Structures de Données - Résumé Janvier 2010.

Dubuc Xavier

10 janvier 2010

Table des matières

1 Récapitulation des complexités **2**
1.1 Recherche 2
1.2 Tri (recherche avec succès) 2
1.3 Tri (recherche avec échec) 2

2 Notions & Idées **2**
2.1 Chapitre 2 - Arbres Binaires 2
2.2 Chapitre 3 - ABR 4
2.3 Chapitre 4 - Arbres AVL 6
2.3.1 Les rotations 6
2.4 Chapitre 5 - Tas 9
2.5 Chapitre 6 - B-Arbres 10
2.6 Chapitre 7 - Tables de hachage 12
2.7 Chapitre 8 - Tris optimaux 12

3 Algorithmes **13**
3.1 Chapitre 2 - Arbres Binaires 13
3.2 Chapitre 3 - ABR 14
3.2.1 Recherche 14
3.2.2 Insertion 14
3.2.3 Suppression 14
3.3 Chapitre 4 - Arbres AVL 14
3.4 Chapitre 5 - Tas 14
3.5 Chapitre 6 - B-Arbres 15
3.6 Chapitre 7 - Table de hachage 15
3.7 Chapitre 8 - Tris optimaux 15

1 Récapitulation des complexités

1.1 Recherche

Structures de données	Pire des cas	Moyenne
Listes non-triées	$\approx n$	$\approx n$
Listes triées	$\approx n$	$\approx \frac{n}{2}$
ABR	$\approx n$	$\approx 2\ln(n)$
Arbres AVL	$\approx log_2(n)$	/
Tas (recherche de max)	≈ 1	/
Tables de hachage	$\approx n$	$\approx \frac{l}{2}$ ($l =$ taille de la liste)

1.2 Tri (recherche avec succès)

Structures de données	Pire des cas	Moyenne
Listes non-triées	$\approx n^2$	$\approx \frac{n^2}{2}$
Listes triées	$\approx n^2$	$\approx \frac{n^2}{2}$
ABR	$\approx n^2$	$\approx n(2\ln(n))$
Arbres AVL	$\approx nlog_2(n)$	/
Tas	$\approx nlog_2(n)$	/

1.3 Tri (recherche avec échec)

Structures de données	Pire des cas	Moyenne
Listes non-triées	$\approx n^2$	$\approx n^2$
Listes triées	$\approx n^2$	$\approx \frac{n^2}{2}$
ABR	$\approx n^2$	$\approx n(2\ln(n)+2)$
Arbres AVL	$\approx nlog_2(n)$	/
Tas	$\approx nlog_2(n)$	/

2 Notions & Idées

2.1 Chapitre 2 - Arbres Binaires

<u>Définition récursive</u> : Hauteur d'un noeud :

- Hauteur des feuilles : 1
- Si un noeud a 2 fils d'hauteur respective h et h', alors ce noeud a une hauteur de $max(h, h') + 1$

<u>Définition récursive</u> : Profondeur d'un noeud :

- Profondeur de la racine : 0
- Si un noeud a une profondeur p, alors ses fils ont une profondeur de $p + 1$.

Propriété : pour un arbre binaire à n noeuds de hauteur h, on a : $h \leq n \leq 2^h - 1$ et $log_2(n+1) \leq h \leq n$.
<u>Preuve</u> : Fixons h,

- recherchons le nombre minimum n_{min} de noeuds d'un arbre binaire de hauteur h :

```
o                      o                    o
 \                      \                  /
  o                      o                o
 ...          ou        /       ou      ...
    \                 ...               /
     o                   \             o
                          o
```

  C'est-à-dire pour tout noeud qui n'est pas une feuille, ce noeud possède un seul fils ; on a donc $n_{min} = h$.
- recherchons le nombre maximum n_{max} de noeuds d'un arbre binaire de hauteur h :

```
          o                niveau 1 : 1 noeud  (= 2^(1-1))
        /   \
       o     o             niveau 2 : 2 noeuds (= 2^(2-1))
      / \   / \
         ...
    / \       / \
   o   o ... o   o         niveau n : 2^(h-1) noeuds
```

On a donc $n_max = 2^0 + 2^1 + ...2^{h-1} = \frac{2^k - 2^0}{2-1} = 2^h - 1$

De tout ça on tire facilement que pour un arbre de hauteur h et de n noeuds, on a $n_{min} \leq n \leq n_{max}$ et donc :

$$\boxed{h \leq n \leq 2^h - 1}$$

De plus, comme on a $n \leq 2^h - 1$ et ceci étant équivalent à $n + 1 \leq 2^h$ on peut écrire :

$$\boxed{\log_2{(n+1)} \leq h}$$

Propriété : Soit un arbre binaire à n noeuds de hauteur h, soit n_I le nombre de noeuds internes qu'il possède et n_F le nombre de feuilles (donc $n_I + n_F = n$) on a $1 \leq n_F \leq 2^{h-1}$ et $h - 1 \leq n_I \leq 2^{h-1} - 1$.
Preuve : on procède comme pour la preuve précédente,

```
o                            o
 \                         /   \
  o                       o     o
  ...                    / \   / \
    \    nI = h-1           ...         nF = 2^(h-1)
     o   nF = 1        / \       / \    nI = 2^h - 1 - 2^(h-1) = 2^(h-1) - 1
                      o   o ... o   o
```

Remarque : n_I correspond au nombre de noeud d'un arbre de hauteur $h - 1$.

