Algunos torneos de integrales

Edificio de la división de
Matemáticas e Ingeniería
Oficina 10.

GCCyC
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Acatlán
Grupo de Cómputo Cuántico y Científico

FES UNAM ACATLÁN

Proyecto PAPIME
PE104919

jaorduz@comunidad.unam.mx
Actualizado el: 26 de febrero de 2020
Version 1.0

Tabla de Contenido

Licencia **III**

I Contenido general de Integrales **1**

1. Introducción 1
2. Perspectiva general 1
3. Estrategias recurrentes 2
   - 3.1. Algebraicas 2
   - 3.2. Exponenciales y logaritmicas 4
   - 3.3. Trigonométricas 5
   - 3.4. Hiperbólicas 8
4. El torneo de integrales en MAC 9
   - 4.1. Detalles del torneo 9
   - 4.2. Vicisitudes 10
   - 4.3. Posibles mejoras 11
5. El grupo de integrales 11
   - 5.1. Admisión 11
   - 5.2. Actualidad y Futuro 12

Bibliografía **15**

Licencia

Este documento está creado con fines educativos. La información contenida está sometida a cambios y a revisiones constantes, por lo que se sugiere no imprimirlo.

Puedes compartir el documento con quien desees; sin embargo debes respetar la autoría original. Puedes citar el material y considerarlo como referencias en tus proyectos.

Para citar este documento:

1. Bibtex

```
@manual{introInteGCCyC,
title  ="{Algunos torneos de integrales}",
author ="{Moreno~Moreno, A. and Rubio-Montiel, C.
and Orduz-Ducuara, J.A.}",
organization ="{Grupo de C\'omputo Cu\'antico y Cient\'ifico}",
month ="{Febrero}",
year  = "{2020}",
address ="{FESAC-UNAM}",
note ="{Los miembros del GCCyC aporta constantemente al desarrollo
de este proyecto}",
}
```

2. bibitem

```
\bibitem{introInteGCCyC}
Moreno~Moreno, A. and Rubio-Montiel, C.
and Orduz-Ducuara, J.A.
\textit{Algunos torneos de integrales}.
Los miembros del GCCyC aporta constantemente al desarrollo
de este proyecto.
GCCyC, FESAC-UNAM, 2020.
```

Miembros activos del GCCyC:
Salvador Uriel Aguirre Andrade
Miguel Aguilar Hilario
Miguel González Briones
Alfonso Flores Zenteno
Ana Karen Del Castillo
Diana De Luna
Leslie Valeria Vivas Laurrabaquio
Zitlalli Nayeli Avilés Palacios
Eledtih Andrea González Sánchez
Edgar Ivan Martínez Villafañe
Oscar Jair Vargas Palacios
Andrés Moreno Moreno[a]

[a]Becario que contribuyó al desarrollo de este material bajo la dirección del Dr. Christian Rubio.

Dr. Javier A. Orduz-Ducuara
Profesor de Carrera Asociado C.
Edificio de la división de Matemáticas e Ingeniería
Oficina 10.
FES Acatlán-UNAM

Dr. Christian Rubio Montiel
Profesor de Carrera Asociado C.
Edificio de la división de Matemáticas e Ingeniería
Oficina 10.
FES Acatlán-UNAM

Parte I: Contenido general de Integrales

Desarrollar la habilidad para resolver integrales puede convertirse en un reto que ocasiona frustración ,pero a la vez , es una actividad interesante que requiere intuición y razonamientos tanto rigurosos como ingeniosos que ayudan a el estudiante a desarrollar su abstracción. Este artículo trata sobre algunos tips para resolver integrales, se muestra su aplicación en integrales propuestas en algunas competencias y además se habla del grupo de integrales en la FES Acatlán y su concurso de integrales.

