Intelligence Artificielle

Devoir 3

Xavier Dubuc
MA1 Info
xavier.dubuc@umons.ac.be

29 mars 2011

Question. *Supposons qu'un langage en logique du premier ordre soit défini à partir du vocabulaire suivant :*

- *quatre symboles constants : 0, 3, 7 et 9 ;*
- *un prédicat binaire $\leq (x, y)$ (que l'on écrira "$x \leq y$") ;*
- *une fonction binaire $+(x, y)$ (que l'on écrira "$x + y$").*

Supposons également qu'une base de connaissance KB contiennent les huit axiomes suivants :

1. $0 \leq 3.$
2. $7 \leq 9.$
3. $\forall x,\ x \leq x.$
4. $\forall x,\ x \leq x + 0.$
5. $\forall x,\ x + 0 \leq x.$
6. $\forall x, y,\ x + y \leq y + x.$
7. $\forall w, x, y, z,\ w \leq y \wedge x \leq z \Rightarrow w + x \leq y + z.$
8. $\forall x, y, z,\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z.$

En ne vous basant que sur la connaissance décrite ci-dessus,

a) *donnez une preuve de type "backward chaining" de la phrase "$7 \leq 3 + 9$".*

L'idée de la preuve est de partir de l'objectif et de vérifier les prémisses nécessaires pour que l'objectif soit vérifié, en essayant de se ramener à un axiome atomique de la **KB**. En agissant de la sorte, on va trouver une liste de prémisses de **KB** qui permettent d'inférer l'objectif.

Preuve 1 (Backward Chaining)

1. *On commence donc par l'objectif.*

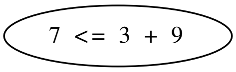

Figure 1 – Backward : 1ère étape

2. *On choisit les prémisses donnés par la règle* $8.\ x, y, z,\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z.$
En effet, si on choisit la substitution $\theta = \{x/7, y/(7+0), z/(9+3)\}$, *on a :*

$$8_\theta := 7 \leq (7+0) \wedge (7+0) \leq (9+3) \Rightarrow 7 \leq 9 + 3$$

Le premier prémisse appartient à **KB**, *on ne doit donc plus s'occuper que du second.*

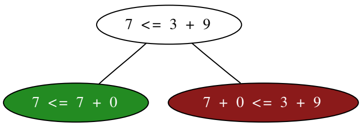

Figure 2 – Backward : 2ème étape

3. *On choisit à nouveau les prémisses donnés par la règle* $8^b.\ x_1, y_1, z,\ x_1 \leq y_1 \wedge y_1 \leq z \Rightarrow x_1 \leq z_1.$
La substitution θ *devient :*

$$\theta = \{x/7, y/(7+0), z/(9+3), x_1/(7+0), y_1/(0+7)\}$$

et elle nous fournit :

$$8^b_\theta := (7+0) \leq (0+7) \wedge (0+7) \leq (9+3)$$

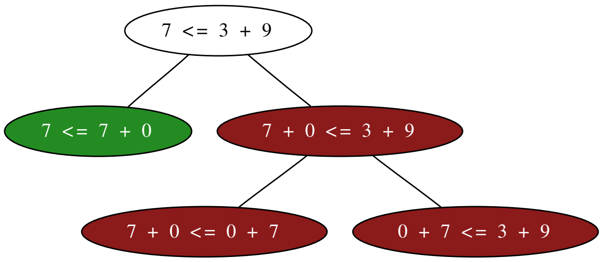

FIGURE 3 – Backward : 3ème étape

– *Le premier prémisse est vérifié via la règle* $6\ x_1, y_1,\ x_1 + y_1 \leq y_1 + x_1$ *en appliquant* θ*, en effet on obtient :*

$$6_\theta := (7 + 0) \leq (0 + 7)$$

, ce prémisse appartient donc à **KB**.

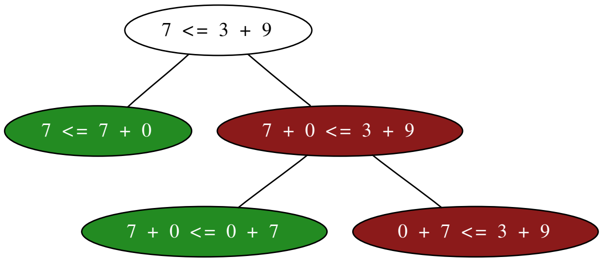

FIGURE 4 – Backward : 4ème étape

– *Le second prémisse est vérifié via la règle* $7\ \forall w, x, y_2, z_2,\ w \leq y_2 \wedge x \leq z_2 \Rightarrow w + x \leq y_2 + z_2$ *en ajoutant à* θ *les substitutions* $\{y_2/3, z_2/9\}$. θ *devient donc :*

$$\theta = \{x/7, y/(7 + 0), z/(9 + 3), x_1/(7 + 0), y_1/(0 + 7), y_2/3, z_2/9\}$$

et elle nous fournit :

$$7_\theta := 0 \leq 3 \wedge 7 \leq 9 \Rightarrow 0 + 7 \leq 3 + 9$$

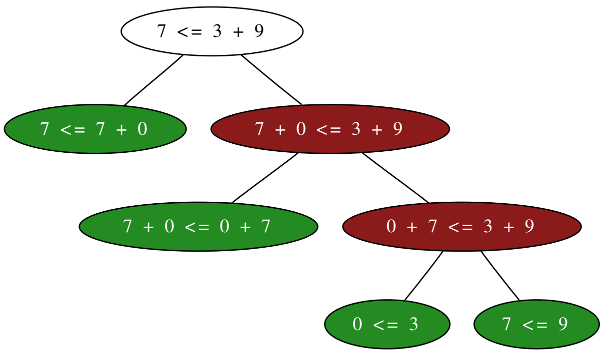

FIGURE 5 – Backward : 5ème étape

Les 2 premisses restants sont des axiomes atomiques de **KB**, *on a donc trouvé une substitution et une liste de prémisses permettant d'inférer notre objectif. On peut donc conclure que notre objectif est vérifié.*