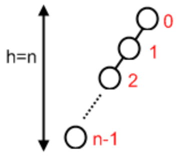
Définition : T, arbre binaire, $C(T)$ son complété, on définit :
- *Internal path length*(**IPL**) : $I(T)$: somme des profondeurs des noeuds internes de T.
- *External path length*(**EPL**) : $E(T)$: somme des profondeurs des feuilles de T.

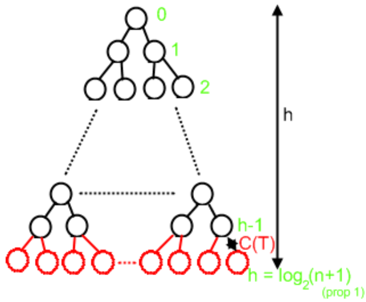
On a $E(T) = I(T) + 2n$,

Preuve :
Calculons de 2 façons $\sum_{v\ noeuds\ de\ C(T)} prof(v)$:
$(1) = \sum_{v\ noeuds\ internes\ de\ C(T)} prof(v) + \sum_{v\ feuilles\ de\ C(T)} prof(v)$
$= \sum_{v\ noeuds\ de\ T} prof(v) + \sum_{v\ feuilles\ de\ C(T)} prof(v) = I(T) + E(T)$
$(2) = prof(racine) + \sum_{v\ noeuds\ de\ T} 2\,(prof(v) + 1) = 0 + 2\sum_{v\ noeuds\ de\ T} prof(v) + 2n$
Explications : tout noeud de $C(T)$ est le fils d'un noeud interne de $C(T)$ c'est- à-dire un noeud de T (sauf la racine), de plus, tout noeud interne de $C(T)$ a 2 fils par définition.
$(1) = (2) \Rightarrow I(T) + E(T) = 2n + 2I(T) \Rightarrow \boxed{E(T) = I(T) + 2n}$

Prouvons que $(n+1)\log_2\left\{\frac{(n+1)}{4}\right\} < I(T) \leq \frac{n(n-1)}{2}$,

On s'interesse à un arbre qui a un nombre minimum de noeuds, et à un arbre qui a un nombre maximum de noeuds.





Premier dessin :
$I(T) = 0 + 1 + ... + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$
Second dessin :
$I(T) = E(T) - 2n$
$= \sum_{v\ noeuds\ de\ C(T)} prof(v) = \sum_{v\ feuilless\ de\ C(T)} \log_2(n+1)$
$= (n+1)\log_2(n+1) - 2n$

En général :
$(n+1)\log_2(n+1) - 2n \leq I(T) \leq \dfrac{(n-1)n}{2}$
$(n+1)\log_2(n+1) - 2(n+1) < I(T)$
$(n+1)\left[\log_2(n+1) - 2\right] < I(T)$
$(n+1)\left[\log_2(n+1) - \log_2(4)\right] < I(T)$
$(n+1)\log_2\left(\dfrac{(n+1)}{4}\right) < I(T)$

$\rightarrow$ h a une complexité comprise entre $\log_2 n$ et n et I(T) entre $n\ \log_2 n$ et n^2.

Soit T un arbre binaire ayant n noeuds alors son complété $(C(T))$ a $2n+1$ noeuds. *En particulier, T a $n+1$ références vides)*
Preuve :
$C(T)$ a des feuilles qui correspondent aux références vides de T, il a n noeuds internes, 2 fils par noeuds pour tout noeud qui ne sont pas des feuilles ; il a donc au total $n+m$ noeuds. A part la racine, tout noeud est fils d'un certains noeud interne donc $C(T)$ a 1(racine)+$2n$ (les 2 fils de chacun des n noeuds internes). **On a donc $m+n = 2n+1$ et donc** $\boxed{m = n+1}$**.**
Quant aux arbres k-aires, $\boxed{\textbf{C(T) a kn+1}}$ noeuds et $\boxed{\textbf{T a (k-1)n+1}}$ références vides.

2.2 Chapitre 3 - ABR

L'**IPL** d'un **ABR** vaut en moyenne $2n\ln(n)$ et comme **EPL** = **IPL**+$2n$, on a que **EPL** $= 2n\ln(n) + 2n$.
Preuve : rappellons nous que dans le $(n+1)\log_2(\frac{n+1}{4}) \leq I_n \leq \frac{n(n-1)}{2}$
On va calculer I_n moyen par récurrence :
$I_1 = 0$
$I_2 = ...I_3 = \frac{8}{3}$ (cf. exemple du cours)
... $I_n = ?$

1. Fixons une donnée k telle que $1 \leq k \leq n$ et supposons qu'elle soit racine, on a donc le schéma :

```
T ->  k
     / \   (remarque : si prof(f) = x dans T1 ou T2 alors prof(f) = x+1 dans T)
    T1 T2
```