1. Introducción

El concepto de educación basada en competencias (EBC) es un modelo de aprendizaje que prioriza las competencias que adquieren los alumnos por sobre el tiempo que pasan en clase [3]. Esta herramienta pedagógica es usada por profesores de manera consiente o inconscientemente para motivar a los estudiantes a fortalecer sus habilidades.
Es común al menos en matemáticas que los estudiantes mas hábiles logren tener éxito en competencias dentro del aula , acabando rápidamente ejercicios u obteniendo reconocimientos externos.
De acuerdo con la RAE un concurso se puede definir como una competición, prueba entre varios candidatos para conseguir un premio [7]. Al participar en un concurso de matemáticas además del premio o reconocimiento de participación , se obtiene conocimiento y experiencia , no obstante algunos alumnos simplemente participan para pertenecer a algún grupo , o bien para hacer visibles sus habilidades a sus compañeros, profesores o a ellos mismos.
En general los torneos de matemáticas son vistos como algo desafiante y de una dificultad elevada , no obstante con una adecuada preparación es posible disfrutar de estos concursos, y obtener beneficios como incrementar nuestras habilidades analíticas sociales y emocionales. Analíticas por la preparación que se requiere , sociales por que interactuamos con nuestros compañeros y otro participantes y emocionales por el estrés y frustración que se generan por no obtener los resultados esperados.

2. Perspectiva general

En la facultad de Estudios Superiores Acatlán tenemos un torneo de integrales en donde se reconoce a los tres o cinco primeros lugares con kits que incluyen playeras , libros o libretas y una constancia dependiendo del lugar obtenido .

Los mejores lugares del torneo participamos en el Maratón de Integrales del Tecnológico de Monterrey en el cual se entregan recompensas similares y en donde además se brindan conferencias en el área de ciencias mientras se revisan los exámenes.

Fuera de México esta el conocido “MIT Integration Bee” en el Instituto Tecnológico de Massachusetts que en mi opinión es el que tiene el formato de competencia mas interesante y en Colombia tenemos por ejemplo los concursos de la Universidad Nacional de Colombia y la Universidad Pontificia Bolivariana.

En general los formatos de competencia son muy parecidos salvo en el "MIT Integration Bee.el cual se desarrolla por un sistema rondas y una clasificación previa a dicho concurso.

En la gran mayoría de los torneos se diseña un examen de entre 10 a 50 integrales o aplicaciones de ellas que los alumnos deben resolver en un determinado tiempo sin calculadora.

3. Estrategias recurrentes

En esta sección mostraremos técnicas de integración útiles para solucionar integrales en concursos de integrales , la intención es proporcionar un repertorio útil y rápido para ciertos casos es por eso que descartamos el uso de la técnica para integrales binomias y otros métodos como el de Hermite ya que a mi consideración su uso puede llevar mucho tiempo. No obstante dependiendo del torneo de integrales no descartamos que se requiera su uso.

3.1. Algebraicas

Si encontramos una integral con fracciones radicales es buena idea multiplicar el integrando por el mismo termino del numerador esto nos permitirá en varios casos separar la integral en 2 y así poder seguir trabajándola , el siguiente caso ejemplifica lo antes mencionado.
$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, \frac{1}{x^2}\, dx =$
Primero escribimos la integral separando el radical y luego lo multiplicamos por el termino del denominador.
$= \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \frac{1}{x^2}\, dx$
Realizamos la multiplicación y nos queda
$= \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{x^2}\, dx$
Sea $n = \sqrt{x^2+1}$ entonces $x = \sqrt{n^2+1}$ y $dx = \frac{ndn}{x}$, sustituyendo nos queda
$\int \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n} \frac{1}{n^2+1} \frac{ndn}{\sqrt{n^2+1}} = \int \frac{\sqrt{n^2+1}-1dn}{(n^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
Separamos la integral y nos resulta
$\int \frac{\sqrt{n^2+1}dn}{(n^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \int \frac{dn}{(\sqrt{n^2+1})^3}$ Simplificamos la primer integral restando los exponentes
$\int \frac{1}{n^2+1}\, dn - \int \frac{1}{(\sqrt{n^2+1})^3}\, dn$
La primer integral es inmediata y para la segunda realizamos el cambio $n = tan(\theta)$ de donde $dn = sec^2(\theta)$
$= arctan(n) - \int \frac{sec^2(\theta)}{(\sqrt{sec^2(\theta)})^3}\, d\theta$
Simplificando nos queda
$= arctan(n) - \int \frac{sec^2(\theta)}{sec^3(\theta)}\, d\theta$
Restando exponentes y reduciendo obtenemos.
$arctan(n) - \int cos(\theta)\, d\theta$
Luego,

