Appunti di

Analisi Matematica

(serie numeriche)

Rosario Terranova

v 1.0.4

http://rosarioterranova.blogspot.it/

Sommario

Metodo Matematico

La matematica, come ogni altra disciplina scientifica, utilizza oltre al linguaggio comune un proprio linguaggio che serve a rendere con precisione e brevità le proposizioni riguardanti gli enti di cui si occupa. Esso fa largo uso di simboli e abbreviazioni come:

- C.N. → condizione necessaria, senza la quale il resto non ha senso;
- C.S. → condizione sufficiente;
- C.N.S. → condizione necessaria e sufficiente;
- c.v.d. → come volevasi dimostrare

Es. Per passare al secondo anno in corso (ipotesi) serve essere iscritti al primo anno (C.N.) ed avere 30 crediti (C.S.)

Teoremi

Importante funzione nella formulazione di preposizioni matematiche sono i **teoremi**, preposizioni che, a partire da condizioni iniziali arbitrariamente stabilite, traggono delle conclusioni attraverso una sequenza finita di implicazioni logiche, dandone una dimostrazione. Un teorema è composto da:

- Una o più **ipotesi**, ovvero le condizioni iniziali su cui si vuole ragionare, esse sono puramente arbitrarie e non hanno motivo di essere dimostrate;
- Una **tesi**, la conseguenza delle ipotesi, in un teorema tutte le volte che si verificano le condizioni iniziali descritte nelle ipotesi allora si verifica anche la tesi;
- Una **dimostrazione della tesi**, cioè un insieme di implicazioni logiche che possano assicurare che le ipotesi implichino la tesi. Per ottenere una dimostrazione soddisfacente possono essere seguiti diversi schemi dimostrativi come:

  - *Dimostrazione costruttiva*: La dimostrazione costruttiva si svolge utilizzando le condizioni iniziali delle ipotesi per ottenere, tramite una serie di implicazioni logiche, le condizioni della tesi.

    Es. Se volessimo dimostrare in modo costruttivo che se si prendono due numeri pari a e b (ipotesi) allora la loro somma a + b sarà anch'essa un numero pari (tesi) possiamo dire che il fatto che a e b siano pari implica che li si possa scrivere come $a = 2\times n$ e $b = 2\times m$, questo implica che la loro somma sia uguale ad $a + b = 2\times n + 2\times m = 2\times(n + m)$ che è un numero pari (dimostrazione).

    Partendo dall'ipotesi, attraverso una serie di implicazioni logiche abbiamo ottenuto la tesi.

  - *Dimostrazione per assurdo*: La dimostrazione per assurdo viene fatta ipotizzando che la tesi sia sbagliata e dimostrando che una tesi sbagliata implichi delle asserzioni che entrano in contrasto con le ipotesi.

    Es. Se volessimo dimostrare per assurdo che se si prendono due numeri reali a e b diversi da 0 (ipotesi) allora la loro somma a + b sarà diversa dalla loro differenza a - b (tesi) ipotizziamo che la tesi sia sbagliata e quindi che la somma dei due numeri sia uguale alla loro differenza: $a + b = a - b$, questo implica che $a + b - a = -b$ che a sua volta implica che $b=-b$ ma questo, nell'insieme dei numeri reali, è vero solo se b è uguale a 0 e questo è assurdo perché in contrasto con l'ipotesi che a e b siano diversi da zero (dimostrazione).

    Abbiamo negato la tesi e, tramite delle implicazioni logiche, abbiamo ottenuto delle condizioni che entrano in contrasto con le ipotesi.

  - *Dimostrazione per induzione*: utilizzata per i teoremi che asseriscono che gli elementi di un certo insieme numerabile posseggono una particolare proprietà. Se si riesce a dimostrare che il teorema vale per il primo elemento dell'insieme e che, se il teorema vale per un elemento qualsiasi, allora vale anche per il successivo allora la tesi è stata dimostrata.

Un teorema tipico potrebbe essere: $A \to B \to C \to D$ (ovvero da A segue B, dal quale segue C, dal quale segue D). In questo caso, A è un'**assioma o postulato** del sistema, ovvero una proposizione non dimostrata (e non dimostrabile per definizione) ma assunta per vera in quanto ritenuta evidente o comunque indispensabile nello sviluppo assiomatico di un sistema. Non può esistere un sistema totalmente privo di assiomi.

Teorie

Un teorema matematico può anche essere inteso come un enunciato che viene dimostrato nell'ambito di una **teoria formale** (come ogni altra proposizione derivabile dagli assiomi della teoria mediante un procedimento dimostrativo) e che in un'esposizione sistematica della teoria viene presentato come risultato di rilievo. Le implicazioni logiche di una teoria vengono chiamate:

- **Corollari** se dimostrati grazie alle implicazioni di un teorema; solo la conseguenza di una teoria;
- **Lemmi** se le loro implicazioni sono necessarie per la dimostrazione di un teorema.

Si usa inoltre il termine **proposizione** per tutte quelle implicazioni logiche tra due predicati che hanno una rilevanza inferiore a quella di un teorema.

Tutte quelle affermazioni ritenute vere ma per le quali non si dispone di una dimostrazione soddisfacente vengono chiamate **congetture**.

Infine, si dice **legge** una relazione matematica estrapolata a partire da dati empirici e in grado di spiegare con un sufficiente grado di precisione un'osservazione sperimentale.

Implicazioni

Diremo che la preposizione P implica Q se ogni qualvolta P è vera, è vera anche Q, e scriveremo $P \Rightarrow Q$.
C.N. affinché P sia vera è che lo sia Q, *C.S.* affinché Q sia vera è che lo sia P. Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, allora $P \Leftrightarrow Q$, ovvero P è vera **se e solo se** lo è anche Q. *C.N.S.* affinché P sia vera è che Q sia vera.

Numeri reali

Insiemi

Concetto primitivo intuitivamente noto.

$x \in A$ x è un elemento, ∈ è l'appartenenza, A è l'insieme

- **UNIONE**: $A \cup B = \{x \in A \cup B : x \in A \vee x \in B\}$ (un elemento è preso una volta sola)
- **INTERSEZIONE**: $A \cap B = \{x \in A \cup B : x \in A \wedge x \in B\}$ (elementi comuni)
- **COMPLEMENTARE**: $A^C = \{y \in \mathbb{U} : x \notin A\}$
- **SOTTOINSIEME**: $X \subseteq Y \Leftrightarrow x \in X \Rightarrow x \in Y$
- **SOTTOINSIEME STRETTO**: $X \subset Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin Y$
- **INSIEME DELLE PARTI**: insieme formato da tutti i possibili sottoinsieme dell'insieme dato. Numero di sottoinsiemi dato da 2^n dove n sono il numero degli elementi dell'insieme.

Es. $A = \{1,2,3\}$ $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ $2^3 = 8$ sottoinsiemi

Insiemi numerici

Siano noti i seguenti insiemi numerici:

- **Numeri naturali** $\mathbb{N} = \{1,2,3,4, \ldots\}$
- **Numeri interi o relativi** $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$
- **Numeri razionali** (numero espresso come rapporto di due numeri relativi, cioè sotto forma di frazione) $\mathbb{Q} = \left\{2,3\, , \frac{23}{10}, 2{,}5\overline{3}\right\}$ (essi comprendono i numeri decimali con un numero finito di cifre, e i numeri decimali con un numero infinito di cifre periodiche)

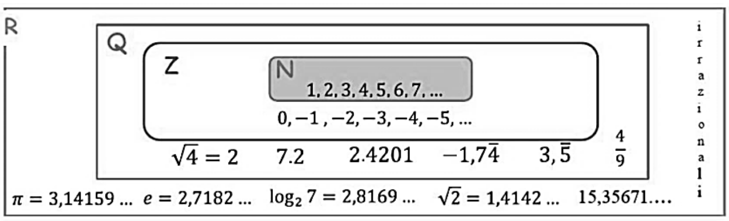
Ma è chiaro che si potrebbe considerare il simbolo seguente 0,10100100010000100000…
che non è numero decimale periodico, ma un nuovo ente. Da qui la necessità di un nuovo insieme che contenga $\mathbb{Q}$.
Per colmare le lacune presenti in una qualunque teoria che volesse descrivere la realtà solo facendo uso dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, è stato necessario considerare una più vasta classe di numeri, i cosiddetti **numeri reali** $\mathbb{R}$.

- **Numeri reali $\mathbb{R}$:** Denoteremo con $\mathbb{R}$ l'insieme costituito dallo $0 \in \mathbb{Q}$ e da ogni simbolo del tipo
$$\pm C_0, C_1 C_2 \ldots C_p$$
Essendo $C_0 \in \mathbb{N}_0$ arbitrariamente scelto e $C_i, i \in \mathbb{N}$ cifre arbitrariamente scelte, con la sola condizione che almeno uno dei due numeri C_0 e C_i sia non nullo (di valore noto). Chiameremo **numeri reali** gli elementi di tale insieme. $C_0 \in \mathbb{N}_0$ sarà detto **parte interna** del numero, mentre $C_i, i \in \mathbb{N}$ sarà detto **i-esima cifra decimale**.

Da tale definizione è ovvio che ogni numero razionale è un numero reale, ma esistono numeri reali che non sono razionali: questi numeri verranno chiamati **irrazionali $\mathbb{I}$.**

- **Numeri irrazionali $\mathbb{I}$:** Un numero reale si dice irrazionale quando non può essere espresso come rapporto di due numeri relativi, cioè se non può esser espresso sotto forma di frazione. Essi sono formati da una parte intera e da una parte decimale con infinite cifre non periodiche.
$$\mathbb{I} = \left\{\sqrt{2} = 1{,}41421 \ldots, \pi, e\right\}$$

Quando un numero reale è razionale avremo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
Quando un numero reale è irrazionale avremo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{I}$



L'insieme dei numeri razionali e irrazionali formano i numeri reali.

Proprietà dei numeri reali

Numeri reali uguali

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Diremo che x e y sono **uguali**, e scriveremo x=y, quando se uno dei due è lo zero anche l'altro lo è, oppure nel caso in cui uno (o entrambi) siano diversi da zero, quando essi hanno lo stesso segno, stessa parte intera e cifre decimali ordinatamente uguali.

- Proprietà Riflessiva: $x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$
- Proprietà Simmetrica: $x = y \Rightarrow y = x,\ x, y \in \mathbb{R}$
- Proprietà Transitiva: $x = y, y = z \Rightarrow x = z,\ x, y, z \in \mathbb{R}$

Numeri reali positivi e negativi

Chiameremo **positivi** i numeri reali aventi segno "+" e **negativi** i numeri reali aventi segno "-". Denoteremo con $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali positivi e con $\mathbb{R}^-$ l'insieme dei numeri reali negativi. Con $\mathbb{R}_0^+$ (risp. $\mathbb{R}_0^-$) denoteremo l'insieme dei numerali reali non negativi (risp. non positivi) incluso lo zero.