   T_1 contient les données allant de 1 à $k-1$ et T_2 de $k+1$ à n.
   On exprime $I(T)$ en fonction de $I(T_1)$ et $I(T_2)$:
   $= I(T_1) + (k-1)\,(nombre\ de\ noeuds\ dans\ T_1) + I(T_2) + (n-k)\,(nombre\ de\ noeuds\ dans\ T_2) + prof(racine)$
   $= I(T_1) + I(T_2) + (n-1)$
2. Fixons h, mais passons à la moyenne pour les 2 sous arbres de k :
   $I(T) = I_{k-1} + I_{n-k} + (n-1)$ *(= IPL moyen pour un arbre de $k-1$ données)*

3. Passons à une racine quelconque :
   $\rightarrow$ moyenne : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{k-1} + I_{n-k} + (n-1)$

On cherche à se ramener à une récurrence faible ($I_n = f(I_{n-1})$) :
$I_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} I_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} I_{n-k} + \sum_{k=1}^{n} n-1\right) = \frac{2}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} I_{k-1}\right) + (n-1)$

On calcule $nI_n - (n-1)I_{n-1}$:
$= \left(2\sum_{k=1}^{n} I_{k-1} + n(n-1)\right) - \left(2\sum_{k=1}^{n-1} I_{k-1} + (n-1)(n-2)\right)$
$= 2I_{n-1} + n(n-1) - (n-1)(n-2)$ (soustraction des termes identiques dans les 2 sommes)
$= 2I_{n-1} + (n-1)(n-(n-2))$
$= 2I_{n-1} + 2(n-1))$

On a donc : $nI_n - (n-1)I_{n-1} = 2I_{n-1} + 2(n-1)) \Rightarrow \boxed{nI_n = (n+1)I_{n-1} + 2(n-1)}$
Divisons par $n(n+1)$: $\frac{nI_n}{n(n+1)} = \frac{(n+1)I_{n-1}}{n(n+1)} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$
$\Leftrightarrow \frac{I_n}{n+1} = (\frac{I_{n-1}}{n}) + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$
$= ((\frac{I_{n-2}}{n-1}) + \frac{2(n-2)}{(n-1)n}) + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$ (récurrence)
$= (((\frac{I_{n-3}}{n-2}) + \frac{2(n-3)}{(n-2)n}) + \frac{2(n-2)}{(n-1)n}) + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$ (récurrence)
...
$= I_1 + (...)$
$= I_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{2(k-1)}{k(k+1)}$ ($I_1 = 0$)

Au final : $\frac{I_n}{n+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2(k-1)}{k(k+1)}$
On va à présent simplifier les calculs, $\frac{I_n}{n+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2(k-1)}{k(k+1)} \sim 2\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{kk} = 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$. On va approcher cette somme par une intégrale semblable :
$2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \sim 2\int_{1}^{n} \frac{1}{x}dx = 2\left[\ln x\right]_1^n = 2(\ln n - \ln 1) = 2\ln n$

On a donc $\boxed{\frac{I_n}{n+1} \sim \frac{I_n}{n} \sim I_n \sim 2\ln n}$

Vu que $E(T) = I(T) + 2n$, on a $E_n = I_n + 2n \Rightarrow \boxed{E_n = 2n\ln n + 2n}$.

Propriété : La recherche avec succès dans un **ABR** demande en moyenne un nombre de comparaisons $\sim 2\ln n$.
<u>Preuve</u> :

1. Fixons k une donnée de cet arbre que l'on recherche :

```
     o
    /
   o
    \
     o
    /
   k     -> profondeur de k
```

   Le nombre de comparaisons pour trouver k vaut $prof(k) + 1$.

2. en moyenne $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} prof(k) + 1$
   $= \frac{1}{n}\sum_{v\ noeuds} prof(v) + 1$
   $= \frac{1}{n}\sum_{v\ noeuds} prof(v) + \frac{1}{n}\sum_{v\ noeuds} 1$
   $= \frac{I_n}{n} + 1$
   $\sim \frac{2n\ln n}{n} + 1$
   $\sim \boxed{2\ln n}$

Propriété : La recherche avec échec dans un **ABR** demande en moyenne un nombre de comparaisons $\sim 2\ln n$.

1. Fixons une référence vide sur laquelle on tombe par une recherche :

```
        o
       /
      o
       \
        o
       /
      X     -> profondeur ref vide
```

   Le nombre de comparaisons est égal à la profondeur de la référence vide.

2. En moyenne, sachant qu'on a $n+1$ références vides,
   $\frac{1}{n+1}\sum_{r\ ref\ vide} prof(r)$
   $= \frac{1}{n+1}\sum_{f\ feuilles\ C(T)} prof(feuille)$
   $= \frac{1}{n+1}E_n$
   $\sim \frac{2n\ln(n)+2n}{n+1}$
   $\sim \boxed{2\ln n}$

2.3 Chapitre 4 - Arbres AVL

Un arbre **AVL** est un arbre binaire de recherche tel que $\forall$ noeud qu'il contient, la balance de ce noeud est égale à -1, 0 ou 1. *(La balance étant la différence entre les hauteurs de ses 2 sous- arbres)*

2.3.1 Les rotations

Rotation gauche

```
  k                  l
 / \       rg       / \
R   l      ====>   k   U
   / \            / \
  S   U          R   S
```

Rotation droite

```
    k                l
   / \     rd       / \
  l   R    ====>   U   k
 / \                  / \
U   S                S   R
```

Rotation double gauche

```
  k                   m
 / \       drg       /   \
R   l      ====>   k     l
   / \            / \   / \
  m   V          R   S U   V
 / \
S   U
```

On met le noeud le plus bas comme nouvelle racine, l'ancienne racine comme son fils gauche et le noeud «du milieu» comme fils droit ; ensuite on recopie dans l'ordre les sous arbres que l'on place comme les fils des 2 fils de la racine. Résulte d'une rotation droite sur le sous arbre droit de k suivi d'une rotation gauche sur l'arbre entier.

