Лабораторная работа 3

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Цель работы: Изучение приближения функции, заданной в узлах, алгебраическими многочленами; построение интерполяционного многочлена Ньютона и таблицы разделенных разностей; применение интерполирования для построения графика функции, заданной в узлах; исследование зависимости погрешности интерполирования от числа и взаимного расположения узлов и от гладкости функции.

План проведения работы:

1. Ознакомьтесь с постановкой задачи интерполирования и описанием алгоритма построения интерполяционного многочлена Ньютона $N_n(x)$.

2. Ознакомьтесь с описанием функций пакета MATHEMATICA, используемых для построения интерполяционного многочлена, графиков функции и многочлена и исследования погрешности.

3. Рассмотрите решение типового примера.

4. Постройте интерполяционные многочлены степени n для функции *f(x)*, заданной в равноотстоящих точках отрезка $[a,b]$ (согласно номера вашего варианта), и исследуйте зависимость погрешности интерполирования от степени полинома *n* (n = 4, 5, 6, 7 и 10) (или, что равносильно, от расстояния между узлами $h=(b-a)/n$).
   Для этого:
   а) вычислите $n+1$ значение заданной функции в равноотстоящих точках
      отрезка $x_j = a + \dfrac{b-a}{n}\cdot j, \quad j = 0,1,...,n$;
   б) постройте и выведите таблицу разделенных разностей по значениям
      функции в $n+1$ узле;
   в) найдите интерполяционный многочлен $N_n(x)$ для интерполирования
      вперед;

г) найдите интерполяционный многочлен $N_n(x)$ с помощью встроенной функции ***InterpolatingPolinomial*** ;

д) выведите графики функции *f(x)* , интерполяционного многочлена и абсолютной величины погрешности интерполирования на отрезке $[a\text{-}h, b+h]$;

е) найдите максимальную погрешность интерполирования на отрезке $[a,b]$ как разности между значениями функции и построенного интерполяционного многочлена $N_n(x)$

ж)* найдите оценку погрешности интерполирования на отрезке $[a, b]$ с помощью априорной и апостериорной формул оценки погрешности.

5*) Смоделируйте погрешность задания значений функции, увеличив значения в нечетных узлах и уменьшив значения в четных последовательно на 0.01, 0.1 и на 1% для *n*= 4, 7 и 10. Повторите выполнение п. 4 для данных с погрешностью.

Сделайте выводы о зависимость погрешности интерполирования от числа узлов и от гладкости функции.

Сделайте выводы о зависимости между ростом разделенных разностей в таблице и погрешностью интерполирования, порядком возросших разностей и рекомендуемым числом узлов интерполирования (на основании апостериорной оценки погрешности интерполирования).

6) Повторите действия пункта 4) для неравноотстоящих узлов Чебышева на отрезке (расположите узлы пропорционально корням многочлена Чебышёва), постройте интерполяционные многочлены Ньютона для неравноотстоящих узлов при помощи функции помощью встроенной функции ***InterpolatingPolinomial*** , проиллюстрируйте графически (изобразить точки и графики функции, многочленов и абсолютной погрешности). Сравнить результаты заданий 4 и 6 для равноотстоящих и неравноотстоящих узлов и сделайте выводы.

Встроенные функции пакета Mathematica, используемые для приближения функций

Abs [*x*] – абсолютная величина *x*.

Append [*lst*, *x*] создает новый список, добавляя элемент *x* в конец списка *lst*.

Array [*a*, *n*, *k*] – символьный список {*a*[*k*], *a*[*k+1*], …, *a*[*k+n–1*]}, состоящий из *n* элементов. Если *n = 0*, то функция дает пустой список { }. Аргумент

k (начальное значение индекса) может быть нулевым или отрицательным. *Array*[a, n] эквивалентно *Array*[a, n, 1], то есть дает список $\{a[1], a[2], \ldots, a[n]\}$.

Clear [$s1$, $s2$, …] стирает любые значения, присвоенные указанным символам $s1$, $s2$, …

Collect [*expr*, x] группирует члены выражения *expr* с одной и той же степенью переменной x.

ColumnForm [*lst*, $w1$, $w2$] выводит список *lst* на экран в виде колонки. Аргументы $w1$ и $w2$ необязательны.