Ordinamento in $\mathbb{R}$

Sia $x \in \mathbb{R}^+$; diremo allora che x è **maggiore** di 0 o che 0 è **minore** di x e denoteremo tale fatto con uno dei simboli $x > 0$ o $0 < x$, rispettivamente.
Sia $x \in \mathbb{R}^-$; diremo allora che x è **minore** di 0 o che 0 è **maggiore** di x e denoteremo tale fatto con uno dei simboli $x < 0$ o $0 > x$, rispettivamente.
Siano $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^-$; diremo allora che x è **maggiore** di y o che y è **minore** di x e denoteremo tale fatto con uno dei simboli $x > y$ o $y < x$, rispettivamente.
Siano $x = C_0, C_1C_2 \dots C_p \dots,\ y = D_0, D_1D_2 \dots D_p \dots \in \mathbb{R}^+$, fra loro non uguali; diremo allora che x è **maggiore** di y o che y è **minore** di x e denoteremo tale fatto con uno dei simboli $x > y$ o $y < x$, rispettivamente, se $C_0 > D_0$ (in $\mathbb{N}_0$) oppure se $C_0 = D_0$ ed esiste $i \in \mathbb{N}$ tale che $C_i > D_i$ (in $\mathbb{N}_0$) mentre $C_j = D_j$(in $\mathbb{N}_0$) $\forall j \in \mathbb{N}_0, j < i$.
Siano $x = -C_0, C_1C_2 \dots C_p \dots,\ y = -D_0, D_1D_2 \dots D_p \dots \in \mathbb{R}^-$, fra loro non uguali; diremo allora che x è **maggiore** di y o che y è **minore** di x e denoteremo tale fatto con uno dei simboli $x > y$ o $y < x$, rispettivamente, se $-y > -x$.
Infine diremo che x è **maggiore o uguale** ad y (risp. che y è **minore o uguale** ad x) se accade che $x = y$ oppure che $x > y$ (risp. $x < y$); scriveremo in questo caso $x \geq y$ (risp. $x \leq y$).

Troncatura

Dato un numero reale decimale non negativo $x = C_0, C_1C_2 \dots C_n \dots$ si chiama **troncatura** a livello $n, n \in \mathbb{N}$, il numero reale $x^{\{n\}} = C_0, C_1C_2 \dots C_n \quad n \in \mathbb{N}_0$.

Valore assoluto (o modulo)

Dato un numero reale *x* si chiama **valore assoluto** di *x*, e si denota con $|x|$, il numero seguente

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Es. Risolvere l'equazione $|2x - 4| + x = 8$ pongo l'argomento del modulo maggiore o uguale a zero
$2x - 4 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 4 \rightarrow x \geq 2$
- se $x < 2$ considero $-2x + 4 + x = 8 \rightarrow x = 4$
- se $x \geq 2$ considero $2x - 4 + x = 8 \rightarrow x = -4$

Ho due soluzioni: $x_1 = -4$ e $x_2 = 4$.

Maggioranti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$. Si diche che un numero reale k è un **maggiorante** di A se

$$k \geq a \qquad \forall a \in A$$

Stesso ragionamento per un minorante. I minoranti e i maggioranti non sono unici, ma sono insiemi.

Insieme limitato

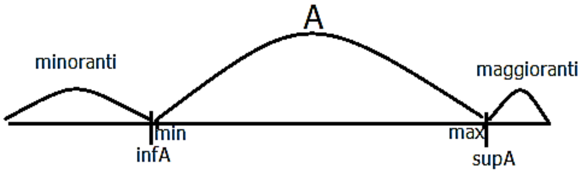
L'insieme A si dice

- **Limitato superiormente**: se esiste almeno un maggiorante
- **Limitato inferiormente**: se esiste almeno un minorante
- **Limitato**: se è contemporaneamente limitato inferiormente e superiormente

Massimo e minimo
Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il **massimo** di A e si scrive $M = maxA$ se $a \leq M \forall a \in A, M \in A$
Stessa cosa per il minimo.

Estremi
L'estremo superiore di A si indica con supA ed è
- +∞ se A non è limitato superiormente, cioè se non esistono maggioranti
- Il minimo dei maggioranti se A è limitato superiormente

Analogamente per il limite inferiore. Il limite, se esiste, è unico.



Es. $\mathbb{N}$: $sup = +\infty, \max \nexists, min = 0, inf = 0$
$\mathbb{Z}$: $sup = +\infty, \max \nexists, min\nexists, inf = -\infty$
(2,5] $sup = 5, \max 5, min\nexists, inf = 2$
(aperto), [chiuso con num incluso],]chiuso con num escluso [

Proprietà dei numeri reali
- Proprietà commutativa: $x + y = y + x = xy = yx$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- Proprietà associativa: $(x + y) + z = x + (y + z), (xy)z = x(yz)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- Opposto: $x + x' = x' + x = 0$
- Reciproco: $xx' = x'x = 1$
- Proprietà distributiva: $x(y + z) = xy + xz$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Numero di Nepero (e)
In matematica, **e** è una costante che, insieme a pi greco (3,14159…), è tra le più importanti per via delle sue numerose applicazioni, in modo particolare nell'ambito dell'analisi matematica.
Poiché è un irrazionale, non è esprimibile come frazione o come numero decimale periodico: la sua approssimazione con 55 cifre decimali è 2,71828… Il numero e può essere definito in uno dei seguenti modi equivalenti:
Come valore del limite $e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Come somma di una serie $e := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

Assioma di continuità
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che A sia tutto a sx di B, cioè $a \leq b \ \forall a \in A, \forall b \in B$. Allora $\exists c \in \mathbb{R}$:
- $a \leq c$ $\forall a \in A$
- $c \leq b$ $\forall b \in B$

c può anche essere un insieme di elementi.

Assioma o principio di induzione
Supponiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ sia data una perposizione P_n. Inoltre, siano soddisfatte le due condizioni seguenti:
1. esista $v_0 \in \mathbb{N}$ tale che P_n sia vera
2. se è vera la generica proposizione $P_h, h \geq v_0$, allora è vera la proposizione P_{h+1}

Allora le proposizioni P_n sono vere $\forall n \geq v_0$

Il vantaggio derivante dall'uso di tale Assioma è che, al fine di dimostrare la veridicità di infinite proposizioni, è sufficiente dimostrarne una sola e, poi, supposta vera la generica proposizione, conseguire la veridicità della proposizione successiva; cioè la dimostrazione delle infinite proposizioni può essere effettuata in due soli passi.

Operativamente, se voglio dimostrare che Pn è vera, allora devo dimostrare:
- Passo base: sostituisci $n = 0$ e vedo se P_0 è vera
- Passo induttivo: assumo per ipotesi che Pn sia vera, ed usando questa informazione dimostro che anche P_{n+1} è vera

Es. Dimostrare per induzione che $0+1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

- Passo base: sostituendo n con 0 ottengo $0=\frac{0\cdot 1}{2}=0$
- Passo induttivo: l'ipotesi dice di dimostrare $0+1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ con $n+1$ al posto di n, quindi la tesi sarà ottenere $(0+1+\cdots+n)+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
- Dimostrazione passo induttivo: $(0+1+2+\cdots+n)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Potenza di base reale ed esponente intero relativo

Dati $a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ si definisce la potenza di base reale ed esponente intero relativo ponendo

$$a^0=1 \qquad a^n=a\,a\,a\ldots a \text{ (n volte)} \qquad a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad \forall a\in\mathbb{R}/\{0\}, n\in\mathbb{N}$$

Sommatoria

Il simbolo Σ si chiama **sommatoria** e la scrittura

$$x_h+x_{h+1}+\cdots+x_k=\sum_{n=h}^{k}x_n$$

si legge "somma di x_n per n che va da h a k".

Il simbolo Π invece si chiama **produttoria**, e la scrittura

$$x_h\cdot x_{h+1}\cdot\ldots\cdot x_k=\prod_{n=h}^{k}x_n$$

si legge "prodotto di x_n per n che va da h a k".

Coefficiente binomiale

Il coefficiente binomiale, indicato con il simbolo $\binom{n}{h}$ che si legge "n sopra h", indica un numero razionale definito come segue

- $\binom{n}{0}=1$
- $\binom{n}{h}=\frac{n!}{h!\cdot(n-h)!} \quad \forall n\in\mathbb{N}, h\in\{1,2,3,\ldots,n\}$

Essendo $h!$ Il **fattoriale** di h, ovvero $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot h$

Radice aritmetica e potenze

Teorema di Esistenza ed Unicità della Radice n-esima Aritmetica di un numero positivo

Siano $a\in\mathbb{R}^+$ ed $n\in\mathbb{N}$. Allora esiste un unico numero reale positivo *x* tale che $x^n=a$. Tale numero viene detto **radice n-esima aritmetica** di a e viene denotato con $\sqrt[n]{a}$.

Potenza di base reale positiva ed esponente razionale

Dati $a\in\mathbb{R}^+, m,n\in\mathbb{N}$ si definisce la **potenza di base reale positiva ed esponente razionale positivo** ponendo

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad m,n\in\mathbb{N}$$

Potenza di base reale negativa ed esponente reale

Siano $a\in\mathbb{R}^-$, per definizione si pone

$$a^0=1, \qquad a^\alpha=\frac{1}{\alpha^{-\alpha}}$$

qualora sia possibile definire la potenza $\alpha^{-\alpha}$.

La radice $\sqrt[n]{a}$ con $a,n\in\mathbb{N}$, è un numero intero oppure irrazionale.