Rotation double droite

```
      k                  m
     / \      drg       /   \
    l   R     ====>    k     l
   / \                / \   / \
  V   m              V   S U   R
     / \
    S   U
```

Le **théorème de rééquilibrage** nous dit :
Soit T un arbre binaire de recherche non-vide tel que T est formé d'une racine avec 2 fils T_1 et T_2 tous deux des arbres **AVL** et $bal(T) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, on définit $p(T)$ comme :

- si $bal(T) = 2$ et $bal(T_2) \geq 0 \quad \Rightarrow p(T) = rg(T)$,
- si $bal(T) = 2$ et $bal(T_2) = -1 \Rightarrow p(T) = drg(T)$,
- si $bal(T) = -2$ et $bal(T_1) \leq 0 \Rightarrow p(T) = rd(T)$,
- si $bal(T) = -2$ et $bal(T_1) = 1 \Rightarrow p(T) = drd(T)$,
- si $bal(T) \in \{-1, 0, 1\} \qquad \Rightarrow p(T) = T$.

alors, $p(T)$ est un arbre **AVL**.
Preuve :

1. $bal(T) = 2$ et $bal(T_2) \geq 0$
   Il faut montrer que $p(T) = rg(T)$ est un arbre **AVL** :

```
Avant


           k
     /            \
    /\             l    bal >= 0 (0 ou 1) (le cas represente est le cas ou bal = 0)
   /  \          /     \
  / R  \        /\     |\
 /      \      /  \    | \
/------- \    /    \   |  \
             /   S  \  | U \
            /--------\ |----\

Apres

                 l (bal = -1) (mais peut aussi etre = 0 selon les cas)
           /          \
          k (bal = 1) |\ (mais peut aussi etre = 0 selon les cas)
     /         \      | \
    /\         /\     |  \
   /  \       /  \    |   \
  / R  \     /    \   |    \
 /      \   /   S  \  | U   \
/------- \ /        \ |------\
          /----------\
```

(Les arbres ne sont pas grossis réellement, ils le sont juste pour les besoins du dessin, afin d'illustrer les tailles différentes, on voit ainsi que S descend 1 niveau plus bas que U et R après la rotation et que S et U étaient 2 niveaux plus bas que R avant la rotation.)

Pour prouver que $p(T)$ est un arbre **AVL**, il faut montrer 2 choses :

(a) $p(T)$ est un arbre binaire de recherche ?
R,S et U étaient des arbres binaires de recherche avant la rotation (par hypothèse) et, n'ayant pas été modifiés, ils le restent. Ensuite, pour les noeuds k et l, on vérifie l'ordre :
– avant la rotation : $R < k < S < l < U$
– après la rotation : $R < K < S < l < U$
l'ordre est donc conservé. $p(T)$ est un arbre binaire de recherche.

(b) $\underline{bal(p(T)) \in \{-1, 0, 1\}\,?}$
R,S et U sont des arbres **AVL** par hypothèses et ne sont pas modifiés donc ils le restent, quant aux balances elles sont calculées sur le dessin ci-haut. $p(T)$ **est donc un arbre AVL**

2. $\underline{bal(T) = 2 \text{ et } bal(T_2) = -1}$: il faut montrer que $p(T) = drg(T)$ est un arbre **AVL** :

```
Avant

  k (balance = 2)
 /           \
|\           l (-1)
| \         /      \
|  \       m (0)   |\
| R \    /   \     | \
|----\  |\   |\    |V \
        |S\  |U\   |---\
        |--\ |--\

Apres

        m(0)
    /       \
   k(0)       l(0) (peuvent valoir egalement respectivement -1 et 1)
 /   \      /   \
|\   |\     |\   |\
|R\  |S\    |U\  |V\
|--\ |--\   |--\ |--\
```

(a) $\underline{p(T) \text{ de recherche}\,?}$
R,S,U,V ok, ordre avant $R < k < S < m < U < l < V$ et ordre après $R < k < S < m < U < l < V \Rightarrow p(T)$ est de recherche.

(b) $\underline{bal(p(T)) \in \{-1, 0, 1\}\,?}$
R,S,U,V ok, pour les 3 noeuds, cf dessin $\Rightarrow p(T)$ **est un arbre AVL**

3. Les cas où $p(T) = rd(T)$ et $p(T) = drd(T)$ sont les cas symétriques.
4. Le cas où $p(T) = T$ est trivial car il n'y a pas de rotation appliquée.

