tổng quát là:

$$X(t) = \Phi(t)c = (c_1 v_1 + c_2 v_2) e^{\lambda_0 t}$$

với ma trận nghiệm cơ bản $\Phi(t) = e^{\lambda_0 t} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$ và $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

(2) λ_0 có duy nhất vector riêng liên hợp:

Giả sử $v_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ là vector liên hợp và $v_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ là nghiệm của phương trình:

$$(\lambda_0 I - A) v_2 = v_1$$

Khi đó, nghiệm tổng quát là:

$$X(t) = \Phi(t)c = (c_1 v_1 + c_2 (t v_1 + v_2)) e^{\lambda_0 t}$$

với ma trận nghiệm cơ bản: $\Phi(t) = e^{\lambda_0 t}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_1 t + \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_1 t + \beta_2\end{bmatrix}$ và $c = \begin{bmatrix}c_1 \\ c_2\end{bmatrix}$

Trường hợp 3: Hai nghiệm phức liên hợp

$p(\lambda) = 0$ có 2 nghiệm phức liên hợp $\lambda_1 = a + bi$ và $\lambda_2 = a - bi$.

Giả sử $v = \begin{bmatrix}\alpha_1 + i\alpha_2 \\ \beta_1 + i\beta_2\end{bmatrix}$ là vector riêng phức liên hợp tương ứng với $a + bi$.

Khi đó, nghiệm tổng quát là $v_1 = \begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \beta_1\end{bmatrix}$ và $v_2 = \begin{bmatrix}\alpha_2 \\ \beta_2\end{bmatrix}$

$$X(t) = [c_1(v_1 cos(bt) - v_2 sin(bt)) + c_2(v_1 cos(bt) + v_2 sin(bt)]e^{at}$$

với ma trận nghiệm cơ bản: $\Phi(t) = e^{at}\begin{bmatrix}\alpha_1\text{cos(bt) - }\alpha_2\text{sin(bt)} & \alpha_2\text{cos(bt) + }\alpha_1\text{sin(bt)} \\ \beta_1\text{cos(bt) - }\beta_2\text{sin(bt)} & \beta_2\text{cos(bt) + }\beta_1\text{sin(bt)}\end{bmatrix}$ và $c = \begin{bmatrix}c_1 \\ c_2\end{bmatrix}$

Tổng quát

Trong cả 3 trường hợp trên, với $\Phi(t)$ là ma trận nghiệm cơ bản, nghiệm tổng quát được cho bởi $X(t) = \Phi(t)c$ với c $= \begin{bmatrix}c_1 \\ c_2\end{bmatrix}$ và nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $X(0) = X_0$ có dạng:

$$X(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}X_0$$

1.3 Các trường hợp của trị riêng

Các trường hợp của trị riêng được liệt kê trong bảng sau:

Re λ_1	**Re λ_2**	**|Im λ_1|**	**|Im λ_2|**	**Type**	**Eigenvalue**
+	-	0	0	Saddle	Real
+	+	0	0	Nodal Source	Real
-	-	0	0	Nodal Sink	Real
0	0	+	+	Center	Complex
+	+	+	+	Spiral Source	Complex
-	-	+	+	Spiral Sink	Complex

1.4 Áp dụng cho tình yêu giữa Romeo và Juliet

Các phong cách lãng mạn của tình yêu Romeo dành cho Juliet được xác định trong bảng sau

a	**b**	**Style**
+	+	Người nhiệt huyết
+	-	Người ái kỷ
-	+	Người cẩn trọng
-	-	Người cô độc

Để nghiên cứu sự thay đổi tình yêu của Romeo dành cho Juliet, 2 hệ số a, b sẽ thay đổi trong từng trường hợp và 2 hệ số c, d sẽ được giữ nguyên. Trong bài này, nhóm em chọn $c = 2, d = 3$, nghĩa là Juliet là người nhiệt huyết (xem 1.4.1) trong tình yêu.

1.4.1 Người nhiệt huyết (Eager Beaver)

Định nghĩa

Người nhiệt huyết trong tình yêu (Eager Beaver) $(a, b > 0)$ là người được khích lệ bởi cảm giác của chính chàng/nàng và bởi tình yêu từ người còn lại dành cho anh/cô ấy.

Trong phần này, Romeo là một người nhiệt huyết trong tình yêu với con tim cháy bỏng, cảm xúc của anh dành cho Juliet sẽ càng tăng lên bởi chính cảm xúc của anh dành cho cô và bởi cả tình yêu của Juliet dành cho anh (Yêu càng yêu hơn, ghét càng ghét hơn).

VÍ DỤ 1 Ta chọn các giá trị a, b, R_0 và J_0 như sau:

$$a = 4, b = 6, R_0 = 4, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R'(t) = 4R(t) + 6J(t) \\ J'(t) = 2R(t) + 3J(t) \\ R(0) = 4, J(0) = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Ta thu được phương trình vi phân từ hệ trên: $\begin{bmatrix} R'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda \tag{6}$$

Giải đa thức đặc trưng (6), ta thu được 2 trị riêng $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = 7$, đồng thời 2 vector riêng tương ứng với λ_1 và λ_2 là: $v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ và $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ và $\Phi(t) = \begin{bmatrix} -3e^{0t} & 2e^{7t} \\ 2e^{0t} & e^{7t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2e^{7t} \\ 2 & e^{7t} \end{bmatrix}$

Giải hệ $X(0) = \Phi(0)c$ ta tìm được $c = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{11}{7} \end{bmatrix}$

Vậy nghiệm của IVP (5) là:

$$\begin{cases} R(t) = \frac{22}{7}e^{7t} + \frac{6}{7} \\ J(t) = \frac{11}{7}e^{7t} - \frac{4}{7} \end{cases}$$

VÍ DỤ 2 Với các giá trị $a = 4, b = 3, R_0 = 1$ và $J_0 = 3$ ta thu được IVP như sau:

$$\begin{cases} R'(t) = 4R(t) + 3J(t) \\ J'(t) = 2R(t) + 3J(t) \\ R(0) = 1, J(0) = 3 \end{cases} \tag{7}$$

Giải IVP (7), ta tìm được $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tương ứng với $\lambda_1 = 1$ và $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ tương ứng với $\lambda_2 = 6$.

Ta có ma trận nghiệm cơ bản: $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & 3e^{6t} \\ -e^t & 2e^{6t} \end{bmatrix}$ và $c = \begin{bmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

Nghiệm của IVP (7) là:

$$\begin{cases} R(t) = \frac{-7}{5}e^t + \frac{12}{5}e^{6t} \\ J(t) = \frac{7}{5}e^t + \frac{8}{5}e^{6t} \end{cases}$$

1.4.2 Người ái kỷ (Narcissistic Nerd)

Định nghĩa

Người ái kỷ trong tình yêu (Narcissistic Nerd) ($a > 0, b < 0$) là người được khích lệ bởi cảm giác của chính anh/cô ấy và phản ứng ngược lại với tình yêu từ người còn lại dành cho anh/cô ấy.

Trong phần này, Romeo là một người ái kỷ, anh. Tình cảm của anh ấy dành cho Juliet sẽ tăng khi chính anh ta cảm thấy được. Tuy nhiên anh ta sẽ đề phòng và phản ứng ngược với tình yêu của Juliet dành cho anh ta.

VÍ DỤ 3 Ta chọn các giá trị a, b, R_0 và J_0 như sau:

$$a = 3, b = -1, R_0 = 9, J_0 = 5$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R'(t) = 3R(t) - J(t) \\ J'(t) = 2R(t) + 3J(t) \\ R(0) = 9, J(0) = 5 \end{cases} \tag{8}$$

Ta thu được phương trình vi phân từ hệ trên: $\begin{bmatrix} R'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 11 \tag{9}$$

Giải đa thức đặc trưng (9), ta thu được 2 trị riêng $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}i$ và $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2}i$, và vector riêng liên hợp $v_1 = \begin{bmatrix} i \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ tương ứng với λ_1.

Ví dụ này tương ứng với **Trường hợp 3** với $a = 3, b = \sqrt{2}, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_1 = \sqrt{2}$ và $\beta_2 = 0$ nên ta có ma trận nghiệm cơ bản:

$$\Phi(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} -sin(\sqrt{2}t) & cos(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}cos(\sqrt{2}t) & \sqrt{2}sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix}$$

Giải hệ $X(0) = \Phi(0)c$ ta tìm được $c = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{5}}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$ Vậy nghiệm của IVP (8) là:

$$\begin{cases} R(t) = [\frac{5\sqrt{5}}{2} sin(\sqrt{2}t) + 9cos(\sqrt{2}t)]e^{3t} \\ J(t) = [5cos(\sqrt{2}t) + 9\sqrt{2}sin(\sqrt{2}t)]e^{3t} \end{cases}$$

VÍ DỤ 4 Với các giá trị $a = 9, b = -2, R_0 = 2$ và $J_0 = 7$ ta thu được IVP như sau:

$$\begin{cases} R'(t) = 9R(t) - 2J(t) \\ J'(t) = 2R(t) + 3J(t) \\ R(0) = 2, J(0) = 7 \end{cases} \tag{10}$$

Giải IVP (10), ta tìm được $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$ tương ứng với $\lambda_1 = 6 + \sqrt{5}$ và $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 + \sqrt{5} \end{bmatrix}$ tương ứng với $\lambda_2 = 6 - \sqrt{5}$.

Ta có ma trận nghiệm cơ bản: $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{(6+\sqrt{5})t} & 2e^{(6-\sqrt{5})t} \\ (3-\sqrt{5})e^{(6+\sqrt{5})t} & (3+\sqrt{5})e^{(6-\sqrt{5})t} \end{bmatrix}$ và $c = \begin{bmatrix} \frac{5-4\sqrt{5}}{10} \\ \frac{5+4\sqrt{5}}{10} \end{bmatrix}$

Nghiệm của IVP (10) là:

$$\begin{cases} R(t) = \frac{5-4\sqrt{5}}{5} e^{(6+\sqrt{5})t} + \frac{5+4\sqrt{5}}{5} e^{(6-\sqrt{5})t} \\ J(t) = \frac{35-17\sqrt{5}}{10} e^{(6+\sqrt{5})t} + \frac{35+17\sqrt{5}}{10} e^{(6-\sqrt{5})t} \end{cases}$$

1.4.3 Người cẩn trọng (Cautious Lover)

Định nghĩa

Người cẩn trọng trong tình yêu (Cautious Lover) $(a < 0, b > 0)$ là người thu lại cảm giác của chính anh/cô ấy nhưng lại được thúc đẩy bằng tình yêu từ người còn lại dành cho anh/cô ấy.

VÍ DỤ 5 Ta chọn các giá trị a, b, R_0 và J_0 như sau:

$$a = -3, b = 1, R_0 = -4, J_0 = 2$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R'(t) = -3R(t) + J(t) \\ J'(t) = 2R(t) + 3J(t) \\ R(0) = -4, J(0) = 2 \end{cases} \tag{11}$$

Ta thu được phương trình vi phân từ hệ trên: $\begin{bmatrix} R'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7 \tag{12}$$

Giải đa thức đặc trưng (12), ta thu được 2 trị riêng $\lambda_1 = \sqrt{7}$ và $\lambda_2 = -\sqrt{7}$, và 2 vector riêng tương ứng với λ_1 và λ_2 là $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3+\sqrt{7} \end{bmatrix}$ và $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3-\sqrt{7} \end{bmatrix}$.

Ta có ma trận nghiệm cơ bản:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{7}t} & e^{-\sqrt{7}t} \\ (3+\sqrt{7})e^{\sqrt{7}t} & (3-\sqrt{7})e^{-\sqrt{7}t} \end{bmatrix}$$

Giải hệ $X(0) = \Phi(0)c$ ta tìm được $c = \begin{bmatrix} \sqrt{7}-2 \\ -\sqrt{7}-2 \end{bmatrix}$ Vậy nghiệm của IVP (11) là:

$$\begin{cases} R(t) = (\sqrt{7}-2)e^{\sqrt{7}t} + (-\sqrt{7}-2)e^{-\sqrt{7}t} \\ J(t) = (\sqrt{7}+1)e^{\sqrt{7}t} + (-13-5\sqrt{7})e^{-\sqrt{7}t} \end{cases}$$

VÍ DỤ 6 Với các giá trị $a = -1, b = 6, R_0 = 2$ và $J_0 = 7$ ta thu được IVP như sau:

$$\begin{cases} R'(t) = -R(t) + 6J(t) \\ J'(t) = 2R(t) + 3J(t) \\ R(0) = -5, J(0) = 6 \end{cases} \tag{13}$$

Giải IVP (13), ta tìm được $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tương ứng với $\lambda_1 = 5$ và $v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ tương ứng với $\lambda_2 = -3$.

Ta có ma trận nghiệm cơ bản $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ -3e^{5t} & e^{-3t} \end{bmatrix}$ và c = $\begin{bmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix}$

Nghiệm của IVP (13) là:

$$\begin{cases} R(t) = \frac{13}{4}e^{5t} + \frac{11}{4}e^{-3t} \\ J(t) = \frac{-39}{4}e^{5t} + \frac{11}{4}e^{-3t} \end{cases}$$

1.4.4 Người cô độc (Hermit)

Định nghĩa

Người cô độc trong tình yêu (Hermit) ($a < 0, b < 0$) là người bị chính cảm giác của anh/cô ấy và tình cảm từ người còn lại dành cho anh/cô ấy làm cho anh/cô ấy nản lòng.

Romeo là một người "cẩn thận", anh ta luôn sợ rằng tình yêu của mình sẽ đem lại phiền phúc cho người khác nên anh ta luôn kìm nén bản thân lại.

VÍ DỤ 7 Ta chọn các giá trị a, b, R_0 và J_0 như sau:

$$a = -5, b = -8, R_0 = 7, J_0 = -2$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R'(t) = -5R(t) - 8J(t) \\ J'(t) = 2R(t) + 3J(t) \\ R(0) = 7, J(0) = -2 \end{cases} \tag{14}$$

Ta thu được phương trình vi phân từ hệ trên: $\begin{bmatrix} R'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{15}$$

Giải đa thức đặc trưng (15), ta thu được trị riêng $\lambda_0 = -1$ tương ứng với vector riêng $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Giải phương trình $(\lambda_0 I - A)v_2 = v_1$ ta tìm được vector riêng $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ta có ma trận nghiệm cơ bản:

$$\Phi(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 4 & 4t + 1 \\ -2 & -2t \end{bmatrix}$$

Giải hệ $X(0) = \Phi(0)c$ ta tìm được $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Vậy nghiệm của IVP (14) là:

$$\begin{cases} R(t) = e^{-t}(12t + 7) \\ J(t) = -e^{-t}(6t + 2) \end{cases}$$

VÍ DỤ 8 Với các giá trị $a = -1, b = -4, R_0 = 4$ và $J_0 = 5$ ta thu được IVP như sau:

$$\begin{cases} R'(t) = -R(t) - 4J(t) \\ J'(t) = 2R(t) + 3J(t) \\ R(0) = 4, J(0) = 5 \end{cases} \tag{16}$$

Giải IVP (16), ta tìm được $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 - i \end{bmatrix}$ tương ứng với $\lambda_1 = 1 + 2i$.

Ta có ma trận nghiệm cơ bản: $\Phi(t) = e^t \begin{bmatrix} 2cos(2t) & 2sin(2t) \\ -cos(2t) + sin(2t) & -cos(2t) - sin(2t) \end{bmatrix}$ và $c = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$

Nghiệm của IVP (16) là:

$$\begin{cases} R(t) = 2e^t[2cos(2t) - 7sin(2t)] \\ J(t) = e^t[5cos(2t) + 9sin(2t)] \end{cases}$$

2 Một số ví dụ về tình yêu giữa Romeo và Juliet

2.1 Tình yêu giữa hai Eager Beaver

Ta chọn a, b, c và d như sau:

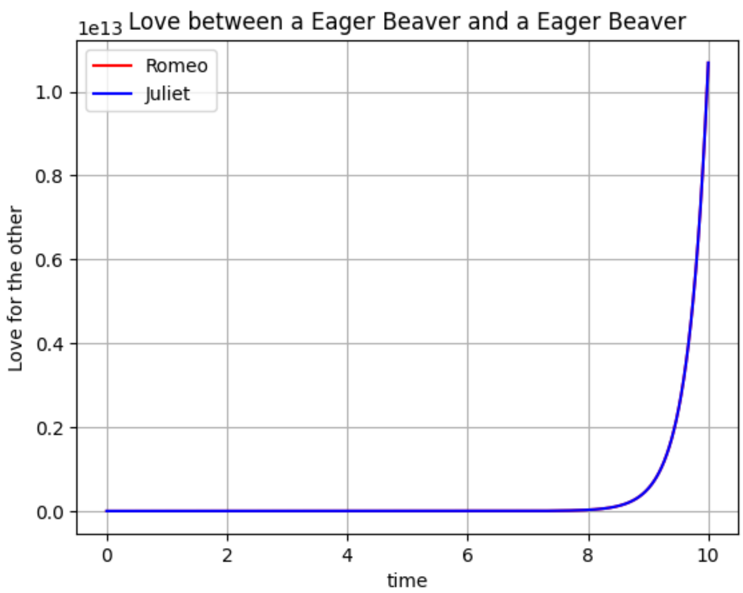
$$a = d = 1; b = c = 2, R_0 = 1, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

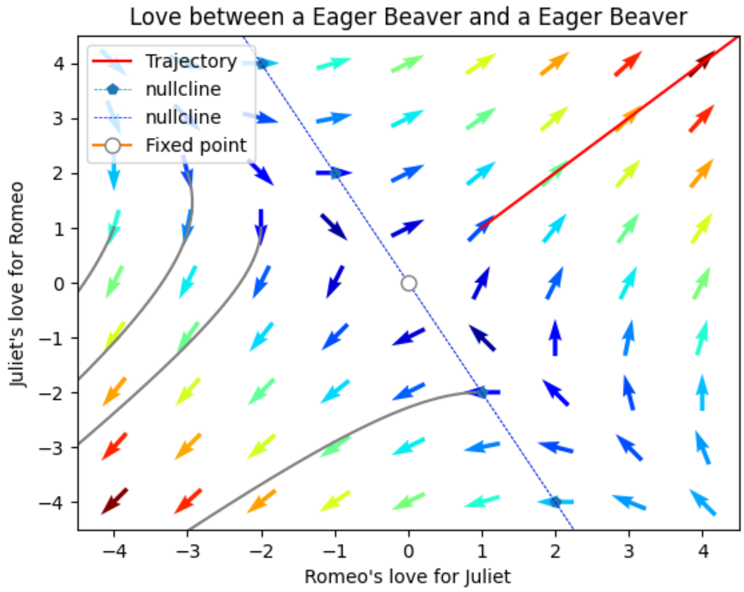
$$\begin{cases} R' = R(t) + 2J(t) \\ J' = 2R(t) + J(t) \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} R = e^{3t} \\ J = e^{3t} \end{cases} \tag{18}$$