Equazioni e disequazioni irrazionali

Si chiama equazione (risp. disequazione) irrazionale e si scrive

$$\sqrt[n]{A(x)}=\sqrt[m]{B(x)} \qquad \text{(risp. } \sqrt[n]{A(x)}\leq\sqrt[m]{B(x)}\text{)}$$

il problema di trovare (se esistono) numeri reali x_0 detti **soluzioni** tali che siano verificati le identità (risp. ordinazioni)

$$\sqrt[n]{A(x_0)} = \sqrt[m]{B(x_0)} \quad (\text{risp. } \sqrt[n]{A(x_0)} \leq \sqrt[m]{B(x_0)})$$

Il procedimento che serve per cercare di eliminare i radicali dalla disequazione e trasformarla in una disequazione reazionale si divide in quattro casi:

(i) *n* ed *m* dispari. Si elevano ambo i membri a *p* per provare che per $x = x_0$ è soddisfatta la disuguaglianza

$$\left[\sqrt[n]{A(x_0)}\right]^{\frac{p}{n}} \leq \left[\sqrt[m]{B(x_0)}\right]^{\frac{p}{m}}$$

(ii) *n* pari ed *m* dispari. Essendo n pari occorre che $A(x_0)$ sia positivo o nullo, inoltre dato il segno di diseguaglianza, ocore che anche $B(x_0)$ lo sia. Dunque avremo il sistema

$$\begin{cases} A(x_0) \geq 0 \\ B(x_0) \geq 0 \\ \left[\sqrt[n]{A(x_0)}\right]^{\frac{p}{n}} \leq \left[\sqrt[m]{B(x_0)}\right]^{\frac{p}{m}} \end{cases}$$

(iii) *n* dispari ed *m* pari. Essendo m pari occorre che $B(x_0) \geq 0$ ma se il numero al primo membro è positivo si ha

$$\begin{cases} A(x) \leq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A(x_0) \geq 0 \\ B(x_0) \geq 0 \\ \left[\sqrt[n]{A(x_0)}\right]^{\frac{p}{n}} \leq \left[\sqrt[m]{B(x_0)}\right]^{\frac{p}{m}} \end{cases}$$

nel senso che l'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è l'unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi.

(iv) *n* ed *m* pari. Occore che siano entrambi non nulli

$$\begin{cases} A(x_0) \geq 0 \\ B(x_0) \geq 0 \\ \left[\sqrt[n]{A(x_0)}\right]^{\frac{p}{n}} \leq \left[\sqrt[m]{B(x_0)}\right]^{\frac{p}{m}} \end{cases}$$

<u>Equazione esponenziale</u>

Dati due numeri reali positivi a,b si chiama equazione esponenziale, e si denota con

$$a^x = b$$

il problema di trovare, se ne esistono, numeri reali x_0 tali che $a^{x_0} = b$.

<u>Logaritmo</u>

Dati $a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$, l'unica soluzione dell'equazione esponenziale viene detta logaritmo in base a di b e vene denotata con $\log_a b$.

<u>Funzioni</u>

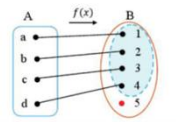
Siano A,B due insiemi arbitrari e non vuoti e sia *f* una legge che ad **ogni** elemento di A associa **uno ed uno solo** elemento di B; la terna (f, A, B) viene detta **funzione** o applicazione.

Una funzione si indica con $f: A \to B$ o con $y = f(x)$ dove:

- *x* è un generico elemento di A
- *f(x)* o *y* si chiama **punto immagine** di x ed appartiene all'insieme B
- l'insieme A viene chiamato **dominio** o **campo di esistenza** di *f(x)*
- il sottoinsieme di B formato dalle immagini di tutti gli elementi del dominio si chiama **codominio** di f*(x)*

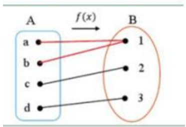
Tipi di funzioni:

- f(x) **iniettiva** $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$
  Ad elementi distinti dell'insieme A corrispondono elementi distinti di B



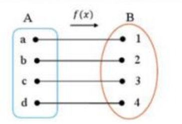
iniettiva

- f(x) **suriettiva** $\Leftrightarrow \forall y \in B \; \exists x \in A: f(x) = y$
  Ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A



suriettiva

- f(x) **biunivoca** $\Leftrightarrow \forall x \in A \; \exists y \in B: f(x) = y \wedge \Leftrightarrow \forall y \in B \; \exists x \in A: f(x) = y$
  suriettiva e iniettiva allo stesso tempo



biunivoca

- f(x) **inversa** se $f: X \to Y$ è biunivoca, allora è definita la funzione inversa $f^{-1}: Y \to X$
- **funzione composta**: dati $g: X \to Y \wedge f: Y \to Z$, definiamo la funzione composta $h: X \to Z$ definita combinando $y = g(x)$ e $z = f(y)$, allora $z = h(x)$

Campo di esistenza

Siano X e Y due insiemi arbitrari ed f una legge che opera su alcuni o tutti gli elementi di X ad ognuno dei quali associa un elemento di Y. Chiamiamo campo di esistenza di f l'insieme

$$E = \{x \in X: f(x) \exists\}$$

Funzioni elementari

- funzione valore assoluto $f(x) = |x|: \mathbb{R} \to [0, +\infty]$
- funzione potenza ed esponente intero $f(x) = x^n: \mathbb{R} \backslash 0 \;\; n \in \mathbb{Z}$
- funzione polinomiale $P_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$
- funzione radice n-esima $f(x) = \sqrt[n]{x}: \mathbb{R} \to [0, +\infty]$
- funzione esponenziale $f(x) = a^x: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$
- funzione logaritmo $f(x) = \log_a x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$
- funzione seno $f(x) = \sin x : \mathbb{R} \to [-1,1]$
- funzione coseno $f(x) = \cos x : \mathbb{R} \to [-1,1]$
- funzione tangente $f(x) = \operatorname{tg} x : \mathbb{R} \backslash \left[\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right] \to \mathbb{R}$
- funzione cotangente $f(x) = \operatorname{ctg} x : \mathbb{R} \backslash [\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}] \to \mathbb{R}$

Funzioni composte

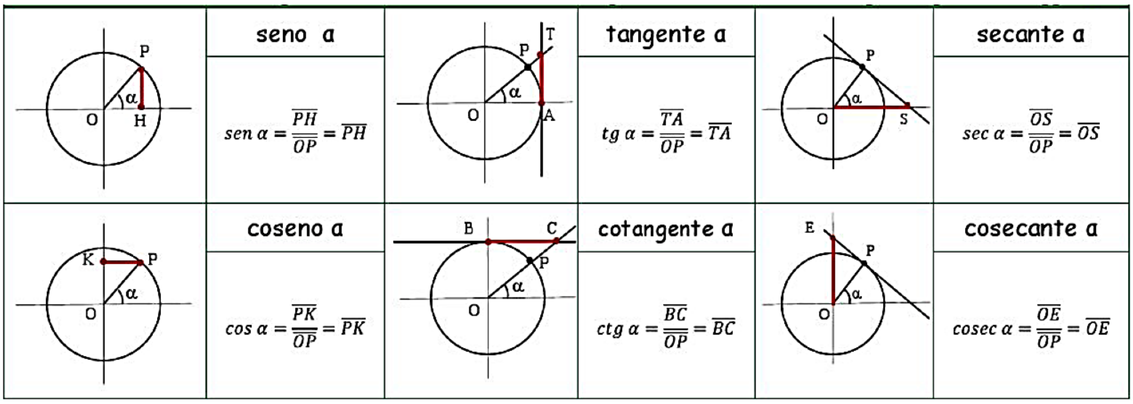
- funzione combinazione lineare $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \quad \forall x \in A$
- funzione prodotto $(f\ g)(x) = f(x) g(x) \quad \forall x \in A$
- funzione quoziente $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in A$
- funzione composta $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Funzione periodica

Def. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; si supponga che l'insieme $\{T \in \mathbb{R}^+ : f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ abbia minimo T_0. Diremo allora che f è periodica in $\mathbb{R}$ con periodo T_0. Siano $X \subset \mathbb{R}, X \neq \mathbb{R}$, ed $f: X \to \mathbb{R}$; si supponga che l'insieme $\{T \in \mathbb{R}^+ : x \in X \Rightarrow x+T, x-T \in X \; e \; f(x+T) = f(x) \forall x \in X\}$ abbia minimo T_0. Diremo allora che f è periodica con periodo T_0.

Funzioni goniometriche

Data la circonferenza goniometrica di centro l'origine degli assi cartesiani e raggio 1 si definiscono le funzioni:



Le cinque relazioni fondamentali:

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$	$ctg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}$	$\sec\alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$	$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$

Funzioni goniometriche di angoli ricorrenti:

angolo	seno	coseno	tangente	cotangente
$0°=360°=2\pi$	0	1	0	$+\infty$
$30°=\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°=\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°=\frac{\pi}{2}$	1	0	$+\infty$	0
$180°=\pi$	0	-1	0	$-\infty$
$270°=\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-\infty$	0

Successioni di numeri reali e suoi limiti

Intervalli ed intorni

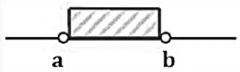
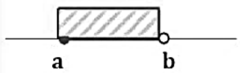
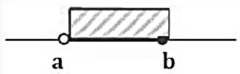
Il concetto di intervallo e di Intorno è essenziale per l'Analisi Matematica. Da notare che se guardiamo le cose da un punto di vista esterno parliamo di intervallo, mentre se assumiamo il punto di vista di un punto dobbiamo parlare di intorno. Quindi la diversità fra intervallo ed intorno dipende solamente dal punto di vista. Dal punto di vista di un osservatore esterno parleremo di intervallo, dal punto di vista del punto interno parleremo di intorno.

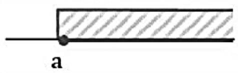
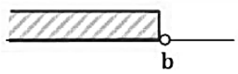
Intervallo

Si definisce intervallo l'insieme di tutti i valori compresi tra due estremi *a* e *b*. Gli estremi *a* e *b* possono essere finiti o infiniti, *a* è detto *estremo sinistro o inferiore*, *b* è detto *estremo destro o superiore* dell'intervallo.

Un intervallo si dice:

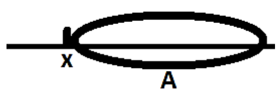
- **limitato** se gli estremi sono finiti
- **non limitato** se almeno uno degli estremi è infinito
- **chiuso** se gli estremi sono compresi
- **aperto** se gli estremi non sono compresi

intervalli limitati			
intervallo	rappresentazione grafica	rappresentazione insiemistica	rappresentazione algebrica
intervallo chiuso		$[\,a, b\,]$	$a \leq x \leq b$
intervallo aperto		$]\,a, b\,[$	$a < x < b$
intervallo chiuso inferiormente e aperto superiormente		$[\,a, b\,[$	$a \leq x < b$
intervallo aperto inferiormente e chiuso superiormente		$]\,a, b\,]$	$a < x \leq b$

intervalli non limitati			
intervallo	rappresentazione grafica	rappresentazione insiemistica	rappresentazione algebrica
intervallo chiuso inferiormente e non limitato superiormente		$[\,a, +\infty\,[$	$x \geq a$
intervallo aperto inferiormente e non limitato superiormente		$]\,a, +\infty\,[$	$x > a$
intervallo non limitato inferiormente e chiuso superiormente		$]\,-\infty,\ b\,]$	$x \leq b$
intervallo non limitato inferiormente e aperto superiormente		$]\,-\infty,\ b\,[$	$x < b$
intervallo non limitato		$]-\infty, +\infty[$	$\forall\, x \in \mathbb{R}$

Punto di accumulazione

Un punto si dice di accumulazione per un insieme di punti se **in ogni intorno del punto vi è almeno un elemento dell'insieme, distinto dal punto stesso**. Almeno uno vuol dire che, visto che posso prendere infiniti intervalli sempre più piccoli, di punti ne conterrà infiniti. L'appartenenza del punto all'insieme non implica che il punto sia di accumulazione per l'insieme; la non appartenenza del punto all'insieme non implica che il punto non sia d'accumulazione per l'insieme.