Propriété : La hauteur des arbres **AVL** est en $O(log_2 n)$.
Preuve : fixons h une hauteur et étudions la forme et le nombre de noeuds des arbres **AVL** de hauteur h, avec un nombre minimum de noeuds (noté $n_{min}(h)$)
Exemples :
$h = 0 \rightarrow$ **AVL** vide $\rightarrow n_{min}(0) = 0$
$h = 1 \rightarrow$ k $\rightarrow n_{min}(1) = 1$
$h = 2$

```
  o     o        o
 /   OU  \  OU  / \
o         o    o   o
```

$\rightarrow n_{min}(2) = 2$
$h = 3$

```
    o          o          o         o
   / \        / \        / \       / \
  o   o  OU  o   o  OU  o   o  OU o   o
 /            \          /           \
o              o        o             o
```

$\rightarrow n_{min}(3) = 4$
...
$h - 2 \rightarrow n_{min}(h-2)$
$h - 1 \rightarrow n_{min}(h-1)$
$h \rightarrow n_{min}(h) =?$

```
  racine(-1) (-1 ou 1 pour avoir moins de noeuds possibles)
 /          \
|\          |\
| \         | \
|T1\        |T2\
|   \       |---\
|----\
```

T_1 et T_2 doivent être ***AVL*** *avec un nombre minimum de noeuds* $\rightarrow n_{min}(h) = 1 + n_{min}(h-1) + n_{min}(h-2)$
Comparaison avec les nombres de **Fibonnaci** :

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n_{min}(h)$	0	1	2	4	7	12	20	33	54	88
f_h	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Il semble que $n_{min}(h) = f_{h+2} - 1$ (récurrence forte), on utilise alors la forme de récurrence faible des nombre de **Fibonnaci** pour caractériser notre nombre n_{min} : $f_h = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^h - \bar{\phi}^{-h}\right)$
On aura donc $n_{min} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{h+2} - \bar{\phi}^{-(h+2)}\right) - 1$ (où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

On aura donc pour un arbre quelconque de taille n, $n \geq n_{min}(h)$
$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{h+2} - \bar{\phi}^{-(h+2)}\right) - 1 \leq n$
$\Leftrightarrow \phi^{h+2} \leq (n+1)\sqrt{5} + \bar{\phi}^{h+2} \qquad (|\bar{\phi}| \leq 1 \Leftrightarrow |\bar{\phi}|^{h+2} \leq 1)$
$\Leftrightarrow \phi^{h+2} < (n+1)\sqrt{5} + 1$
$\Leftrightarrow \log_2\left(\phi^{h+2}\right) < \log_2\left((n+1)\sqrt{5} + 1\right)$
$\Leftrightarrow (h+2)\log_2(\phi) < \log_2\left((n+1)\sqrt{5} + 1\right)$
$\Leftrightarrow h < \frac{1}{\log_2(\phi)}\left(\log_2\left((n+1)\sqrt{5} + 1\right)\right) - 2$ (ce qui est en bleu est en $O(\log_2(n))$)
$\Leftrightarrow \boxed{h = O(\log_2(n))}$

2.4 Chapitre 5 - Tas

Propriété : Hauteur en $O(log_2 n)$.
Preuve : On fixe h, la hauteur, on étudie le nombre minimum de noeuds d'un tas de hauteur h :

```
     /\
    /  \
   /    \
  /------\
 o
```

Arbre complet sauf le dernier niveau ne contenant qu'un seul noeud.
On se rappelle qu'un arbre «complet» d'hauteur $h-1$ possède $2^{h-1} - 1$ noeuds $\rightarrow$ nombre minimum de noeuds $= (2^{h-1} - 1) + 1$. Pour un nombre quelconque de noeuds n on a :
$n \geq (2^{h-1} - 1) + 1 = 2^{h-1}$
$\rightarrow 2^{h-1} \leq n$
$\Leftrightarrow log_2(2^{h-1}) \leq log_2(n)$
$\Leftrightarrow h - 1 \leq log_2(n)$
$\Leftrightarrow h \leq log_2(n) + 1$
$\Leftrightarrow \boxed{h = O(log_2(n))}$

Construire un tas en $O(n)$: Algorithme **Buildheap**.

Preuve de la complexité : travaillons dans le pire des cas (cas où le dernier niveau est rempli)

```
                                            niveau   noeud/niveau   cout de Heapify/niveau
           o                                  1          2^0              O(h)
       /       \
      o         o                             2          2^1              ...
    / \       / \
   o   o     o   o                            3          2^2              ...
   ...         ...
  o               o                          h-1       2^(h-2)            O(2)
 / \      ...    / \
o   o           o   o                         h        2^(h-1)             /
```

Coût total $T(n)$ de l'algorithme **Buildheap** au pire :
$2^{h-2}O(2) + 2^{h-3}O(3) + ... + 2^0 O(h)$ (niveau $(h-1)$+niveau $(h-2)$+ ...+niveau 1) Faisons apparaître n à la place de h dans le calcul :
$n = 2^0 + 2^1 + ... + 2^{h-1} = 2^h - 1 \Rightarrow n + 1 = 2^h$
$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2^l} = 2^{h-l}$
Dès lors on a : $T(n)$
$= \frac{n+1}{2^2}O(2) + \frac{n+1}{2^3}O(3) + ... + \frac{n+1}{2^h}O(h)$
$= (n+1)O(\frac{1}{2^2}2 + \frac{1}{2^3}3 + ... + \frac{1}{2^h}h)$ On étudie l'expression en bleue en espérant que celle-ci soit en $O(1)$:
$2 * \frac{1}{2^2} + 3 * \frac{1}{2^3} + 4 * \frac{1}{2^4} + ... + h * \frac{1}{2^h}$
$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^h} \leq \frac{1}{2}$
$+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^h} \leq \frac{1}{2}$
$+ \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^h} \leq \frac{1}{4}$
$+ \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^h} + \leq \frac{1}{8}$
$+ ... + \frac{1}{2^h}$
$... + \frac{1}{2^h} \leq \frac{1}{2^h}$
Le tout est donc majoré par $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^h} \leq \frac{3}{2} \rightarrow$ **l'algorithme est donc en $O(1)$.**

