АЛКТГ. 9 задание.

Эйнуллаев Алтай, 107

1. а) Является рефлексивным и транзитивным. Не является симметричным, а $\rightarrow$ не является отношением эквивалентности. Рис.1

б) Не является рефлексивным(отсутствует $3R3$) является симметричным и транзитивным $\rightarrow$ не является отношением эквивалентности.

2. Пусть N - отношение племянник(ца), F - отец, M - мать. Обозначим $P = F \cup M$. Тогда отношение N выражается через P следующим образом:

$$xNy \leftrightarrow (xPz \wedge zPt) \wedge yPt \wedge (y \neq z)$$

3. а) Дополнение отношения P_1 не всегда транзитивно, т.к. допустим $(x, y) \in P_1$ и $(x, z), (z, y) \notin P_1$. Тогда в $(x, z), (z, y)$ в дополнении P_1, а (x, y) нет. Нарушается условие транзитивности.

б) $P_1 \cap P_2$ будет транзитивным. Предположим обратное, тогда $\exists x, y, z | (x, y), (y$ $P_1 \cap P_2$ и $(x, z) \notin P_1 \cap P_2$, но тогда это верно и для P_1 и P_2 по отдельности. Что противоречит выбору P_1, P_2.

в) $P_1 \cup P_2$ не всегда транзитивно, т.к. допустим $(x, z) \in P_1$ и $(x, y), (z, y) \notin P_1$. В то же время, $(z, y) \in P_2$ и $(x, z), (x, y) \notin P_2$. Тогда в $(x, z), (z, y)$ в $P_1 \cup P_2$, а (x, y) нет. Нарушается условие транзитивности.

д) $P_1 \circ P_2$ не транзитивно, приведём контрпример: $(P_1 = \{(a, b), (c, d)\}$, $P_2 = \{(b, e), (d, f)\}$, $P_1 \circ P_2 = \{(a, e), (c, f)\}$ - не транзитивно.

4. а) Может. Максимальное кол-во пар которое может содержать бинарное отношение на мн-ве из 6-и элементов 36. Следовательно, если три недостающие пары - это пары вида (x, x), то бинарное отношение симметрично.

б) Например уберём пару вида: (x, y), тогда, для сохранности транзитивности надо будет убрать элементы $(i, x) : 1 \leqslant i \leqslant 6$. Получаем, что для сохранности транзитивности будет убрать как минимум 6 пар, что не позволяет получить транзитивное отношение с 33 парами. .

5. а) Да. Это отношение и рефлексивно, и симметрично, и транзитивно, $\rightarrow$ это отношение эквивалентности. б) Нет. Данное отношение как минимум не рефлексивно: т.к. у одиннаковых чисел нет различных чисел, $\rightarrow$ это не отношение эквивалентности. в) Да. Во первых отношение рефлексивно, т.к. у одинаковых чисел разница суммы цифр равна нулю, т.е. четно. Так же симметрично, тк $|a-b| = |b-a|$ и $\rightarrow$ чётность сохраняется. И транзитивно. Для доказательства рассмотрим 3 числа x, y, z разница разница сумм цифр чисел x, y и y, z будет чётной, если суммы цифр обоих пар либо чётные одновременно, либо нечётные одновременно. В таком случае сумма цифр всех трёх чисел будет одной чётности, $\rightarrow$ разница между сумма цифр числе a и c будет тоже чётно. $\rightarrow$ это отношение эквивалентности.

6. Количество отношений эквивалентности на множестве $X \times X$ равно количеству не пересекающихся подмножеств на множестве X.В других случаях, отношение может не быть тотальным, а значит и отношением эквивалентности.$\rightarrow$ найдем кол-во разбиений множества X на не пересекающиеся множества. Т.к. на 1 и 4 подмножества возможно разбить лишь 1 способом, всего 2. На 2 подмножества можно разбить двумя способыми: чтобы в одном под-ве было 3 элемента, а в другом 1 элемент. Всего $C_4^1 = 4$ способов.И чтобы в обоих было по 2 элемента: $\dfrac{C_4^2}{2} = 3$. На три под-ва можно разбить $C_4^2 = 6$ способами. Всего: 15 способов.

7. Докажем, что f - сурьекция. От противного: предположим, что $\exists a' : f^{-1}(a') = \emptyset$. По условию имеем, что $f(g(f(a'))) = a'$, но в этом случае, т.к $f(g(a')) = a'' \neq \emptyset$, то $f(a'') = a' \to f^{-1}(a') = a''$. Пришли к противоречию. Т.е. не существует такое $a' \in A$, что $f^{-1}(a') = \emptyset$. $\to f-$ суръекция. А т.к. мн-во определения и область значений совпадают, то f - биекция.

8. Для доказательства, построим такую функцию f. Для этого занумеруем все классы эквивалентности и каждому $i-$му элементу из B поставим в соответствие $i-$ый класс эквивалентности. Т.к. два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются, то $f^{-1}(b)$ вернет класс эквивалентности и если $f(a) = b, f(a) = b'$, то $b = b'$. Таким образом, мы построили функцию f такую, что класс C представим в виде $C = f^{-1}(b)$.

9. Для того чтобы $f \circ f = id_A$, для каждой пары вида (x, y), где $x \neq y$ должна существовать пара (y, x). Следовательно, таких пар всего четное число, т.к. в противном случае $\exists (x, y)$ и не существует (y, x). Отсюда также следует то,что пар вида (z, z) всего нечетное число, т.е. либо 1, либо 3, либо 5, либо 7. Если их семь, то отображений данного вида всего одно. Если их 5, то выбором 2х пар $(x, y), x \neq y, (y, x)$, автоматически будут определены пары вида (z, z). Всего таких отображений $\binom{7}{2} = 21$. Если пар вида (z, z) 3, то выбираем четыре элемента для составления пар (всего $\binom{7}{4} = 35$) а дальше $\binom{4}{2} = 3$ способа составить из низ две пары. Всего $35 \cdot 3 = 105$. Если же элементов, бьющих в самих себя 1, то есть 7 способов выбрать подобный элемент, и для каждого такого случая $\binom{6}{2} = 15$. Получаем $15 \cdot 7 = 105$. В результате $105 + 105 + 21 + 1 = 232$ способа.