Đồ thị: Phase portrait:



Hình 1: Eager - Eager



Hình 2: Eager - Eager

Với a, b, c, d như trên nhưng

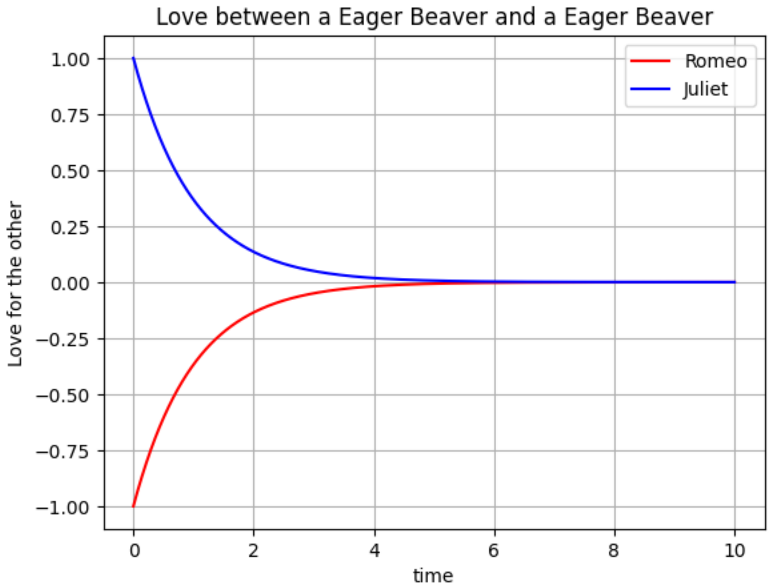
$$R_0 = -1, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) + 2J(t) \\ J' = 2R(t) + J(t) \\ R(0) = -1, J(0) = 1 \end{cases} \tag{19}$$

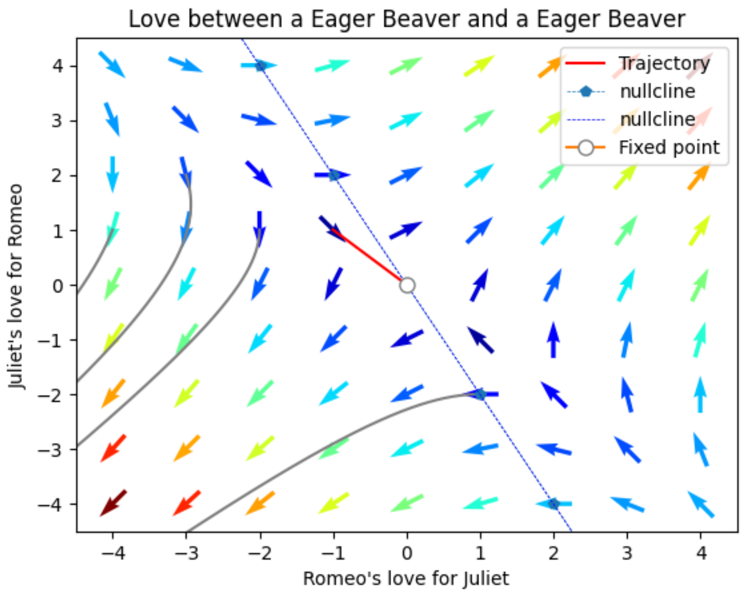
$$\begin{cases} R = -e^{-t} \\ J = e^{-t} \end{cases} \tag{20}$$

Đồ thị:



Hình 3: Eager - Eager

Phase portrait: **Nhận xét:**



Hình 4: Eager - Eager

- Trường hợp 1: Diễn biến tình yêu giữa Romeo và Juliet như nhau, giai đoạn đầu dường như không có tình cảm, sau đó tăng tiến dần và tăng nhanh về vô cùng khi thời gian tiến đến vô cùng.
- Trường hợp 2: Romeo giai đoạn đầu từ ghét trở nên không còn ghét Juliet, Juliet từ yêu trở thành không còn yêu Romeo, về sau 2 người không còn tình cảm nữa.

2.2 Tình yêu giữa Eager Beaver và Narcissistic Nerd

Ta chọn a, b, c và d như sau:

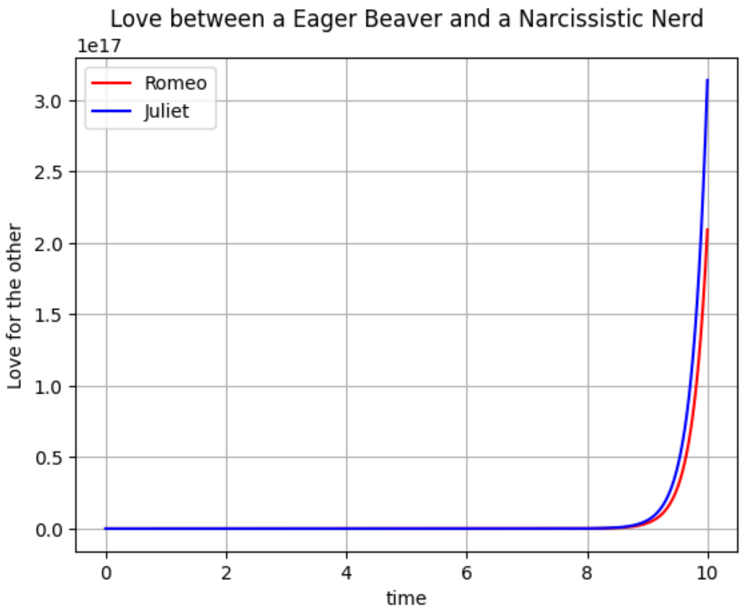
$$a = 1, b = 2, c = 9, d = -2, R_0 = 1, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) + 2J(t) \\ J' = 9R(t) - 2J(t) \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases} \tag{21}$$

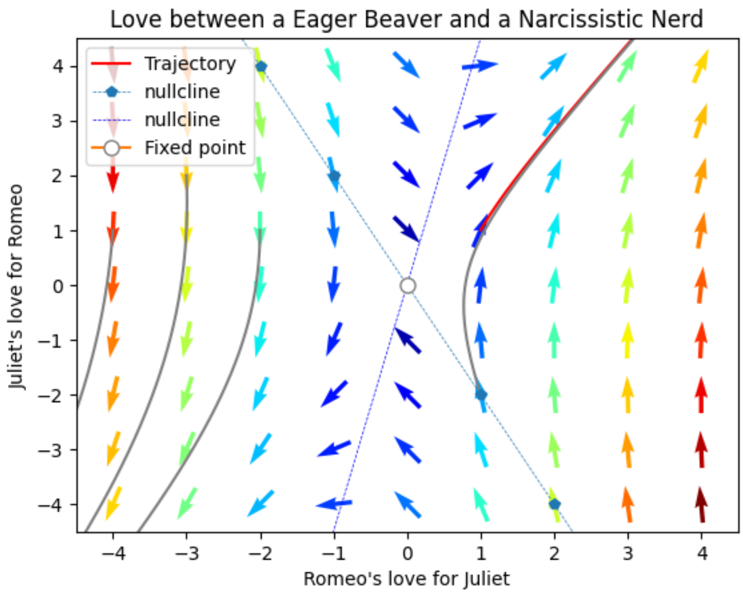
$$\begin{cases} R = \dfrac{8}{9}e^{4t} + \dfrac{1}{9}e^{-5t} \\ J = \dfrac{4}{3}e^{4t} - \dfrac{1}{3}e^{-5t} \end{cases} \tag{22}$$

Đồ thị:



Hình 5: Eager - Narcissistic

Phase portrait:



Hình 6: Eager - Narcissistic

Với a, b, c, d như trên nhưng

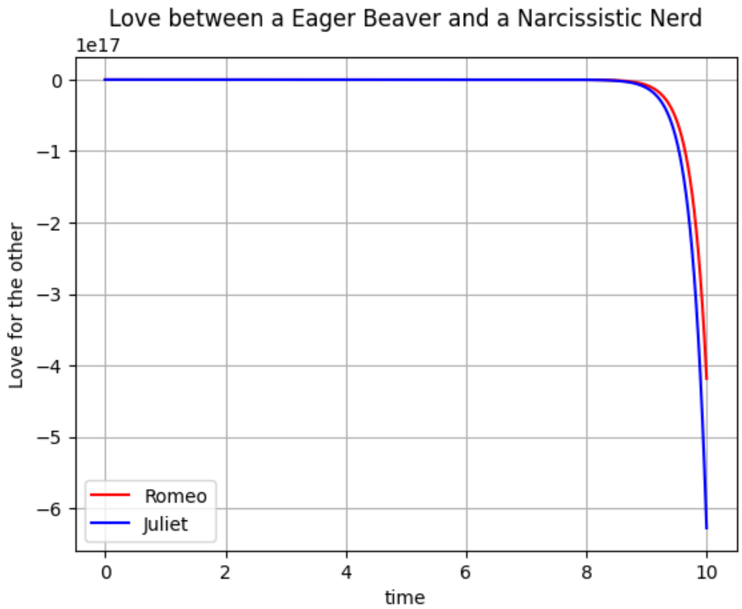
$$R_0 = -3, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) + 2J(t) \\ J' = 9R(t) - 2J(t) \\ R(0) = -3, J(0) = 1 \end{cases} \tag{23}$$

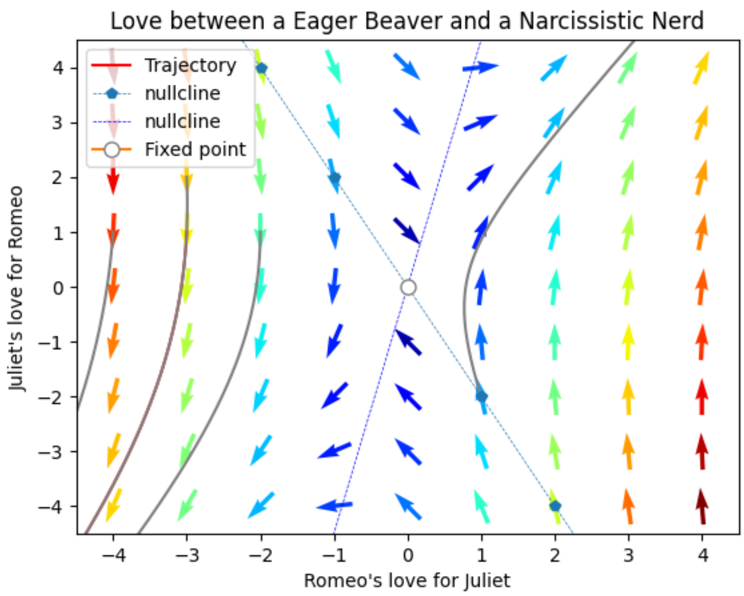
$$\begin{cases} R = -\dfrac{16}{9}e^{4t} - \dfrac{11}{9}e^{-5t} \\ J = -\dfrac{8}{3}e^{4t} + \dfrac{11}{3}e^{-5t} \end{cases} \tag{24}$$

Đồ thị:



Hình 7: Eager - Narcissistic

Phase portrait:



Hình 8: Eager - Narcissistic

Nhận xét:

- Trường hợp 1: Diễn biến tình yêu giữa Romeo và Juliet gần như nhau, giai đoạn đầu dường như không có tình cảm, sau đó tăng tiến dần và tăng nhanh về vô cùng khi thời gian tiến đến vô cùng, trong đó tình cảm của Juliet phát triển nhanh hơn Romeo.
- Trường hợp 2: Diễn biến tình yêu giữa Romeo và Juliet gần như nhau, giai đoạn đầu dường như

không có tình cảm, sau đó giảm dần và giảm nhanh về vô cùng khi thời gian tiến đến vô cùng, trong đó tình cảm của Juliet phát triển nhanh hơn Romeo.

- Nghiệm và dáng điệu đồ thị của 2 trường hợp này gần giống như trường hợp 1 giữa 2 Eager Beaver nêu trên.

2.3 Tình yêu giữa Eager Beaver và Cautious Lover

Ta chọn a, b, c và d như sau:

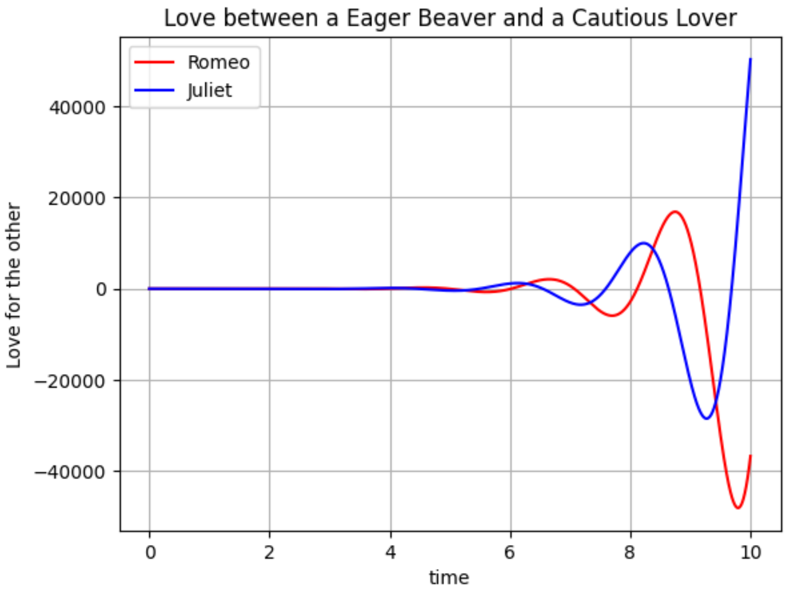
$$a = 1, b = 3, c = -3, d = 1, R_0 = 2, J_0 = 2$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) + 3J(t) \\ J' = -3R(t) + (t) \\ R(0) = 2, J(0) = 2 \end{cases} \tag{25}$$

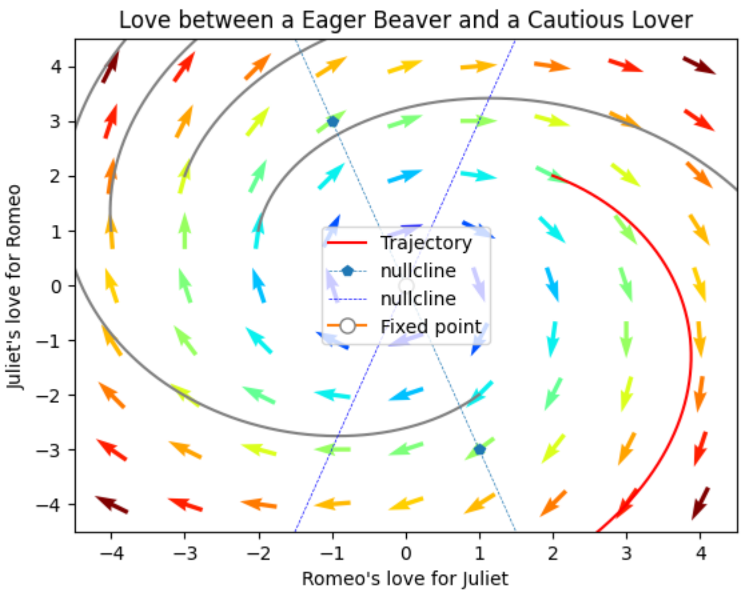
$$\begin{cases} R = 2e^t \sin 3t + 2e^t \cos 3t \\ J = -2e^t \sin 3t + 2e^t \cos 3t \end{cases} \tag{26}$$

Đồ thị:



Hình 9: Eager - Cautious Lover

Phase portrait:



Hình 10: Eager - Cautious Lover

Với a, b, c, d như trên nhưng

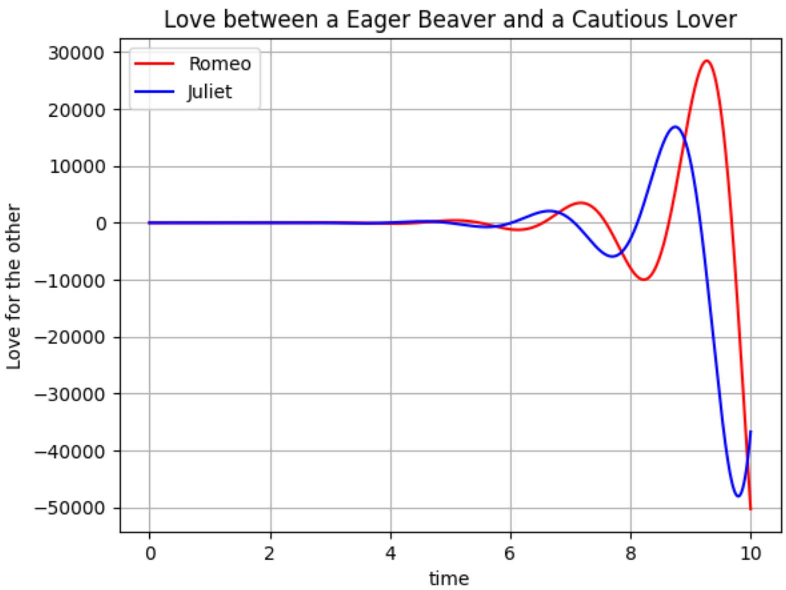
$$R_0 = -2, J_0 = 2$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) + 3J(t) \\ J' = -3R(t) + J(t) \\ R(0) = -2, J(0) = 2 \end{cases} \tag{27}$$

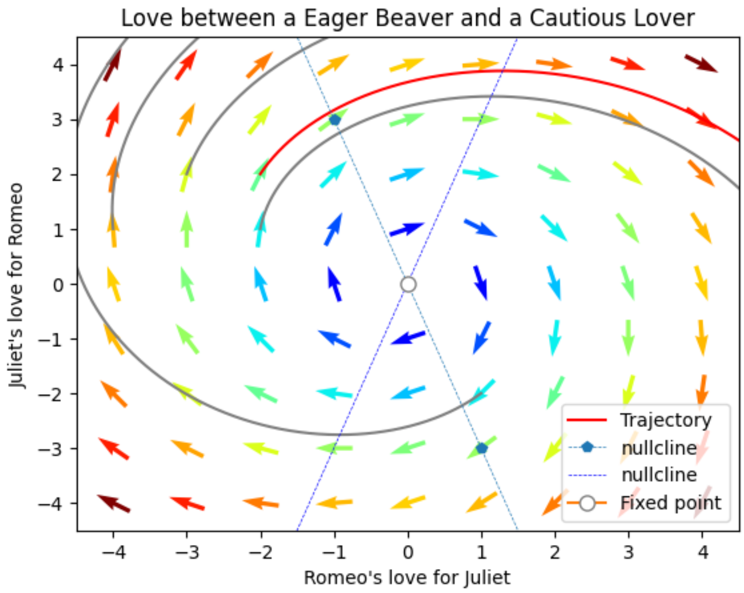
$$\begin{cases} R = 2e^t \sin 3t - 2e^t \cos 3t \\ J = 2e^t \sin 3t + 2e^t \cos 3t \end{cases} \tag{28}$$

Đồ thị:



Hình 11: Eager - Cautious Lover

Phase portrait:



Hình 12: Eager - Cautious Lover

Nhận xét:

- Ở cả 2 trường hợp: Tình yêu của 2 người biến động theo thời gian, từ yêu đến ghét rồi ghét thành yêu. Càng ngày, tình cảm ghét hoặc yêu phát triển càng nhanh và rõ rệt. Đáng chú ý là tình yêu của Juliet thay đổi nhanh hơn Romeo, nghĩa là tình yêu của Romeo phụ thuộc vào Juliet, lúc cô bắt đầu ghét anh ta thì về sau anh ta mới bắt đầu ghét và ngược lại.
- Khi tình yêu ban đầu của hai người dù là cùng yêu hay người yêu người ghét thì tình yêu của họ vẫn phát triển theo hướng biến đổi liên tục theo thời gian và càng lúc càng rõ.