2.5 Chapitre 6 - B-Arbres

Chaque noeud de ces arbres contient un nombre de données compris entre $t-1$ et $2t-1$ (t paramètre fixé) sauf pour la racine qui contient un nombre de données compris entre 1 et $2t-1$. Si un noeud a n données alors il aura $n+1$ fils sauf si ce noeud est une feuille (toutes les feuilles sont au même niveau). Il ya un ordre à respecter dans ces arbres, il est comme suit :
(les lettres minuscules sont des données, les majuscules des arbres)

```
 k1  k2  k3  ...  kn
 /   /   ...  \   \
T1  T2   ...  Tn  Tn+1
```

(Tous les k_i sont contenus dans un seul noeud)

L'ordre est le suivant : $T1 < k1 < T2 < k2 < ... < Tn < kn < Tn+1$.

Propriété : La hauteur d'un B-arbre est en $O(log_t n)$ (même comportement que pour les arbres **AVL**).
Preuve : Fixons h et calculons n_{min} le nombre minimum de données d'un **B-arbre** de hauteur h

```
                                                      niveau   noeuds/niv    donnees/noeud
             1                                          1              1              1
        /         \
      t-1         t-1                                   2              2             t-1
     /   \       /   \                                                  *t
   t-1   t-1   t-1   t-1                                3             2t             t-1
      ...         ...                                                   *t
      ...         ...                                   4            2t^2            t-1
      ...         ...
   /                  \                                               ...
 t-1                  t-1                                             ...
/   \       ...      /   \
t-1  t-1          t-1   t-1                             h          2t^(h-2)          t-1
```

Chaque noeud donne naissance à t fils, au total le nombre de donées n_{min} vaut :
$1 + 2(t-1) + 2t(t-1) + ... + 2t^{h-2}(t-1)$
$= 1 + 2(t-1)(1 + t + ... + t^{h-2})$
$= 1 + 2(t-1)\frac{t^{h-1}-1}{t-1}$
$= 1 + 2(t^{h-1} - 1)$
$= 2t^{h-1} - 1$
En général, si on a un **B-arbre** de hauteur h et possédant N données, on a :
$N \geq n_{min} = 2^t h - 1 - 1$
$\Leftrightarrow \frac{N+1}{2} \geq t^{h-1}$
$\Leftrightarrow log_t\left(\frac{N+1}{2}\right) \geq \log_t\left(t^{h-1}\right) = h - 1$
$\Leftrightarrow log_t\left(\frac{N+1}{2}\right) + 1 \geq h$
$\Leftrightarrow \boxed{h = O(log_t N)}$

Propriété : L'éclatement d'un noeud plein préserve la propriété de B-arbre.
Preuve :
- Nombre de données par noeud
  Le noeud référencé par T, non plein, reçoit l en plus $\rightarrow$ **OK**,
  les noeuds référéencés par T' et T'' sont de taille $\left(\frac{2t-1-1}{2}\right) = t - 1 \rightarrow$ **OK**.
- Nombre de fils par noeud
  Le noeud référencé par T a une donnée en plus et un fils en plus $\rightarrow$ **OK**,
  les noeuds référencés par T' et T'' doivent avoir t fils $\rightarrow$ **OK** ($t = \frac{2t}{2}$).
- Les feuilles : elles restent au même niveau.
- Ordre *(à regarder avec le dessin)*
  - avant : $W < k' < R < S < l < U < V < k'' < 2 < X$
  - après : idem.

CQFD.
Propriété : La fusion et le déplacement de données préserve la propriété de B-arbre.
Preuve :
- Nombre de données par noeud
  - T : inchangé
  - T' : passe de $t - 1$ données à t données (devient non-creux, comme souhaité)
  - T" : perd une donnée, pas de problème car il était non-creux.
- Nombre de fils par noeud
  - T : inchangé
  - T' : doit avoir un fils en plus : **OK** il récupère X.
  - T" : doit avoir un fils en moins : **OK** il perd X.
- Feuilles : restent au même niveau.
- Ordre des données *(à voir avec le dessin)*
  - avant : $R < 1 < S < 3 < U < l < X < m < Y < 4 < V < 2 < W$
  - après : idem

CQFD.

