Лабораторная работа 3

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Цель работы: Изучение приближения функции, заданной в узлах, алгебраическими многочленами; построение интерполяционного многочлена Ньютона и таблицы разделенных разностей; применение интерполирования для построения графика функции, заданной в узлах; исследование зависимости погрешности интерполирования от числа и взаимного расположения узлов и от гладкости функции.

План проведения работы:

1. Ознакомьтесь с постановкой задачи интерполирования и описанием алгоритма построения интерполяционного многочлена Ньютона $N_n(x)$.

2. Ознакомьтесь с описанием функций пакета MATHEMATICA, используемых для построения интерполяционного многочлена, графиков функции и многочлена и исследования погрешности.

3. Рассмотрите решение типового примера.

4. Постройте интерполяционные многочлены степени n для функции $f(x)$, заданной в равноотстоящих точках отрезка $[a,b]$ (согласно номера вашего варианта), и исследуйте зависимость погрешности интерполирования от степени полинома n (n = 4, 5, 6, 7 и 10) (или, что равносильно, от расстояния между узлами $h=(b-a)/n$).
   Для этого:
   а) вычислите $n+1$ значение заданной функции в равноотстоящих точках отрезка $x_j = a + \frac{b-a}{n} \cdot j, \quad j = 0,1,...,n$;
   б) постройте и выведите таблицу разделенных разностей по значениям функции в $n+1$ узле;
   в) найдите интерполяционный многочлен $N_n(x)$ для интерполирования вперед;

г) найдите интерполяционный многочлен $N_n(x)$ с помощью встроенной функции ***InterpolatingPolinomial*** ;

д) выведите графики функции *f(x)* , интерполяционного многочлена и абсолютной величины погрешности интерполирования на отрезке $[a\text{-}h, b+h]$;

е) найдите максимальную погрешность интерполирования на отрезке $[a,b]$ как разности между значениями функции и построенного интерполяционного многочлена $N_n(x)$

ж)* найдите оценку погрешности интерполирования на отрезке $[a, b]$ с помощью априорной и апостериорной формул оценки погрешности.

5*) Смоделируйте погрешность задания значений функции, увеличив значения в нечетных узлах и уменьшив значения в четных последовательно на 0.01, 0.1 и на 1% для *n*= 4, 7 и 10. Повторите выполнение п. 4 для данных с погрешностью.

Сделайте выводы о зависимость погрешности интерполирования от числа узлов и от гладкости функции.

Сделайте выводы о зависимости между ростом разделенных разностей в таблице и погрешностью интерполирования, порядком возросших разностей и рекомендуемым числом узлов интерполирования (на основании апостериорной оценки погрешности интерполирования).

Встроенные функции пакета Mathematica, используемые для приближения функций

Abs [*x*] – абсолютная величина *x*.

Append [*lst*, *x*] создает новый список, добавляя элемент *x* в конец списка *lst*.

Array [*a*, *n*, *k*] – символьный список {*a*[*k*], *a*[*k*+*1*], …, *a*[*k*+*n*–*1*]}, состоящий из *n* элементов. Если *n = 0*, то функция дает пустой список { }. Аргумент *k* (начальное значение индекса) может быть нулевым или отрицательным. *Array*[*a*, *n*] эквивалентно *Array*[*a*, *n*, *1*], то есть дает список {*a*[*1*], *a*[*2*], …, *a*[*n*]}.

Clear [*s1*, *s2*, …] стирает любые значения, присвоенные указанным символам *s1*, *s2*, …

Collect [*expr*, *x*] группирует члены выражения *expr* с одной и той же степенью переменной *x*.

ColumnForm [*lst*, *w1*, *w2*] выводит список *lst* на экран в виде колонки. Аргументы *w1* и *w2* необязательны.

Первый задает способ выравнивания элементов списка в колонке по горизонтали:

Center – по центру,
Left – по левому краю,
Right – по правому краю.

Второй определяет выравнивание в ячейке вывода по вертикали:

Center – по центру,
Below – по верхнему краю,
Above – по нижнему краю.