2.4 Tình yêu giữa Eager Beaver và Hermit

Ta chọn a, b, c và d như sau:

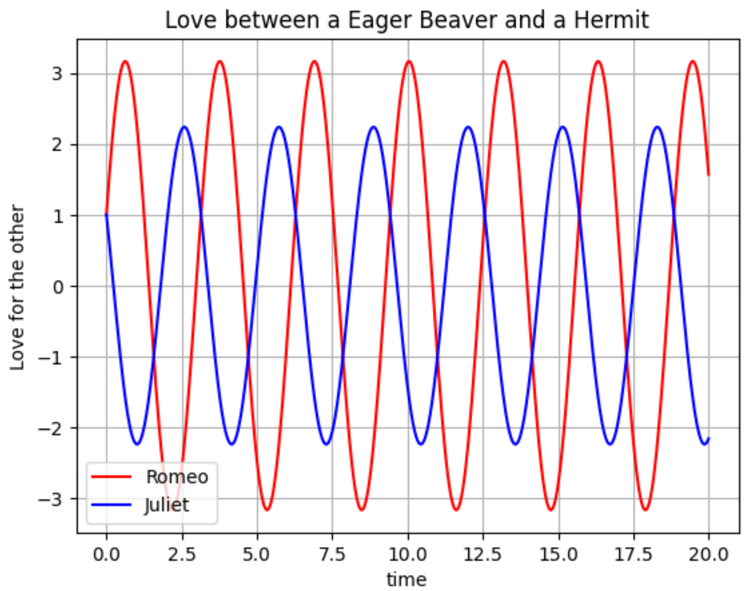
$$a = 2, b = 4, c = -2, d = -2, R_0 = 1, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = 2R(t) + 4J(t) \\ J' = -2R(t) - 2(t) \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases} \tag{29}$$

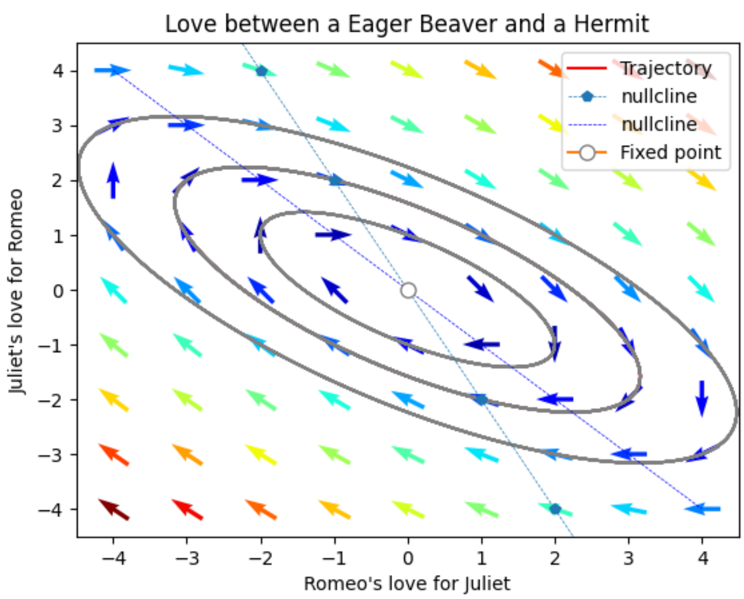
$$\begin{cases} R = 3\sin 2t + \cos 2t \\ J = -2\sin 2t + \cos 2t \end{cases} \tag{30}$$

Đồ thị:



Hình 13: Eager - Hermit

Phase portrait:



Hình 14: Eager - Hermit

Ta chọn a, b, c và d như sau:

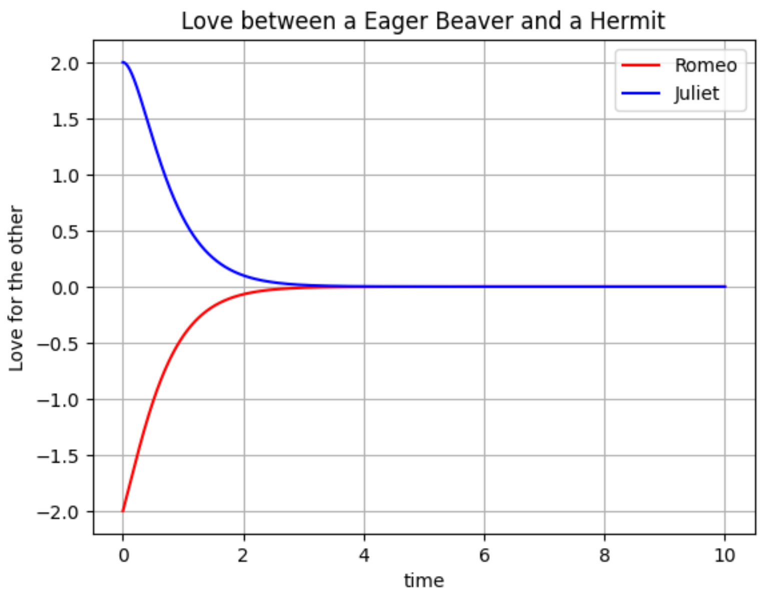
$$a = 1, b = 2, c = -6, d = -6, R_0 = -2, J_0 = 2$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) + 2J(t) \\ J' = -6R(t) - 6J(t) \\ R(0) = -2, J(0) = 2 \end{cases} \tag{31}$$

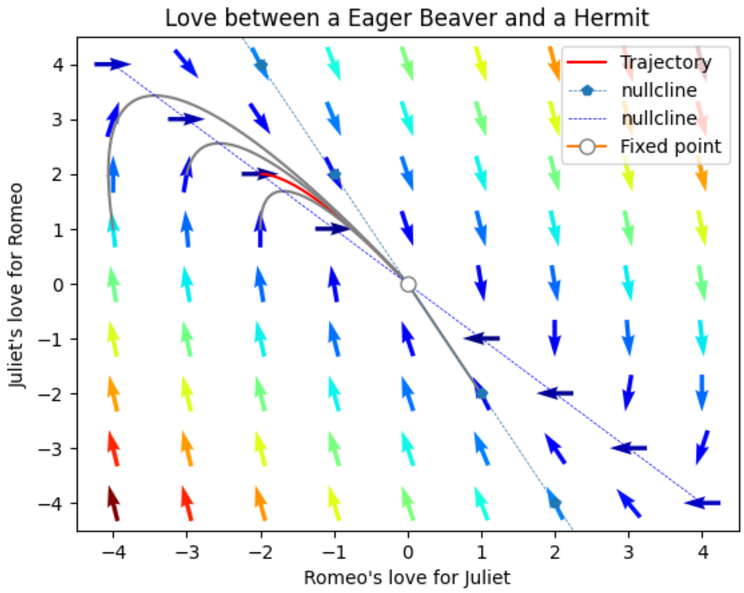
$$\begin{cases} R = -4e^{-2t} + 2e^{-3t} \\ J = 6e^{-2t} - 4e^{-3t} \end{cases} \tag{32}$$

Đồ thị:



Hình 15: Eager - Hermit

Phase portrait:



Hình 16: Eager - Hermit

Nhận xét:

- Trường hợp 1: Tình yêu của 2 người biến động theo thời gian, đặc trưng của trường hợp này là tại 1 thời điểm, sẽ có 1 người yêu và 1 người ghét.
- Trường hợp 2: Trường hợp này tương tự như trường hợp 2 của 2 Eager Beaver.

2.5 Tình yêu giữa Narcissistic Nerd và Narcissistic Nerd

Ta chọn a, b, c và d như sau:

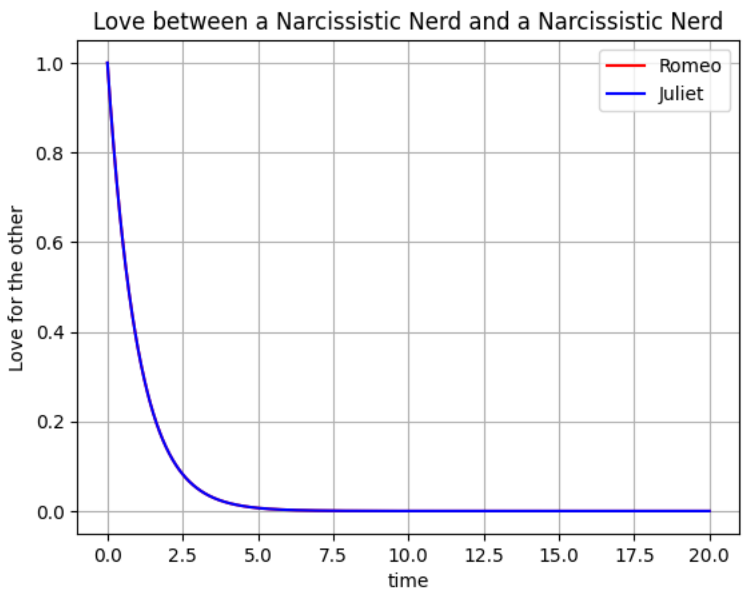
$$a = 1, b = -2, c = 6, d = -7, R_0 = 1, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) - 2J(t) \\ J' = 6R(t) - 7(t) \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases} \tag{33}$$

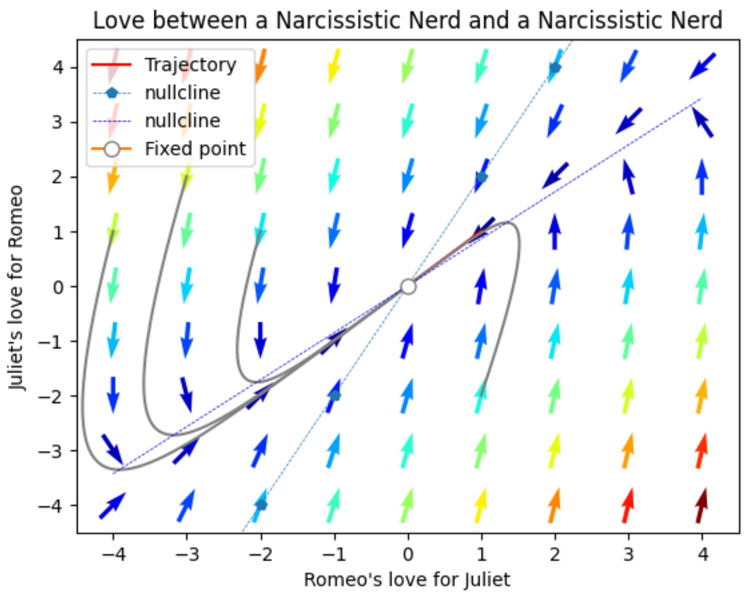
$$\begin{cases} R = e^{-t} \\ J = e^{-t} \end{cases} \tag{34}$$

Đồ thị:



Hình 17: Narcissistic Nerd và Narcissistic Nerd

Phase portrait:



Hình 18: Narcissistic Nerd và Narcissistic Nerd

Với a, b, c, d như trên nhưng

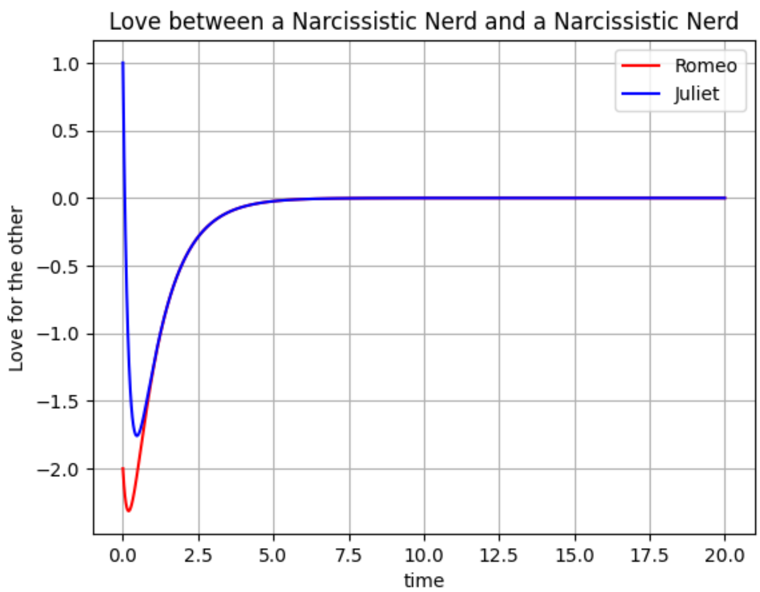
$$R_0 = -2, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) - 2J(t) \\ J' = 6R(t) - 7J(t) \\ R(0) = -2, J(0) = 1 \end{cases} \tag{35}$$

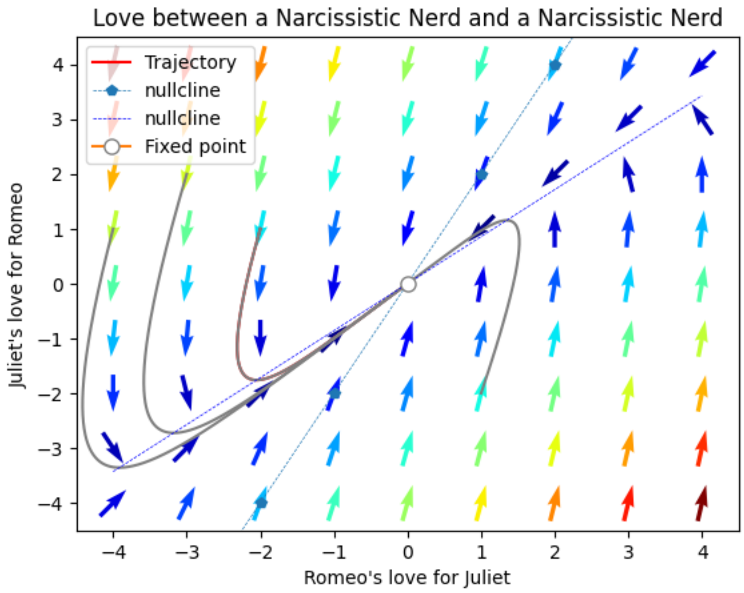
$$\begin{cases} R = \frac{-7}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-5t} \\ J = \frac{-7}{2}e^{-t} + \frac{9}{2}e^{-5t} \end{cases} \tag{36}$$

Đồ thị:



Hình 19: Narcissistic Nerd và Narcissistic Nerd

Phase portrait:



Hình 20: Narcissistic Nerd và Narcissistic Nerd

Nhận xét:

- Trường hợp 1: Tình yêu của 2 người diễn biến như nhau, từ yêu hạ xuống hết yêu trong 1 thời gian ngắn và giữ nguyên trạng thái đó từ đó về sau.
- Trường hợp 2: Ban đầu Juliet từ yêu thành ghét với tốc độ thay đổi nhanh, Romeo từ ghét thành ghét hơn nhưng chỉ thêm một ít, sau đó cả hai người dần hết ghét nhau, cũng không yêu nhau thêm. Trạng thái này giữ nguyên về sau.