2.6 Chapitre 7 - Tables de hachage

Les **tables de hachage** sont utilisées dans les bases de données et dans les compilateurs entre autres. Elles sont généralement préconisées lorsqu'il s'agit de stocker un ensemble de données relativement petit par rapport au nombre total de données possibles. *(Comme par exemple stocker tous les noms des variables utilisées dans un programme, l'ensemble général étant l'ensemble des chaînes de caractères)*
Le principe de ces tables est de stocker les éléments dans un tableau de taille fixée (disons m) contenant des listes chaînées qui contiennent les données. Pour stocker les éléments, on utilise la fonction de hachage (h) qui avec une données fait correspondre un indice du tableau. *(On peut avoir par exemple $h : x \rightarrow length(x)$ avec x qui est une chaine de caractères. Plus concrètement : $h("ILove42") = 7$, la donnée "$ILove42$" sera donc stockée dans la liste chainée d'indice 7)* Toute la difficulté réside dans le choix de m et de h.

Choix de h

1ère possibilité : $h(k) = k \mod m$ (avec $U = \mathbb{N}$), en évitant toutefois de prendre m égal à une puissance de 10 ou de 2 ; l'idéal étant un nombre premier (même si, si toutes les données sont multiples de ce nombre tout sera stocké dans la case 0).
2ème possibilité : $h(k) = \lfloor m * fract(k * A) \rfloor$ où $A \in]0, 1[$ est une constante bien choisie (par exemple $A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$).
3ème possibilité : $h(k) =$ code ASCII de la chaine de caractères k à stocker.

L'*adressage direct* consiste en ce qui a été cité ci-haut, il existe également l'*adressage libre* qui permet de chercher une case au hasard et de vérifier si elle est libre, sinon prendre une suivante etc ; cette suite de case à tester est générée via une permutation des indices des cases de la table. *(la table doit donc être de taille supérieure ou égale au nombre de données)*

2.7 Chapitre 8 - Tris optimaux

Théorème : Quelque soit un algorithme de tri basé sur la comparaison de données, on ne peut pas faire mieux que du $O(n \log_2 n)$ dans le pire des cas et en moyenne.

Preuve : on étudie le nombre de comparaisons effectuées par un algorithme de tri.

Etudions le cas de tri où le moins de comparaisons possibles sont effectuées (car tris optimaux étudiés).
Exemple : tableau a contenant 3 données différentes A, B et C :

a_1	a_2	a_3

Il y a 6 possibilités de tableau a :

A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Si $a_1 < a_2$ est vrai on a les 3 tableaux suivants possibles :

A	B	C
A	C	B
B	C	A

Sinon on a les 3 tableaux suivants :

B	A	C
C	A	B
C	B	A

On continue à ramifier comme ça en comparant a_2 à a_3 et a_1 à a_3.

Commentaires :

- Avec 2 ou 3 comparaisons, on arrive à isoler chaque tableau, cela donne le nombre minimum de comparaisons pour les distinguer et donc pour pouvoir trier (on ne peut pas faire moins),
- pour 3 données, le nombres de comparaisons vaut au pire 3 et en moyenne $\frac{(2+3+3+3+3+2)}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$.

On généralise à n données distinctes, le nombre minimum de comparaisons vaut, par rapport à l'arbre dessiné par les tableaux, au pire $h-1$ et en moyenne $\frac{1}{n!}\sum_{f\ feuilles} profondeur(f)$.
Comme dit ci-haut, un arbre binaire avec $n!$ feuilles permet de décrire le nombre minimum de comparaisons à effectuer pour distinguer un tableau de n données $\neq$ parmi les $n!$ tableaux possibles. Evaluons $h-1$, nous sommes dans la situation du pire des cas, un arbre binaire de hauteur h est au pire de la forme :

```
     racine
    /      \
   / \    / \
  /\  /\  /\  /\
        ..
  /\          /\
```

Son nombre de feuilles vaut 2^{h-1}, mais notre arbre n'est certainement pas ce pire des cas au point de vue des feuilles, on peut donc écrire :
$n! \leq 2^{h-1}$
$\Leftrightarrow n\log_2\left(\frac{n}{e}\right) \leq n\log_2(n!) \leq h-1$
(Formule de ***Stirling*** *:* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow log_2(n!) \sim log_2\sqrt{2\pi n} + n\log_2\left(\frac{n}{e}\right)$*)*
Evaluons $\frac{1}{n!}\sum_{f\ feuilles} profondeur(f)$, pour cela rappellons nous que $E(T) = \sum profondeur\ feuilles\ C(T)$ et si T a k noeuds, alors son completé $C(T)$ a $k+1$ feuilles ainsi que $E(T) \sim 2k\ln k + 2k$ en moyenne dans le cas d'un arbre T avec k feuilles.
Dans notre cas on a donc $n! = k+1$ et donc $\frac{1}{n!}\sum_{f\ feuilles\ arbre\ etudie}(prof(f))$
$\sim \frac{1}{k+1}(2k\ln(k) + 2k)$
$\sim \ln(k)$
$\sim \ln(n!-1)$
$\sim \ln(n!)$
$= \boxed{O(n\log_2(n))}$ (par la formule de Stirling)

(s'attarder sur la complexité de ***Partition****)*

3 Algorithmes

3.1 Chapitre 2 - Arbres Binaires

```
Algorithme Hauteur(T)
   Entree : T arbre binaire.
   Sortie : Hauteur de T
   Si IsEmpty(T) alors retourner 0
   Sinon retourner 1 + max(Hauteur(T_right), Hauteur(T_left))

Algorithme Hauteur(T)
   Entree : T arbre binaire non-vide
   Sortie : Hauteur de T
   Si IsLeaf(T) alors retourner 1
   Sinon Si IsEmpty(T_right) alors retourner 1+Hauteur(T_left)
      Sinon Si IsEmpty(T_left) alors retourner 1+Hauteur(T_right)
         Sinon retourner 1 + max(Hauteur(T_right), Hauteur(T_left))
```