$arctan(n) - sen(\theta)$
Regresando a la variable n
$arctan(n) - \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} + C$
Finalmente regresando a la variable x obtenemos la respuesta
$= arctan(\sqrt{x^2-1}) - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$
La estrategia anterior puede usarse para resolver las siguientes integrales que aparecieron en el concurso de La Universidad Nacional de Colombia.
$\int x\sqrt{\frac{1+x}{x+1}}\,dx \qquad \int x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,dx$

Continuando trabajando con radicales , en integrales que incluyan potencias fraccionarias de x, el cambio $x = z^n$ donde n es el mínimo común denominador, simplificara la situación.

$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

Sea $x = z^6$ entonces $dx = 6z^5dz$ sustituyendo nos queda
$\int \frac{6z^5}{z^3+z^2}\,dz$
Factorizando z^2
$6\int \frac{z^3}{z+1}\,dz$
Realizamos la división y nos queda
$6\int (z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1})\,dz$
Y las integrales son inmediatas
$6(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z - ln(z+1))$
Regresando a la variable x , obtenemos la respuesta
$= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} - ln(x^{\frac{1}{6}} + 1) + C$
El cambio anterior puede ser útil al resolver las siguientes integrales que propusieron algunos de mis compañeros en nuestra preparación al concurso de integrales del Tecnológico de Monterrey.
$\int \frac{\sqrt[2]{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx \qquad \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$
La siguiente estrategia es una alternativa a las fracciones parciales , consideremos la siguiente integral
$\int \frac{1}{x+x^2}\,dx$
Una opción sencilla podría ser factorizar y usar fracciones parciales
$\int \frac{1}{x(1+x)}\,dx$
Pero una opción mas rápida para integrales de la forma $\int \frac{1}{x^n+x}\,dx$ con $n \neq 1$ es factorizar la x con la potencia n-esima
$= \int \frac{1}{x^n(1+x^{1-n})}\,dx$
Luego se observa lo siguiente
$= \int \frac{x^{-n}}{1+x^{1-n}}\,dx$
Sea $u = 1 + x^{1-n}$ entonces $dn = (1-n)x^{-n}dx$
De modo que obtenemos
$\frac{1}{1-n}\int \frac{1}{u}\,du$
Y así concluir
$= \frac{1}{1-n}ln(n) + C = \frac{1}{1-n}ln(1 + x^{1-n}) + C$

La estrategia anterior es una gran alternativa a las fracciones parciales y permite resolver integrales como las siguientes
$\int \frac{1}{x+x^{\frac{1}{3}}}\, dx \qquad \int \frac{1}{x+x^6}\, dx$

El último artificio de esta sección es un forma de cambio de variable no obvio en el que aprovechamos que existe una x en el numerador , la siguiente integral apareció en el concurso de Integrales de MAC
$\int \frac{x}{x^4+3}\, dx$
Notemos lo siguiente
$\int \frac{x}{(x^2)^2+3}\, dx$
Sea $n = x^2$ entonces $dn = 2xdx$, de modo que nos queda una integral inmediata
$\frac{1}{2}\int \frac{dn}{n^2+3}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} arctan(\frac{n}{\sqrt{3}}) + C$
Finalmente regresando el cambio de variable obtenemos la respuesta
$= \frac{1}{2\sqrt{3}} arctan(\frac{x^2}{\sqrt{3}}) + C$
La estrategia anterior permite resolver integrales como la siguiente
$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