Первый задает способ выравнивания элементов списка в колонке по горизонтали:

Center – по центру,
Left – по левому краю,
Right – по правому краю.

Второй определяет выравнивание в ячейке вывода по вертикали:

Center – по центру,
Below – по верхнему краю,
Above – по нижнему краю.

ColumnForm[*lst*] эквивалентно ***ColumnForm***[*lst*, *Left*, *Below*].

InterpolatingPolinomial [*lst*, x] – многочлен по переменной x, который в узловых точках $\{x1, x2, \ldots\}$ принимает заданные значения $\{y1, y2, \ldots\}$. В общем случае аргумент *lst* представлен списком $\{\{x1, y1\}, \{x2, y2\}, \ldots\}$. Список $\{\{1, y1\}, \{2, y2\}, \ldots\}$ можно задать как $\{y1, y2, \ldots\}$.

FindMaximum [$\{f[x], a \le x \le b\}$, x] находит локальный максимум функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

ListPlot [*lst*, *optns*] предназначена для построения графика по точкам. В общем случае аргумент *lst* представлен списком $\{\{x1, y1\}, \{x2, y2\}, \ldots\}$, где $(x1, y1)$, $(x2, y2)$, … – координаты отмечаемых точек. Список $\{\{1, y1\}, \{2, y2\}, \ldots\}$ можно задать как $\{y1, y2, \ldots\}$. Список также можно создать какой-либо функцией, например *Range* или *Table*.

Для функции *ListPlot* используются, в основном, те же опции *optns*, что и для функции *Plot*. Если требуется соединять точки на графике отрезками прямых, то нужно установить дополнительную опцию *PlotJoined* → *True*. Для управления размером точек используется директива *PointSize*, а не *Thickness*, как для линий.

Max [a, b, c, …] – максимальное значение из a, b, c, … Любой из аргументов может быть списком.

PaddedForm [*expr*, {*m*, *n*}] задает размер *m* (количество цифр) десятичного представления вещественного значения выражения *expr* при выводе его на экран. Здесь *n* – количество цифр после десятичной точки.

Plot [{*f1*, *f2*, …}, {*x*, *xmin*, *xmax*}, *optns*] предназначена для построения графиков функций $y = f1(x)$, $y = f2(x)$, … при изменении независимой переменной x в пределах от *xmin* до *xmax*. При этом используется прямоугольная (декартова) система координат. Необязательные аргументы *optns* (опции), общие и для других графических функций, служат для настройки вида графиков. Если опции не указаны, то их стандартные значения устанавливаются автоматически.

Show [*plot*, *opns*] выводит на экран уже сформированный (например, функцией *plot*) график. С помощью второго параметра можно изменить значения опций в той графической функции, при помощи которой был получен рисунок.

Show [{*plot1*, *plot2*, …}, *opns*] совмещает в одном графическом окне несколько графиков. Функция полезна в тех случаях, когда желательно, не вычисляя заново исходные графики *plot1*, *plot2*, …, просмотреть их при иных настройках опций *opns* или сопоставить.

Table [*expr*, *n*] – список из *n* значений одного и того же выражения *expr*.

Table [*expr*, {*i*, *m*, *n*, *d*}] – список значений выражения *expr*, зависящего от параметра *i*, для *i* от *m* до *n* с шагом *d*.

Table [*expr*, {*i*, *m*, *n*}] эквивалентно *Table* [*expr*, {*i*, *m*, *n*, *1*}].

Table [*expr*, {*i*, *n*}] эквивалентно *Table* [*expr*, {*i*, *1*, *n*, *1*}].

Table [*expr*, {*i*, *m1*, *n1*}, {*j*, *m2*, *n2*}, …] порождает многоуровневые списки, используется для создания числовых таблиц.

TableForm [*lst*, *opns*] выводит на экран двухуровневый список *lst* в виде таблицы, высота строк и ширина столбцов которой определяются максимальными размерами элементов списка. Линейный список представляется строкой или колонкой в зависимости от значения (*Row* или *Column*) опции *TableDirections*. Если установить опцию *TableHeadings*, то можно вывести названия для строк и столбцов.

Пример построения интерполяционного полинома Ньютона и исследования погрешности интерполирования

ПРИМЕР 1.