Es. Sia $x_0 = 3$ ed $A =]2,6[$; x_0 appartiene ad A e dato che qualunque suo intorno si prenda vi è almeno un elemento dell'insieme A distinto dal punto stesso, x_0 è di accumulazione.

Sia $x_0 = 2$ ed $A =]2,6[$; x_0 non appartiene ad A ma dato che qualunque suo intorno si prenda vi è almeno un elemento dell'insieme A distinto dal punto stesso, x_0 è di accumulazione.

Sia $x_0 = 1$ ed $A =]2,6[$; $x_0$non appartiene ad A e dato che si potrebbe prendere l'intorno $[0,1.5]$ il quale non sono elementi dell'insieme A, x_0 non è di accumulazione.

A questo proposito possiamo enunciare un piccolo teorema:
Se un insieme infinito di punti è limitato allora ammette sempre un punto di accumulazione.
Infatti se l'insieme è limitato vuol dire che si trova in un intervallo limitato e se è infinito io posso dividere l'intervallo a metà e almeno in una metà ci devono essere infiniti punti; posso ancora dividere ancora quella metà a metà e in una parte ci saranno sempre infiniti punti e così via di seguito, quindi poiché' in un mezzo intervallino ci saranno sempre infiniti punti allora in quell'intervallino dovrà esserci un punto di accumulazione.

<u>Punto di frontiera</u>
Un punto si definisce di frontiera quando appartiene al bordo dell'insieme. Da notare che un punto frontiera di un insieme può non appartenere all'insieme

Es. Se considero l'intervallo chiuso $I_{[2,5]}$ il punto 2 è un punto di frontiera che appartiene ad I. Se invece considero l'intervallo semiaperto a sinistra $I_{]2,5]}$ il punto 2 non appartiene all'intervallo I anche se è un punto di frontiera.

<u>Punto aderente</u>
Un punto si dirà aderente (o di aderenza) ad un insieme quando o appartiene all'insieme o è di accumulazione per l'insieme stesso:

Es. Se considero l'intervallo semiaperto a sinistra $I_{]2,5]}$ il punto 2 non appartiene all'intervallo I però è un punto aderente all'insieme stesso insieme a tutti gli altri punti dell'intervallo [2,5].

Successioni

Sia B un insieme arbitrariamente non vuoto. Chiameremo **successione** in B ogni funzione $f: \mathbb{N} \to B$.
Una successione è un elenco ordinato costituito da una infinità numerabile di oggetti, detti **termini** della successione, tra i quali sia possibile distinguere un primo, un secondo, un terzo e in generale un n-esimo termine per ogni numero naturale n. Si denota il punto immagine *f(x)* dell'elemento $n \in \mathbb{N}$ con un simbolo del tipo x_n detto **elemento generico** o **termine generale** della successione, mentre *n* viene detto **indice** dell'elemento x_n, mentre indicheremo l'intera successione col seguente simbolo

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad x_n = f(n)$$

Es. La successione dei numeri pari si scrive: $0,2,4, \dots ,2n, \dots = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$
Es. $a_n = 3n + 5$

<u>Verifica definitiva di una successione</u>
Se, data una successione, esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che tutti i suoi termini avente indice non inferiore a ν soddisfano una certa proprietà, diremo che la successione verifica quella proprietà **definitivamente**.

Si dice che una proprietà Pn è vera **definitivamente** se è vera "da un certo punto in poi", cioè se $\exists n_0 \in \mathbb{N}: Pn$ è vera $\forall n \geq n_0$

Es. $n^2 - 2000 \geq 0$ vera definitivamente
$3^n - 10000 \leq$ falsa definitivamente

Data quest'ultima definizione, dunque, si considera successione una qualunque funzione a valori reali che sia definita anche non $\forall n \in \mathbb{N}$, ma almeno definitivamente (quindi è ammesso un numero finito di valori $n \in \mathbb{N}$ per cui la successione non è definita).

Successione stabilizzata

Data una successione a_n di numeri reali non negativi, con $a_n = a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}, \dots\ \forall n \in \mathbb{N}$, si dice che essa è **stabilizzata** se $\forall k \in \mathbb{N}$, la successione $\left(a_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente costante. Se (a_n) è stabilizzata si può definire un nuovo numero reale $a_n = a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ dove $a_k = a_n^{(n)}$ definitivamente $\forall k \in \mathbb{N}_0$; in questo caso si dice che la successione stabilizzata a_n **determina** il numero reale *a* e si scrive $a_n \to a$.

Es. $b_n = \sqrt{n - 2000}$ è una successione stabilizzata da $n \geq 2000$ in poi

Limiti di successioni

Il problema che ci si pone allo studio di una successione (x_n) è quello di determinare il comportamento dei suoi valori (o termini o elementi) al crescere di $n \in \mathbb{N}$. I possibili comportamenti sono quattro:

1. esiste un numero reale a cui i termini della successione sono vicini definitivamente (**convergenza**)
2. i termini della successione definitivamente sono maggiori di qualunque numero (positivo) prefissato (**divergenza positiva**)
3. i termini della successione definitivamente sono minori di qualunque numero (negativo) prefissato (**divergenza negativa**)
4. nessuno dei fatti sopra descritti

Il **carattere** di una successione (cioè il suo comportamento al limite) non varia se alteriamo o trascuriamo un numero finito di termini.

Successione convergente

Diremo che la successione (x_n) **converge** (o tende) ad $x_0 \in \mathbb{R}$ se accade che per ogni $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}\ \exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ risulta $|x_n - x_0| < \epsilon$. In questo caso useremo una qualunque delle seguenti notazioni

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0\ ,\qquad \lim_n x_n = x_0\quad ,\qquad \lim x_n = x_0\ \ ,\ \ x_n \to x_0$$

La precedente definizione può anche essere descritta come segue: $\forall\epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}: |x_n - x_0| < \epsilon \quad \forall n > \nu$

Es. Verificare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$

Applichiamo la formula $\left|\frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$ e semplifichiamo il primo membro $\left|\frac{2n-(2n+5)}{2(2n+5)}\right| = \frac{5}{4n+10}$

Continuiamo a calcolare la disequazione $4n + 10 > \frac{5}{\epsilon} \Rightarrow n > \frac{5}{4\epsilon} - \frac{5}{2}$

Ponendo $\nu = \frac{5}{4\epsilon} - \frac{5}{2}$, dato che in questo caso $\nu \in \mathbb{N}$ abbiamo verificato ciò che volevamo, cioè che $\forall\epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}: \left|\frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon\ \forall n > \nu$

Es. Verificare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{n} = 1$

Applichiamo la formula $\left|\frac{n+4}{n} - 1\right| < \epsilon$ e semplifichiamo il primo membro $\left|\frac{n+4}{n} - 1\right| = \frac{4}{n}$

Continuiamo a calcolare la disequazione $\frac{4}{n} > \epsilon \Rightarrow n > \frac{4}{\epsilon}$

Ponendo $\nu = \frac{4}{\epsilon}$ dato che in questo caso $\nu \in \mathbb{N}$ abbiamo verificato ciò che volevamo, cioè che $\forall\epsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}: \left|\frac{n+4}{n} - 1\right| < \epsilon\ \forall n > \nu$

Successione divergente positivamente

Diremo che la successione (x_n) **diverge positivamente** (o tende a $+\infty$) se accade che per ogni $K > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ risulta $\boldsymbol{x_n > K}$. In questo caso useremo una qualunque delle seguenti notazioni

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty\ ,\qquad \lim_n x_n = +\infty\quad ,\qquad \lim x_n = +\infty\ \ ,\ \ x_n \to +\infty$$

La precedente definizione può anche essere descritta come segue: $\forall K > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}: x_n > K \quad \forall n > \nu$

Es. Verificare che $\lim_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$

La relazione $n^2 - 1 > K$ equivale a $n^2 > K + 1$. Essendo $n > 0$ dato che semplificando otteniamo $n > \sqrt{K+1}$. Dunque se $n > \nu = \sqrt{K+1}$ risulta verificata $n^2 - 1 > K$

Successione divergente negativamente
Diremo che la successione (x_n) **diverge negativamente** (o tende a $-\infty$) se accade che per ogni $K > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ risulta $\boldsymbol{x_n < -K}$. In questo caso useremo una qualunque delle seguenti notazioni

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty \ , \quad \lim_n x_n = -\infty \ , \quad \lim x_n = -\infty \ , \ x_n \to -\infty$$

La precedente definizione può anche essere descritta come segue: $\forall K > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}: x_n < -K \quad \forall n > \nu$

Convergenza e divergenza positiva o negativa
Sia (x_n) una successione a termini positivi. Se essa è convergente, il suo limite l è non negativo; mentre se essa diverge, il suo limite è $+\infty$.

Successione regolare e successione oscillante
Se si verifica uno dei casi contemplati nelle precedenti definizioni, la successione viene detta **regolare**; altrimenti essa viene detta **oscillante o non regolare**.

Es. La successione $((-1)^n)$ è oscillante. Ogni suo termine vale 1 se occupa posto pari, -1 se occupa posto dispari.

Successione infinitamente grande
Diremo che la successione (x_n) è infinitamente grande se accade che $|x_n| \to +\infty$. In questo caso useremo una qualunque delle seguenti notazioni:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty \ , \quad \lim_n x_n = \infty \ , \quad \lim x_n = \infty \ , \ x_n \to \infty$$

Teoremi sui limiti

Teorema di unicità del limite
Sia (x_n) una successione regolare. Si hanno i seguenti casi:

(i) se essa converge non può convergere a due limiti differenti fra loro
(ii) essa non può allo stesso tempo convergere e divergere
(iii) se essa diverge non può allo stesso tempo divergere positivamente e negativamente

Teorema della Permanenza del Segno Generalizzato
- Per successioni convergenti: Se $x_n \to M > L, \ M, L \in \mathbb{R}$, allora esiste $\nu \in \mathbb{N}: x_n > L$
- Per successioni divergenti: Se $x_n \to +\infty$, allora, per ogni $L \in \mathbb{R}$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > L$.