ColumnForm[*lst*] эквивалентно ***ColumnForm***[*lst*, *Left*, *Below*].

InterpolatingPolinomial [*lst*, *x*] – многочлен по переменной *x*, который в узловых точках {*x1*, *x2*, …} принимает заданные значения {*y1*, *y2*, …}. В общем случае аргумент *lst* представлен списком {{*x1*, *y1*}, {*x2*, *y2*}, …}. Список {{*1*, *y1*}, {*2*, *y2*}, …} можно задать как {*y1*, *y2*, …}.

FindMaximum [{*f* [*x*],*a*≤*x*≤*b*}, *x*] находит локальный максимум функции *f*(*x*) на отрезке [*a*,*b*] .

ListPlot [*lst*, *optns*] предназначена для построения графика по точкам. В общем случае аргумент *lst* представлен списком {{*x1*, *y1*}, {*x2*, *y2*}, …}, где (*x1*, *y1*), (*x2*, *y2*), … – координаты отмечаемых точек. Список {{*1*, *y1*}, {*2*, *y2*}, …} можно задать как {*y1*, *y2*, …}. Список также можно создать какой-либо функцией, например *Range* или *Table*.

Для функции *ListPlot* используются, в основном, те же опции *optns*, что и для функции *Plot*. Если требуется соединять точки на графике отрезками прямых, то нужно установить дополнительную опцию *PlotJoined* → *True*. Для управления размером точек используется директива *PointSize*, а не *Thickness*, как для линий.

Max [*a*, *b*, *c*, …] – максимальное значение из *a*, *b*, *c*, … Любой из аргументов может быть списком.

PaddedForm [*expr*, {*m*, *n*}] задает размер *m* (количество цифр) десятичного представления вещественного значения выражения *expr* при выводе его на экран. Здесь *n* – количество цифр после десятичной точки.

Plot [{*f1*, *f2*, …}, {*x*, *xmin*, *xmax*}, *optns*] предназначена для построения графиков функций *y* = *f1*(*x*), *y* = *f2*(*x*), … при изменении независимой переменной *x* в пределах от *xmin* до *xmax*. При этом используется прямоугольная (декартова) система координат. Необязательные аргументы *optns* (опции), общие и для других графических функций, служат для настройки вида графиков.

Если опции не указаны, то их стандартные значения устанавливаются автоматически.

Show [*plot*, *opns*] выводит на экран уже сформированный (например, функцией *plot*) график. С помощью второго параметра можно изменить значения опций в той графической функции, при помощи которой был получен рисунок.

Show [{*plot1*, *plot2*, …}, *opns*] совмещает в одном графическом окне несколько графиков. Функция полезна в тех случаях, когда желательно, не вычисляя заново исходные графики *plot1*, *plot2*, …, просмотреть их при иных настройках опций *opns* или сопоставить.

Table [*expr*, *n*] – список из *n* значений одного и того же выражения *expr*.

Table [*expr*, {*i*, *m*, *n*, *d*}] – список значений выражения *expr*, зависящего от параметра *i*, для *i* от *m* до *n* с шагом *d*.

Table [*expr*, {*i*, *m*, *n*}] эквивалентно *Table* [*expr*, {*i*, *m*, *n*, *1*}].

Table [*expr*, {*i*, *n*}] эквивалентно *Table* [*expr*, {*i*, *1*, *n*, *1*}].

Table [*expr*, {*i*, *m1*, *n1*}, {*j*, *m2*, *n2*}, …] порождает многоуровневые списки, используется для создания числовых таблиц.

TableForm [*lst*, *opns*] выводит на экран двухуровневый список *lst* в виде таблицы, высота строк и ширина столбцов которой определяются максимальными размерами элементов списка. Линейный список представляется строкой или колонкой в зависимости от значения (*Row* или *Column*) опции *TableDirections*. Если установить опцию *TableHeadings*, то можно вывести названия для строк и столбцов.

Пример построения интерполяционного полинома Ньютона и исследования погрешности интерполирования

ПРИМЕР 1.