2.6 Tình yêu giữa Narcissistic Nerd và Cautious Lover

Ta chọn a, b, c và d như sau:

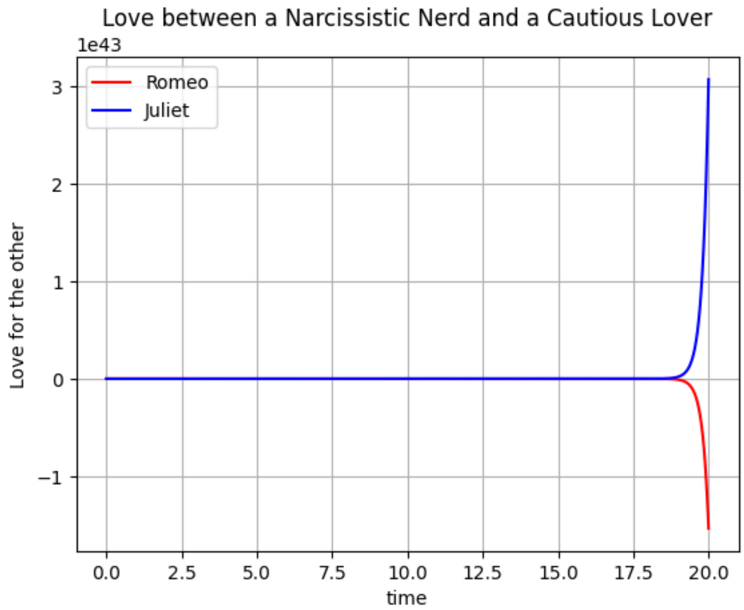
$$a = 1, b = -2, c = -6, d = 2, R_0 = 2, J_0 = 5$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) - 2J(t) \\ J' = -6R(t) + 2(t) \\ R(0) = 2, J(0) = 5 \end{cases} \tag{37}$$

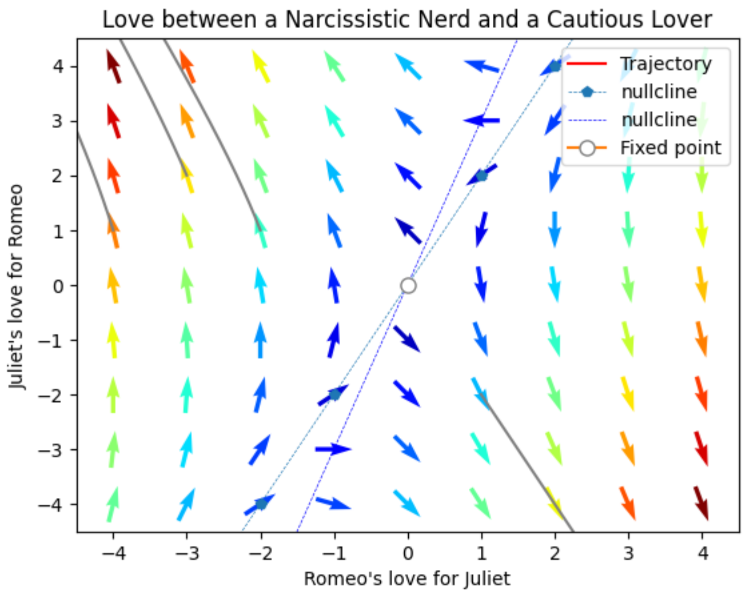
$$\begin{cases} R = \dfrac{-4}{7}e^{5t} + \dfrac{18}{7}e^{-2t} \\ J = \dfrac{8}{7}e^{5t} + \dfrac{27}{7}e^{-2t} \end{cases} \tag{38}$$

Đồ thị:



Hình 21: Narcissistic Nerd và Cautious Lover

Phase portrait:



Hình 22: Narcissistic Nerd và Cautious Lover

Với a, b, c, d như trên nhưng

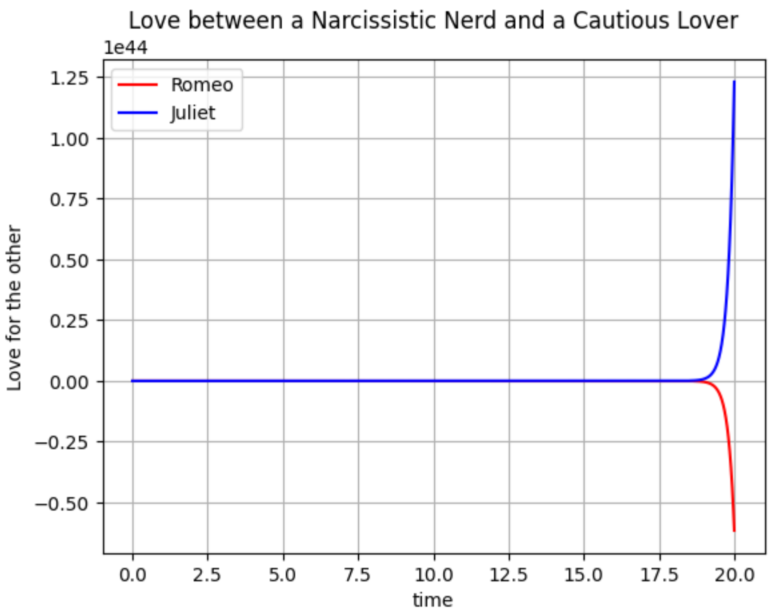
$$R_0 = -2, J_0 = 5$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) - 2J(t) \\ J' = -6R(t) + 2J(t) \\ R(0) = -2, J(0) = 5 \end{cases} \tag{39}$$

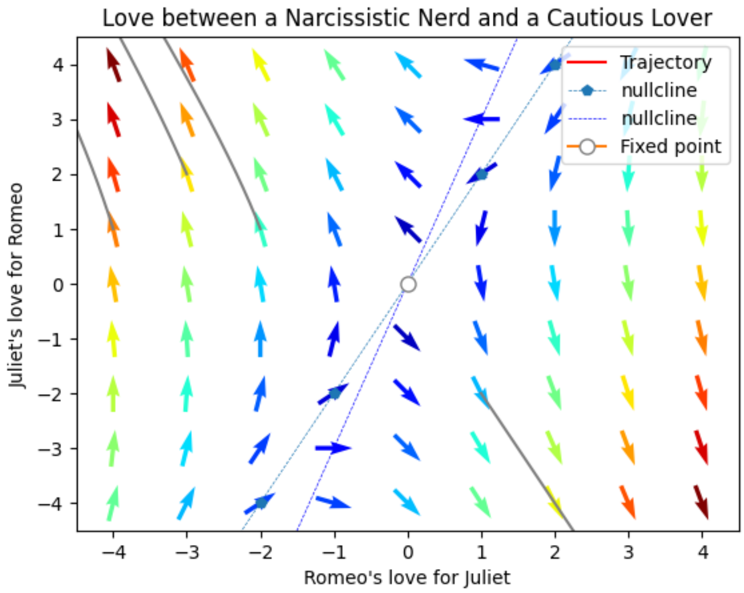
$$\begin{cases} R = \dfrac{-16}{7}e^{5t} + \dfrac{2}{7}e^{-2t} \\ J = \dfrac{32}{7}e^{5t} + \dfrac{3}{7}e^{-2t} \end{cases} \tag{40}$$

Đồ thị:



Hình 23: Narcissistic Nerd và Cautious Lover

Phase portrait:



Hình 24: Narcissistic Nerd và Cautious Lover

Nhận xét:

- Dù khởi đầu là cùng yêu hay người yêu người ghét thì ban đầu họ duy trì trạng thái không có tình cảm, về sau Juliet càng yêu còn Romeo thì càng ghét, cả hai người phát triển tình cảm của mình với tốc độ rất nhanh (độ dốc của đồ thị lớn).

2.7 Tình yêu giữa Narcissistic Nerd và Hermit

Ta chọn a, b, c và d như sau:

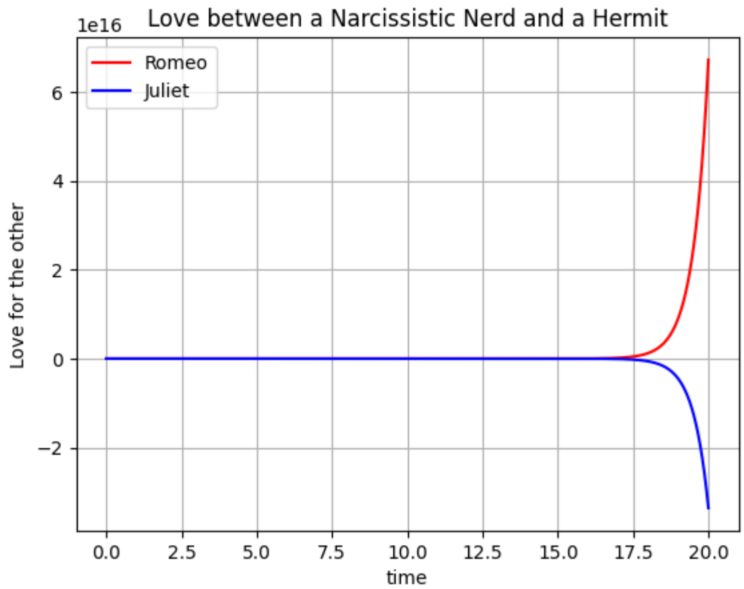
$$a = 1, b = -2, c = -3, d = -4, R_0 = 1, J_0 = 2$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) - 2J(t) \\ J' = -3R(t) - 4(t) \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases} \tag{41}$$

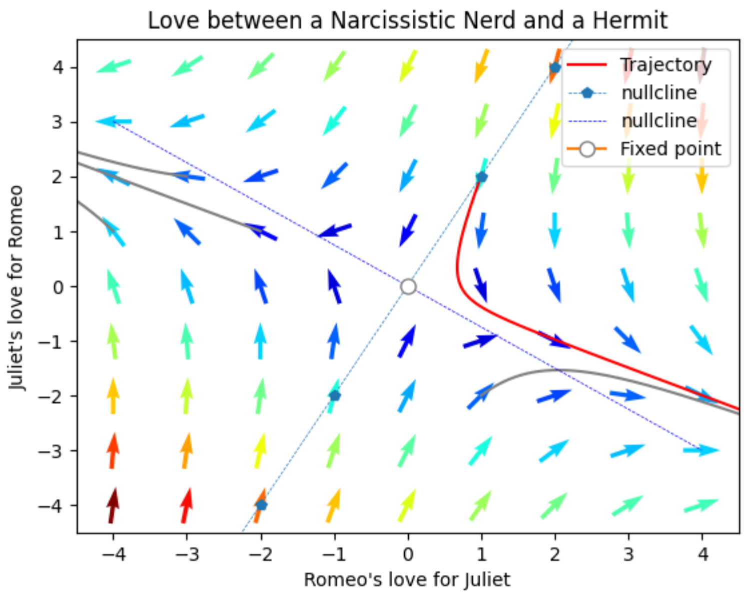
$$\begin{cases} R = \dfrac{2}{7}e^{2t} + \dfrac{5}{7}e^{-5t} \\ J = \dfrac{-1}{7}e^{2t} + \dfrac{15}{7}e^{-5t} \end{cases} \tag{42}$$

Đồ thị:



Hình 25: Narcissistic Nerd và Hermit

Phase portrait:



Hình 26: Narcissistic Nerd và Hermit

Với a, b, c, d như trên nhưng

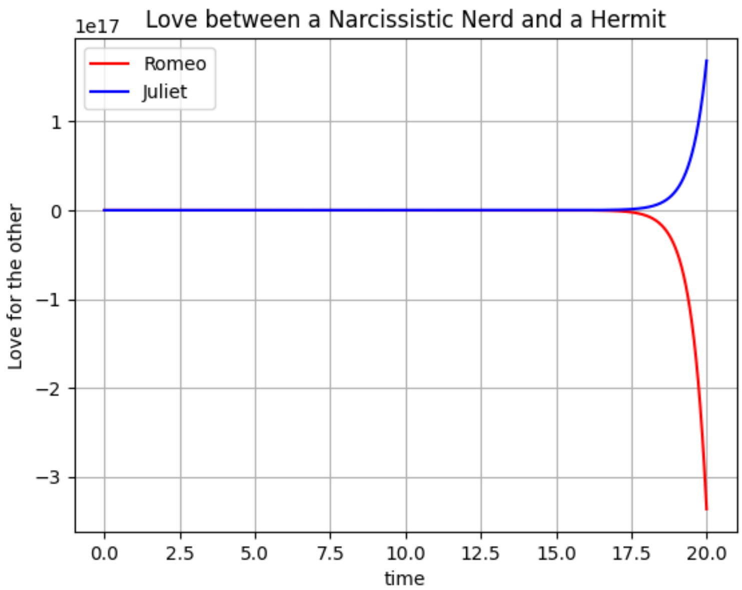
$$R_0 = -1, J_0 = 2$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = R(t) - 2J(t) \\ J' = -3R(t) - 4J(t) \\ R(0) = -1, J(0) = 2 \end{cases} \tag{43}$$

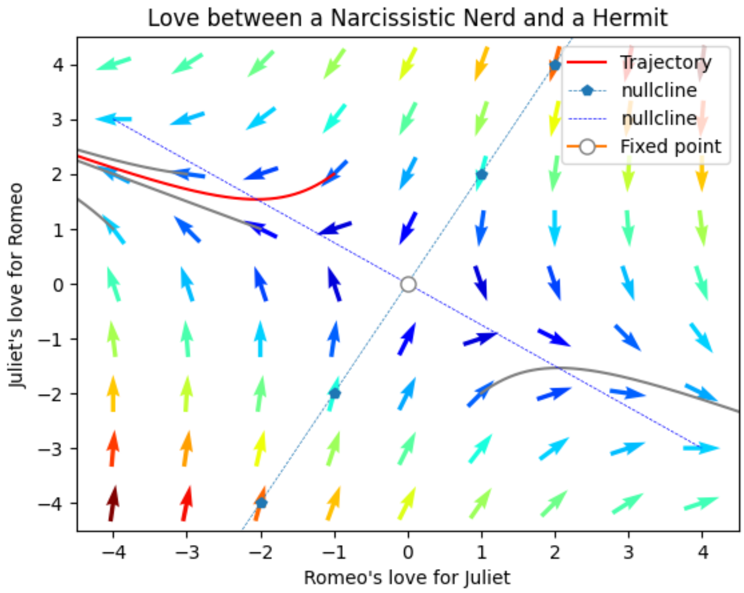
$$\begin{cases} R = \frac{-10}{7}e^{2t} + \frac{3}{7}e^{-5t} \\ J = \frac{5}{7}e^{2t} + \frac{9}{7}e^{-5t} \end{cases} \tag{44}$$

Đồ thị:



Hình 27: Narcissistic Nerd và Hermit

Phase portrait:



Hình 28: Narcissistic Nerd và Hermit

Nhận xét:

- Dáng điệu đồ thị tương tự 2 trường hợp trên, tuy nhiên khi cả hai người ban đầu là yêu nhau thì về sau Romeo càng yêu còn Juliet càng ghét. Nhưng với trường hợp ban đầu Romeo ghét còn Juliet yêu, về sau Romeo càng ghét còn Juliet thì càng yêu

2.8 Tình yêu giữa Cautious Lover và Cautious Lover

Ta chọn a, b, c và d như sau:

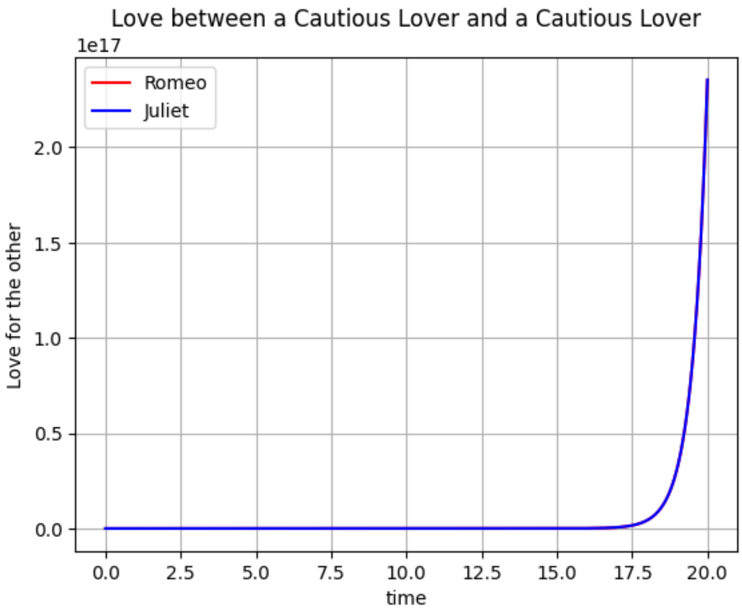
$$a = -5, b = 7, c = -2, d = 4, R_0 = 1, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = -5R(t) + 7J(t) \\ J' = -2R(t) + 4(t) \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases} \tag{45}$$

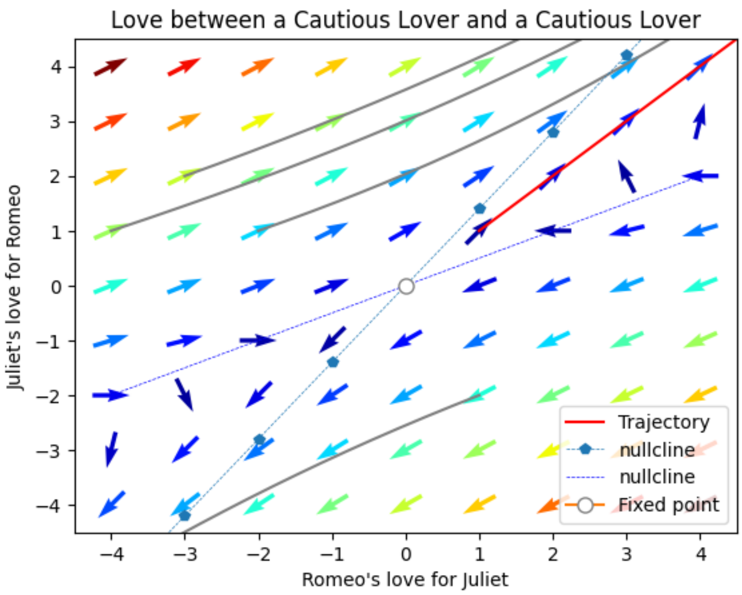
$$\begin{cases} R = e^{2t} \\ J = e^{2t} \end{cases} \tag{46}$$

Đồ thị:



Hình 29: Cautious Lover và Cautious Lover

Phase portrait:



Hình 30: Cautious Lover và Cautious Lover

Ta chọn a, b, c và d như sau:

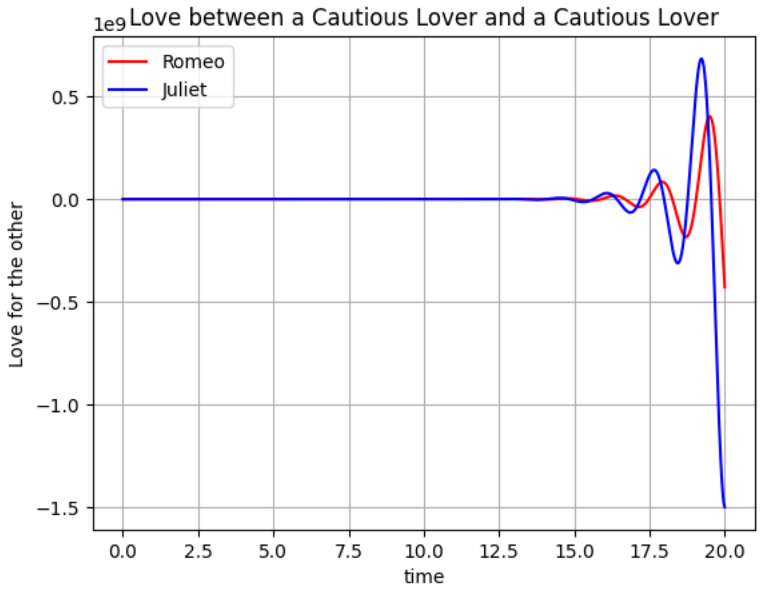
$$a = -1, b = 2, c = -10, d = 3, R_0 = -1, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = -R(t) + 2J(t) \\ J' = -10R(t) + 3J(t) \\ R(0) = -1, J(0) = 1 \end{cases} \tag{47}$$