3.2. Exponenciales y logaritmicas

Consideremos las integrales de la forma
$\int \frac{1}{e^{nx}+a}\, dx$
Al multiplicar y dividir por e^{-nx} obtendremos un cambio de variable sencillo
$\int \frac{1}{e^{nx}+a} \frac{e^{-nx}}{e^{-nx}}\, dx = \int \frac{e^{-}nx}{1+ae^{-nx}}\, dx$
Sea $m = 1 + ae^{-nx}$ entonces $dm = -ane^{-nx}$ y asi obtenemos
$\frac{-1}{an}\int \frac{1}{m}\, dm$
Y luego
$\frac{-1}{an} ln(m) + C$
Finalmente
$= \frac{-1}{an} ln(1 + ae^{-nx}) + C = \frac{-1}{an} ln(\frac{e^{nx}+a}{e^{nx}}) + C$
Este resultado puede usarse para resolver las siguientes integrales que aparecieron en el concurso de integrales de la Universidad Pontificia Bolivariana
$\int \frac{1}{1+e^{2x}}\, dx \qquad \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\, dx$
Si tenemos integrales que incluyan funciones de la forma a^x , es recomendable el cambio $u = a^x$, la siguiente integral apareció en el mas reciente concurso de integrales de MAC.
$\int \frac{2^x}{(1+2^x)^2}\, dx$
Sea $u = 2^x$ entonces $du = 2^x ln(2)dx$ asi nos queda
$= \int \frac{n}{(1+n)^2} \frac{1}{nln(2)}\, dn = \frac{1}{ln(2)} \int \frac{1}{(1+n)^2}\, dn$
Y la integral es inmediata
$= \frac{-1}{ln(2)(1+n)} + C$
Regresando el cambio de variable obtenemos la respuesta
$= \frac{-1}{ln(2)(1+2^x)} + C$
La estrategia facilita la resolución de la siguiente integral propuesta en el concurso de la Universidad Pontificia Bolivariana en 2018

$= \int (e^2 + e + 1)^x \, dx$
El siguiente artificio facilita ciertas integrales exponenciales , consiste en tomar la igualdad $x = e^{ln(x)}$, por ejemplo la siguiente integral que apareció en el concurso de integrales del Tecnológico de Monterrey y en el concurso de MAC.

$\int \frac{x^{ln(x)} ln(x)}{x} \, dx$
Sea $x = e^{ln(x)}$ entonces:
$\int \frac{(e^{ln(x)})^{ln(x)} ln(x)}{x} \, dx$
No sustituimos la x del denominador ya que nos servira mas adelante, ahora tenemos:
$\int \frac{e^{ln^2 x} ln(x)}{x} \, dx$
Sea $u = ln^2(x)$ entonces $du = \frac{2ln(x)}{x}$,por lo que nos queda una integral sencilla
$\frac{1}{2} \int e^u \, du$
Finalmente nos queda
$\frac{e^{ln^2(x)}}{2} + C$
o bien
$\frac{x^{ln(x)}}{2} + C$
Este truco permite resolver la siguiente integral propuesta en concurso de MAC en 2019
$\int x^{\frac{1}{ln(x)}} \, dx$

3.3. Trigonométricas

Las identidades trigonométricas para la suma de ángulos de senos y cosenos son un buen repertorio para resolver integrales
$Cos(n + m) = Cos(n)Cos(m) - Sen(m)Cos(n)$
$Sen(n + m) = Sen(n)Cos(m) + Sen(m)Cos(n)$

A partir de estas identidades es fácil deducir las formulas para la resta de ángulos considerando que seno es una función impar y coseno par.
Ahora observemos un ejemplo de su uso:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(x)}{sen(x+\frac{\pi}{4})} \, dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(x)}{sen(x)cos(\frac{\pi}{4}) + sen(\frac{\pi}{4})cos(x)} \, dx$
Colocamos el valor de $sen(\frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(x)}{\frac{\sqrt{2}}{2} sen(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} cos(x)} \, dx$
$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(x)}{sen(x)+cos(x)} \, dx$
La integral resultante no es del todo sencilla pero tener conocimiento de la identidad trigonométrica nos abrió un camino, para terminar de resolver la integral existen varias formas, mas adelante la resolveremos usando un artificio trigonométrico, se puede comprobar lo siguiente:
$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(x)}{sen(x)+cos(x)} \, dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Casi siempre es bueno separar los términos que incluyen funciones trigonométricas y al mismo tiempo buscar cosas conocidas.
Por ejemplo la siguiente integral:

$$\int e^{senx}(\frac{xcos^3x-senx}{cos^2x})\,dx$$

Podemos reescribir la siguiente expresión como sigue:
$\frac{xcos^3x-senx}{cos^2x)} = \frac{xcos^3x}{cos^2x} - \frac{senx}{cosx\,cosx} = xcosx - tanx\,secx$
De manera que nos queda los siguiente:
$\int e^{senx}(x\,cosx - tanx\,secx)\,dx = \int e^{senx}\,x\,cosx\,dx - \int e^{senx}\,tanx\,secx\,dx$
Para la primera integral aplicamos integración por partes como sigue:
$u = x \qquad dv = e^{senx}\,cosx$
$du = dx \qquad v = e^{senx}$
$= xe^{senx} - \int e^{senx}\,dx$