Постройте интерполяционный многочлен степени $n=4$ для функции $f(x)=e^x$, заданной на отрезке $[-2,2]$ и оцените погрешность интерполирования на отрезке.

Выведите таблицу разделенных разностей по значениям функции в $n+1$ узле, графики функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена $N_4(x)$ и абсолютной величины погрешности интерполирования $R_n(x)$.

РЕШЕНИЕ:

а) вычисляем $n+1$ значение заданной функции в равноотстоящих точках отрезка:

```
n = 4   b = 2; a = -2;   h = (b - a)/n
```

Сформируем таблицу данной функции

```
XDT = {}; YDT = {};
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  xdata[i] = a + i × h;
  ydata[i] = N[Exp[xdata[i]]];
  XDT = Append[XDT, xdata[i]];
  YDT = Append[YDT, ydata[i]];];
Array[xdata, {n + 1, 0}]; Array[ydata, {n + 1, 0}];
MatrixForm[XDT]        MatrixForm[YDT]
```

ixForm=

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.135335 \\ 0.367879 \\ 1. \\ 2.71828 \\ 7.38906 \end{pmatrix}$$

б) вычисляем таблицу разностей по рекуррентной формуле с помощью циклов:

```
Array[difftab, {n + 1, n + 1}, {0, 0}];
(*Сначала определяются элементы, которые соответствуют пустым клеткам таблицы*)
For[k = 1, k ≤ n, k++,
  For[i = n, i ≥ n - k, i--, difftab[i, k] = ""]];
(*Затем определяются элементы, в которых хранятся разности*)
For[i = 0, i ≤ n, i++, difftab[i, 0] = ydata[i]];
For[k = 1, k ≤ n, k++,
  For[i = 0, i ≤ n - k, i++,
   difftab[i, k] = (difftab[i + 1, k - 1] - difftab[i, k - 1])/(xdata[i + k] - xdata[i])]];
tab1 = Array[difftab, {n + 1, n + 1}, {0, 0}];
PaddedForm[TableForm[tab1], {6, 5}]
```

```
edForm=
0.13534    0.23254    0.19979    0.11443    0.04916
0.36788    0.63212    0.54308    0.31106
1.00000    1.71828    1.47625
2.71828    4.67077
7.38906
```

в) находим интерполяционные многочлены $N_n(x)$ для интерполирования вперед (формируем последовательно список четырех многочленов Ньютона – 1-го, 2-го, 3-его и 4 порядка):

```
pln = difftab[0, 0] + difftab[0, 1] × (x - xdata[0]);
n = 4; lst = List[pln];
For[k = 2, k ≤ n, k++,
цикл ДЛЯ
                                          k-1
  pln = lst[[k - 1]] + difftab[0, k] × ∏ (x - xdata[i]);
                                          i=0
  lst = Append[lst, pln]];
nwtn[x_] := N[lst[[n]]];
ColumnForm[lst]
(*Функция ColumnForm выводит список lst в колонку*)

0.135335 + 0.232544 (2. + x)
0.135335 + 0.232544 (2. + x) + 0.199788 (1. + x) (2. + x)
0.135335 + 0.232544 (2. + x) + 0.199788 (1. + x) (2. + x) + 0.114431 (0. + x) (1. + x) (2. + x)
0.135335 + 0.232544 (2. + x) + 0.199788 (1. + x) (2. + x) + 0.114431 (0. + x) (1. + x) (2. + x) + 0.0491561 (-1. + x) (0. + x) (1. + x) (2. + x)

ColumnForm[Collect[lst, x]]
                сгруппировать
```