Teorema del Confronto (dei carabinieri)
Informalmente dice che se abbiamo tre funzioni, la prima maggiore delle altre due (maggiorante) e la terza minore delle altre due (minorante) allora se sia la prima che la terza funzione tendono ad un limite finito l allora anche la seconda deve tendere allo stesso limite. Inutile dire che la prima e la terza funzione fanno da carabinieri e prendono in mezzo la seconda per portarla in prigione nel limite.

Siano $(a_n), (b_n), (c_n)$ tre successioni di numeri reali. Si hanno i seguenti fatti:

(i) se esiste $\nu \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \leq c_n \forall n > \nu$ e $\lim a_n = \lim c_n = l$, allora anche $b_n = l$
(ii) se esiste $\nu \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \forall n > \nu$ e $\lim a_n = +\infty$, allora anche $b_n = +\infty$
(iii) se esiste $\nu \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \forall n > \nu$ e $\lim b_n = -\infty$, allora anche $a_n = -\infty$
(iv) se esiste $\nu \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \forall n > \nu$ e le due successioni sono regolari, allora $\lim a_n \leq \lim b_n$

Successione monotòna
Una successione (x_n) si dice monotòna se essa verifica una delle quattro seguenti condizioni

(i) $x_n < x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ (monotòna crescente)
(ii) $x_n \leq x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ (monotòna non decrescente)
(iii) $x_n > x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ (monotòna decrescente)
(iv) $x_n \geq x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ (monotòna non crescente)

Sia (a_n) una successione monotòna. Allora essa è regolare. In particolare, se essa è non decrescente il suo limite è l'estremo superiore (quindi essa è convergente se superiormente limitata, divergente positivamente in caso contrario), mentre se essa è non crescente il suo limite è l'estremo inferiore (quindi essa è convergente se inferiormente limitata, divergente negativamente in caso contrario).

<u>Teorema di limitatezza delle successioni convergenti</u>
Sia (x_n) una successione convergente. Allora l'insieme numerico dei termini della successione è limitato.

<u>Successioni estratte</u>
Sia (a_n) una successione di numeri reali e sia (n_h) una successione crescente di numeri naturali; la successione (a_{n_h}) sarà chiamata **successione estratta** dalla successione (a_n) (o sottosuccessione della successione (a_n)).

Sia (a_n) una successione convergente. Allora ogni estratta (a_{n_h}) converge allo stesso limite.
Sia (a_n) una successione divergente a $+\infty$. Allora ogni estratta (a_{n_h}) diverge allo stesso limite.

<u>Successione aritmetica</u>
Sia chiama **successione aritmetica di ragione** $q \in \mathbb{R}$ una successione $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tale che

$$x_{n+1} = x_n + q \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{x_1 + x_n}{2} n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Successione geometrica</u>
Sia dato $a_0 \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$. Si chiama successione geometrica di ragione $q \in \mathbb{R}$ una successione il cui generico elemento è $x_n = a_0 q^n, n \in \mathbb{N}_0$. Se $q \neq 1$, risulta

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

<u>Algebra dei limiti</u>

Operazioni sui limiti convergenti

Sia a_n, b_n due successioni convergenti e $a, b \in \mathbb{R}$ i rispettivi limiti. Valgono le seguenti proprietà:

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n - b_n \to a - b$
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ se $b \neq 0$

➢ *Limite di una somma*: in modo intuitivo possiamo dire che **il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti**; se ho due funzioni, la prima che tende a 5 e la seconda che tende a 7 per un certo valore di x allora la funzione somma mi tenderà a 12.

Es. $\lim_{x\to 0}(senx + e^x)$ siccome
$\lim_{x\to 0} senx = 0$ e $\lim_{x\to 0} e^x = 1$
avrò $\lim_{x\to 0} 0 + 1 = 1$
Dunque, date due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ tali che $\lim_{x\to 0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = m$ allora si ha $\lim_{x\to 0}\big(f(x) + g(x)\big) = l + m$

➢ *Limite di una differenza, prodotto e quoziente*: come sopra, con segni corrispettivi.

Operazioni sui limiti divergenti

$a_n \to a$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to a$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to -\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to -\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to -\infty$
$a_n \to a>0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to a<0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to -\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to a$	$b_n \to \pm\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n / b_n \to 0$
$a_n \to a>0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$b_n / a_n \to +\infty$
$a_n \to a<0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$b_n / a_n \to -\infty$
$a_n \to a\neq 0$	$b_n \to 0$	$\Longrightarrow$	$\lvert a_n / b_n \rvert \to +\infty$
$a_n \to \pm\infty$	$b_n \to 0$	$\Longrightarrow$	$\lvert a_n / b_n \rvert \to +\infty$

Rapporto tra numeri reali, zero e più o meno infinito

Nell'algebra dei limiti valgono le seguenti regole:

Frazioni	$\frac{a}{0} = \pm\infty \quad a \neq 0$	$\frac{0}{a} = 0 \quad a \neq 0$	$\frac{a}{\pm\infty} = 0$	$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$	$\frac{0}{\pm\infty} = 0$

Somma a infinito	$+\infty \pm a = +\infty$	$-\infty \pm a = -\infty$	$\pm\infty \cdot a = \pm\infty$	$\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$

Potenza	$a^0 = 1 \quad a \neq 0$	$+\infty^a = +\infty \quad a > 0$	$+\infty^a = 0 \quad a < 0$	$(-\infty)^n = +\infty \quad n\, pari$	$(-\infty)^n = -\infty \quad n\, disp.$

Potenza a infinito	$+\infty^{\pm\infty} = +\infty$	$+\infty^{-\infty} = 0$	$(\pm\infty)^n = +\infty$

Forme indeterminate

Nel calcolo dei limiti si possono presentare le seguente sette forme dette indeterminate.

$\frac{0}{0}$	$\frac{+\infty}{+\infty}$	$0 \cdot (\pm\infty)$	$+\infty - \infty$	0^0	$1^{\pm\infty}$	$+\infty^0$

Affermare che un dato limite è una forma indeterminata non significa dire che il limite non esiste, ma significa che esso non è immediatamente calcolabile con una delle regole dei limiti. Vuol dire inoltre che è necessario semplificare o trasformare l'espressione data in modo da togliere, se possibile, l'indeterminazione.

Calcolo dei limiti di funzioni algebriche con forme determinate

Per calcolare i limiti degli esempi proposti di seguito bisogna procedere nel seguente modo:

1. Si sostituisce a posto della *x* nel testo della funzione il valore a cui tende la *x* nel limite

2. Si sviluppano i calcoli tenendo conto dell'algebra classica, dell'algebra dei limiti e dei grafici delle funzioni elementari

Es.

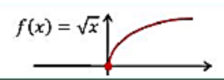
$$\lim_{x\to 2} 2x^3 + x^2 - 3x - 1 = 2 \cdot (2^3) + (2)^2 - 3 \cdot (2) - 1 = 2 \cdot 8 + 4 - 6 - 1 = 16 + 4 - 6 - 1 = 13$$

$$\lim_{x\to +\infty} 2x^3 + x^2 + 1 = 2 \cdot (+\infty)^3 + (+\infty)^2 + 1 = 2 \cdot (+\infty) + (+\infty) + 1 = +\infty + \infty + 1 = +\infty$$

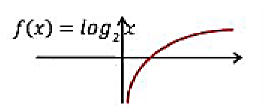
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(0)^2 - 4}{(0) + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lim_{x\to 3} \left(\frac{3 + x}{x + 2}\right)^{x-3} = \left(\frac{3 + 3}{3 + 2}\right)^{3-3} = \left(\frac{6}{5}\right)^0 = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{(-\infty)^2 - 2} = \sqrt{+\infty - 2} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$



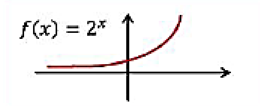
$$\lim_{x\to -\infty} log_2(2x^2 + 1) = log_2(2(-\infty)^2 + 1) =$$
$$= log_2(2 \cdot (+\infty) + 1) = log_2(+\infty) = +\infty$$



$$\lim_{x\to 2} \frac{7}{4 - 2^x} = \frac{7}{4 - 2^2} = \frac{7}{4 - 4} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{senx} - 1}{cosx + 2} = \frac{e^{sen(0)} - 1}{cos(0) + 2} = \frac{e^0 - 1}{1 + 2} = \frac{1 - 1}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} log_5 sen(2^x + \pi) = log_5 sen(2^{-\infty} + \pi) = log_5 sen((0) + \pi)$$
$$= log_5 sen\,\pi = log_5 0 = -\infty$$



Calcolo dei limiti di funzioni algebriche con forme indeterminate

Se il limite delle funzioni algebriche è in forma indeterminata è possibile manipolare algebricamente il polinomio e la radice in modo da sciogliere la forma indeterminata.

- Forme indeterminate comuni:

$\lim_{x\to\pm\infty} polinomio = +\infty - \infty$	• mettere in evidenza la x di grado massimo • ricalcolare il limite tenendo conto dei segni
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	• mettere in evidenza la x di grado massimo al numeratore • mettere in evidenza la x di grado massimo al denominatore • semplificare dove è possibile • ricalcolare il limite tenendo conto dei segni
$\lim_{x\to x_0} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{0}{0}$	• scomporre numeratore e denominatore • semplificare • ricalcolare il limite tenendo conto dei segni

Es.

