АЛКТГ. 9 задание.
Эйнуллаев Алтай, 107

1. |A| - количество различных таблиц с незакрашенным первым рядом. Т.к. в остальных рядах всего 8 клеток, а каждая может быть либо закрашенной либо незакрашенной, то всего 2^8 способов их закрасить $\to |A| = 2^8$. |B| - количество различных таблиц с незакрашенным последним рядом. Т.к. данный случай ни чем не отличается от предыдущего, то $|B| = 2^8$. |C| - количество различных таблиц с незакрашенными двумя средними вертикалями. Т.к. в остальных вертикалях остается 6 незакрашенных клеток, $|C| = 2^6$. Теперь по формуле включения

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cap B| = 2^4,\ |A \cap C| = 2^4,\ |B \cap C| = 2^4,\ |A \cap B \cap C| = 2^2$$

Следовательно, считая по формуле, получаем $|A \cup B \cup C| = 2^8 + 2^8 + 2^6 - 2^4 - 2^4 - 2^4 + 2^2 = 532$

2. Пусть |A|, |B|, |C|, |D| - количества людей владеющих каждой професией соответственно. По имеющимся данным, посчитаем кол-во людей владеющих любыми двумя профессиями: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 6 + 6 - 4 = 8$. (тут A и B произвольные два мн-ва из 4-х данных). Кол-во людей, владеющих хотя бы одной из четырех есть $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 * |A| - C_4^2 * |A \cap B| + C_4^3 * |A \cap B \cap C| - |A \cap B \cap C \cap D| = 4 * 6 - 6 * 4 + 2 * 4 - 1 = 7$. В итоге, мы получили, что кол-во людей владеющих хотя бы одной профессией меньше, чем людей владеющих любыми двумя, что невозможно. Следовательно, условие не выполнимо.

3. Пусть $|B| = m$. Чтобы инъекция существовала должно выполняться условие, что $n <= m$. В то же время, по условию, существует и сюръекция, а это значит, что $m >= n$. Из этих неравенств получаем, что $n = m \to |B| = n$. Следовательно, любая сюръекций будет инъекцией а их кол-во равно кол-ву биекций. А т.к. кол-во биекций есть кол-во перестановок, то это число равно $n!$.

4. Т.к. каждое подмножество X_i должно быть подмножеством X_{i+1}, то каждое $X_i \subseteq X_j$, где $j > i$. Следовательно, каждый элемент который встретился в одном подмн-ве будет присутствовать во всех последующих подмножествах исходного мн-ва. Тогда поставим каждому элементу $x : x \in X$ число m, номер множества в котором элемент встретился впервые. Т.к. надо учесть случай, когда x_i не входит ни в одно подмн-во исходного мн-ва, $1 <= m <= k+1$, где в случае если x_i не принадлежит ни одному подмн-ву, то ему в соответствие ставится число $k+1$. Теперь наша задача сводится к подсчету различных способов поставить в соответствие элементу из X число $1 <= m <= k+1$. Всего таких способов $(k+1)^n$.

5. Представим класс в виде полного графа, в котором ученики это вершины, а ребра двух цветов: если ученик дружит с другим, то соответствующие вершины соединены синим цветом, в противном случае белым. Переформулировав задание на нашу модель: нам нужно посчитать кол-во одноцветных треугольников. Для этого из общего числа треугольников вычтем кол-во разноцветных треугольников. Общее число треугольников C_{20}^3. Найдем кол-во разноцветных.Из каждой вершины нашего графа выходит 6 рёбер синего(по условию) цвета и 13 - белого, рассомтрим одну вершину, она состоит в $6 \cdot 13$ разноцветных треугольниках, так как можно выбрать любое из 6 синих рёбрер и любое из 13 белых, и составить треугольник из рассматриваемой вершины и двух других концов этих рёбер. Тогда $20 \cdot 6 \cdot 13$ - удвоенное кол-во разноцветных треугольников, ведь в каждом разноцветном треугольнике есть ровно 2 вершины, из которых выходят рёбра разных цветов, то есть мы каждый разноцветный треугольник мы подсчитали 2 раза. Тогда кол-во разноцветных треугольнков - $10 \cdot 6 \cdot 13$. Значит, кол-во одноцветных треугольников $= C_{20}^3 - 10 \cdot 6 \cdot 13 = 360$

6. Возьмём последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_i = f(i)$ для $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Так как f - неубывающее отображение, то $\{x_n\}$ - неубывающая последовательность. Т.к. все элементы нашей последовательности - это числа от 1 до m, то кол-во таких последовательностей - это кол-во способов выбрать n числел из m. Однако, надо учесть,что эта выборка будет с повторениями, ведь для каждой такой выборки существет только одна неубывающаяя последовательность, и каждая неубывающая последовательность есть выборка n чисел из m с повторениями. Следовательно, кол-во способов выбрать n чисел из m с повторениями есть C_{n+m-1}^m.

7. Пусть, A - множество разбиений n-элементного множества на не более чем k подмножеств и B - множество разбиений $n+k$-элементного множества на ровно k подмножеств. Построим биекцию между A и B. В каждое из m подмножеств разбиения мн-ва A добавим по элементу и еще добавим $k-m$ подмножеств, состоящих из одного элемента. Получаем разбиение $n+k$-элементного множества. Таким образом, из двух разных разбиений из мн-ва A выполняя эти действия, получим разные семейства. Т.е. мы построили инъекцию из A в B. Теперь покажем сюръекцию. Возьмем произвольное разбиение из B и уберем из каждого множества в нем по элементу. Получим разбиение n-элементного множества на не более чем k элементов. Оно так же будет разным для различных разбиений из мн-ва B. Следовательно получили сюръекцию. А т.к. суръекция + инъекция = биекция, то кол-ва способов равны.