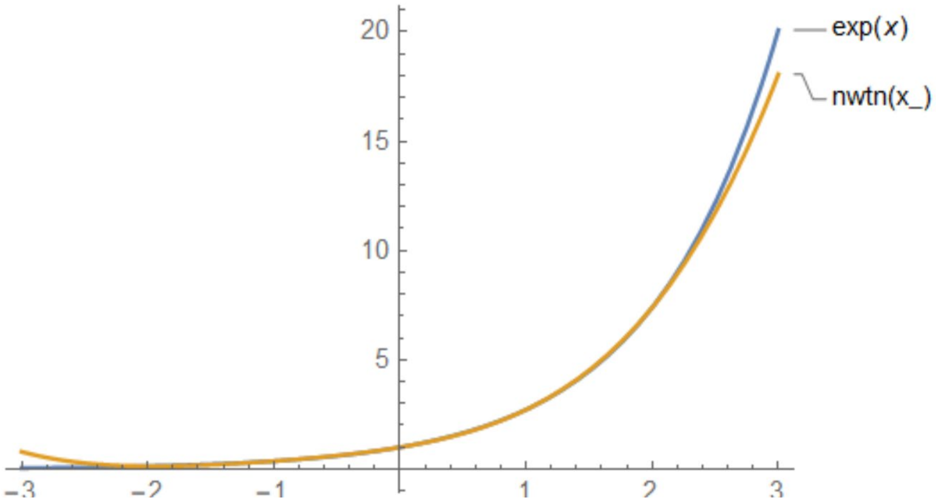
г) с помощью встроенной функции ***InterpolatingPolinomial*** получаем решение:

```
0.600424 + 0.232544 x
1. + 0.831909 x + 0.199788 x^2
1. + 1.06077 x + 0.543081 x^2 + 0.114431 x^3
1. + 0.962458 x + 0.493925 x^2 + 0.212743 x^3 + 0.0491561 x^4
data = {{-2, 0.13534}, {-1, 0.36788}, {0, 1.00000}, {1, 2.71828}, {2, 7.38906}}
inpln := InterpolatingPolynomial[data, x]; Collect[inpln, x]
         интерполяционный многочлен                 сгруппировать
1. + 0.962457 x + 0.493923 x^2 + 0.212743 x^3 + 0.0491567 x^4
```

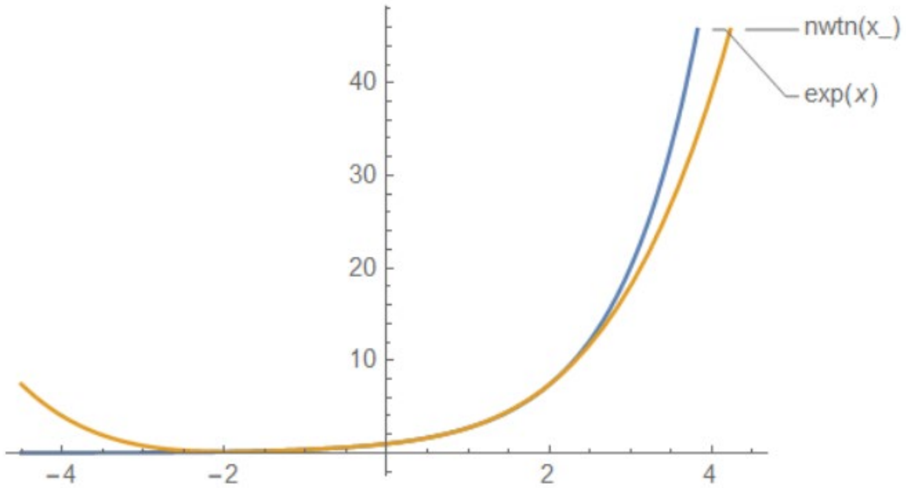
Обратите внимание, что коэффициенты многочлена, найденного нами выше, и полученные встроенной функцией незначительно отличаются (следствие ошибок округления).