Постройте интерполяционный многочлен степени $n=4$ для функции $f(x)=e^x$, заданной на отрезке $[-2,2]$ и оцените погрешность интерполирования на отрезке.

Выведите таблицу разделенных разностей по значениям функции в $n+1$ узле, графики функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена $N_4(x)$ и абсолютной величины погрешности интерполирования $R_n(x)$.

РЕШЕНИЕ:

а) вычисляем $n+1$ значение заданной функции в равноотстоящих точках отрезка:

```
n = 4    b = 2; a = -2;    h = (b - a)/n
```

Сформируем таблицу данной функции

```
XDT = {}; YDT = {};
For[i = 0, i ≤ n, i++,
|цикл ДЛЯ
  xdata[i] = a + i × h;
  ydata[i] = N[Exp[xdata[i]]];
             |··· |показательная функция
  XDT = Append[XDT, xdata[i]];
        |добавить в конец
  YDT = Append[YDT, ydata[i]];];
Array[xdata, {n + 1, 0}]; Array[ydata, {n + 1, 0}];
MatrixForm[XDT]          MatrixForm[YDT]
|матричная форма         |матричная форма
```

ixForm= $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ixForm= $\begin{pmatrix} 0.135335 \\ 0.367879 \\ 1. \\ 2.71828 \\ 7.38906 \end{pmatrix}$

б) вычисляем таблицу разностей по рекуррентной формуле с помощью циклов:

```
Array[difftab, {n + 1, n + 1}, {0, 0}];
|массив
(*Сначала определяются элементы, которые соответствуют пустым клеткам таблицы*)
For[k = 1, k ≤ n, k++,
|цикл ДЛЯ
  For[i = n, i ≥ n - k, i--, difftab[i, k] = ""]];
  |цикл ДЛЯ
(*Затем определяются элементы, в которых хранятся разности*)
For[i = 0, i ≤ n, i++, difftab[i, 0] = ydata[i]];
|цикл ДЛЯ
```

```
For[k = 1, k ≤ n, k++,
цикл ДЛЯ
  For[i = 0, i ≤ n - k, i++,
  цикл ДЛЯ
   difftab[i, k] = (difftab[i + 1, k - 1] - difftab[i, k - 1]) / (xdata[i + k] - xdata[i])]];
tab1 = Array[difftab, {n + 1, n + 1}, {0, 0}];
             массив
PaddedForm[TableForm[tab1], {6, 5}]
форма числа ··· табличная форма
```

```
dedForm=
0.13534   0.23254   0.19979   0.11443   0.04916
0.36788   0.63212   0.54308   0.31106
1.00000   1.71828   1.47625
2.71828   4.67077
7.38906
```

в) находим интерполяционные многочлены $N_n(x)$ для интерполирования вперед (формируем последовательно список четырех многочленов Ньютона – 1-го, 2-го, 3-его и 4 порядка):

```
pln = difftab[0, 0] + difftab[0, 1] × (x - xdata[0]);
n = 4; lst = List[pln];
For[k = 2, k ≤ n, k++,
цикл ДЛЯ
  pln = lst[[k - 1]] + difftab[0, k] × ∏_{i=0}^{k-1} (x - xdata[i]);
  lst = Append[lst, pln]];
nwtn[x_] := N[lst[[n]]];
ColumnForm[lst]
(*Функция ColumnForm выводит список lst в колонку*)
```

```
0.135335 + 0.232544 (2. + x)
0.135335 + 0.232544 (2. + x) + 0.199788 (1. + x) (2. + x)
0.135335 + 0.232544 (2. + x) + 0.199788 (1. + x) (2. + x) + 0.114431 (0. + x) (1. + x) (2. + x)
0.135335 + 0.232544 (2. + x) + 0.199788 (1. + x) (2. + x) + 0.114431 (0. + x) (1. + x) (2. + x) + 0.0491561 (-1. + x) (0. + x) (1. + x) (2. + x)
```

```
ColumnForm[Collect[lst, x]]
                сгруппировать
```

г) с помощью встроенной функции ***InterpolatingPolinomial*** получаем решение:

$0.600424 + 0.232544\,x$

$1. + 0.831909\,x + 0.199788\,x^2$

$1. + 1.06077\,x + 0.543081\,x^2 + 0.114431\,x^3$

$1. + 0.962458\,x + 0.493925\,x^2 + 0.212743\,x^3 + 0.0491561\,x^4$

```
data = {{-2, 0.13534}, {-1, 0.36788}, {0, 1.00000}, {1, 2.71828}, {2, 7.38906}}
```

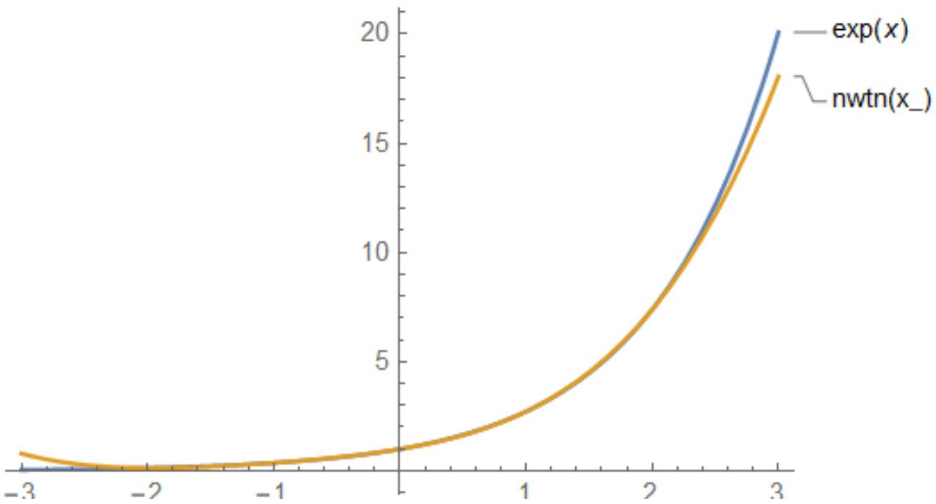
```
inpln := InterpolatingPolynomial[data, x]; Collect[inpln, x]
```
интерполяционный многочлен сгруппировать

$1. + 0.962457\,x + 0.493923\,x^2 + 0.212743\,x^3 + 0.0491567\,x^4$

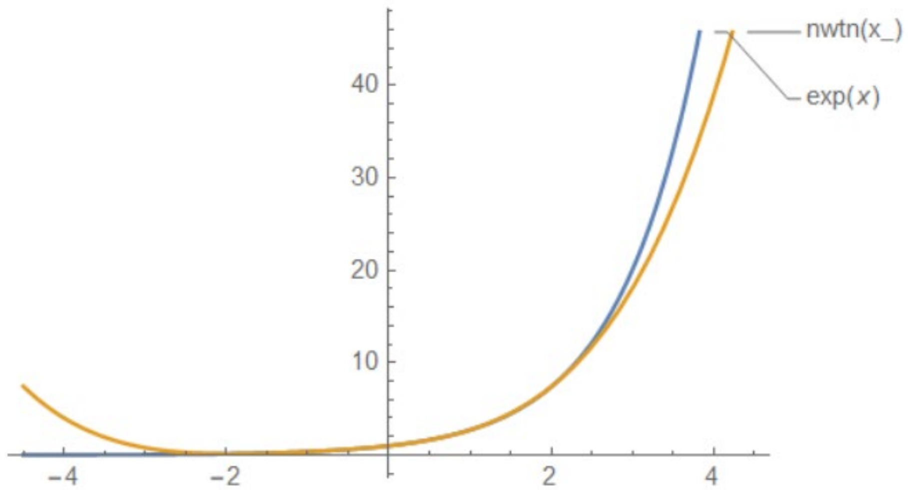
Обратите внимание, что коэффициенты многочлена, найденного нами выше, и полученные встроенной функцией незначительно отличаются (следствие ошибок округления).