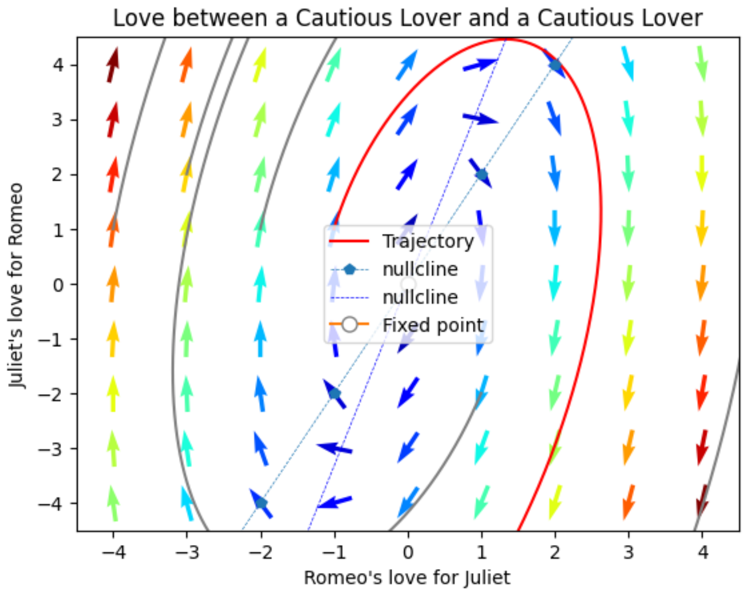
$$\begin{cases} R = e^t \sin 4t - e^t \cos 4t \\ J = 3e^t \sin 4t + e^t \cos 4t \end{cases} \tag{48}$$

Đồ thị:



Hình 31: Cautious Lover và Cautious Lover

Phase portrait:



Hình 32: Cautious Lover và Cautious Lover

Nhận xét:

2.9 Tình yêu giữa Cautious Lover và Hermit

Ta chọn a, b, c và d như sau:

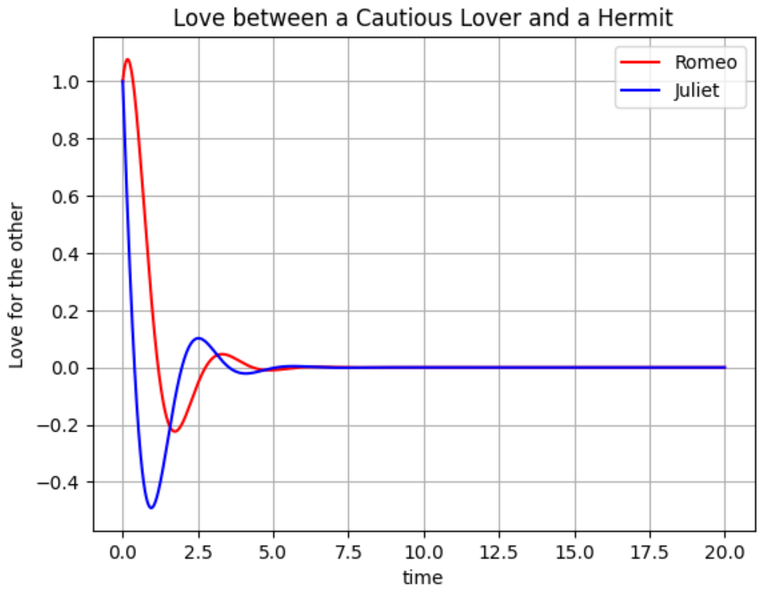
$$a = -1, b = 2, c = -2, d = -1, R_0 = 1, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = -R(t) + 2J(t) \\ J' = -2R(t) - J(t) \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases} \tag{49}$$

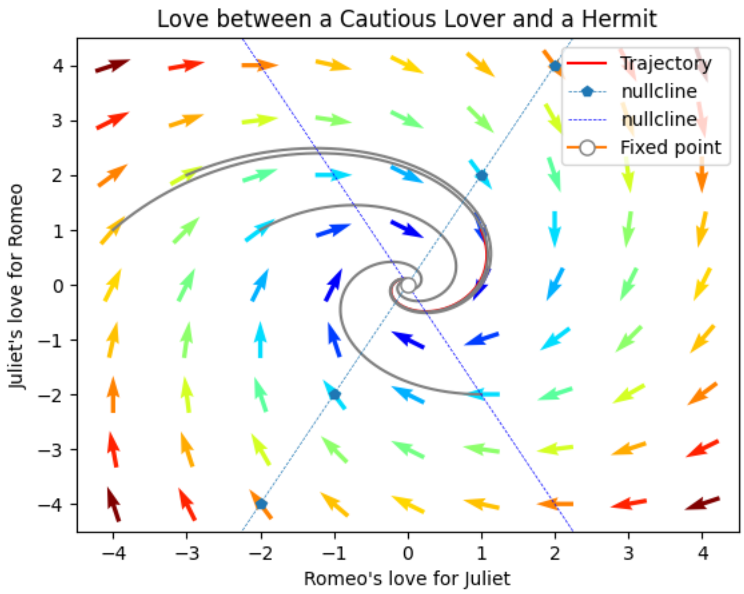
$$\begin{cases} R = e^{-t}\sin 2t - e^{-t}\cos 2t \\ J = -e^{-t}\sin 4t + e^{t}\cos 2t \end{cases} \tag{50}$$

Đồ thị:



Hình 33: Cautious Lover và Hermit

Phase portrait:



Hình 34: Cautious Lover và Hermit

Ta chọn a, b, c và d như sau:

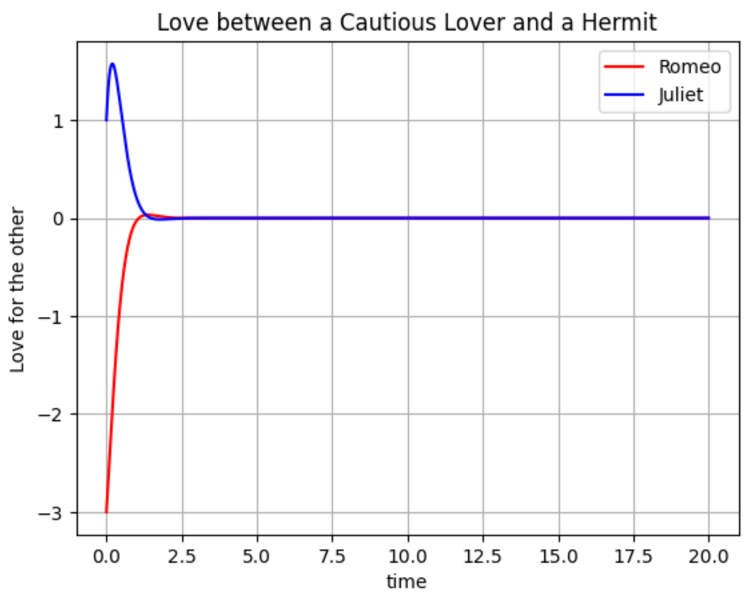
$$a = -1, b = 2, c = -4, d = -5, R_0 = -3, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = -R(t) + 2J(t) \\ J' = -4R(t) - 5J(t) \\ R(0) = -3, J(0) = 1 \end{cases} \tag{51}$$

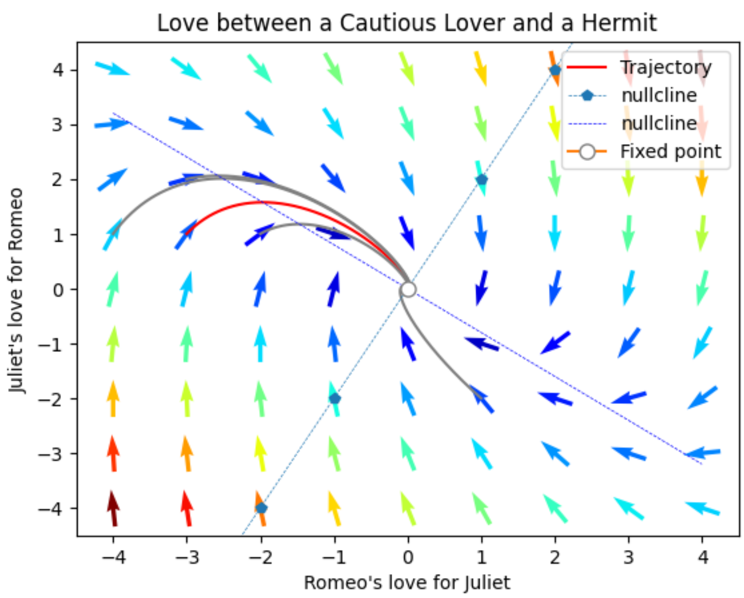
$$\begin{cases} R = -2e^{-3t}\sin 2t - 3e^{-3t}\cos 2t \\ J = 5e^{-3t}\sin 2t + e^{-3t}\cos 2t \end{cases} \tag{52}$$

Đồ thị:



Hình 35: Cautious Lover và Hermit

Phase portrait:



Hình 36: Cautious Lover và Hermit

Nhận xét:

- Trường hợp 1: tính yêu giữa Roemo và Juliet biến động như giữa Eager Beaver và Cautious Lover ở trường hợp 2, trong đó tình yêu của Romeo vẫn phụ thuộc vào cảm xúc của juliet.
- Trường hợp 2: Juliet ban đầu yêu Romeo hơn một ít, sau đó giảm nhanh về mức 0, Romeo thì từ ghét cùng tăng nhanh lên mức 0, từ đó về sau 2 người vẫn giữ nguyên trạng thái không yêu không ghét.

2.10 Tình yêu giữa Hermit và Hermit

Ta chọn a, b, c và d như sau:

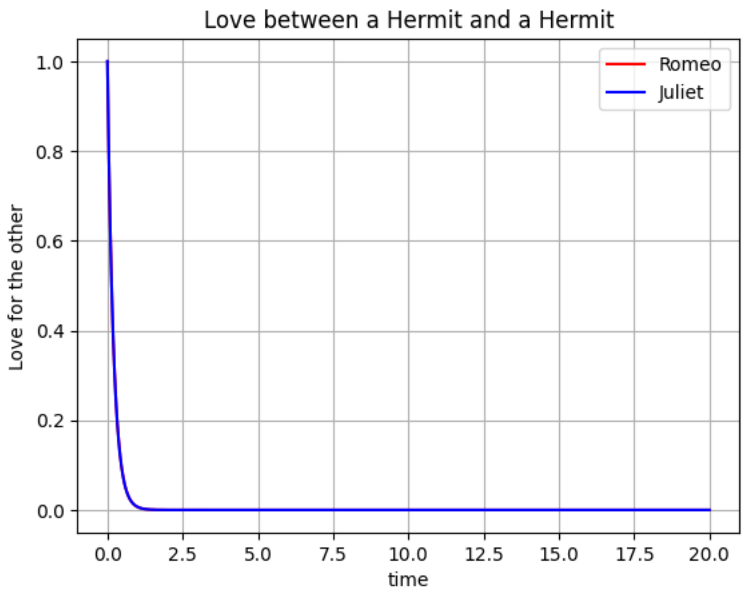
$$a = -4, b = -1, c = -4, d = -1, R_0 = 1, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = -4R(t) - J(t) \\ J' = -4R(t) - J(t) \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases} \tag{53}$$

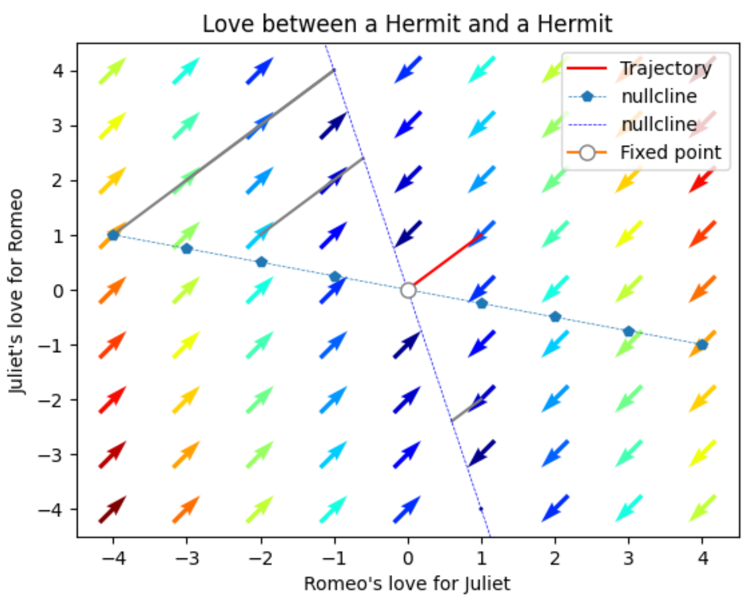
$$\begin{cases} R = e^{-5t} \\ J = -e^{-5t} \end{cases} \tag{54}$$

Đồ thị:



Hình 37: Hermit và Hermit

Phase portrait:



Hình 38: Hermit và Hermit

Ta chọn a, b, c và d như sau:

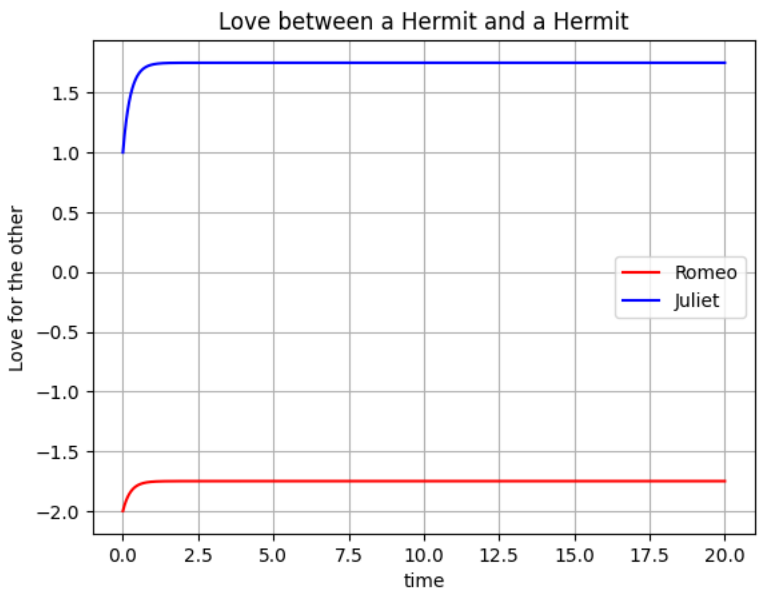
$$a = -1, b = -1, c = -3, d = -3, R_0 = -2, J_0 = 1$$

Ta thu được IVP:

$$\begin{cases} R' = -(t) - J(t) \\ J' = -3R(t) - 3J(t) \\ R(0) = -2, J(0) = 1 \end{cases} \tag{55}$$

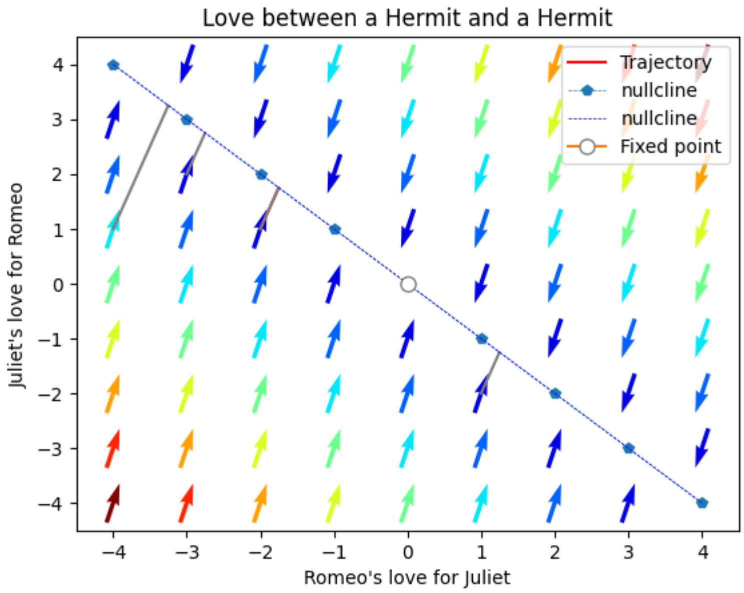
$$\begin{cases} R = \dfrac{-7}{4} - \dfrac{1}{4}e^{-4t} \\ J = \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{4}e^{-4t} \end{cases} \tag{56}$$

Đồ thị:



Hình 39: Hermit và Hermit

Phase portrait:



Hình 40: Hermit và Hermit

Nhận xét:

- Trường hợp 1: tình yêu của cả 2 giống nhau, từ yêu chuyển nhanh sang không yêu cũng không ghét và duy trì trạng thái đó về sau.
- Trường hợp 2: Tình yêu giữa Romeo và Juliet có sự tương dồng nhau về diễn biến. Romeo ban đầu có giảm nhẹ mức độ ghét nhưng về sau vẫn duy trì ở mức gần -1.5, Juliet ban đầu tình yêu chuyển từ mức 1 lên hơn 1.5 và duy trì cố định ở mức này từ đó về sau.

3 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng và hệ phương trình vi phân tổng quát

3.1 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Ta xét hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với các hệ số a, b, c, d là hằng số:

$$\begin{cases} R' = aR(t) + bJ(t) + f(t) \\ J' = cR(t) + dJ(t) + g(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \tag{57}$$

Dưới dạng ma trận, hệ có thể được viết một cách thu gọn: $y' = Ay + h(t)$ với $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} R \\ J \end{bmatrix}$

và $h(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$.

