Demostremos lo anterior:

$A \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^n$

primero demostremos que:

$E\{A \cdot B\} = 0$

En primer lugar, abrimos el producto punto:

$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

Aplicamos operador esperanza:

$E\{A \cdot B\} = E\{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n\}$

Aplicamos propiedad superposición operador esperanza:

$E\{A \cdot B\} = E\{a_1 b_1\} + E\{a_2 b_2\} + \dots + E\{a_n b_n\}$

Ahora, la esperanza del producto de dos elementos independientes es el producto de sus esperanzas:

$E\{A\cdot B\} = E\{a_1\}E\{b_1\} + \dots + E\{a_n\}E\{b_n\}$

Ahora, debido aque los elementos son idénticamente distribuidos, la esperanza de cada elemento es la misma: $\mu = 0$;

por tanto:

$E\{A\cdot B\} = 0$

Ahora, demostremos que $var(A\cdot B) = n$

Entonces, recordemos que la varianza es el segundo momento centralizado:

$var(A\cdot B) = E\{(A\cdot B - E\{A\cdot B\})^2\}$

Abriendo el producto punto:

$var(A\cdot B) = E\{(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n - E\{A\cdot B\})^2\}$

Abrimos el cuadrado y aplicamos superposición a la esperanza:

$$Var(A\cdot B) = E\{(a_1b_1)^2 + \dots + (a_nb_n)^2 +$$
$$2(a_1b_1a_2b_2 + \dots + a_1b_1a_nb_n + \dots + a_nb_na_1b_1)$$
$$- 2E\{A\cdot B\}(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) + E\{A\cdot B\}^2\}$$

pero ya demostramos que:

$$E\{A\cdot B\} = 0$$

$$E\{a_i\} = E\{b_i\} = 0$$

por tanto, la expresión se reduce a:

$$Var(A\cdot B) = E\{a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + \dots + a_n^2b_n^2\}$$

ahora, la esperanza del producto de dos elementos independientes es el producto de sus esperanzas:

$$Var(A\cdot B) = E\{a_1^2\}E\{b_1^2\} + \dots + E\{a_n^2\}E\{b_n^2\}$$

Ahora, debido a que los elementos son idénticamente distribuidos, la esperanza y varianza de cada elemento es la misma:

$\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$

$$Var(a_i) = Var(b_i) = \overbrace{E\{a_i^2\} = E\{b_i^2\}}^{\text{ya que } \mu = 0} = 1$$

por tanto

$$Var(A \cdot B) = n.$$

Ahora, demostremos que el producto punto entre A y B normalizado por la raíz cuadrada de la longitud de los vectores, tiene una varianza de:

$p = A \cdot B \rightarrow$ producto punto sin escalar.

$p' = \dfrac{A \cdot B}{\sqrt{n}} \longrightarrow$ producto punto escalado.

$VAR(p') = E\{(p' - E\{p'\})^2\}$

calculemos $E\{p'\}$:

$E\{p'\} = E\{\frac{p}{\sqrt{n}}\} = \frac{1}{\sqrt{n}} E\{p\} = 0$

pues ya demostramos que $E\{p\} = 0$.

por tanto:

$var(p') = E\{p'^2\} = E\{\frac{p^2}{n}\}$

$= \frac{1}{n} E\{p^2\}$

y ya demostramos que: $E\{p^2\} = n$

por tanto:

$var(p') = \frac{1}{n} \cdot n = 1$