д) выводим график интерполяционного многочлена Ньютона $N_4(x)$ и функции $f(x)$ на отрезках $[a-h,\ b+h]$ и $[a-2h,\ b+2h]$;

```
Plot[{Exp[x], nwtn[x_]}, {x, -3, 3}, PlotLabels → "Expressions"]
```
графи··· показательная функция пометки на графике




```
Plot[{Exp[x], nwtn[x_]}, {x, -4.5, 4.5}, PlotLabels → "Expressions"]
```
графи··· показательная функция пометки на графике



е) реализуем алгоритм вычисления интерполяционного многочлена $N_n(x)$ по схеме Горнера:

```
Pln = {}; P[n + 1] = 0;
```

```
For[i = n, i ≥ 0, i--, P[i] = difftab[0, i] + (x - xdata[i]) × P[i + 1];
цикл ДЛЯ
 Pln = Append[Pln, P[i]];]
```

```
ColumnForm[Pln]
```

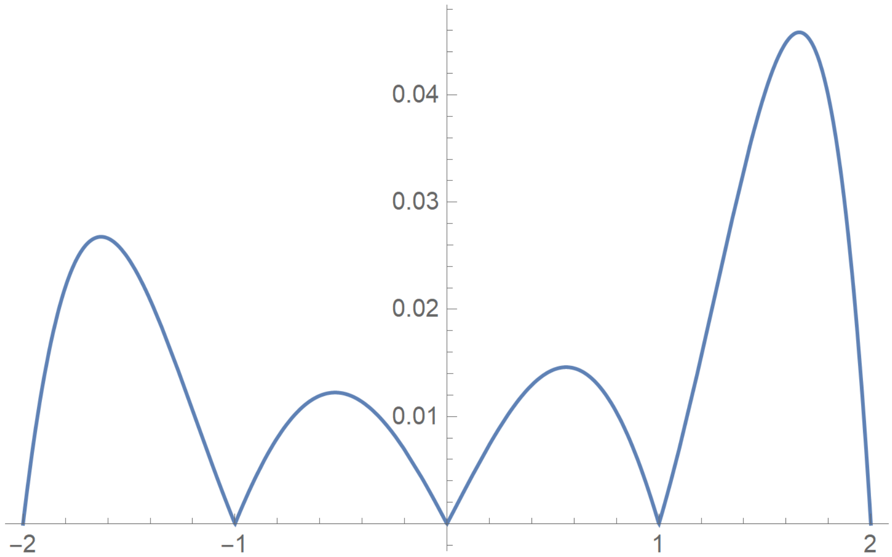
```
0.0491561
0.114431 + 0.0491561 (-1 + x)
0.199788 + (0.114431 + 0.0491561 (-1 + x)) x
0.232544 + (1 + x) (0.199788 + (0.114431 + 0.0491561 (-1 + x)) x)
0.135335 + (2 + x) (0.232544 + (1 + x) (0.199788 + (0.114431 + 0.0491561 (-1 + x)) x))
```

Найдем максимальную абсолютную величину разности между значениями функции e^x и интерполяционного многочлена $N_n(x)$, вычисленного для значений x_j между узлами интерполирования:

$$\max_{x_j \in [-2,2]} \left| e^x - N_4(x) \right| = 0.0454365.$$

Построим график абсолютной разности между значениями функции e^x и интерполяционного многочлена $N_n(x)$ на отрезке [-2,2]:

```
Plot[Abs[Exp[x] - nwtn[x]], {x, -2, 2}]
```



Величину погрешности интерполирования на отрезке [-2,2] можно найти при помощи встроенной функции пакета Mathematica:

```
FindMaximum[{Abs[Exp[x] - nwtn[x]], -2 < x < 2}, {x, 2}]
```

```
{0.0458373, {2 → 1.66208}}
```

Максимальная величина погрешности на отрезке достигается для x=1.66208 и равна $\max\limits_{x\in[-2,2]}\left|e^x - N_4(x)\right| = 0.0458373$.