$\lim_{x\to\pm\infty} polinomio = +\infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = 2\cdot(+\infty)^3 - (+\infty)^2 + 3 = 2\cdot(+\infty) - (+\infty) + 3 = +\infty - \infty$$

la forma indeterminata $+\infty - \infty$ si risolve mettendo in evidenza la x di grado massimo del polinomio, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = (+\infty)^3\cdot\left(2 - \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{(+\infty)^3}\right) =$$
$$= +\infty\cdot(2 - 0 + 0) = +\infty\cdot 2 = +\infty$$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = \frac{(+\infty)+2}{2\cdot(+\infty)^2-5} = \frac{+\infty}{2\cdot(+\infty)-5} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

la forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ si risolve mettendo in evidenza la x di grado massimo al numeratore e al denominatore, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\cdot\left(2-\frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\cdot\left(2-\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{2}{(+\infty)}}{(+\infty)\cdot\left(2-\frac{5}{(+\infty)^2}\right)} = \frac{1}{(+\infty)\cdot 2} = \frac{1}{(+\infty)} = 0$$

$\lim_{x\to x_0} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si risolve operando algebricamente sul numeratore e denominatore, cioè:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

- Calcolo rapido:

per calcolare rapidamente $\lim_{x\to\pm\infty} polinomio = +\infty - \infty$	• sostituire $+\infty$ o $-\infty$ alla x di grado massimo e trascurare gli altri termini del polinomio • tenere conto dei segni
per calcolare rapidamente $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ bisogna considerare il grado del polinomio al numeratore e il grado del polinomio al denominatore	• se il polinomio al numeratore ha grado maggiore il risultato è $\pm\infty$ tenendo conto dei segni • se i gradi sono uguali il risultato è il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo • se il denominatore ha grado maggiore il risultato è zero

- Radici:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{A}-\sqrt{B} = +\infty-\infty$	ricordando che: $(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A-B$ • moltiplicare e dividere per $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ • sviluppare i calcoli • ricalcolare il limite tenendo conto dei segni
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B} = +\infty-\infty$	ricordando che: $(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})\left[(\sqrt[3]{A})^2+\sqrt[3]{AB}+(\sqrt[3]{B})^2\right] = A-B$ • moltiplicare e dividere per $(\sqrt[3]{A})^2+\sqrt[3]{AB}+(\sqrt[3]{B})^2$ • sviluppare i calcoli • ricalcolare il limite tenendo conto dei segni

Es.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{A}-\sqrt{B} = +\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}\right) = \sqrt{3\cdot(+\infty)}-\sqrt{(+\infty)} = \sqrt{+\infty}-\sqrt{+\infty} = +\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)-x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}} = \frac{2\cdot(+\infty)+1}{\sqrt{3\cdot(+\infty)+1}+\sqrt{(+\infty)}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

la forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ si risolve applicando la tecnica vista in precedenza, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\cdot\left[\sqrt{3+\frac{1}{x}}+1\right]} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}+1} = \frac{\sqrt{+\infty}\cdot\left(2+\frac{1}{(+\infty)}\right)}{\sqrt{3+\frac{1}{(+\infty)}}+1} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

- Casi speciali:

caso $\lim\limits_{x\to\pm\infty} polinomio = +\infty-\infty$

Nel caso si debba calcolare il limite per x che tende a infinito di un polinomio, si può applicare la teoria degli infiniti che afferma che il risultato del limite dipende solo dal monomio di grado massimo del polinomio potendosi trascurare i monomi di grado inferiore.
Ad esempio:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3-x^2+3 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = 2\cdot(+\infty)^3 = 2\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3-x^2+3 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = 2\cdot(-\infty)^3 = 2\cdot(-\infty) = -\infty$$

caso $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Nel caso si debba calcolare il limite per x che tende a infinito del rapporto di due polinomi, si possono confrontare i gradi del polinomio a numeratore e del polinomio a denominatore.
Dal confronto si possono avere tre casi possibili

1° caso: il polinomio a numeratore ha grado maggiore del polinomio a denominatore

Se il polinomio a numeratore ha grado maggiore il risultato del limite per x che tende a infinito è $\pm\infty$.

Il segno + o – si stabilisce in base alla regola dei segni sostituendo $+\infty$ (o $-\infty$) al monomio di grado massimo del numeratore. Ad esempio:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^5-3x+2}{2x^2+4} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+2x-5}{x-4} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^5-3x+2}{2x^2+4} = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4+5x^3}{x^3+2x^2-1} = +\infty$

2° caso: il polinomio a numeratore ha lo stesso grado del polinomio a denominatore	
Se i polinomi a numeratore e a denominatore hanno lo stesso grado il risultato del limite per x che tende a infinito è uguale al rapporto dei coefficienti dei monomi di grado massimo Il segno + o – si stabilisce in base alla regola dei segni sostituendo $+\infty$ (o $-\infty$) al monomio di grado massimo del numeratore e del denominatore. Ad esempio:	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x^3-3x+2}{2x^3+4} = \frac{7}{2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x+2}{4x-2x^2-1} = -\frac{3}{2}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7x^3-3x+2}{2x^3+4} = \frac{7}{2}$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x+2}{4x-2x^2-1} = -\frac{3}{2}$

3° caso: il polinomio a numeratore ha grado minore del polinomio a denominatore	
Se il polinomio a numeratore ha grado minore il risultato del limite per x che tende a infinito è 0. Ad esempio:	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^3-3x+1}{2x^4+4} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+1}{2x^3+4} = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3-3x+1}{2x^4+4} = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{-2x^2+4x+3} = 0$

Limiti notevoli

Sono qui presentati alcuni limiti notevoli utilizzati per una risoluzione più veloce di limiti che possono sembrare poco immediati.

$$\lim_{n\to+\infty} a^n \begin{cases} +\infty \; se \; a > 1 \\ 1 \; se \; a = 1 \\ 0 \; se \; -1 < a < 1 \\ \nexists \; se \; a \le -1 \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^b \begin{cases} +\infty \; se \; b > 0 \\ 1 \; se \; b = 0 \\ 0 \; se \; b < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{b}{n}} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

funzioni goniometriche	
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsenx}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$

funzioni esponenziali e logaritmiche		
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$	
$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$	
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = lna$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \, ln\, x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\, x}{x^\alpha} = 0$ $\quad \alpha > 0$	
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\, x}{a^x} = 0$ $\quad a > 1$	
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$	$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\cdot ln[f(x)]}$	l'uguaglianza a sinistra può essere utile per risolvere alcuni limiti che si presentano nelle forme indeterminate 0^0 $\quad 1^{\pm\infty}$ $\quad +\infty^0$

Ad ogni limite notevole si possono applicare le seguenti proprietà che lasciano invariato il risultato

limite iniziale	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito	se nel limite al posto di x c'è nx il risultato del limite resta lo stesso	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito
$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{x}{senx} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,nx}{nx} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{nx}{sen\,nx} = 1$

Frazioni equivalenti

Per il calcolo dei limiti notevoli può essere utile ricordare alcune delle possibili operazioni con le frazioni:

scomporre la frazione iniziale in due frazioni	dividere ogni monomio del numeratore e del denominatore per la stessa quantità n	moltiplicare e dividere la fra- zione per la stessa quantità n	moltiplicare e dividere il numeratore per n e/o moltiplicare e dividere il denominatore per m
$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}$	$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n}$	$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{n} \cdot n}{\frac{b}{m} \cdot m}$
$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{\frac{a \cdot b}{n}}{\frac{d \cdot c}{n}}$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \cdot \frac{n}{n}$	$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{\frac{a \cdot b}{n}}{\frac{d \cdot c}{n}}$
$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\frac{a}{n}+\frac{b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{(a+b)}{(c+d)} \cdot \frac{n}{n}$	$\frac{a+b}{c+d} = \frac{\frac{a}{n}+\frac{b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$
$\frac{a \cdot b}{c+d} = a \cdot \frac{b}{c+d}$	$\frac{a \cdot b}{c+d} = \frac{\frac{a \cdot b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$	$\frac{a \cdot b}{c+d} = \frac{a \cdot b}{(c+d)} \cdot \frac{n}{n}$	$\frac{a \cdot b}{c+d} = \frac{\frac{a \cdot b}{n}}{\frac{c}{n}+\frac{d}{n}}$

Serie di numeri reali

Il carattere di una serie

Sia a_n una successione di numeri reali $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$, indichiamo con s_n la somma dei primi n+1 elementi della successione, cioè $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, definendo così un'altra successione s_n con $n \in \mathbb{N}$, che ha come base i termini di a_n, ma i quali termini si sommano tra loro; tale successione è detta **successione delle somme parziali**, ed ha come termini:

$$s_0 = a_0, \qquad s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1, \qquad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2, \qquad s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n$$

Si chiama somme parziali perché li sommo fino ad un certo punto, ovvero *n*. In formule:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

NB. Questa formula definisce una sommatoria di un numero finito di oggetti, non una serie.

La coppia di successioni $[a_n, s_n]$ con $n \in \mathbb{N}$ si chiama **serie numerica**. Una serie si denota con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

La quale indica la somma di tutti i termini della successione da $n = 0$ fino all'infinito. Il termine a_n è detto **termine generale** della serie. Studiare il **carattere** di una serie vuol dire determinare se la serie converge, possibilmente calcolandone la somma, o diverge o è indeterminata.

- Se la successione s_n converge ad un numero S, diremo che la serie **converge** ed ha per somma S e scriveremo
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$
- Se la successione s_n diverge positivamente o negativamente, diremo che la serie **diverge positivamente o negativamente** e scriveremo
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$$

La serie si definisce, quindi, come il **limite delle somme parziali** per $n \to \infty$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Se una serie converge viene detta **regolare** o **determinata**; in caso contrario viene detta **irregolare** o **indeterminata**.

Es. Consideriamo la seguente serie detta **serie telescopica** $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$; in questo caso la successione ha come termine generale $s_n = (a_0 - a_{n+1})$ (infatti si ha $s_n = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$; quindi il carattere di una tale serie è determinato da quello della successione a_n; nel caso tale successione converga, la somma della serie è ovviamente $a_0 - \lim_n a_n$.
La **serie di Mengoli** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ è un esempio di serie telescopica poiché $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, questo vuol dire che $a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \dots$ quindi $s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Semplificandone i termini rimane solo $1 - \frac{1}{n+1}$, ovvero il primo e l'ultimo termine. Applicando il limite avremo $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ sostituendo $+\infty$ a *n* avremo $\frac{1}{\infty} = 0$, quindi $1 - 0 = 1$. Dunque $s_n \to 1$, cioè la serie converge ad 1 (la sua somma è 1).
Si chiamano telescopiche le serie in cui c'è questo fenomeno di cancellazione, e il nome è questo poiché si accorciano poi come quando si chiude un telescopio.

Es. Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ detta **serie geometrica** di ragione q. Essa è una particolare serie con $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots$, dove q è la ragione ed n il parametro; sappiamo che per induzione che il termine generico della successione delle somme parziali è $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ con $q \neq 0$. Tale successione:

- Converge se e solo se $|q| < 1$ (o in altre parole $-1 < q < 1$) con limite $\frac{1}{1-q}$
- Diverge positivamente se $q > 1$ e $a > 0$
- Diverge negativamente se $q > 1$ e $a < 0$
- Indeterminata se $q \leq -1$

Es. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$
La serie è considerata una serie geometrica di ragione $q = \frac{2}{3}$. Poiché $-1 < q < 1$ basta applicare la formula del limite e avremo $s_n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$. Possiamo scrivere che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots = 3$, e $\lim_{n\to+\infty} s_n = 3$

Es. Calcolare la somma della serie $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\frac{1}{256}-\frac{1}{1024}+\cdots$

Il rapporto tra un termine della serie è il precedente è $-\frac{1}{4}$. Ci troviamo nello stesso caso, quindi la serie è convergente e la sua somma è $\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}$

Es. Consideriamo la seguente serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ detta **serie armonica** , ovvero una sommatoria infinita dei reciproci dei numeri naturali $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)$. Per studiarne il carattere ricordiamo che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e\ \forall n\in\mathbb{N}$; ne segue che $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1\Rightarrow\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\ \forall n\in\mathbb{N}$. Possiamo così scrivere che
$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>log2+\log\frac{3}{2}+\cdots\log\frac{n+1}{n}=\log(n+1)$ poiché $\lim_n\log(n+1)=+\infty$ anche $\lim_n s_n=+\infty$. La serie armonica risulta quindi divergente positivamente.

