Nombres complexes

Arnaud Moreau

19-10-2021

1 Introduction

Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, mais dans quoi ?

1. Dans $\mathbb{R}$
2. Dans $\mathbb{C}$
3. ...

$x^2 = 2$ possède des solutions dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{N}$.
De même, $x^2 = -1$ possède des solutions dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble des nombres complexes est $\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

2 Résolution des équations du second degré

Dans $\mathbb{R}$:

1. $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
2. $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Dans $\mathbb{C}$:

1. $x_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$
2. $x_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

3 Notation d'un nombre complexe

$$z = a + bi \longrightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Le nombre complexe peut être représenté dans le plan de Gauss, où l'axe OX représente la partie réelle (a) et l'axe OY la partie imaginaire (b) du nombre.
$Re(z)$ représente la partie réelle de z.
$Im(z)$ représente la partie imaginaire de z.

$$|z| \ = \ |a + bi| \ = \ \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

Le conjugué de a+bi, noté $\overline{a + bi}$, vaut $a - bi$ et est équivalent à une symétrie d'axe OY sur le plan de Gauss et le cercle trigonométrique.

4 Opérations sur les complexes

4.1 Addition

Soient z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \end{aligned}$$

4.2 Multiplications et puissances

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z^1 = z$$
$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ z^n = z * z * z * ... * z$$
$$\forall\ n,\ m \in \mathbb{N},\ z^n z^m = z^{n+m} \text{ and } z^{n^m} = z^{nm}$$
$$z^0 = 1 \Leftarrow z^0 * z^m = z^{0+m} = z^m$$

4.3 Inverse

Soit $z \in \mathbb{C},\ z = a + bi$.

$$z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

5 Argument

On peut représenter un nombre complexe sur un cercle trigonométrique en utilisant l'axe OX pour représenter $Re(z)$ et l'axe OY pour représenter $Im(z)$. L'angle obtenu (noté Θ) est appelé l'argument du nombre complexe.

Soit $z \in \mathbb{C},\ z = a + bi$.

$$\Theta = arg(z)$$
$$\cos\Theta = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin\Theta = \frac{b}{|z|}$$

Propriété :

$$arg(z) = arg\left(\frac{z}{|z|}\right)$$

6 Seconde notation d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$.

On peut écrire $z = \rho$ cis (Θ) avec $\rho = |z|,\ \Theta = arg(z)$,
Avec cis $\Theta = \cos\Theta + i\sin\Theta$

On a donc $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$ et $\Theta \in [0; 2\pi[$.

7 Opérations avec la nouvelle notation

7.1 Addition

Soient $z_1, z_2 \;=\; \rho_1 \text{ cis } \Theta_1,\; \rho_2 \text{ cis } \Theta_2$

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= \rho_1 \text{cis } \Theta_1 + \rho_2 \text{cis} \Theta_2 \\
&= \rho_1 \cos\Theta_1 + \rho_2 \cos\Theta_2 + i(\rho_1 \sin\Theta_1 + \rho_2 \sin\Theta_2)
\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= \rho_1 \text{ cis } \Theta_1 + \rho_2 \text{ cis } \Theta_2 \\
&= \rho_1(\cos\Theta_1 + i\sin\Theta_1) + \rho_2(\cos\Theta_2 + i\sin\Theta_2) \\
&= \rho_1 \cos\Theta_1 + \rho_2 \cos\Theta_2 + i(\rho_1 \sin\Theta_1 + \rho_2 \sin\Theta_2)
\end{aligned}$$

□

7.2 Multiplications et puissances

Soient $z_1, z_2 \;=\; \rho_1 \text{ cis } \Theta_1,\; \rho_2 \text{ cis } \Theta_2$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (\rho_1 \text{cis } \Theta_1)(\rho_2 \text{cis } \Theta_2) \\
&= \rho_1 \rho_2 \text{cis}(\Theta_1 + \Theta_2)
\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (\rho_1 \text{cis } \Theta_1)(\rho_2 \text{cis} \Theta_2) \\
&= \rho_1(\cos\Theta_1 + i\sin\Theta_1)\rho_2(\cos\Theta_2 + i\sin\Theta_2) \\
&= \rho_1\rho_2(\cos\Theta_1\cos\Theta_2 + i^2\sin\Theta_1\sin\Theta_2 + i(\sin\Theta_1\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2\sin\Theta_2)) \\
&= \rho_1\rho_2(\cos(\Theta_1 + \Theta_2) + i\sin(\Theta_1 + \Theta_2)) \\
&= \rho_1\rho_2\text{cis}(\Theta_1 + \Theta_2)
\end{aligned}$$

