Théorème

$\boxed{\text{3COLOR est NP-difficile}}$

Preuve

- On va montrer que 3SAT $\leq_p$ 3COLOR.

- Rappel : Soit ϕ une formule booléenne sous forme 3-cnf :

$$\phi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k$$

avec chaque clause φ_i qui est une disjonction de 3 littéraux

Alors ϕ est vraie signifie que

- chaque clause est vraie, c-à-d que l'un au moins de ses littéral est vrai
- on n'a pas en même temps les littéraux x et $\neg x$ qui sont vrais (ou faux)

- Il faut construire une machine de Turing déterministe qui convertit en temps polynomial une formule ϕ en un graphe G t.q. ϕ est satisfiable ssi G est 3-colorable.

$$\phi \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{C dét.}\\ \text{polynom.}\end{array}} \longrightarrow G$$

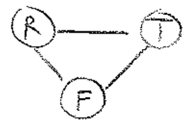
ϕ satisfiable $\iff$ G 3-colorable

- Soit ϕ une formule. On construit G un graphe de la forme suivante :

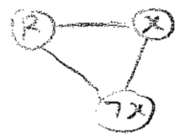
- noeuds de G :
  * 3 noeuds particuliers (R), (T), (F) (Red, True, False)
  * pour chaque variable x de ϕ, 2 noeuds (x) et ($\neg x$)
  * pour chaque clause φ_i, 5 noeuds

- arêtes de G :

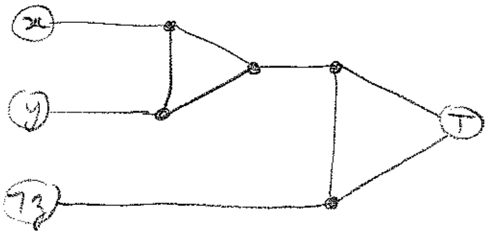
  * les 3 noeuds particuliers sont reliés par un triangle



  * les 2 noeuds correspondant à la variable x sont reliés par un triangle avec R comme suit



  * les 5 noeuds correspondant à la clause φ_i sont reliés aux noeuds représentant les littéraux de φ_i et au noeud T de la façon suivante



clause
$\varphi_i = x \vee y \vee \neg z$

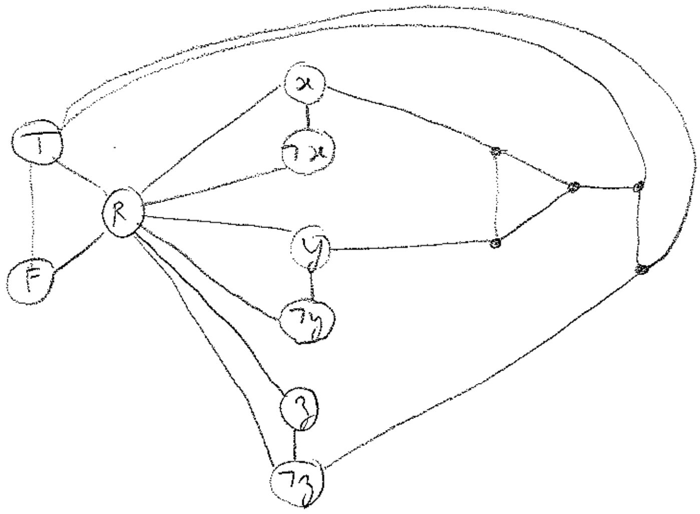
- observations :
  - si Φ possède l variables et k clauses, le graphe G a donc

$$3 + 2l + 5k \text{ noeuds}$$

  - les arêtes de G ont été décrites en précisant certains sous-graphes de G. Il faut imaginer tous ces sous-graphes interconnectés pour former G.

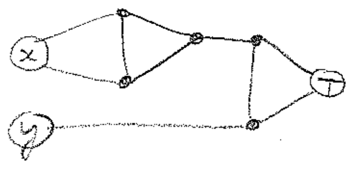
    ex $\Phi = (x \vee y \vee \neg z)$ (juste une clause)

    donne le graphe suivant :

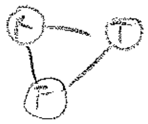


- deux clauses ayant des littéraux en commun vont donc partager certains mêmes noeuds.