Es. Per trovare la **frazione generatrice** di un numero periodico utilizziamo le serie geometriche:
$1,\overline{7}=1{,}777777\ldots$ diventa $1+\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\cdots$ $1+\frac{7}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right)$

All'interno delle parentesi abbiamo una serie di ragione $\frac{1}{10}$ alla quale applicata la formula delle serie geometriche diventa $\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$; non ci resta che moltiplicarla alla somma di prima, la quale diventa
$1+\frac{7}{10}\cdot\frac{10}{9}=1+\frac{7}{9}=\frac{16}{9}$. Dunque la frazione generatrice di $1,\overline{7}=\frac{16}{9}$

<u>Criterio di convergenza di Cauchy</u>

Sia data una serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$. Essa converge se e solo se vale la seguente Condizione di Cauchy, ovvero la condizione necessaria e sufficiente affinché $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converga:

$$\forall\epsilon>0\ \exists\nu\in\mathbb{N}:\quad\sum_{n=0}^{n+p}a_n=|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\epsilon\qquad\forall n\in\mathbb{N},n>\nu\ \wedge\ \forall p\in\mathbb{N}$$

Dimostrazione. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge $\Leftrightarrow(s_n)_n$ converge $\Leftrightarrow\forall\epsilon>0\exists\nu\in\mathbb{N}:n,m>\nu\ |s_n-s_m|<\epsilon$. Fissato $\epsilon>0$, troviamo ν, sia $n>\nu$, p arbitario e $m=n+p$:
$|s_n-s_m|<\epsilon\Rightarrow|s_{n+p}-s_m|<\epsilon\Rightarrow|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|$

La Condizione di Cauchy non è soddisfatta dalla serie armonica, infatti siano $\epsilon=\frac{1}{2},n\in\mathbb{N},n\geq2,e\ p=n$; si ha

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right|>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}=\epsilon\qquad\forall n\in\mathbb{N},n\geq2$$

Corollario 1. Sia data una serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ convergente. Allora $\lim_n a_n=0$. Questo corollario non è altro che la **condizione necessaria per la convergenza di una serie**, ovvero se una serie è convergente, il suo termine generico (la successione a_n) tende a zero per $n\to\infty$.

Dimostrazione. Per ipotesi la serie converge a un *l*, cioè $\exists l\in\mathbb{R}:s_n\to l$.
Essendo $a_n=s_n-s_{n-1}$, dato che $s_n\to l$, e $s_{n+1}\to l$, $l-l=0$, quindi $a_n\to0$.

Es. Data una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ e fissato un numero $k\in\mathbb{N}$, si chiama **serie resto k-esimo** la serie $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ che viene usualmente denotata con R_k. Diciamo informalmente che la serie resto di ordine *k* la serie si ottiene cancellando i primi *k* termini della serie. Una serie ed un suo qualsiasi resto hanno lo stesso carattere poiché $s_n=a_1+\cdots+a_n=s_k+\sum_{n=k}^{\infty}a_n$. La successione dei resti di una serie convergente è infinitesima.
$R_k=\sum_{j=k}^{\infty}a_j=\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=k}^{n}a_j=\lim_n s_n-s_k$ da cui $\lim_k R_k=\lim_k s_n-s_k=0$

Corollario 2. Sia $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ convergente con (a_n) definitivamente non crescente e $a_n\geq0,\forall n\in\mathbb{N}$. Allora $na_n\to0$.

Proposizione 1. Siano date due serie numeriche $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ e due numeri $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Si hanno i seguenti risultati:

(i) Se $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$ e $\sum_{n=0}^{\infty}b_n=B$ allora $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ converge con somma $\alpha A+\beta B$
(ii) Se $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ converge se $\beta=0$, diverge se $\beta\neq0$
(iii) Se $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ è indeterminata, allora $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ è indeterminata se $\beta\neq0$
(iv) Se $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ è reale e converge e $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ è reale e diverge positivamente, allora $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ diverge positivamente se $\beta>0$, diverge negativamente se $\beta<0$
(v) Se $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ sono reali e divergono positivamente e $\alpha\beta>0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ diverge positivamente se $\alpha>0$, diverge negativamente se $\alpha<0$
(vi) Se $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ è reale e diverge positivamente e $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ è reale e diverge negativamente e $\alpha\beta<0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ diverge positivamente se $\alpha>0$, diverge negativamente se $\alpha<0$

(vii) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergono o una diverge e l'altra è indeterminata nulla si può dire sul carattere di $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ senza ulteriori ipotesi

Calcolo della somma di una serie

I passi da seguire per trovare il carattere di una serie sono:

1. Studio dei termini della successione a_n
2. Calcolo del risultato delle somme parziali s_n
3. Applicazione del limite delle s_n per dare il carattere della serie

Per calcolare somma di una serie dobbiamo manipolare il numeratore e il denominatore con scomposizioni e raccoglimenti in modo da (come per i limiti) non far risultare nell'applicazione del limite una forma indeterminata, ma un termine ben preciso.

Es. Calcolare la somma della serie avente come termine della successione $\frac{1}{(n+2)(n+3)}$

$s_n = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$ riducendo ottengo $\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$, calcolo ora il limite per $n \to +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3} = \frac{1}{2}+0-0=\frac{1}{2}$.

Possiamo dunque concludere che la serie è convergente ed ha per somma $s_n = \frac{1}{2}$.

Possiamo usare i seguenti teoremi di calcolo:

- Il carattere di una serie non si altera se si moltiplicano (o dividono) tutti i suoi termini per una stessa costante c diversa da zero, in particolare, se la serie è convergente, moltiplicandone tutti i termini per una costante si ottiene una serie convergente la cui somma è la somma della serie data moltiplicata per tale costante.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c a_n = c s_n$$

- Sommando termine a termine due serie convergenti si ottiene una serie convergente la cui somma è la somma delle somme delle serie data.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a \wedge \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n) = a+b$$

Es. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2^n}{4^n}$

La serie si può riscrivere con $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2^n}{4^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$

- Sopprimendo un numero finito di termini da una serie, il carattere di essa non cambia; se la serie è convergente, sopprimendo un numero finito di termini, la sua somma risulta diminuita della somma dei termini soppressi.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n$$

Serie a termini reali di segno costante

Teorema 1. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Allora essa converge oppure diverge positivamente

Dimostrazione. Una serie con $a_n \geq 0$ definitivamente ha $s_n \leq s_{n+1}$ (successione monotona crescente), ed ha quindi solo due possibilità: convergere, o divergere a $+\infty$.

Es. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $\alpha > 0$ detta **serie armonica generalizzata**; dopo il Corollario 2 del Criterio di convergenza di Cauchy e il Teorema 1 qui sopra abbiamo notato:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \begin{cases} se\ a \leq 1 & diverge\ a+\infty \\ se\ a > 1 & converge \end{cases}$ analogamente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^p n}{n^\alpha} \begin{cases} se\ a \leq 1 & diverge\ a+\infty \\ se\ a > 1 & converge \end{cases}$

Dove $p \in]0,\infty[$, $\alpha \in]0,1]$.

Teorema di Confronto

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini non negativi tali che esista $\nu \in \mathbb{N}$ per cui $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$. Allora:

(i) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

(ii) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

Dimostrazione. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ e $\sum_{n}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$. Assumiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$
Ci sono due situazioni:

1) Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = l$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq l \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$
2) Se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n = +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$

Es. La serie $\frac{1}{n^2}$ converge perché $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Corollario 1. Conosciuto anche come **Teorema di Confronto Asintotico**, siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n , \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che esista $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l \in]0, +\infty[$. Allora le due serie hanno lo stesso carattere, cioè se una converge, converge anche l'altra, se una diverge, diverge anche l'altra.

Dimostrazione. Se $\frac{a_n}{b_n} \to l$, allora $\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2l$ definitivamente. Moltiplico per b_n ed ottengo $\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq 2l\, b_n$.

1) $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum 2l\, b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge (teorema Carabinieri)
2) $\sum b_n = +\infty$ $\Rightarrow$ $\sum \frac{l}{2} b_n = +\infty$ $\Rightarrow$ $\sum a_n = +\infty$ (teorema Carabinieri)

Es. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+6n^2+1}$ brutalmente $a_n \backsim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ è la serie armonica generalizzata, quindi $\sum \frac{1}{n}$ diverge perché armonica con $a = 1$. Il confronto asintotico lo facciamo con $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+3}{n^3+6n^2+1} \cdot n = \frac{n^3+3n}{n^3+6n^2+1}\ (con\ il\ raccoglimento\ troviamo\ che) \to 1$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, cioè diverge, mentre il loro rapporto converge.

Corollario 2. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n , \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che esista $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$. Allora valgono i seguenti fatti:

(i) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
(ii) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

Dimostrazione. È sufficiente osservare che, definitamente, si ha $\frac{a_n}{b_n} < 1 \Leftrightarrow a_n < b_n$ applicando quindi il Teorema di Confronto. Allo stesso modo si dimostrano i seguenti corollari.

Corollario 3. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n , \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che esista $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Allora valgono i seguenti fatti:

(i) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge
(ii) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

Corollario 4. Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n , \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi tali che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, definitivamente. Allora valgono i seguenti fatti:

(i) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
(ii) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

<u>Criterio del Rapporto (D'Alembert)</u>

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esistano $\nu \in \mathbb{N}, K \in]0,1[$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$; allora la serie converge. Se invece esiste $\nu \in \mathbb{N}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$ allora la serie diverge.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$ segue che $a_{n+1} \leq K a_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$. Procedendo per induzione vediamo che $a_{n+1} \leq K^{n+1-\nu} a_\nu, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu$, disuguaglianza che significa che la serie data è maggiorata termine a termine definitivamente dalla serie di termine generale $K^{n+1-\nu} a_\nu$, che è una serie geometrica convergente poiché ha ragione $K \in]0,1[$. Nel caso della seconda ipotesi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ invece, la successione (a_n) è definitivamente non decrescente e quindi non può convergere a zero; allora, la serie non può convergere e deve necessariamente divergere.

Es. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge poiché si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$. Ad esempio posto $n = 2$ avremo $\frac{1}{2}$ che è maggiore di $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$

Corollario. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Si hanno i seguenti fatti:

(i) Se $L = \lim\sup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ allora la serie converge
(ii) Se $l = \lim\inf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ allora la serie diverge

Dimostrazione. Per l'ipotesi (i) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon \quad \forall n > \nu$

Poiché $L < 1$ possiamo scegliere $0 \le \epsilon \le 1 - L$ in modo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon < 1$, quindi la serie converge.

