Лабораторная работа 2

Интерполяция и среднеквадратичное приближение

1. Создать таблицу значений функции $f(x)$, разбив отрезок $[0, 6]$ на n равных частей точками x_i $(i = \overline{0,n})$. Для полученной таблично заданной в равноотстоящих узлах функции $f(x)$, выполнить следующие действия при $n = 6$ и $n = 10$:

а) построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $f(x)$ и $L_n(x)$ на одном чертеже);

б) создать таблицу конечных разностей функции $f(x)$ по точкам $(x_i, f(x_i))$, $i = \overline{0,n}$;

в) построить второй интерполяционный многочлен Ньютона $P_n(x)$, проиллюстрировать графически;

г) построить интерполяционный многочлен Ньютона $Np_n(x)$ с помощью функции **InterpolatingPolynomial** пакета **Mathematica**, проиллюстрировать графически;

д) вычислить значения функции $f(x)$ и всех построенных интерполяционных многочленов $L_n(x)$, $P_n(x)$ и $Np_n(x)$ в точке $x = 2{,}4316$;

е) построить график погрешности интерполирования многочленом Ньютона $R_n(x) = \left| f(x) - Np_n(x) \right|$ на отрезке $[0, 6]$, найти максимум погрешности $R_n(x)$ на отрезке $[0, 6]$ с помощью функции **FindMaximum** пакета **Mathematica**;

ж) исследовать зависимость погрешности интерполирования $R_n(x)$ от числа узлов интерполяции (степени многочлена n).

1.1. $f(x) = 5\exp\left(-\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) - 2\sin\sqrt{x}$.

1.2. $f(x) = \dfrac{3x + \pi}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}$.

1.3. $f(x)=\sqrt{x^3+4}\cdot\cos\left(\frac{x}{\sqrt{17}}+\frac{1}{21}\right).$

1.4. $f(x)=\frac{4x^2-5x+1}{\sqrt{2+x^2+\sqrt{(2+x^2)^5}}}.$

1.5. $f(x)=\sqrt{3}\exp\left(-\frac{1}{22}x^3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right).$

1.6. $f(x)=\exp\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\cdot\operatorname{th}\left(\frac{x^3}{11}+\frac{1}{3}\right).$

1.7. $f(x)=\frac{2\sqrt{21}\cdot\sin(3x^2/28)+\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2+x^2+\sqrt{(4+x^2)^3}}}.$

1.8. $f(x)=\exp\left(2x-\frac{2x^2}{7}\right)\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{3x^5}{14}+\frac{5}{6}\right).$

1.9. $f(x)=3+\left(\frac{2}{7}x-\operatorname{ch}\frac{3x}{13}\right)\cdot\ln(x^2+2x+3).$

1.10. $f(x)=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x+5}+\pi}{\sqrt{3x^8+11x^4+33}}.$

1.11. $f(x)=4\exp\left(-\frac{2}{7}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{1}{13}\right)+7\cos\sqrt{4x+1}.$

1.12. $f(x)=\frac{7x+12\sin x}{\sqrt{\pi+x^2+\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}}.$

1.13. $f(x)=\sqrt[5]{x^6+4x^2+1}\cdot\sin\left(\frac{2x}{\sqrt{31}}+\frac{1}{7}\sqrt{x+5}+\frac{1}{18}\right).$

1.14. $f(x)=\left(x+\sqrt{\pi+1}\right)\cdot\exp\left(-\frac{4}{39}\sqrt{x^5}+\frac{5}{9}x+\frac{1}{4}\right).$

1.15. $f(x)=\left(\frac{5}{11}x+\cos\frac{3x}{2}-\sqrt{x}\operatorname{sh}\frac{x}{6}\right)\cdot\log_2(x^2+4x+5).$

1.16. $f(x)=\exp\left(3x-\frac{x^2}{6}\right)\cdot\operatorname{arccrc}\left(\frac{2x^7}{35}+1\right).$

2. Создать таблицу значений функции $f(x)$ (1.1 – 1.16), разбив отрезок $[0, 6]$ на n частей неравноотстоящими точками x_i вида $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t_i$, где t_i – корни многочлена Чебышёва $T_{n+1}(t)$ $(i = \overline{0,n})$. Для полученной таблично заданной функции $f(x)$, выполнить следующие действия при $n = 6$ и $n = 10$:

а) создать таблицу разделенных разностей функции $f(x)$ по точкам $(x_i, f(x_i))$, $i = \overline{0,n}$;

б) построить интерполяционный многочлен Ньютона $Pnr_n(x)$ для неравноотстоящих узлов, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $f(x)$ и $Pnr_n(x)$ на одном чертеже);

в) построить интерполирующую функцию $Intf_n(x)$ с помощью функции **Interpolation** пакета **Mathematica**, проиллюстрировать графически;

г) вычислить значения функции $f(x)$ и построенных интерполяционных многочленов $Pnr_n(x)$ и $Intf_n(x)$ в точке $x = 2{,}4316$;

д) найти максимумы абсолютных погрешностей интерполирования функции $f(x)$ многочленом Ньютона $Pnr_n(x)$ и функцией $Intf_n(x)$ на отрезке $[0, 6]$ с помощью функции **FindMaximum** пакета **Mathematica**.

3. Сравнить результаты заданий 1 и 2 для равноотстоящих и неравноотстоящих узлов и сделать выводы о зависимость погрешности интерполирования от числа узлов и их расположения на отрезке.

4. Используя таблицу значений функции $f(x)$ в равноотстоящих точках отрезка $[0, 6]$, полученной в задании 1 при $n = 10$, выполнить следующие действия:

а) построить интерполяционный кубический сплайн дефекта 1 $S_3(x)$ для функции $f(x)$, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $f(x)$ и $S_3(x)$ на одном чертеже);

б) выполнить интерполяцию сплайном $Sf(x)$ с помощью функции **Interpolation[*data*,Method->“Spline”]**, проиллюстрировать графически;

в) построить интерполяционный кубический сплайн Spl с помощью функции **SplineFit[*data*,Cubic]** (предварительно загрузить пакет сплайн-интерполяции командой **Needs[“Splines`”]**), проиллюстрировать графически (для построения графика сплайна Spl использовать функцию **ParametricPlot**);

г) вычислить значения функции $f(x)$ и построенных интерполяционных сплайнов $S_3(x)$, $Sf(x)$ и Spl в точке $x = 2{,}4316$.

5. Используя таблицу значений функции $f(x)$ в равноотстоящих точках отрезка $[0, 6]$, полученной в задании 1 при $n = 10$, выполнить следующие действия:

а) аппроксимировать с помощью метода наименьших квадратов функцию $f(x)$ многочленом первой степени $Q_1(x)$, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и график функции $Q_1(x)$ на одном чертеже);

б) аппроксимировать с помощью метода наименьших квадратов функцию $f(x)$ многочленом второй степени $Q_2(x)$, проиллюстрировать графически;

в) найти многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения третьей и четвертой степеней ($Q_3(x)$ и $Q_4(x)$) с помощью функции **Fit** пакета **Mathematica**, проиллюстрировать графически;

г) вычислить значения функции $f(x)$ и построенных многочленов $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ и $Q_4(x)$ в точке $x = 2{,}4316$;

д) сравнить результаты, полученные в пунктах а, б и в, изобразив на одном чертеже точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ и $Q_4(x)$
.