Phương trình sau (ẩn là λ) là phương trình đặc trưng của hệ:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

3.1.1 Giải hệ bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Ta thấy rằng nếu biết một nghiệm riêng nào đó của hệ không thuần nhất và nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất tương ứng thì tổng của chúng cho ta nghiệm tổng quát của hệ không thuần nhất đó. Để xây dựng nghiệm riêng này, ta có thể dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange khi biết n nghiệm độc lập tuyến tính của hệ thuần nhất tương ứng. Giả sử n nghiệm như thế là $y_i(x) = (y_{i1}(x), y_{i2}(x), ..., y_{in}(x))$, ta đặt:

$$y(t) = \Phi(t)C(t)$$

trong đó $\Phi(t)$ là hệ nghiệm cơ bản, tức là một ma trận kích thước $n \times n$ có các cột được hình thành bởi n nghiệm độc lập tuyến tính của hệ thuần nhất tương ứng, và $C = \begin{bmatrix} C_1, C_2, ..., C_n \end{bmatrix}^T$ là vectơ của các hằng số tùy ý C_i (i = 1, 2,..., n).

Để y là nghiệm của hệ $y' = Ay + h(t)$, các hàm $C_i(x)$ phải thoả hệ phương trình vi phân sau:

$$\Phi(t)C'(t) = h(t).$$

Vì định thức Wronski của hệ này luôn khác 0 nên luôn tồn tại ma trận nghịch đảo $\Phi^{-1}(t)$. Nhân cả 2 vế của hệ trên với $\Phi^{-1}(t)$, ta được:

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t)h(t) \Rightarrow C(t) = C_0 + \int \Phi^{-1}(t)h(t)dt$$

với C_0 là một vectơ hằng tùy ý.

Nghiệm riêng của hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất được biểu diễn bằng công thức:

$$y_1(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)h(t)dt.$$

Khi đó, nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất có thể được viết dưới dạng:

$$y(t) = \Phi(t)C(t) = \Phi(t)C_0 + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)h(t)dt = y_0(t) + y_1(t).$$

3.1.2 Các ví dụ kèm lời giải (Specific examples with exact solutions)

a) Ví dụ 1

$$\begin{cases} R' = 4R(t) + J(t) - e^{2t} \\ J' = -2R(t) + J(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Xét hệ thuần nhất $\begin{cases} R' = 4R(t) + J(t) \\ J' = -2R(t) + J(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$. Ma trận hệ số A $= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Phương trình đặc trưng của hệ: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)+2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ hoặc $\lambda = 3$.

Với $\lambda = 2$, toạ độ vectơ riêng là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2t_1 + t_2 = 0 \\ -2t_1 - t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_2 = -2t_1$. Ta có vectơ riêng $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, nghiệm cơ bản $y_1 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{bmatrix}$.

Với $\lambda = 3$, tương tự ta có vectơ riêng $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, nghiệm cơ bản $y_2 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$.

Gọi $y_0 = C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2$ là một nghiệm riêng. Khi đó $y_0 = \begin{bmatrix} C_1(t)e^{2t} + C_2(t)e^{3t} \\ -2C_1(t)e^{2t} - C_2(t)e^{3t} \end{bmatrix}$. Thay y_0 vào hệ ban đầu ta có: $\begin{cases} C_1'(t)e^{2t} + C_2'(t)e^{3t} = -e^{2x} \\ -2C_1'(t)e^{2t} - C_2'(t)e^{3t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t) = 1 \\ C_2'(t) = -2e^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(t) = x \\ C_2(t) = 2e^{-x} \end{cases}$.

Vậy suy ra nghiệm riêng là: $y_0 = \begin{bmatrix} te^{2t} + 2e^{2t} \\ -2te^{2t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}$.

Nghiệm tổng quát là: $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_0 = \begin{bmatrix} R(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + (t+2)e^{2t} \\ J(t) = -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} - (2t+2)e^{2t} \end{bmatrix}$ với C_1, C_2 là 2 hằng số tuỳ ý.

b) Ví dụ 2

$$\begin{cases} R' = 7R(t) + 3J(t) + t - 1 \\ J' = 6R(t) + 4(t) + t^2 \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Ma trận A là

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Giải phương trình đặc trưng ta thu được 2 giá trị λ phân biệt là 1 và 10 với 2 vectơ riêng tương ứng là $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ và $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nghiệm chung là:

$$y_c(t) = C_1 e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{10t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận cơ bản y:

$$y(t) = \begin{bmatrix} -e^t & e^{10t} \\ 2e^t & e^{10t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{h(t)} = \begin{bmatrix} t - 1 & t^2 \end{bmatrix}^T$$

Nghiệm riêng là:

$$\vec{y_p(t)} = y \int y^{-1} \vec{h} dt$$

$$\vec{y_p(t)} = \begin{bmatrix} \frac{3t^2}{10} + \frac{13t}{50} + \frac{3089}{1500} \\ -\frac{7t^2}{10} - \frac{37t}{50} - \frac{637}{500} \end{bmatrix}$$

Nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} R(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{10t} + \frac{3t^2}{10} + \frac{13t}{50} + \frac{3089}{1500} \\ J(t) = 2C_1 e^t + C_2 e^{10t} - \frac{7t^2}{10} - \frac{37t}{50} - \frac{637}{500} \end{cases}$ với C_1, C_2 là 2 hằng số tuỳ ý.

c) Ví dụ 3

$$\begin{cases} R' = 2R(t) + J(t) \\ J' = 3J(t) + te^t \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Ma trận hệ số A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Giải phương trình đặc trưng ta thu được 2 giá trị λ phân biệt là 2 và 3 với 2 vectơ riêng tương ứng là $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ và $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nghiệm chung là:

$$y_c(t) = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận cơ bản y:

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$h(\vec{t}) = \begin{bmatrix} 0 & te^t \end{bmatrix}^T$$

Nghiệm riêng là:

$$y_p(\vec{t}) = y \int y^{-1} \vec{h} dt$$
$$y_p(\vec{t}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t \\ -\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t \end{bmatrix}$$

Nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} R(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t \\ J(t) = C_2 e^{3t} - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t \end{cases}$ với C_1, C_2 là 2 hằng số tuỳ ý.

d) Ví dụ 4

$$\begin{cases} R' = 7R(t) + J(t) + t - 1 \\ J' = -4R(t) + 3J(t) + t^2 \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Ma trận A là

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Giải phương trình đặc trưng ta thu được nghiệm kép λ là 5 và vector riêng là $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Do đó ta suy ra được $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nghiệm chung là:

$$y_c(t) = C_1 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 (e^{5t} t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + e^{5t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

Ma trận cơ bản y:

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{5t} t \\ -2e^{5t} & e^{5t}(-2t+1) \end{bmatrix}$$

$$\vec{h(t)} = \begin{bmatrix} t-1 & t^2 \end{bmatrix}^T$$

Nghiệm riêng là:

$$\vec{y_p(t)} = y \int y^{-1} \vec{h} dt$$
$$\vec{y_p(t)} = e^{5t} \begin{bmatrix} \frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{2t}{15} \\ -\frac{t^4}{6} - \frac{t^3}{3} - \frac{4t}{15} \end{bmatrix}$$

Nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} R(t) = C_1e^{5t} + C_2te^{5t} + e^{5t}(\frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{2t}{15}) \\ J(t) = -2C_1e^{5t} + C_2e^{5t}(1-2t) + e^{5t}(-\frac{t^4}{6} - \frac{t^3}{3} - \frac{4t}{15}) \end{cases}$ với C_1, C_2 là 2 hằng số tuỳ ý.

e) Ví dụ 5

$$\begin{cases} R' = -J(t) + cos(t) \\ J' = 3R - 4J + 4cos(t) - sin(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Ta đưa hệ phương trình đã cho về phương trình vi phân cấp II với ẩn là R. Đạo hàm hai vế phương trình đầu tiên ta được:

$$R'' = -J' - sin(t) = -3R + 4J - 4cos(t)$$

Thay J' từ phương trình thứ 2 ta được:

$$R'' + 4R' - 3R = 0$$

Phương trình thuần nhất này có nghiệm tổng quát là:

$$R = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}$$

Từ phương trình thứ nhất ta tìm được:

$$J = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + cos(t)$$

Nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} R(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t} \\ J(t) = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + cos(t) \end{cases}$ với C_1, C_2 là 2 hằng số tuỳ ý.

3.2 Hệ phương trình vi phân tổng quát

Hệ phương trình vi phân tổng quát là hệ gồm các phương trình chứa biến độc lập, các hàm (nghiệm) cần tìm và nhất thiết phải chứa các đạo hàm của chúng theo biến độc lập. Nếu chỉ xuất hiện các đạo hàm cấp I của các ẩn, ta nói hệ đó là hệ phương trình vi phân cấp I.

Ta nói một hệ gồm 2 (hay n) phương trỉnh vi phân cấp I là có dạng chuẩn tắc (dạng giải ra được đối với đạo hàm) nếu có thể viết dưới dạng:

$$\begin{cases} R'(t) = f(t, R, J) \\ J'(t) = g(t, R, J) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \tag{58}$$

trong đó t là biến độc lập, R(t) và J(t) là các ẩn cần tìm.

Hệ phương trình chuẩn tắc trên có thể viết lại dưới dạng thu gọn như sau:

$$y' = h(t, y)$$

trong đó $y = \Big[R(t), J(t)\Big]^T$, $y' = \Big[R'(t), J'(t)\Big]^T$ và $h = \Big[f, g\Big]^T$.

Định nghĩa: Mỗi nghiệm của hệ (58) là một bộ gồm 2 hàm $R(t) = \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ khả vi liên tục trên khoảng $I \subset R$ mà khi thay vào (58) thì được đẳng thức đúng.

3.2.1 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Đối với hệ phương trình vi phân cấp I, bài toán Cauchy được phát biểu một cách tương tự như trường hợp một phương trình: Tìm nghiệm $R(t), J(t)$ của hệ (58) thoả điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} R(t_0) = R_0 \\ J(t_0) = J_0 \end{cases}$$

trong đó các giá trị $t_0 \in I$ và R_0, J_0 cho trước, gọi là giá trị ban đầu.

Để ý rằng không phải bao giờ định lý Cauchy cũng có (duy nhất) nghiệm. Định lý sau đây giải quyết bài toán này đối với hệ chuẩn tắc.

Định lý (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm): Giả sử các hàm $f(t, R, J)$, $g(t, R, J)$ trong (58) là liên tục trên một tập mở $G \subset R^{n+1}$ chứa (t_0, R_0, J_0) và thoả điều kiện Lipschitz theo biến y. Khi đó trong một lân cận nào đó của t_0 có tồn tại một nghiệm $R(t)$, $J(t)$ thoả bài toán Cauchy với điều kiện ban đầu đã cho và nghiệm đó là duy nhất.

Chứng minh: Viết lại hệ dưới dạng $y' = h(t, y)$, trong đó $y = \Big[R(t), J(t)\Big]^T$, $h = \Big[f, g\Big]^T$ và lập lại các bước chứng minh như trong định lý tồn tại và duy nhất cho phương trình vi phân cấp I.

Nhận xét: Thay cho điều kiện Lipschitz ta có thể yêu cầu (mạnh hơn) rằng hàm $h(t, y)$ có các đạo hàm riêng theo biến y bị chặn.

Định nghĩa: Giả sử tập G thoả mãn tất cả các giả thiết của *Định lý sự tồn tại và duy nhất nghiệm*. Khi đó 2 hàm

$$\begin{cases} R(t) = R(t, C_1, C_2) \\ J(t) = J(t, C_1, C_2) \end{cases} \tag{59}$$

phụ thuộc vào 2 tham số C_1, C_2 và có các đạo hàm riêng theo t được gọi là nghiệm tổng quát của hệ (58) nếu:

- Với mỗi (t_0, R_0, J_0) trong G, từ hệ (59) có thể giải được (duy nhất) các hằng số C_1, C_2.
- Tập hợp 2 hàm trong hệ (59) là nghiệm của hệ (58) với mỗi bộ giá trị của các tham số C_1, C_2 giải ra đối với mỗi $(t, R(t), J(t)) \in G$.

Định nghĩa: Nghiệm của hệ mà tại mỗi điểm của nó thoả mãn các điều kiện của *Định lý sự tồn tại và duy nhất nghiệm* được gọi là *nghiệm riêng* của hệ, Ngược lại, nghiệm của hệ mà tính chất duy nhất nghiệm bị vi phạm được gọi là *nghiệm kỳ dị*.

Ví dụ: Kiểm tra rằng hệ các hàm:

$$\begin{cases} R(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t} \\ J(t) = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + cos(t) \end{cases}$$

là nghiệm tổng quát của hệ

$$\begin{cases} R'(t) = -J + cos(t) \\ J'(t) = 3R - 4J + 4cos(t) - sin(t) \end{cases}$$

Ta có $f(t, R, J) = -J + cos(t)$ và $g(t, R, J) = 3R - 4J + 4cos(t) - sin(t)$, do đó chúng có các đạo hàm liên tục trên R^3.

Với mỗi $(t, R, J) \in R^3$, ta luôn có thể giải được (duy nhất) các C_1, C_2, cụ thể:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}e^{t}(3R - J + cos(t)) \\ C_2 = \frac{1}{2}e^{-3t}(J - R - cos(t)) \end{cases}$$

Ngoài ra, từ các hàm đã cho, ta có:

$$\begin{cases} R'(t) = -C_1e^{-t} - 3C_2e^{-3t} \\ J'(t) = -C_1e^{-t} - 9C_2e^{-3t} - sin(t) \end{cases}$$

nên chúng thực sự là nghiệm của hệ nói trên.

3.2.2 Ví dụ về hàm f và g thỏa điều kiện tồn tại nghiệm cho hệ phương trình vi phân

a) Phương trình Lotka–Volterra

Phương trình Lotka–Volterra thỏa điều kiện $f = R(1 - J)$ và $g = J(R - 1)$.

Ví dụ cụ thể:

$$\begin{cases} R'(t) = R(1-J) \\ J'(t) = J(R-1) \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases}$$

b) Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hàm $f = aR + bJ$ và $g = cR + dJ$ với các hệ số a, b, c, d là hằng số.

Các ví dụ cụ thể:

$$\begin{cases} R' = -R(t) - 2J(t) \\ J' = 3R(t) + 4J(t) \\ R(0) = 7, J(0) = 10 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} R' = 3R(t) - 2J(t) \\ J' = 2R(t) - 2J(t) \\ R(0) = 7, J(0) = 10 \end{cases}$$

c) Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất có hàm $f = aR+bJ+u(t)$ và $g = cR+dJ+v(t)$ với các hệ số a, b, c, d là hằng số và $u(t)$, $v(t)$ là các hàm xác định và liên tục trên khoảng xác định.

Các ví dụ cụ thể:

$$\begin{cases} R' = 7R(t) + 3J(t) + t - 1 \\ J' = 6R(t) + 4(t) + t^2 \\ R(0) = 7, J(0) = 10 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} R' = 2R(t) + 4J(t) + cos(t) \\ J' = -R(t) + -2J(t) + sin(t) \\ R(0) = 7, J(0) = 10 \end{cases}$$

4 Phương pháp Euler cho hệ vi phân thường

Phương pháp Euler (hay còn gọi là phương pháp đường tiếp tuyến) là một trong số những phương pháp số đơn giản nhất để giải quyết các bài toán IVP, đặc biệt là trong các trường hợp không thể thu được nghiệm chính xác. Trong phần này, nhóm sẽ trình bày về hai phương pháp Euler thuận và nghịch, cũng như hiện thực và áp dụng phương pháp nghịch sử dụng ngôn ngữ Python.

4.1 Phương pháp Euler thuận

Xét bài toán IVP:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{60}$$

Nếu như bài toán trên không thể giải ra được nghiệm chính xác, ta quan tâm tới việc tìm được nghiệm xấp xỉ của nó. Cụ thể ở đây là tính toán các nghiệm xấp xỉ $\boldsymbol{y_0}$, $\boldsymbol{y_1}$,..., $\boldsymbol{y_n}$ tại các điểm cách đều nhau $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{x_1}$,..., $\boldsymbol{x_n = a}$ trong đoạn $[\boldsymbol{x_0, a}]$ (y_i là giá trị xấp xỉ của $y(x_i)$ với $(i = 0, 1, ..., n)$). Điều đó có nghĩa là:

$$x_i = x_0 + i\frac{(a - x_0)}{n} \tag{61}$$

Đặt:

$$h = \frac{(a - x_0)}{n}$$

Phương trình (61) trở thành:

$$x_i = x_0 + ih \tag{62}$$

Phương pháp Euler thuận được dựa trên giả định rằng đường tiếp tuyến với đồ thị của phương trình (60) tại điểm $(x_i, y(x_i))$ xấp xỉ với đường cong ấy trên đoạn $[x_i, x_{i+1}]$. Ta biết rằng độ dốc của đường cong tiếp tuyến tại điểm $(x_i, y(x_i))$ là $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$. Vậy, phương trình đường tiếp tuyến với đường cong tích phân tại điểm đó sẽ là:

$$y_{i+1} = y(x_i) + f(x_i, y(x_i))(x - x_i) \tag{63}$$

Đặt $x = x_{i+1} = x_i + h$. Phương trình (63) trở thành:

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) \tag{64}$$

Như đã trình bày ở trên, y_{i+1} sẽ là giá trị xấp xỉ của $y(x_{i+1})$. Vì $y(x_0) = y_0$ đã biết, thế $i = 0$ vào phương trình (64), ta được:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Tuy nhiên, khi thế $i = 1$ vào phương trình (64):

$$y_2 = y(x_1) + hf(x_1, y(x_1))$$

Ta sẽ không thu được giá trị y_2 vì không biết giá trị $y(x_1)$. Vì vậy, ta thay $y(x_1)$ bằng giá trị xấp xỉ y_1. Khi đó, ta sẽ tính được:

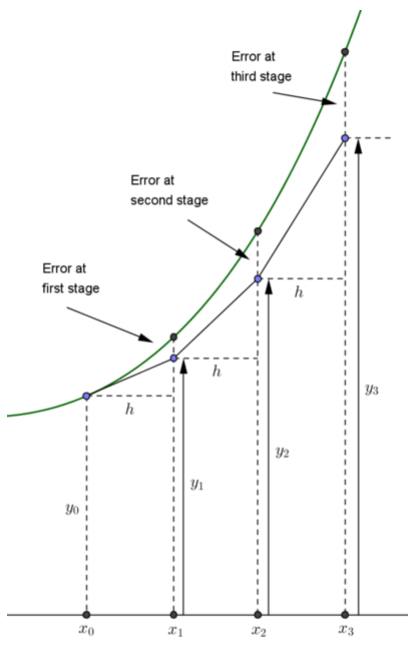
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

Có được y_2, ta thu được y_3 theo cách tương tự:

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

Cứ tiếp tục như vậy, ta sẽ thu được tất cả các nghiệm xấp xỉ theo mong muốn.
Để tổng quát, từ giá trị ban đầu $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$, ta sẽ tính được $\boldsymbol{y_0}$, $\boldsymbol{y_1}$,..., $\boldsymbol{y_n}$ theo công thức:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \qquad 0 \le i \le n-1 \tag{65}$$



Hình 41: Minh họa phương pháp Euler

Gọi:

$$\xi(x_{i+1}) = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

Là sai số khi xấp xỉ giá trị $y(x_i)$ bằng y_i. Sai số này chúng ta gọi là sai số cắt bỏ cục bộ **(local truncation error)**.