д) выводим график интерполяционного многочлена Ньютона $N_4(x)$ и функции $f(x)$ на отрезках $[a\text{-}h,\ b+h]$ и $[a\text{-}2h,\ b+2h]$;

```
Plot[{Exp[x], nwtn[x_]}, {x, -3, 3}, PlotLabels → "Expressions"]
|графи··· |показательная функция             |пометки на графике
```




```
Plot[{Exp[x], nwtn[x_]}, {x, -4.5, 4.5}, PlotLabels → "Expressions"]
|графи··· |показательная функция             |пометки на графике
```



e) реализуем алгоритм вычисления интерполяционного многочлена $N_n(x)$ по схеме Горнера:

```
Pln = {}; P[n + 1] = 0;
For[i = n, i ≥ 0, i--, P[i] = difftab[0, i] + (x - xdata[i]) × P[i + 1];
|цикл ДЛЯ
 Pln = Append[Pln, P[i]];]
```

```
ColumnForm[Pln]
```

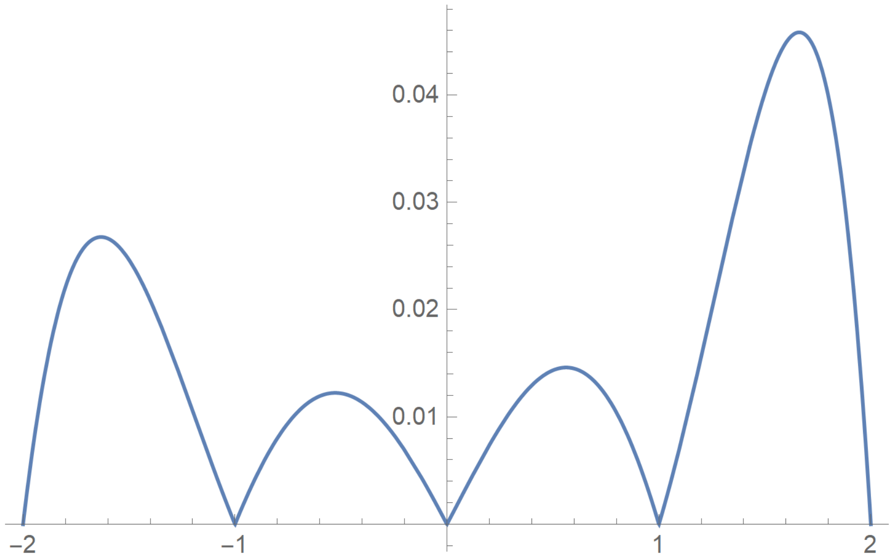
```
0.0491561
0.114431 + 0.0491561 (-1 + x)
0.199788 + (0.114431 + 0.0491561 (-1 + x)) x
0.232544 + (1 + x) (0.199788 + (0.114431 + 0.0491561 (-1 + x)) x)
0.135335 + (2 + x) (0.232544 + (1 + x) (0.199788 + (0.114431 + 0.0491561 (-1 + x)) x))
```

Найдем максимальную абсолютную величину разности между значениями функции e^x и интерполяционного многочлена $N_n(x)$, вычисленного для значений x_j между узлами интерполирования:

$$\max_{x_j \in [-2,2]} \left| e^x - N_4(x) \right| = 0.0454365.$$

Построим график абсолютной разности между значениями функции e^x и интерполяционного многочлена $N_n(x)$ на отрезке [-2,2]:

```
Plot[Abs[Exp[x] - nwtn[x]], {x, -2, 2}]
```



Величину погрешности интерполирования на отрезке [-2,2] можно найти при помощи встроенной функции пакета Mathematica:

```
FindMaximum[{Abs[Exp[x] - nwtn[x]], -2 < x < 2}, {x, 2}]
```

```
{0.0458373, {2 → 1.66208}}
```

Максимальная величина погрешности на отрезке достигается для x=1.66208 и равна $\max_{x \in [-2,2]} \left| e^x - N_4(x) \right| = 0.0458373$.

