Лабораторная работа 3

Решение систем линейных алгебраических уравнений

1. Даны матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_i)$, $i=\overline{1,7}$, $j=\overline{1,7}$. Используя средства пакета **Mathematica** (функции **Norm**, **Inverse**, **LinearSolve**):

а) найти число обусловленности матрицы A в норме-максимум $\|\cdot\|_\infty$;

б) решить точную систему линейных уравнений $AX=B$;

в) решить три возмущенные системы вида $AX=B+\Delta B$, увеличив значение правой части **только последнего уравнения** системы $AX=B$ последовательно на 0,01%; 0,1% и на 1%;

г) найти прогнозируемую предельную относительную погрешность решения каждой возмущенной системы;

д) найти относительную погрешность решения каждой возмущенной системы; сделать вывод о зависимости относительной погрешности от величины возмущения и числа обусловленности матрицы A.

Выполнить задание для двух случаев:

1) $a_{ij}=\begin{cases}1, & i>j,\\ i+1, & i=j,\\ 2, & i<j,\end{cases}$ $\quad b_i=2ki-i^2$; $\qquad$ **2)** $a_{ij}=\dfrac{1}{i+j-1}$ $\quad b_i=3i-2k$,

где $i=\overline{1,7}$, $j=\overline{1,7}$, k – номер вашего варианта.

2. Решить методом прогонки трехдиагональную систему, составить таблицу прогоночных коэффициентов L_i, M_i, $i=\overline{1,5}$.

2.1. $$\begin{cases}4x_1-x_2=5,\\ 2x_1+10x_2+4x_3=18,\\ 5x_2+20x_3+3x_4=-50,\\ 4x_3+10x_4-x_5=30,\\ 2x_4-3x_5=-2.\end{cases}$$

2.2. $$\begin{cases}4x_1+x_2=7,\\ x_1+11x_2+2x_3=24,\\ 3x_2+14x_3-6x_4=-37,\\ 2x_3+19x_4+7x_5=-44,\\ x_4+5x_5=26.\end{cases}$$

2.3. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 17, \\ x_1 - 12x_2 + 4x_3 = 23, \\ 2x_2 + 11x_3 + 3x_4 = 32, \\ -7x_3 + 10x_4 - x_5 = 25, \\ x_4 - 11x_5 = -7. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = -11, \\ 2x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_2 - 12x_3 + x_4 = -31, \\ 3x_3 + 21x_4 - 6x_5 = -21, \\ 4x_4 + 7x_5 = 35. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 11, \\ -2x_1 + 14x_2 + 5x_3 = 33, \\ 3x_2 - 17x_3 + 2x_4 = 28, \\ x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 19, \\ 3x_4 + 5x_5 = -17. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = -10, \\ 3x_1 + 19x_2 + 4x_3 = -2, \\ -x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 14, \\ 2x_3 - 11x_4 - 5x_5 = -26, \\ 2x_4 + 9x_5 = -3. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = -5, \\ 4x_1 - 9x_2 - 2x_3 = 45, \\ x_2 + 13x_3 + 2x_4 = 27, \\ 2x_3 + 11x_4 + 5x_5 = 34, \\ -x_4 - 7x_5 = 4. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = -14, \\ x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_2 - 9x_3 - 4x_4 = -23, \\ x_3 + 13x_4 + 2x_5 = -8, \\ 3x_4 + 15x_5 = 12. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 = 1, \\ -2x_1 + 14x_2 - 7x_3 = 23, \\ 3x_2 + 21x_3 + 5x_4 = 17, \\ x_3 - 10x_4 + 4x_5 = 21, \\ 2x_4 - 9x_5 = -4. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 5, \\ 3x_1 - 17x_2 - 4x_3 = 11, \\ x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 22, \\ -2x_3 + 15x_4 + 4x_5 = 13, \\ 3x_4 + 11x_5 = -19. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 20x_1 + 7x_2 = 20, \\ 3x_1 + 12x + 8x_3 = 11, \\ 10x_2 + 14x_3 + 3x_4 = 14, \\ 5x_3 + 11x_4 + 3x_5 = 8, \\ 10x_4 + 11x_5 = 11. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 13x_1 - 12x_2 = 13, \\ 5x_1 + 7x_2 - x_3 = 4, \\ -3x_2 + 7x_3 - x_4 = 7, \\ 9x_3 + 14x_4 - x_5 = 8, \\ x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 14x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5, \\ 7x_2 + 9x_3 - x_4 = 6, \\ 11x_3 + 15x_4 + 2x_5 = 15, \\ -3x_4 + 4x_5 = -3. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 2, \\ x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 5, \\ 8x_2 + 12x_3 + 2x_4 = 22, \\ 10x_3 + 13x_4 - x_5 = 22, \\ x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 = 6, \\ x_1 + 11x_2 - x_3 = -9, \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3, \\ x_3 + 5x_4 - x_5 = -5, \\ 5x_4 + 7x_5 = 2. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 10, \\ 2x_3 - 4x_4 + x_5 = -5, \\ x_4 - 2x_5 = -6. \end{cases}$

3. Решить систему n-го порядка $AX = B$ методом Якоби и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ при $n = 10$ и $n = 20$. Сравнить число итераций, необходимых для достижения точности ε этими методами. Здесь $A = (a_{ij})$ – матрица с диагональным преобладанием, $B = (b_i)$ – вектор-столбец,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 2n, & i = j, \end{cases} \qquad b_i = (2n-1)i + \frac{n(n+1)}{2} + (3n-1)(k-1),$$

где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, k – номер вашего варианта.