Para la segunda integral tenemos:
$u = e^{senx} \qquad dv = tanx\,secx$
$du = cosx\,e^{senx}dx \qquad v = secx$
$= -secx\,e^{senx} + \int secx\,e^{senx}\,dx = -secx\,e^{senx} + \int e^{senx}\,dx$
Al unir los resultados nos queda el resultado final:
$= xe^{senx} - \int e^{senx}\,dx - secx\,e^{senx} + \int e^{senx}\,dx$
$= xe^{senx} - secx\,e^{senx} + C$

Es de gran utilidad tener presente las siguientes identidades en especial la primera que a veces pasa desapercibida y que ayuda a simplificar expresiones:
$Cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$
$Sen(2x) = 2sen(x)\,cos(x)$
La siguiente integral es una ejemplo de ello.

$$\int \frac{tan(2x)\,cos^4(2x) - \frac{sen^4(2x)\,sec^2(x)}{cot(2x)}}{e^{2tan(x)}cos(4x)\sqrt{1-sec^2(2x)}}\,dx =$$

Aunque parecería increíblemente laboriosa , buscaremos simplificar, primero simplificamos la fracción que incluye $ctg(2x)$
$$\int \frac{tan(2x)\,cos^4(2x) - \frac{sen^5(2x)\,sec^2(x)}{cos(2x)}}{e^{2tan(x)}cos(4x)\sqrt{1-sec^2(2x)}}\,dx =$$
Considerando la identidad trigonométrica $tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$ notemos que $-sec^2(2x) = -tan^2(2x) - 1$, así logramos simplificar el término del radical
$$\int \frac{tan(2x)\,cos^4(2x) - \frac{sen^5(2x)\,sec^2(x)}{cos(2x)}}{e^{2tan(x)}cos(4x)\sqrt{-tan^2(2x)}}\,dx =$$
Eliminamos el radical y sacamos la unidad imaginaria de la integral, a su vez expresamos la fracción del numerador como sigue
$$\frac{1}{i}\int \frac{tan(2x)\,cos^4(2x) - tan(2x)\,sen^4(2x)\,sec^2(x)}{e^{2tan(x)}cos(4x)\,tan(2x)}\,dx =$$
Factorizamos $tan(2x)$ en el numerador
$$\frac{1}{i}\int \frac{tan(2x)\,(cos^4(2x) - sen^4(2x))\,sec^2(x)}{e^{2tan(x)}cos(4x)\,tan(2x)}\,dx =$$

Nos queda una diferencia de cuadrados , que podemos expresar asi
$\frac{1}{i}\int \frac{tan(2x)\,(cos^2(2x)-sen^2(2x))(cos^2(2x)+sen^2(2x))\,sec^2(x)}{e^{2tan(x)}cos(4x)\,tan(2x)}\,dx =$
Notemos que $Sen^2(2x)+Cos^2(2x)=1$ y $Cos^2(2x)-Sen^2(2x)=Cos(4x)$
$\frac{1}{i}\int \frac{tan(2x)\,cos(4x)(1)\,sec^2(x)}{e^{2tan(x)}cos(4x)\,tan(2x)}\,dx =$
Ahora podemos simplficar las expresiones $tan(2x)$y $cos(4x)$ que aparecen en la fracción
$\frac{1}{i}\int \frac{sec^2(x)}{e^{2tan(x)}}\,dx =$
Haciendo el simple cambio $n = 2tan(x)$ nos queda
$\frac{1}{2i}\int \frac{1}{e^n}\,dn = \frac{-1}{2i}e^{-n}+C$
Y regresando el cambio nos queda el resultado final
$= \frac{-1}{2i}e^{-2tan(x)}+C$
Esta integral se veía muy difícil sin embargo su solución implicaba únicamente factorizaciones y buen manejo de identidades trigonométricas , esa es la importancia de tenerlas muy presentes.
Las siguiente integral fue propuestas en los concursos del Tecnológico de Monterrey y el torneo de MAC y su solución es sencilla conociendo la identidad necesaria
$\int \frac{sen(2x)}{sen^2(x)+1}\,dx \qquad \int \frac{sen(8x)}{9+sen(4x)}\,dx$