ж)* воспользуемся *априорной* формулой оценки погрешности интерполирования на отрезке $[a, b]$:

$$\left| f(x) - P_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = \max_{x \in [-2,2]} e^x = e^2.$$

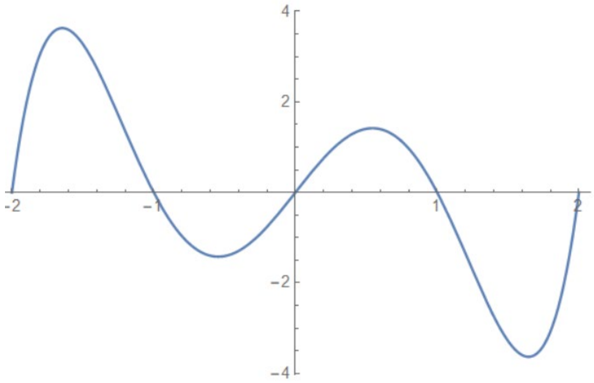
Тогда $\left|f(x)-P_4(x)\right| \le \dfrac{e^2}{5!} \max\limits_{x\in[a,b]} \prod\limits_{i=0}^{4}(x-x_i) \le 0{,}0615755 \cdot \max\limits_{x\in[a,b]} \prod\limits_{i=0}^{4}(x-x_i)$

Найдем максимальное значение произведения $\max\limits_{x\in[-2,2]} \prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$:

```
f[x_] := ∏_{i=0}^{n} (x - xdata[i])
Collect[f[x], x]
сгруппировать
4 x - 5 x^3 + x^5
```

Построим график этой функции:

```
Plot[f[x], {x, -2, 2}]
график функции
```




```
FindMaximum[{f[x], -2 ≤ x ≤ 2}, {x, -2}]
найти максимум
{3.63143, {x → -1.64443}}
```

Тогда погрешность интерполирования на отрезке [-2,2] оценивается величиной

$$\left|f(x)-P_4(x)\right| \le \frac{e^2}{5!} \max_{x\in[-2,2]} \prod_{i=0}^{4}(x-x_i) \le 0{,}0615755 \times 3{,}63143 = 0{,}223607.$$

Можно воспользоваться *апостериорной* формулой оценки погрешности. Для этого нужно увеличить количество узлов, вычислить разделенные разности *n+1* порядка, которые являются оценкой значения производной *n+1* порядка, и найти среди них максимальную.

Добавляем еще один узел и пересчитываем таблицу разделенных разностей на том же отрезке, но для n=5.

```
b = 2; a = -2;
h = (b - a)/n
```

$\frac{4}{5}$

```
MatrixForm[XDT]
```
матричная форма

```
MatrixForm[YDT]
```
матричная форма

trixForm=

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

latrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.135335 \\ 0.301194 \\ 0.67032 \\ 1.49182 \\ 3.32012 \\ 7.38906 \end{pmatrix}$$

```
PaddedForm[TableForm[tab1], {6, 5}]
```
форма числа ⋯ табличная форма

addedForm=

0.13534	0.20732	0.15880	0.08109	0.03106	0.00952
0.30119	0.46141	0.35342	0.18047	0.06912	
0.67032	1.02688	0.78655	0.40165		
1.49182	2.28537	1.75051			
3.32012	5.08617				
7.38906					

Согласно свойству разделенной разности справедливо следующее равенство

$$f(x_0, x_1, ..., x_5) \quad = \quad \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = 0{,}00951522$$

Значение ξ равно 0.132629, в то время как максимум производной достигается при x=2 и равен $\frac{e^2}{5!} = 0{,}0615755$.

Как видно из сравнения полученных величин, чтобы получить более точную апостериорную оценку с помощью разделенных разностей, требуется взять больше дополнительных узлов интерполирования.

Для выполнения задания 4 лабораторной работы полностью повторите аналогичное построение полиномов степени n = 5, 6, 7 и 10 и исследуйте зависимость погрешности интерполирования от степени полинома n.

3.4 Варианты заданий

№	$f(x)$	$[a,b]$	№	$f(x)$	$[a,b]$
1	e^{x}	[-2,2]	7	$ln\ x$	[1,3]
2	$sin\ x$	[0,2π]	8	$arcsin\ x$	[-1,1]
3	$xcos\ x$	[-π, π]	9	$arctg\ x$	[-1,2]
4	$tg\ x$	[-π/4, π/4]	10	$x^{0.5}$	[0,4]
5	$ctg\ x$	[0.3, 2π/3]	11	$1/x$	[0.2,3]
6	$1/x^2$	[0.5,2]	12	$x^{1/3}$	[0,8]