Áp dụng khai triển Taylor-Maclaurin cho $y(x_{i+1})$, ta thu được:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2}h^2y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_i) + ...,$$

Giả sử:

$$y(x_i) = y_i \Rightarrow y'(x_i) = {y_i}'$$

Phương trình trên trở thành:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y_i + h{y_i}' + \frac{1}{2}h^2y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_i) + ... \\ \Rightarrow y(x_{i+1}) &= y_{i+1} + \frac{1}{2}h^2y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_i) + ... \\ \Rightarrow \xi(x_{i+1}) &= \frac{1}{2}h^2y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_i) + ... \\ \Rightarrow \xi(x_{i+1}) &= \frac{1}{2}h^2y''(x_i) + O(h^3) \end{aligned}$$

Với giá trị h rất nhỏ, ξ_{i+1} sẽ tỉ lệ với $O(h^2)$. Từ những phân tích bên trên, ta tiến hành áp dụng vào việc giải hệ phương trình vi phân thường. Xét hệ phương trình vi phân có dạng như sau:

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J), \\ J' = g(t, R, J), \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Xấp xỉ nghiệm của hệ phương trình trên đoạn $a \leq t \leq b$ bằng cách áp dụng phương pháp Euler thuận, ta được:

$$\begin{cases} R_{i+1} - R_i = hf(t_i, R_i, J_i), \\ J_{i+1} - J_i = hf(t_i, R_i, J_i), \end{cases}$$

Trong đó, với m là số khoảng con:

$$h = \frac{b - a}{m}$$

Sai số cắt bỏ cục bộ tại điểm t_1 được định nghĩa là:

$$\xi(t_1) = \sqrt{[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2} \tag{66}$$

Do $[R(t_1) - R_1]^2$ và $[J(t_1) - J_1]^2$ đều tỉ lệ với $O(h^2)$ (đã phân tích ở trên), $[R(t_1) - R_1]^2 + [J(t_1) - J_1]^2$ tỉ lệ với $O(h^4)$. Vậy $\xi(t_1)$ sẽ tỉ lệ với $O(h^2)$.

4.2 Phương pháp Euler nghịch

Phương pháp Euler thuận có ưu điểm về thời gian xử lí. Tuy nhiên nó cũng tồn tại nhược điểm về tính ổn định khi bước nhảy h lớn. Để làm rõ vấn đề này, ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{67}$$

Với λ là số phức, $y_0 \neq 0$. Phương pháp Euler thuận cho ta biết:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k) \\ \Rightarrow y_{k+1} &= y_k + h\lambda y_k \\ &= (1 + h\lambda) y_k \end{aligned}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta, ta được:

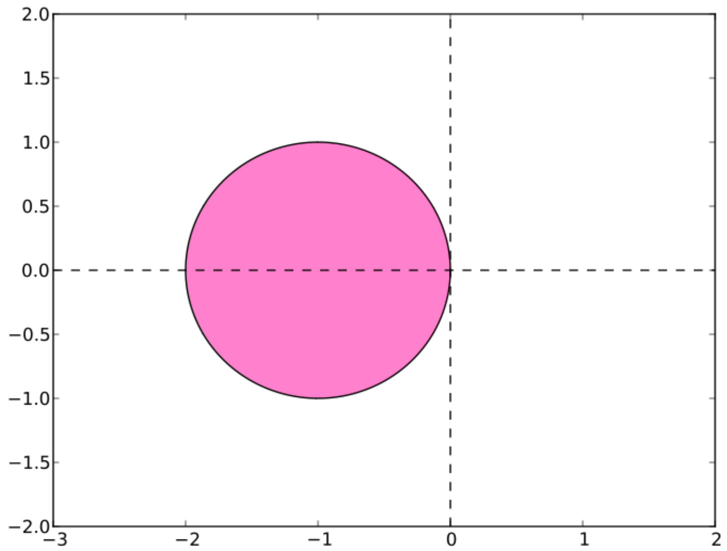
$$y_k = (1 + h\lambda)^k y_0$$

Theo cách giải thông thường, ta thu được nghiệm chính xác của phương trình có dạng:

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

Nếu phần thực của λ nhỏ hơn 0, t tiến tới ∞, $y(t)$ sẽ tiến về 0. Điều này cũng có nghĩa là y_k sẽ tiến về 0 khi k tiến tới ∞. Để điều đó xảy ra:

$$\begin{aligned} |1 + h\lambda| &< 1 \\ \Rightarrow -1 < 1 + h\lambda &< 1 \\ \Rightarrow -2 < h\lambda &< 0 \\ \Rightarrow 0 < h &< \frac{-2}{\lambda} \end{aligned}$$



Hình 42: Vùng ổn định của phương pháp Euler thuận trên mặt phẳng phức (phần tô hồng)

Ta nhận thấy vùng ổn định của phương pháp Euler thuận chỉ gói gọn trong vòng tròn tô đậm như trên hình. Với những giá trị h lớn, kết quả xấp xỉ sẽ không tốt. Trong những trường hợp như vậy, người ta sẽ sử dụng phương pháp Euler nghịch.
Với bài toán IVP ban đầu:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Ta có:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx$$

Xấp xỉ tích phân bên phải bằng tổng Riemann phải, ta được:

$$\begin{aligned} & y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) \\ \Rightarrow\ & y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) \end{aligned}$$

Xấp xỉ các giá trị $y(x_{i+1})$, $y(x_i)$ bằng y_{i+1}, y_i:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Quay trở lại bài toán (67), áp dụng phương pháp Euler nghịch, ta có:

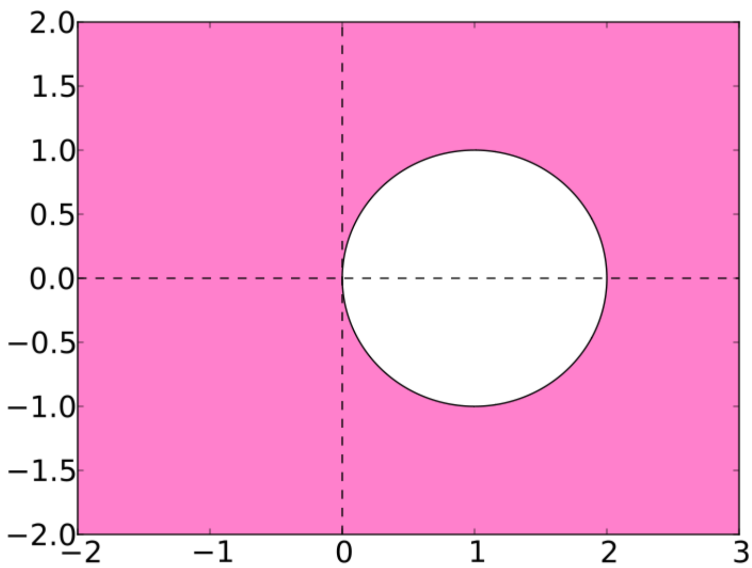
$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}) \\ &= y_k + h\lambda y_{k+1} \\ \Rightarrow (1 - h\lambda)y_{k+1} &= y_k \\ \Rightarrow \frac{1}{1 - h\lambda} y_k \end{aligned}$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta được:

$$y_k = (\frac{1}{1 - h\lambda})^k y_0$$

Nếu phần thực của λ nhỏ hơn 0, t tiến tới ∞, $y(t)$ sẽ tiến về 0. Điều này cũng có nghĩa là y_k sẽ tiến về 0 khi k tiến tới ∞. Để điều đó xảy ra:

$$\begin{aligned} |\frac{1}{1 - h\lambda}| &< 1 \\ \Rightarrow 1 - h\lambda > 1\, or\, 1 - h\lambda &< -1 \\ \Rightarrow h\lambda < 0\, or\, h\lambda &> 2 \end{aligned}$$



Hình 43: Vùng ổn định của phương pháp Euler nghịch trên mặt phẳng phức (phần tô hồng)

Sai số của phương pháp Euler nghịch được tìm bằng khai triển Taylor giống như phương pháp thuận:

$$\begin{aligned}\xi(x_{i+1}) = y(x_{i+1}) - [y(x_{i+1}) - y'(x_{i+1})h + \frac{1}{2}y''(x_{i+1})h^2 + ...] - hf(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ = -\frac{1}{2}y''(x_{i+1})h^2 + ... = O(h^2)\end{aligned}$$

Tuy phương pháp Euler nghịch có ưu điểm là ổn định hơn đối với h lớn, nó cũng tồn tại một số nhược điểm.:

- Không cho ra được độ chính xác cao (giống như phương pháp thuận).
- So với phương pháp thuận, phương pháp nghịch đòi hỏi nhiều bước tính toán hơn.

4.3 Hiện thực và áp dụng phương pháp Euler nghịch

4.3.1 Ví dụ 1: Mô hình Lotka-Volterra

$$\begin{cases} R' = R(1-J) \\ J' = J(R-1) \\ R(0) = 1, J(0) = 2 \end{cases}$$

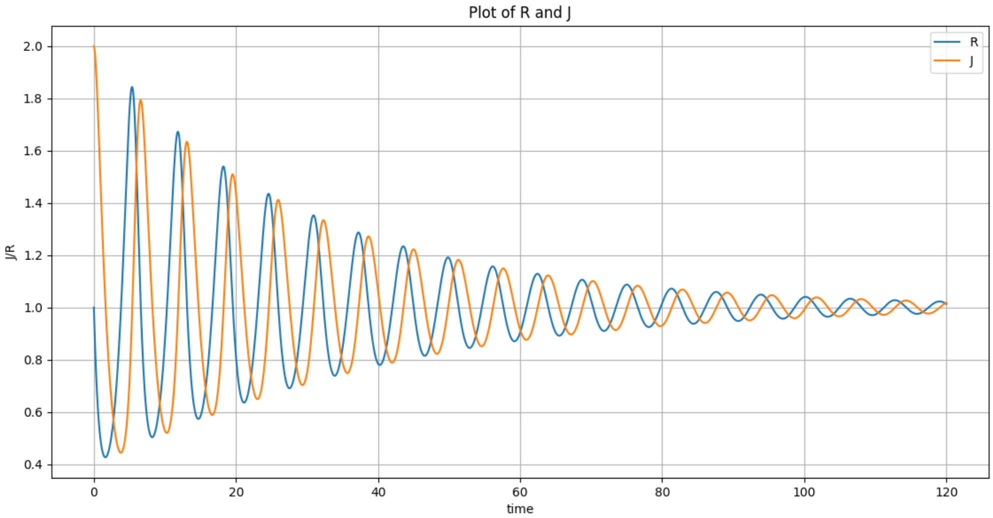
Áp dụng phương pháp Euler nghịch:

$$\begin{cases} R_{k+1} - R_k = hR_{k+1}(1 - J_{k+1}) \\ J_{k+1} - J_k = hJ_{k+1}(R_{k+1} - 1) \end{cases}$$

Thực hiện các phép biến đổi, ta thu được kết quả như sau:

$$\begin{cases} R_{k+1} = \frac{R_k}{1-h(1-J_{k+1})} \\ J_{k+1} = \frac{h^2+h(J_k+R_k)-1+\sqrt{(1-h(J_k+R_k)-h^2)^2-4J_k(h-1)(h+h^2)}}{2(h+h^2)} \end{cases}$$

Đồ thị:



Hình 44: Đồ thị của ví dụ 1 với $t_{max} = 120$, $h = 0.06$

4.3.2 Ví dụ 2

$$\begin{cases} R' = R - 3J \\ J' = 2R + J \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases}$$

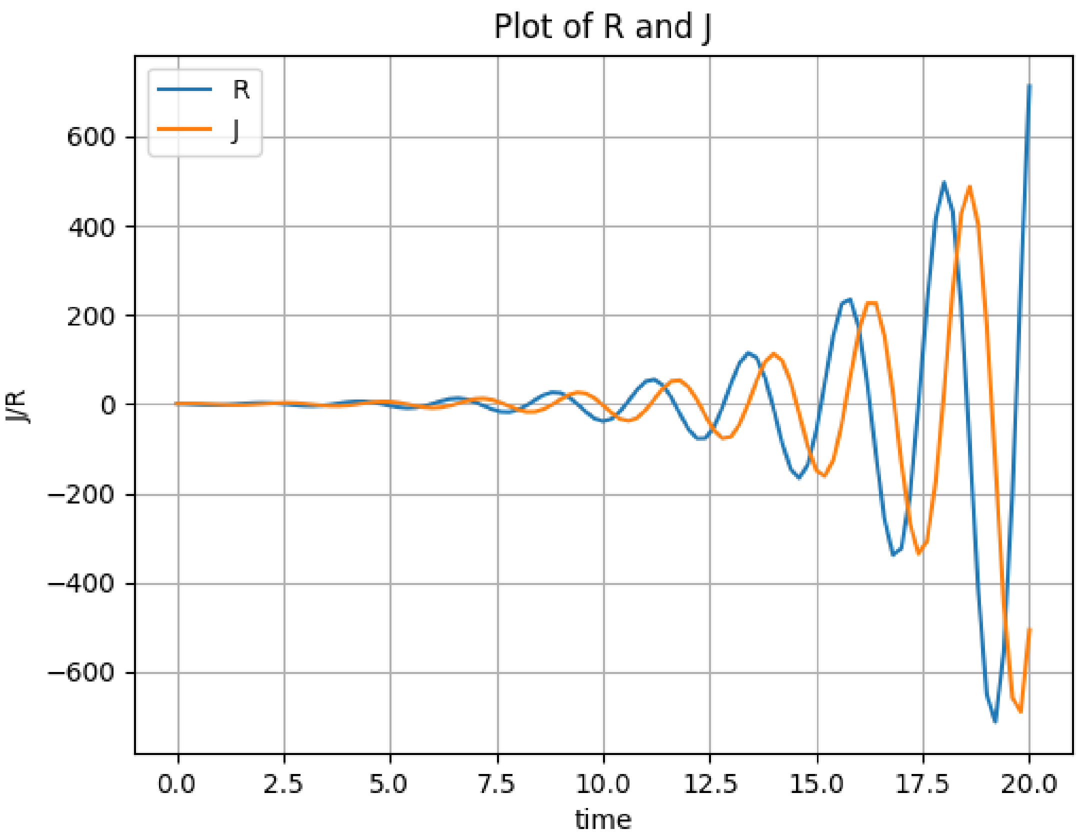
Áp dụng phương pháp Euler nghịch:

$$\begin{cases} R_{k+1} - R_k = h(R_{k+1} - 3J_{k+1}) \\ J_{k+1} - J_k = h(2R_{k+1} + J_{k+1}) \end{cases}$$

Thực hiện các phép biến đổi, ta thu được kết quả như sau:

$$\begin{cases} R_{k+1} = \frac{R_k - 3hJ_{k+1}}{1-h} \\ J_{k+1} = \frac{-hJ_k + 2hR_k + J_k}{7h^2 - 2h + 1} \end{cases}$$

Đồ thị:



Hình 45: Đồ thị của ví dụ 2 với $t_{max} = 20$, $h = 0.2$

4.3.3 Ví dụ 3

$$\begin{cases} R' = -2R - 3J \\ J' = R + J \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases}$$

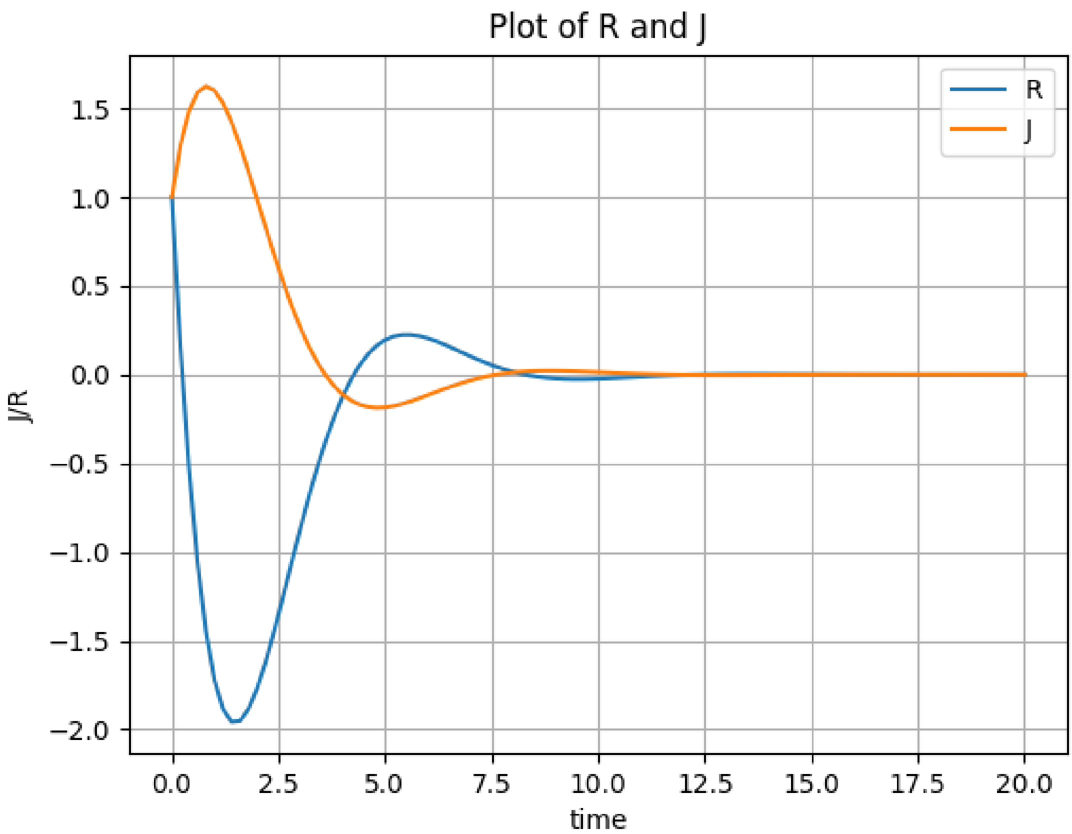
Áp dụng phương pháp Euler nghịch:

$$\begin{cases} R_{k+1} - R_k = h(-2R_{k+1} - 3J_{k+1}) \\ J_{k+1} - J_k = h(R_{k+1} + J_{k+1}) \end{cases}$$