En algunas integrales es una buena estrategia buscar una manera de obtener el mismo valor en el numerador que en el denominador , esta técnica es totalmente valida en integrales con numeradores y denominadores trigonométricos Consideremos la integral de inicio tenemos

$\int \frac{sen(x)}{sen(x)+cos(x)}\,dx$

Multiplicamos y dividimos por 2
$\frac{1}{2}\int \frac{2sen(x)}{sen(x)+cos(x)}\,dx$
Reescribimos $2sen(x)$ y agregamos $cos(x)$ como sigue
$\frac{1}{2}\int \frac{sen(x)+sen(x)+cos(x)-cos(x)}{sen(x)+cos(x)}\,dx$
Separamos en 2 integrales
$= \frac{1}{2}\int \frac{sen(x)+cos(x)}{sen(x)+cos(x)}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{sen(x)-cos(x)}{sen(x)+cos(x)}\,dx$
Reescribimos la segunda integral
$\frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{cos(x)-sen(x)}{sen(x)+cos(x)}\,dx$ Las integrales resultantes son inmediatas
$= \frac{x}{2} - \frac{\ln(sen(x)+cos(x))}{2} + C$
Esta técnica puede ayudarnos a resolver integrales similares sin la necesidad de usar la sustitución de Weierstrass , por ejemplo la siguiente integral que apareció en un concurso de la Universidad Nacional De Colombia
$\int \frac{25sen(x)}{3sen(x)+4cos(x)}\,dx$

Para cualquier función impar , conocer el siguiente resultado puede ayudarnos
$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ si f es una función impar
Por ejemplo

$\int_{-1}^{1} \frac{tan(x)}{x^4}\, dx = 0$
Ya que el denominador siempre sera positivo y $tan(x)$ es una función impar

Finalizaremos esta sección con la siguiente integral
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sen(x)}}{\sqrt{sen(x)}+\sqrt{cos(x)}}\, dx$
Llamemos $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sen(x)}}{\sqrt{sen(x)}+\sqrt{cos(x)}}\, dx$
Sea $x = \frac{\pi}{2} - y$ entonces $dx = -dy$ asi tenemos
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sqrt{sen(\frac{\pi}{2}-y)}}{\sqrt{sen(\frac{\pi}{2}-y)}+\sqrt{cos(\frac{\pi}{2}-y)}} - dy$
Invertimos los limites de integración y hacemos uso de las siguientes igualdades
$Sen(x + \frac{\pi}{2}) = Cos(x)$
$Cos(x + \frac{\pi}{2}) = Sen(x)$
Obtenemos el siguiente resultado el cuál llamaremos A
$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{cos(y)}}{\sqrt{cos(y)}+\sqrt{sen(y)}}\, dy$
Ahora sin perdida de generalidad llamemos $x = y$
$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{cos(x)}}{\sqrt{cos(x)}+\sqrt{sen(x)}}\, dx$
Usamos que $\int_{0}^{b} f(x)\, dx = \int_{0}^{b} f(b-x)\, dx$ para afirmar que $A = I$ este teorema es el motivo del cambio de variable $x = \frac{\pi}{2} - y$
Si sumamos I con A nos queda
$I + A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sen(x)}+\sqrt{cos(x)}}{\sqrt{cos(x)}+\sqrt{sen(x)}}\, dx$
Podemos simplificar la integral y como $A = I$ entonces
$2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx$
La integral a evaluar es muy sencilla
$2I = \frac{\pi}{2}$
Finalmente
$I = \frac{\pi}{4}$
De esta manera concluimos que
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sen(x)}}{\sqrt{sen(x)}+\sqrt{cos(x)}}\, dx = \frac{\pi}{4}$

3.4. Hiperbólicas

A mi consideración es poco probable encontrar mas de una integral de este tipo en los torneos y las estrategias de solución para estas integrales son similares a las trigonométricas, no obstante hay un cambio de variable que facilita integrales racionales que incluyen funciones hiperbólicas.