3.2 Chapitre 3 - ABR

3.2.1 Recherche

```
Algorithme Recherche(T,k)
   Entrees : T, arbre binaire de recherche et k une donnee
   Sortie  : booleen vrai ssi k est dans T.
   Si EstVide(T) alors retourner faux
   Sinon Si (T_data = k) alors retourner vrai
      Sinon Si (k > T_data ) alors retourner Recherche(T_right , k)
         Sinon retourner Recherche(T_left, k)
```

3.2.2 Insertion

```
Algorithme Insertion(T,k)
   Entrees : T, arbre binaire de recherche et k une donnee.
   Sortie  : (T modifie en T contenant k).
   Si EstVide(T) alors retourner CreationNoeud(k)
   Si (T_data < k) alors Insertion(T_right, k)
      Sinon Insertion(T_left , k)
```

3.2.3 Suppression

```
Algorithme Suppression(T,k)
   Entrees : T arbre BR, k donnee
   Sortie : / (T modifie)
   Si non IsEmpty(T) alors
      Si k = T_data alors SuppressionRacine(T)
      Sinon Si (k > T_data) alors Suppression(T_right,k)
         Sinon Suppression(T_left,k)

Algorithme SuppressionRacine(T)
   Entree : T, arbre BR non vide
   Sortie : / (T modifie)
   Si isLeaf(T) alors T <- arbre vide
   Sinon Si isEmpty(T_right) alors T <- T_left
      Sinon Si isEmpty(T_left) alors T <- T_right
         Sinon min <- SuppressionMin(T_right)
               T_data <- min

Algorithme SuppressionMin(T)
   Entree : T, arbre BR non vide
   Sortie : min T (et T modifie en T \ {min})
   Si IsEmpty(T_left) alors
      min <- T_data
      T <- T_right
   Sinon min <- SuppressionMin(T_left)
   Retourner min
```

3.3 Chapitre 4 - Arbres AVL

voir feuilles.

3.4 Chapitre 5 - Tas

```
Algorithme Father(i)
   Entrees : i un indice de noeud appartenant a un tas
   Sortie  : le pere de i
   retourner i div 2

Algorithme Left(i)
   Entrees : i un indice de noeud appartenant a un tas
   Sortie  : le fils gauche de i
   retourner 2*i
```

```
Algorithme Right(i)
   Entrees : i un indice de noeud appartenant a un tas
   Sortie  : le fils droit de i
   retourner (2*i)+1

Algorithme Insertion(A,heapsize,k)
   Entrees : A, tableau de taille heapsize
             k, donnee a inserer
   Sortie  : / (A est modifie en un tas contenant k)
   heapsize <- heapsize+1
   i <- heapsize
   Tant que (i > 1 ET A[Father(i)] < k)
      A[i] <- A[Father(i)]
      i <- Father(i)
   A[i] <- k

Algorithme SuppressionMax(A,heapsize)
   Entree : A, tableau de taille heapsize
   Sortie : maximum de A (A est modifie en A sans son maximum)
   d <- A[1]
   A[1] <- A[heapsize]
   heapsize <- heapsize-1
   Heapify(A,1,heapsize)
   retourner d

Algorithme Heapify(A,i,heapsize)
   Entrees : A, tableau de taille heapsize
             i, un indice de ce tableau
   Sortie  : / (A modifie en taille)
   l <- Left(i)
   r <- Right(i)
   Si (l <= heapsize et A[l] > A[i]) alors largest <- l
   Sinon largest <- i
   Si (r <= heapsize et A[r] > A[largest] alors largest <- r
   Si (i != largest) alors
      temp <- A[i]
      A[i] <- A[largest]
      A[largest] <- temp
      Heapify(A,largest,heapsize)

Algorithme Build-Heap(A,heapsize)
   Entree : A, tableau de taille heapsize
   Sortie : / (A reorganise en tas)
   Pour i allant de Father(heapsize) a 1
      Heapify(A,i,heapsize)
```

3.5 Chapitre 6 - B-Arbres

voir feuilles.

3.6 Chapitre 7 - Table de hachage

pas d'algorithmes.

3.7 Chapitre 8 - Tris optimaux

```
Algorithme Partition(A,p,r)
   Entrees : Tableau A, indices p et r.
   Sortie  : Indice j tel que les elements de A de p a j sont inferieurs ou egaux
             aux elements de A de j+1 a r.
   x <- A[p]
   i <- p-1
   j <- r+1
   Tant que True faire
      repeat j <- j-1 until A[j] <= x
      repeat i <- i+1 until A[i] >= x
   Si i < j alors Echanger(A[i],A[j])
   Sinon retourner j

Algorithme Quicksort(A,p,r)
   Entrees : Tableau A, indices p et r.
   Sortie  : / (A est trie par ordre croissant de p a r)
   Si p < r alors
      q <- Partition(A,p,r)
      Quicksort(A,p,q)
      Quicksort(A,q+1,r)
```