□

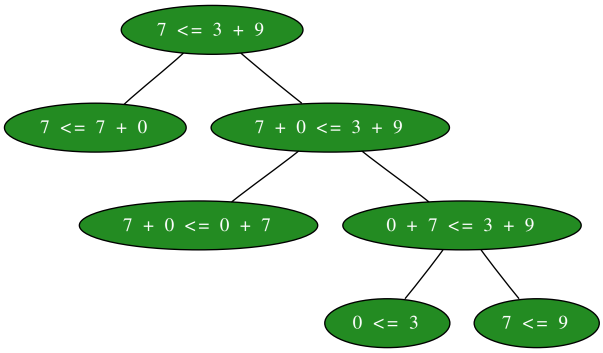

FIGURE 6 – Backward : étape finale

b) *donnez une preuve de type "forward chaining" de la phrase "$7 \leq 3 + 9$".*

L'idée de la preuve est de se baser sur les axiomes de la **KB** et d'inférer, via des applications du **Modus Ponens**, des nouveaux faits atomiques.

Rappel 1 (Modus Ponens)

Soit des phrases atomiques p_i, p'_i et q ; *ainsi qu'une substitution θ telle que $SUBST(\theta, p_i) = SUBST(\theta, p'_i)$ pour tout i.* *Alors p_1, p_2, ..., p_n, $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \Rightarrow q)$ $SUBST(\theta, q)$.*

Preuve 2 (Forward Chaining)

1. *On part des 2 axiomes atomiques $(0 \leq 3)$ et $(7 \leq 9)$.*

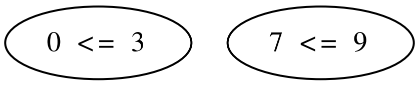

FIGURE 7 – Forward : 1ère étape

2. *Soit la substitution $\theta = \{w/0, x/7, y/3, z/9\}$,*
   appliquons θ à la règle 7 $\forall w, x, y, z,\ w \leq y \wedge x \leq z \Rightarrow w + x \leq y + z$,
   $\Rightarrow$ on infère de la sorte que $\boxed{(0 + 7) \leq (3 + 9)}$.

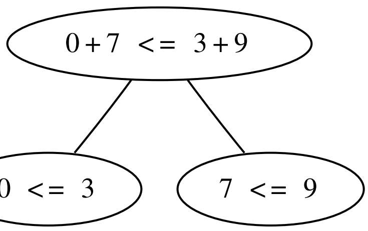

FIGURE 8 – Forward : 2ème étape

3. *Soit la substitution* $\theta_2 = \{x/(7+0), y/(0+7), z/(3+9), a/7, b/0\}$,
   appliquons θ_2 *aux règles :*
   – 6. $\forall a, b,\ a+b \leq b+a \Rightarrow 6_\theta := 7+0 \leq 0+7$,
   – 8. $\forall x, y, z,\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow 8_\theta := (7+0) \leq (0+7) \wedge (0+7) \leq (3+9) \Rightarrow (7+0) \leq (3+9)$,
   $\Rightarrow$ *on infère de la sorte que* $\boxed{(7+0) \leq (3+9)}$

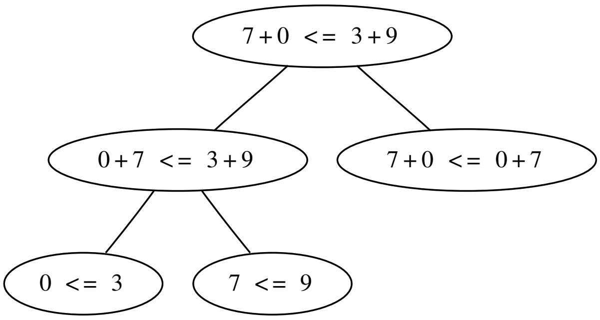

FIGURE 9 – Forward : 3ème étape

4. *Finalement, en utilisant la substitution* $\theta_3 = \{x/7, y/(7+0), z/(3+9)\}$,
   appliquons θ_3 *aux règles :*
   – 4. $\forall x \leq x+0 \Rightarrow 4_\theta := 7 \leq 7+0$,
   – 8. $\forall x, y, z,\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow 8_\theta := 7 \leq (7+0) \wedge (7+0) \leq (3+9) \Rightarrow 7 \leq (3+9)$,
   $\Rightarrow$ *on infère de la sorte que* $\boxed{7 \leq (3+9)}$

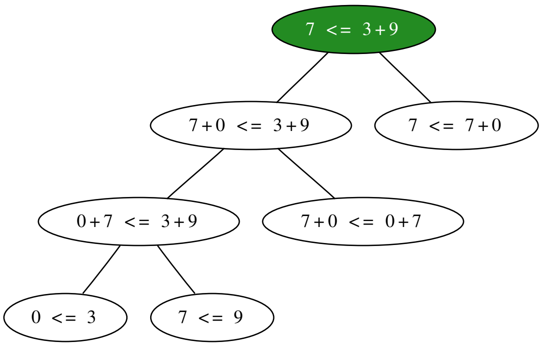

FIGURE 10 – Forward : étape finale

□