$\int \frac{1}{1+2senh(x)+3cosh(x)}\, dx$

La primer recomendación es usar las siguientes identidades hiperbólicas

$Senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$Cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
Así nos queda la siguiente expresión
$\int \frac{1}{1+2(\frac{e^x - e^{-x}}{2})+3(\frac{e^x + e^{-x}}{2})}\, dx$
Simplificamos y hacemos el cambio $u = e^x$ entonces $du = e^x dx$
$\int \frac{1}{1+u-t^{-1}+\frac{3u}{2}+\frac{3u^{-1}}{2}} \frac{1}{u}\, du$
Simplificando la expresión nos queda una integral sencilla
$\int \frac{1}{\frac{5u^2}{2}+u+\frac{1}{2}}\, du$
Factorizando y completando cuadrados nos queda
$\frac{2}{5} \int \frac{1}{(u+\frac{1}{5})^2+\frac{4}{25}}\, du$
La integral es inmediata
$\frac{2}{5} \frac{1}{\frac{2}{5}} arctan(\frac{\frac{5u+1}{5}}{\frac{2}{5}})$
Simplificando nos queda
$arctan(\frac{5u+1}{2}) + C$
Regresando a la variable x obtenemos el resultado
$= arctan(\frac{5e^x+1}{2}) + C$
El cambio usado es bueno pero al igual que las estrategias de las anteriores secciones a veces pueden existir mejores alternativas, la siguiente integral apareció en el concurso de MAC en 2018 y ejemplifica la situación

$\int \frac{1}{cosh^2(x)(1-2tanh^2(x))}\, dx$
Usar las identidades y luego el cambio $u = e^x$ es mas laborioso que el simple cambio $u = 1 - 2tanh^2(x)$ de donde $du = -4sech^2(x)dx$, asi nos queda
$\frac{-1}{4} \int \frac{1}{u}\, du = \frac{-1}{4} ln(u) + C$
Y finalmente
$= \frac{-1}{4} ln(1 - 2tanh^2(x)) + C$

4. El torneo de integrales en MAC

El torneo de integrales en MAC es un evento realizado en la Semana de la carrera efectuada en el mes Septiembre, se premia los primeros lugares con reconocimientos y algunos kits y desde el 2018 con los primeros lugares se formo un grupo de estudio para ir a participar a otros torneos.

4.1. Detalles del torneo

Actualmente el torneo es organizado por el Dr. Christian Rubio Montiel y consta de un examen de aproximadamente 40 preguntas para resolverse en 2 horas sin calculadora y sin formularios, en 2018 el concurso fue de integrales indefinidas mientras que en el 2019 el examen consto únicamente de integrales definidas para facilitar la revisión. El procedimiento de inscripción se puede hacer de dos maneras , por internet o personalmente el día del torneo hasta donde se no hay un numero máximo o mínimo de participantes.

En la clausura de la semana de MAC se dan a conocer los ganadores y

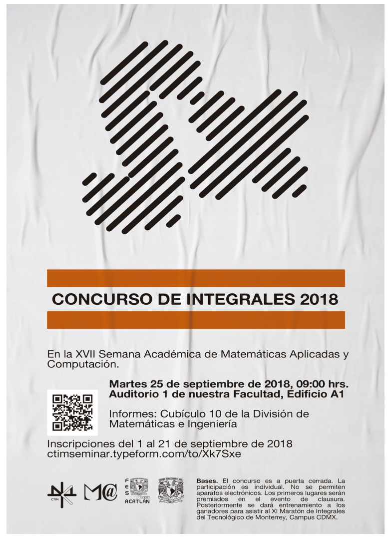

Figura 1: Poster del concurso 2018

posteriormente se trabaja en el grupo de integrales que se forma con los primeros lugares.

4.2. Vicisitudes

Lamentablemente en los últimos años la participación en nuestro concurso ha disminuido de forma notoria , las razones pueden ser variadas pero una encuesta realizada a los estudiantes de MAC revela que las razones principales son la falta de confianza y la preparación.