- une clause ayant des littéraux égaux aura son sous-graphe se partageant certains mêmes noeuds, par ex. :



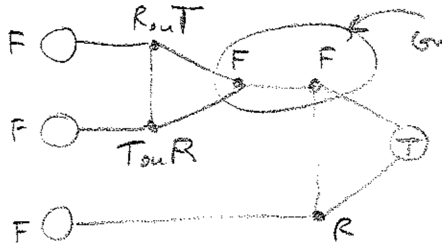
$$\varphi_i = x \vee x \vee y$$

- Propriétés :
  - le triangle  est vu comme la palette de 3 couleurs : au nom près des 3 couleurs ; couleur "Red" pour le noeud (R), couleur "True" pour le noeud (T) et couleur "False" pour le noeud (F)
  - le triangle  permet de dire que (x), (¬x) sont colorés "True", "False", ou "False", "True". En particulier, ils ne peuvent être ni vrais, ni faux, en même temps (voir Rappel)

– Le sous-graphe associé à la clause φ_i est 3-colorable
$\Longleftrightarrow$ l'un des littéraux de φ_i est vrai

Montrons cette propriété.
Par ce qui a été dit précédemment, les littéraux ne peuvent pas être coloriés "Red".

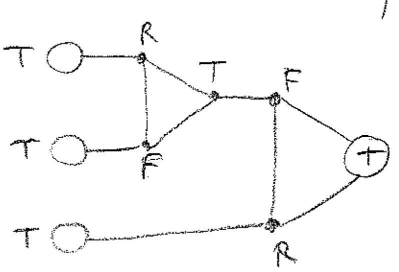
$\boxed{\Longrightarrow}$ Par l'absurde, supposons que tous les littéraux de φ_i soient coloriés par "False", alors on a ceci



contradiction avec l'hyp que le sous-graphe est 3-colorable

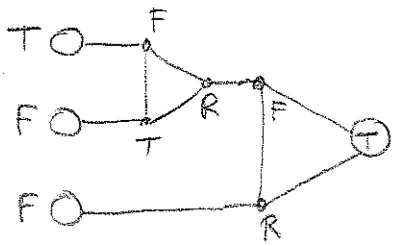
$\boxed{\Longleftarrow}$ Il faut patiemment envisager tous les cas de figure pour les littéraux et montrer que le sous-graphe est 3-colorable.

a)



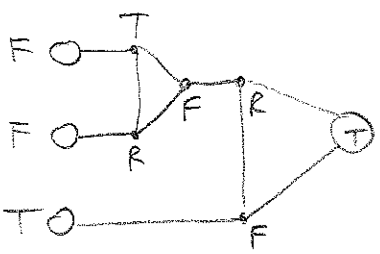
les 3 littéraux sont vrais

b)

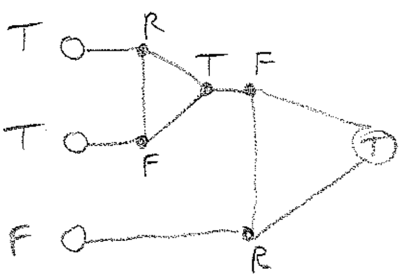


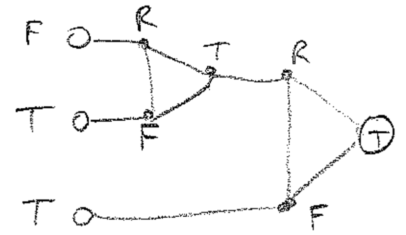
+ cas sym

c)



d)



e) 

\+ cas sym.

f) le cas où des littéraux sont égaux, et donc représentés par le même noeud, se déduit des cas précédents

- Le graphe G décrit peut être construit en temps polynomial par une machine déterministe. Il reste à montrer que ϕ est satisfiable ssi G est 3-coloriable.

($\Leftarrow$) Supposons G 3-coloriable, alors au vu de tout ce qui a été dit avant, chaque clause possède un littéral vrai et on n'a jamais x, $\neg x$ vrais ou faux en même temps. Donc ϕ est satisfiable.

($\Rightarrow$) Supposons ϕ satisfiable. Dans chaque clause, on colorie par "True" les noeuds des littéraux qui sont vrais quand ϕ est satisfiable. Cela montre d'après ce qui précède que le sous-graphe de chaque clause est 3-coloriable. Comme on n'a pas en même temps x, $\neg x$ vrais (ou faux), ce 3-coloriage convient aussi pour chaque triangle  , et donc aussi pour le graphe tout entier.

□