□

Cas particulier : $z_1 = z_2 = z$.

$$\begin{aligned}
z * z &= z^2 \\
&= \rho^n \text{cis}(n\Theta)
\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
z * z &= z^2 \\
&= (\rho \text{cis } \Theta)^2 \\
&= (\rho \text{cis } \Theta)(\rho \text{cis } \Theta) \\
&= \rho\rho(\text{cis } \Theta + \text{cis } \Theta) \\
&= \rho^2(2\text{cis } \Theta)
\end{aligned}$$

Par récurrence :

$$= \rho^n \text{cis}(n\Theta)$$

□

8 L'ensemble U_n

$$\begin{aligned} U_n &= \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\} \\ &= \{\text{cis } 0, \text{cis } \frac{2\pi}{n}, \ \dots \ , \text{cis } \frac{(n-1)2\pi}{n}\} \end{aligned}$$

Démonstration.

Regardons $x^n = 1$.
Soit $u \in \mathbb{C}$ solution de $x^n = 1$.
$\Rightarrow u^n = 1$
$\Rightarrow |u^n| = |1|$
$\Rightarrow |u|^n = 1$ par propriété de la norme ($\forall\ v \in \mathbb{C}, \forall\ n \in \mathbb{R},\ |v^n| = |v|^n$)
$\Rightarrow |u| = 1$
$\Rightarrow |u| = \rho = 1$ par définition de ρ
$\Rightarrow$ La solution de $x^n = 1$ se trouve sur le cercle trigonométrique
$\Rightarrow z$ est de la forme cis Θ

Cherchons Θ.
Nous savons que $(\text{cis } \Theta)^n = 1$.

$$\begin{aligned} (\text{cis } \Theta)^n &= 1 \\ \text{cis}(n\Theta) &= \text{cis } 0 \\ n\Theta &= k2\pi,\ k \in \mathbb{N} \Leftarrow (n\Theta) \text{ est un multiple de } 2\pi. \\ \Theta &= \frac{k2\pi}{n} \\ &\Rightarrow \Theta \in \{0, \frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, \ \dots \ , \frac{(n-1)2\pi}{n}\} \\ &\text{Remarque : } \Theta = \frac{n2\pi}{n} \Rightarrow \Theta = 2\pi, \text{ or, } \Theta \in [0; 2\pi[, \text{ donc, } \frac{n2\pi}{n} \notin E. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Les solutions de l'équation $x^n = 1$ sont celles de la forme cis $0, \text{cis } \frac{2\pi}{n}, \ \dots \ , \text{cis } \frac{(n-1)2\pi}{n}$.
$\Longrightarrow$ Les solutions de l'équation $x^n = 1$ appartiennent à l'ensemble U_n.
Mathématiquement : $\forall\ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1,\ z \in U_n$.
$\Longrightarrow$ C'est la définition de l'ensemble U_n. $\square$

8.1 Propriétés et propositions

Propriété 1. $\forall\ z_0, z_1 \in \mathbb{C} \mid z_0$ est solution de $x^n = z, z \in \mathbb{C}$ et $z_1 \in U_n$,
$z_0 z_1$ est solution de $x^n = z$.

Propriété 2. $\forall\ z_0, z_1 \in \mathbb{C} \mid z_0, z_1$ sont solutions de $x^n = z, z \in \mathbb{C}$,
$z_1(z_0)^{-1}$ est solution de $x^n = z$.

Proposition 1. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \mid z_0$ est solution de $x^n = z, z \in \mathbb{C}$. Alors, les solutions de $x^n = z$ sont $z_0 * u$ où $u \in U_n$.