Además de las razones antes mencionadas en la comunidad existe un mayor interés por los tópicos de programación , esto se ve claramente reflejado en séptimo y octavo semestre donde optativas como Sistemas dinámicos o Métodos Variacionales pocas veces o nunca se han abierto.

De manera personal coincido con los entrevistados en que en los cursos de Calculo II no se profundiza el calculo de primitivas y que de manera general existe una preferencia hacia los concursos de programación u alguna otra actividad en la semana de MAC.
Para aumentar la participación en el concurso las principales sugerencias de los entrevistados fueron:
1) Guías de preparación
2) Mas torneos en el año
3) Curso de preparación
4) Mejor organización

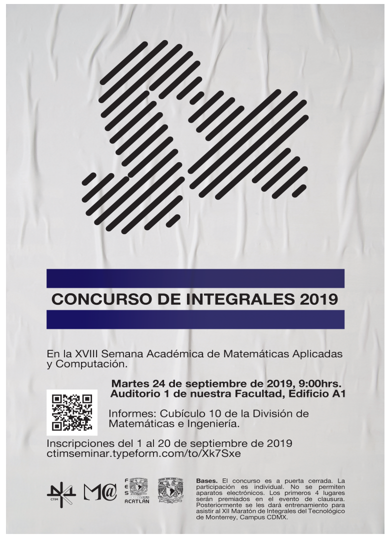

Figura 2: Poster del concurso 2019

4.3. Posibles mejoras

Considero que las sugerencias de los entrevistados son buenas y factibles de realizar , en nuestro grupo de estudio analizamos la posibilidad de realizar mas concursos para distintas categorías ya que es una realidad y sin intención de presumir que los miembros de nuestro grupo tenemos mas experiencia al haber participado en otros concursos y por recibir los entrenamientos.

En cuanto a la organización considero que la difusión debe ser mejor ya que muchas personas no se enteran del concurso o incluso desconocen su existencia.

5. El grupo de integrales

Nuestro equipo de integrales esta actualmente formado por 6 integrantes de distintos semestres 4 de nosotros ya fuimos a competir a el Maratón de Integrales en el Tecnológico de Monterrey en Abril el año pasado.

En dicho Maratón nuestro compañero Emanuel obtuvo el tercer lugar

5.1. Admisión

Aunque el grupo se formo con los ganadores del concurso de integrales en 2018 , no estamos cerrados a recibir únicamente a los ganadores de los torneos, nuestra intención es fomentar la matemática y cualquier persona interesada es bienvenida.

Figura 3: Participantes del Maratón

Nuestros compañeros mas recientes decidieron entrar por experiencias previas y curiosidad.

5.2. Actualidad y Futuro

Actualmente nuestro grupo no es tan formal y de hecho carecemos de nombre y cubículo propio como algunos otros grupos de estudio en la facultad, no obstante este año se espera formalizar el grupo y adquirir un nombre.
Cada semana el profesor Christian nos envía rondas de integrales y una semana después su solución , así mismo en vacaciones nos brindan junto con otros profesores cursos extra de integración por ejemplo integrales con variable compleja.
Coincido con mis compañeros que adentrarse en este mundo de los concursos e integrales es una gran oportunidad para descubrir y aprender mas cosas, facilitar materias como ecuaciones diferenciales y conocer personas nuevas con interés común.

[1] [6] [5] [2] [4]

Bibliografía

[1] Stefan Banach. *Calculo diferencial e integral.* Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, 1967.

[2] Blackpenredpen. 100 integrals (world record?). Accedido en 20-12-2019 a https://www.youtube.com/watch?v=dgm4-3-Iv3s, 2019.

[3] D2L.com. ¿qué es la educación basada en competencias? Accedido en 16-02-2020 a https://www.d2l.com/es/blog/cinco-razones-para-adoptar-la-ebc/, 2015.

[4] Flammable Maths. What is this integral? Accedido en 22-12-2019 a shorturl.at/jMY09, 2018.

[5] Paul J. Nahin. *Inside Interesting Integrals.* Springer, 2015.

[6] N.Piskunov. *Calculo diferencial e integral.* Mir Moscú, 1967.

[7] RAE. Concurso. Accedido en 16-02-2020 a https://dle.rae.es/concurso, 2019.