Thực hiện các phép biến đổi, ta thu được kết quả như sau:

$$\begin{cases} R_{k+1} = \frac{R_k - 3hJ_{k+1}}{1+2h} \\ J_{k+1} = \frac{2hJ_k + hR_k + J_k}{h^2+h+1} \end{cases}$$

Đồ thị:



Hình 46: Đồ thị của ví dụ 3 với $t_{max} = 20$, $h = 0.2$

4.3.4 Ví dụ 4

$$\begin{cases} R' = R - 2J \\ J' = -6R - 7J \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases}$$

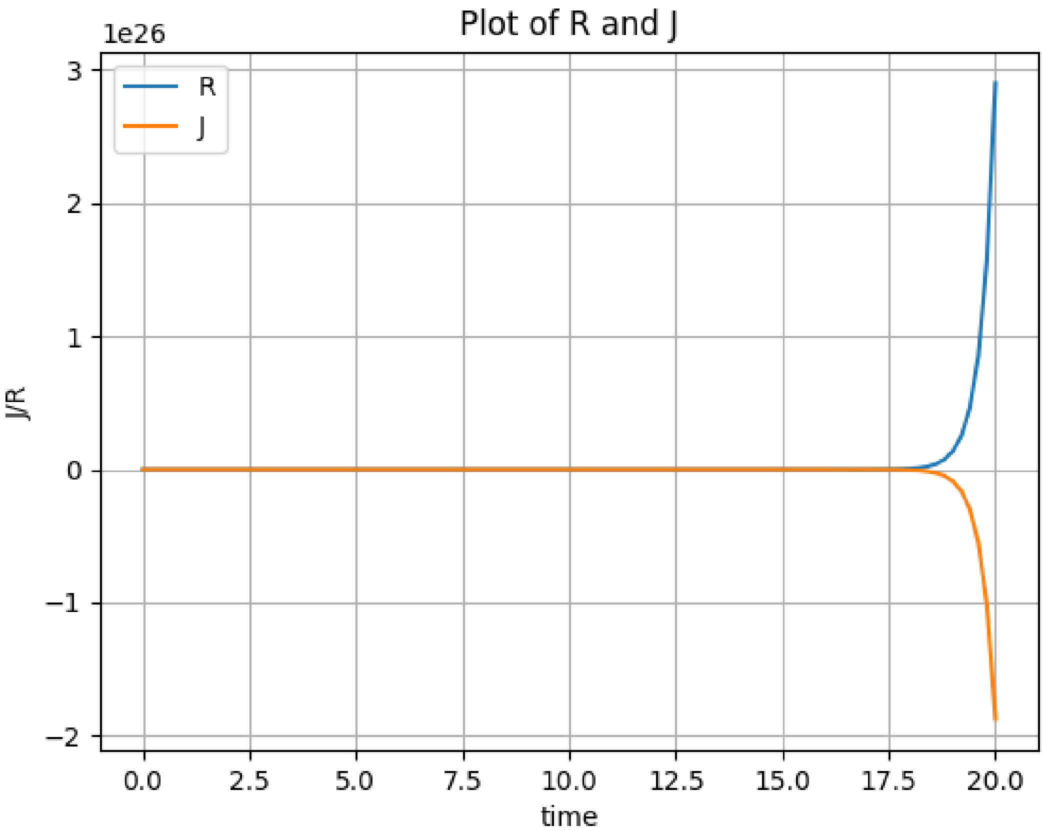
Áp dụng phương pháp Euler nghịch:

$$\begin{cases} R_{k+1} - R_k = h(R_{k+1} - 2J_{k+1}) \\ J_{k+1} - J_k = h(-6R_{k+1} - 7J_{k+1}) \end{cases}$$

Thực hiện các phép biến đổi, ta thu được kết quả như sau:

$$\begin{cases} R_{k+1} = \frac{R_k - 2hJ_{k+1}}{1-h} \\ J_{k+1} = \frac{hJ_k + 6hR_k - J_k}{19h^2 - 6h - 1} \end{cases}$$

Đồ thị:



Hình 47: Đồ thị của ví dụ 4 với $t_{max} = 20$, $h = 0.2$

4.3.5 Ví dụ 5

$$\begin{cases} R' = R + 2J \\ J' = -6R - 6J \\ R(0) = 1, J(0) = 1 \end{cases}$$

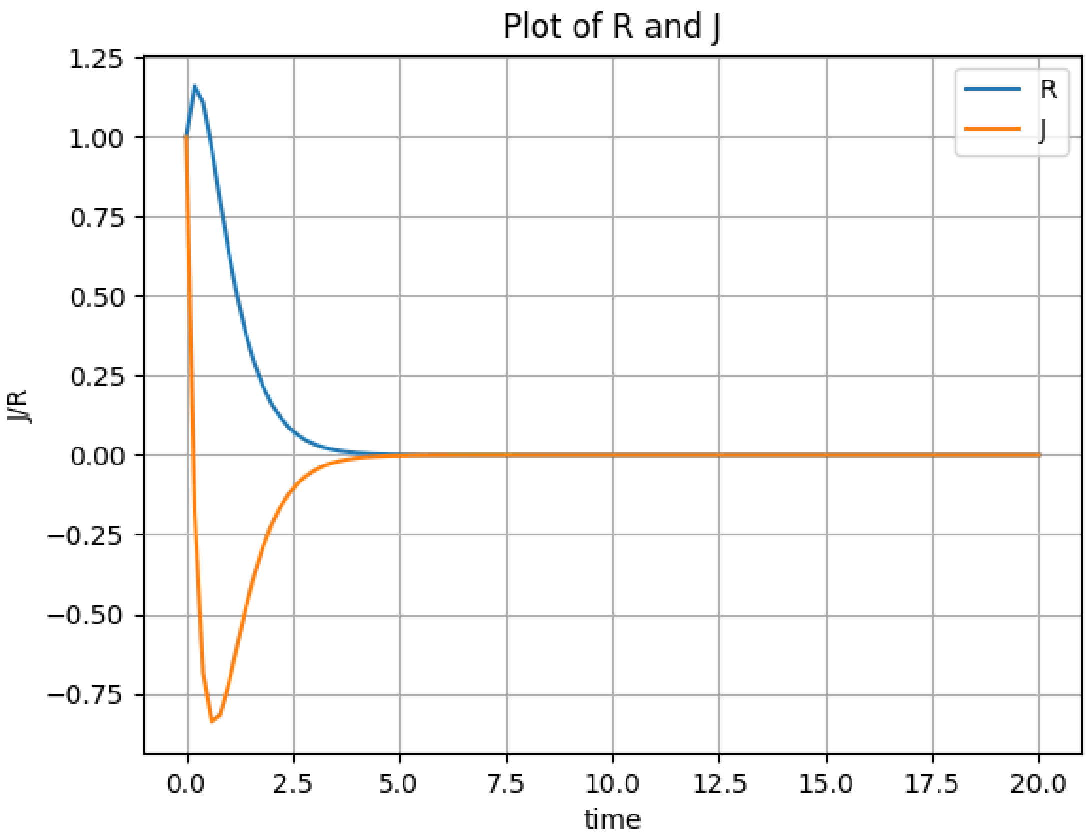
Áp dụng phương pháp Euler nghịch:

$$\begin{cases} R_{k+1} - R_k = h(R_{k+1} + 2J_{k+1}) \\ J_{k+1} - J_k = h(-6R_{k+1} - 6J_{k+1}) \end{cases}$$

Thực hiện các phép biến đổi, ta thu được kết quả như sau:

$$\begin{cases} R_{k+1} = \frac{R_k + 2hJ_{k+1}}{1-h} \\ J_{k+1} = \frac{-hJ_k - 6hR_k + J_k}{6h^2 + 5h + 1} \end{cases}$$

Đồ thị:



Hình 48: Đồ thị của ví dụ 5 với $t_{max} = 20$, $h = 0.2$

5 Ước lượng hệ số a, b, c, d

5.1 Đặt vấn đề

Như ta đã biết, phương trình vi phân tuyến không thuần nhất có dạng:

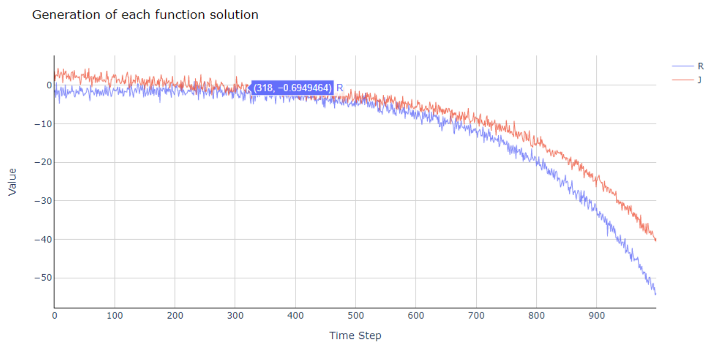
$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) \\ J' = g(t, R, J) \\ R(0) = -2, J(0) = 3 \end{cases}$$

trong đó R và J là 2 hàm phụ thuộc vào t, R và J.

Theo giá thuyết, ta quan tâm tới 1000 dữ liệu về tình yêu giữa Romeo và Juliet với điều kiện khởi tạo là $R_0 = -2$, $J_0 = 3$ và bước nhảy $h = 0.01$. Đồng thời, 1000 dữu liệu này đã được trộn lẫn với dữ liệu nhiễu (noise data). Ta có được hệ IVP:

$$\begin{cases} R'(t) = aR(t) + bJ(t) \\ J'(t) = cR(t) + dJ(t) \\ R(0) = -2, J(0) = 3 \end{cases} \tag{68}$$

1000 dữ liệu được cho đã được nhóm em trực quan bằng hình 49 bên dưới. Ở phần 4, từ điều kiện ban

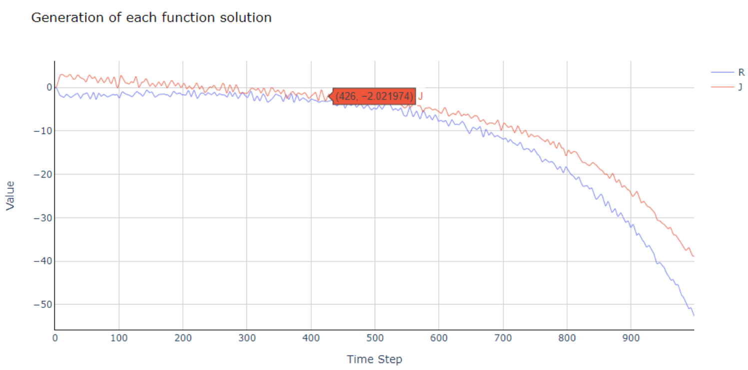


Hình 49: Data visualization của 1000 dữ liệu

đầu R_0, J_0 và h_0 ta có thể tính được giá trị R_1 và J_1 bằng phương pháp Euler, hay nói cách khác dữ liệu mang tính trình tự. Từ đó, ta có thể liên tưởng đến mạng neural hồi tiếp (Recurrent Neural Network - RNN).

5.2 Lọc bỏ dữ liệu nhiễu

Từ giả thiết và hình 49, ta cần loại bỏ dữ liệu nhiễu trước khi đưa vào xử lý. Kết quả được biểu thị ở hình 50.Ta có thể thấy dữ liệu sau khi lọc có phần mượt mà hơn ban đầu.

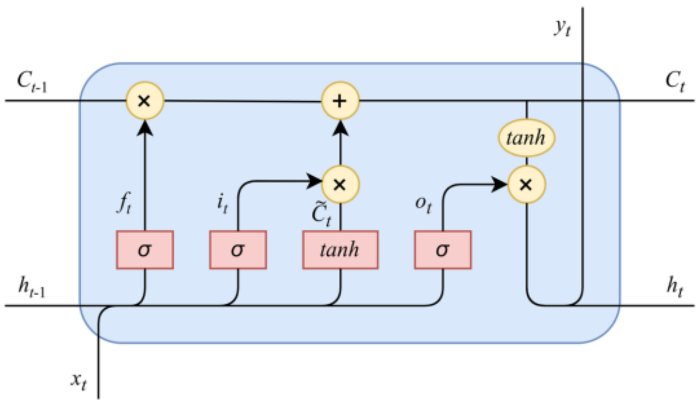


Hình 50: Data visualization của 1000 dữ liệu sau khi lọc

5.3 Long short term memory

Khác với những mạng neural khác, Recurrent Neural Network - RNN xử lý dữ liệu một các tuần tự thay vì xử lý dữ liệu cùng một lúc. Với những mạng neural thông thường sẽ không phù hợp với loại dữ liệu này vì không có sự phân biệt giữa dữ liệu trước và sau. Tuy nhiên, một hạn chế của RNN là xảy ra hiện tượng vanishing gradient. Mô hình Long short term memory -LSTM sinh ra là để hạn chế hiện tượng này. LSTM là một mô hình RNN nhưng với kiến trúc phức tạp hơn, giúp nó có thể giữ lại được thông tin từ các trạng thái trước đó xa hơn so với mô hình RNN truyền thống.

Dựa vào hình 51, ở thời gian t của mô hình LSTM, ta có:



Hình 51: Kiến trúc mô hình LSTM

- **Input:** c_{t-1}, h_{t-1} và x_t. Trong đó, x_t là input của mô hình tại thời gian t, c_{t-1} và h_{t-1}là output từ mô hình LSTM ở thời gian t-1.
- **Output:** c_t và h_t. Trong đó c_t là cell state, h_t là hidden state.
- f_t, i_t và o_t lần lượt là forget gate, input gate và output gate.
  - **Forget gate:** $f_t = \sigma(U_f * x_t + W_f * h_{t-1} + b_f$.
  - **Input gate:** $i_t = \sigma(U_i * x_t + W_i * h_{t-1} + b_i$.
  - **Output gate:** $o_t = \sigma(U_o * x_t + W_o * h_{t-1} + b_o$.

Dựa vào hình 51 và các công thức, ta có thể tính được các giá trị sau:

- $\tilde{c}_t = tanh(U_c * x_t + W_c * h_{t-1} + b_c)$.
- $c_t = f_t * c_{t-1} + i_t * \tilde{c}_t$.
-$h_t = o_t * tanh(c_t)$.

Nhận xét

h_t và $\tilde{c}_t$ khá giống với RNN, nên mô hình có short term memory. Hơn nữa, c_t giống như một băng chuyền ở trên mô hình RNN, những thông tin quan trọng và dùng ở sau sẽ ít nhiều được gửi vào và dùng khi cần, nên mô hình có long term memory. Do đó mô hình LSTM có cả short term memory và long term memory.

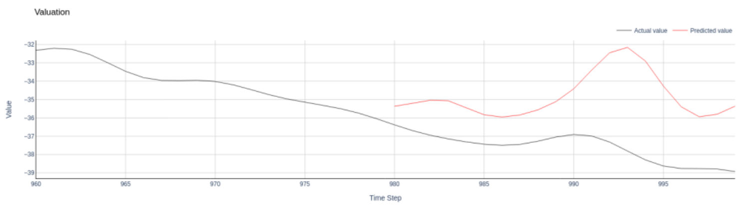
5.4 Sinh tập dữ liệu từ tập dữ liệu sẵn có từ LSTM

Tập dữ liệu sau khi được lọc sẽ được chia thành 2 tập dữ liệu để training. Mô hình LSTM sẽ được chọn để giải quyết bài toán này với 20 dữ liệu vào và 20 dữ liệu ra. Mô hình được training trong 1000 epochs. với df là tập dữ liệu đầu vào, sử dụng mốc thời gian để chia 2 tập dữ liệu

```
func = 'R'
scaler = MinMaxScaler(feature_range=(-1, 1))

df_train=df.iloc[:, 0:-2*timestep].copy()
df_test=df.iloc[:, -2*timestep:].copy()
```

Kết quả thu được: Kết quả dự đoán J và R không chênh lệch nhau nhiều.
Kiểm thử: Sinh dữ liệu và so sánh với dữ liệu kiểm tra. Gía trị tiếp theo trong chuỗi được sinh ra từ mô hình huấn luyện sinh J được biểu thị như sau



Hình 52: Chuỗi dự đoán so với thực tế

5.5 Ước lượng các hệ số a, b, c, d

Hiện tại, với mô hình nhóm chúng em tìm hiểu được thì việc dự đoán a,b,c,d từ dữ liệu là chưa khả thi. Nên chúng em tạm thời dự đoán dữ liệu tiếp theo từ tập dữ liệu ban đầu. Tuy nhiên, chúng em có một ý tưởng để dự đoán được a,b,c,d từ tập dữ liệu hiện có, đó là từ tập dữ liệu, ta có thể sử dụng Euler Method để tạo lại hề phương trình có xuất hiện a,b,c,d và từ đó giải được nhiều giá trị, lấy trung bình ta sẽ có giá trị a,b,c,d xấp xỉ mà ta cần tìm.

Log file

- 16/11: Họp nhóm lần 1, phân công công việc.
- 26/11: Họp nhóm lần 2, bàn luận câu hỏi 1, 2, 3.
- 3/12: Họp nhóm lần 3, bàn luận câu hỏi 4.
- 8/12: Họp nhóm lần 4, bàn luận câu hỏi 5.
- 11/12: Tổng hợp viết báo cáo.
- 18/12: Hoàn thành báo cáo.

References

[1] Vladimir I Arnold. Ordinary Differential Equations. Springer Science Business Media, 1992

[2] System of First Order Differential Equations. Url: https://www.unf.edu/~mzhan/chapter4.pdf

[3] Duc Q Nguyen, Nghia Q Vo, Thinh T Nguyen, Khuong Nguyen-An, Quang H Nguyen, Dang N Tran, and Tho T Quan. Becaked: An explainable artificial intelligence model for covid-19 forecasting. Scientific Reports, 12(1):1–26, 2022.

[4] Isaac Elishakoff, Differential Equations of Love and Love of Differential Equations

[5] Phase Plane Portraits. Link: https://www.math.colostate.edu/~gerhard/M345/CHP/ch9_3-4.pdf