*ж)** воспользуемся *априорной* формулой оценки погрешности интерполирования на отрезке $[a, b]$:

$$\left|f(x)-P_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \max_{x\in[-2,2]} e^x = e^2.$$

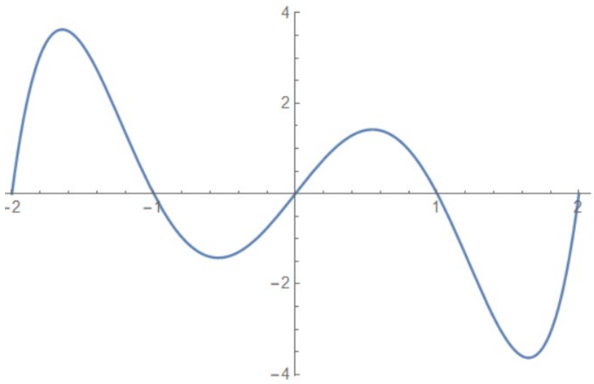
Тогда $\left|f(x)-P_4(x)\right| \le \dfrac{e^2}{5!} \max\limits_{x\in[a,b]}\prod\limits_{i=0}^{4}(x-x_i) \le 0{,}0615755\cdot\max\limits_{x\in[a,b]}\prod\limits_{i=0}^{4}(x-x_i)$

Найдем максимальное значение произведения $\max\limits_{x\in[-2,2]}\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$:

```
f[x_] := ∏_{i=0}^{n} (x - xdata[i])
Collect[f[x], x]
сгруппировать
4 x - 5 x^3 + x^5
```

Построим график этой функции:

```
Plot[f[x], {x, -2, 2}]
график функции
```




```
FindMaximum[{f[x], -2 ≤ x ≤ 2}, {x, -2}]
найти максимум
{3.63143, {x → -1.64443}}
```

Тогда погрешность интерполирования на отрезке [-2,2] оценивается величиной

$$\left|f(x)-P_4(x)\right| \le \frac{e^2}{5!} \max_{x\in[-2,2]}\prod_{i=0}^{4}(x-x_i) \le 0{,}0615755\times 3{,}63143 = 0{,}223607.$$

Можно воспользоваться *апостериорной* формулой оценки погрешности. Для этого нужно увеличить количество узлов, вычислить разделенные разности *n+1* порядка, которые являются оценкой значения производной *n+1* порядка, и найти среди них максимальную.

Добавляем еще один узел и пересчитываем таблицу разделенных разностей на том же отрезке, но для n=5.

```
b = 2; a = -2;
```

$$h = \frac{b - a}{n}$$

$$\frac{4}{5}$$

```
MatrixForm[XDT]
```
матричная форма

trixForm=

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[YDT]
```
матричная форма

latrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.135335 \\ 0.301194 \\ 0.67032 \\ 1.49182 \\ 3.32012 \\ 7.38906 \end{pmatrix}$$

```
PaddedForm[TableForm[tab1], {6, 5}]
```
форма числа ⋯ табличная форма

addedForm=

0.13534	0.20732	0.15880	0.08109	0.03106	0.00952
0.30119	0.46141	0.35342	0.18047	0.06912	
0.67032	1.02688	0.78655	0.40165		
1.49182	2.28537	1.75051			
3.32012	5.08617				
7.38906					

Согласно свойству разделенной разности справедливо следующее равенство

$$f(x_0, x_1, ..., x_5) \quad = \quad \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = 0{,}00951522$$

Значение ξ равно 0.132629, в то время как максимум производной достигается при x=2 и равен $\frac{e^2}{5!} = 0{,}0615755$.

Как видно из сравнения полученных величин, чтобы получить более точную апостериорную оценку с помощью разделенных разностей, требуется взять больше дополнительных узлов интерполирования.

Для выполнения задания 4 лабораторной работы полностью повторите аналогичное построение полиномов степени n = 5, 6, 7 и 10 и исследуйте зависимость погрешности интерполирования от степени полинома n.

3.4 Варианты заданий

№	$f(x)$	$[a,b]$	№	$f(x)$	$[a,b]$
1	e^{2x}	[-2,2]	9	$arctg\ x$	[-1,2]
2	$sin\ x$	[0,2π]	10	$x^{0.5}$	[0,4]
3	$xcos\ x$	[-π, π]	11	$1/x$	[0.2,3]
4	$tg\ x$	[-π/4, π/4]	12	$x^{1/3}$	[0,8]
5	$ctg\ x$	[0.3, 2π/3]	13	$xsin(2x)$	[-π/2, π/2]
6	$1/x^2$	[0.5,2]	14	$tg\ 2x$	[-π/6, π/6]
7	$ln\ x$	[1,3]	15	$arccos\ x$	[-1,1]
8	$arcsin\ x$	[-1,1]	16	$1/x^2$	[-2,-0.5]