Per l'ipotesi (ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \epsilon$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \epsilon > 1$, quindi la serie diverge.

Es. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2^n}$ applichiamo il criterio $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+4}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n+3}$ semplificando viene $\frac{1}{2} \cdot \frac{n+4}{n+3}$ questo è un limite $\frac{1}{2} < 1$. La serie converge.

<u>Criterio della Radice (Cauchy)</u>

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che esistano $\nu \in \mathbb{N}, K \in]0,1] : \sqrt[n]{a_n} \le K, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge \nu$; allora la serie converge. Se invece esistono infiniti a_n tali che $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, allora la serie diverge.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi $\sqrt[n]{a_n} \le K, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge \nu$ segue che $a_n \le K^n, \forall n \in \mathbb{N}, n \ge \nu$, così che possiamo affermare che la serie data è maggiorata termine a termine definitivamente dalla serie di termine generale K^n, che è una serie geometrica convergente perché con ragione $K \in]0,1[$. Se invece $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ per infiniti indici, allora la successione (a_n) non può convergere a zero; la serie non può convergere e deve necessariamente divergere.

Corollario. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Si hanno i seguenti fatti:

(i) Se $L = \limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ allora la serie converge

(ii) Se $l = \liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$ allora la serie diverge

Dimostrazione. Per l'ipotesi (i) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon \quad \forall n > \nu$

Poiché $L < 1$ possiamo scegliere $0 \le \epsilon \le 1 - L$ in modo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon < 1$, quindi la serie converge.

Per l'ipotesi (ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{a_n} > l - \epsilon$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \epsilon > 1$, quindi la serie diverge.

Es. $\sum_{n>0}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$ Applichiamo il criterio $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}} = \sqrt[n]{\frac{4^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{5^n\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^n\right)}} = \frac{4}{5}\left\{\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$

<u>Criterio di Raabe</u>

Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini tutti positivi. Supponiamo che esistano un numero $K > 1$ ed un indice $\nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu$ si ha

- $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ge K$ allora la serie è convergente
- $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1$ allora la serie è divergente

Dimostrazione. Convergenza con il Criterio di Kummer con $p_n = n\ \forall n \in \mathbb{N}\ e\ p = K - 1$, divergenza con il Criterio di Kummer con $p_n = n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Corollario. Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini tutti positivi. Supponiamo di avere:

(i) Se $l = \liminf_n n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ allora la serie converge

(ii) Se $L = \limsup_n n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ allora la serie diverge

Dimostrazione. Dato che $l < 1$ per definizione di limiti di successioni avremo che $\exists \alpha \in \mathbb{N} : \ \forall n \ge \alpha \quad \Rightarrow n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$

Facendo qualche passaggio otteniamo $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n}$

$\Rightarrow \quad n(a_{n+1})\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n} n(a_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad na_n < (n+1)a_{n+1}$

dato che questa è una serie armonica moltiplicata per una costante, posso scrivere

$na_n > \alpha a_\alpha \quad \Rightarrow \quad a_n > \frac{\alpha a_\alpha}{n}$ dove $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha a_\alpha}{n} = +\infty$

Per il criterio del confronto risulta che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

<u>Criterio di condensazione di Cauchy</u>

Sia data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini non negativi tale che la successione a_n sia non crescente ($0 \le a_n \le a_{n+1}$). Allora, la serie data ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

- Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge
- Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge

Es. Studiare la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$ al variare di $\alpha,\beta \in]0,+\infty[$. Poiché la serie data è una serie a termini positivi ed $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, possiamo utilizzare il criterio di condensazione di Cauchy; dobbiamo allora studiare la serie seguente: $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n}{(2^n)^{\alpha}\ln^{\beta}(2^n)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(2^{\alpha-1})^n n^{\beta}\ln^{\beta}2}$ che può essere studiata con il criterio del rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n+1}n^{\beta}\ln^{\beta}2}}{\frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n}n^{\beta}\ln^{\beta}2}} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta}$ da cui segue che $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$

Ne viene che la serie in esame converge se $\alpha > 1$, con β arbitrario e diverge se $\alpha < 1$ con β arbitrario; se $\alpha = 1$ nulla possiamo dire.

Serie a termini di segno alterno

Sono serie a segno alterno del tipo $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$ con $a_n > 0$

Criterio di Convergenza di Leibnitz

Sia data una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ dove tutti gli a_n sono numeri positivi. Supponiamo che

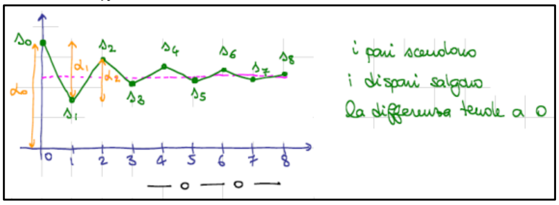
(i) $\lim_n a_n = 0$ (legato alla condizione necessaria di convergenza)

(ii) $a_n \geq a_{n+1}$ definitivamente (cioè non crescente)

In tal calo la serie converge.

Dimostrazione. Devo dimostrare che la successione delle somme parziali (s_n) converge. Consideriamo $s_0 = \alpha_0$, $s_1 = \alpha_0 - \alpha_1$, $s_2 = \alpha_0 - a_1 + \alpha_2$, $s_3 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \ldots$ Dato che è non crescente (ad esempio in s_3 faccio $\alpha_0 - \alpha_1$ ma aggiungo α_2 che è più piccolo della differenza $\alpha_0 - \alpha_1$), dunque $s_1 \leq s_2$ ma $s_2 \leq s_0$, gli s pari scendono mentre gli s dispari salgono, dimostrando la (ii). Inoltre dico che $s_{2n}\ (num. pari) \geq 0$ e $s_{2n+1}(num. dispari) \leq \alpha_0$. Allora avremo che $s_{2n} \to l \in \mathbb{R}$ e $s_{2n+1} \to m \in \mathbb{R}$. Vorrei concludere che $m = l$, ma $s_{2n+1} - s_{2n} = -\alpha_{2n+1}$, ovvero $m - l = 0$, dimostrando la (i).

Graficamente rappresento le s_n nel modo seguente:



Corollario. Sia data una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ dove tutti gli a_n sono numeri positivi. Supponiamo che

(i) $\lim_n a_n = 0$ (legato alla condizione necessaria di convergenza)

(ii) $a_n \geq a_{n+1}$ definitivamente (cioè non crescente)

Allora, detta S la somma della serie ed (s_n) la successione delle somme parziali, si ha $|S - s_n| \leq a_{n+1}$.

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del Criterio di Leibnitz segue che $s_{2n+1} \leq S \leq s_{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi risulta, per n pari $|S - s_n| = s_n - S \leq s_n - s_{n+1} = -(-a_{n+1}) = a_{n+1}$ e per n dispari $|S - s_n| = s_n - S \leq s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$

Condizioni sufficienti affinché una serie a segno alterno è indeterminata. Sia data la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ a termini reali e si supponga che (a_n) sia definitivamente monotona. Allora la serie data non può divergere, quindi se $\lim_n a_n \neq 0$, la serie è indeterminata.

Maggiorazione dell'errore

I termini della successione delle somme parziali di una serie convergente forniscono un'*approssimazione* del risultato della somma della serie stessa, poiché è in generale difficile riuscire a determinare l'esatto valore della somma di una serie convergente. Ma affinché tale approssimazione sia veramente utile sarebbe importante conoscere una *maggioranza dell'errore* che si commette, ovvero l'insieme di termini entro i quali vi è la possibilità di trovare la somma esatta, sostituendo al valore di una somma di una serie convergente un opportuno termine della successione delle somme parziali della stessa serie, in modo da valutare la velocità con cui la successione delle somme parziali approssima la somma della serie.

Sia data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente. Esista poi una serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente tale che $|a_n| \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e della quale sia nota la somma B. allora posto $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e dette $(A_n), (B_n)$ le rispettive successioni delle somme parziali, si ha che

$$|A - A_n| \leq B - B_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Es. Consideriamo la serie $\frac{n!}{n^n}$ ed applichiamo ad essa il Criterio del Rapporto, deducendo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$ ddetta S la somma di tale serie, si ha che $0 \leq S - \sum_{n=1}^{q}\frac{n!}{n^n} = \sum_{n=q+1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n} = \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{(q+h)!}{(q+h)^{q+h}} \leq \frac{q!}{q^q}\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{1}{2^h} = \frac{q!}{q^q}$ $\forall q \in \mathbb{N}$ che è la maggiorazione richiesta.

Maggiorazione dell'errore nel teorema di Leibnitz. Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n$ dove tutti gli a_n sono numeri positivi.

Supponiamo che

(i) $\lim_n a_n = 0$

(ii) $a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Allora, detta S la somma della serie ed (s_n) la successione delle somme parziali, si ha

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}$$

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del criterio di Leibnitz segue che $s_{2n+1} \leq S \leq s_{2n}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Quindi risulta, per n pari $|S - s_n| = s_n - S \leq s_n - s_{n+1} = -(-a_{n+1}) = a_{n+1}$

Per n dispari $|S - s_n| = S - s_n \leq s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$

Convergenza assoluta, serie logaritmica e serie esponenziale

Criterio dell'assoluta convergenza

Il Criterio della Convergenza assoluta viene utilizzato quando i termina di una serie reale non sono di segno costante né di segno alterno. Esso viene comunque usato per dimostrare la convergenza di serie generali.

Data una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diremo che essa converge assolutamente se converge a serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Lo studio di tale serie può essere dunque effettuato più agevolmente dello studio della serie iniziale perché essa è a termini reali non negativi, e quindi possiamo utilizzare un buon numero di criteri. Dall'assolua convergenza segue la convergenza, ma non il contrario.

Dimostrazione. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - |a_n| + |a_n|) = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n| - \sum_{n=0}^{\infty}(|a_n| - a_n)$. Basta dimostrare che le ultime 2 serie convergono. La 1° converge per ipotesi. Per la 2° osservo che $0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|\ \ \forall n \in \mathbb{N}$
Per dimostrare queste due uguaglianze basta considerare il caso $a_n \geq 0$ (in cui viene $0 \leq 0 \leq 2|a_n|$ e il caso $a_n < 0$ (in cui viene $0 \leq -2a_n \leq -2a_n$). Ora applico il criterio del confronto: $\sum 2|a_n|$ converge per ipotesi, dunque $\sum(|a_n| - a_n)$, che è a termini ≥ 0, converge pure lui.

Teorema. Ogni serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ assolutamente convergente è convergente.

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza del teorema dell'applicazione del Criterio di Convergenza di Cauchy alle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, una volta che si tenga conto della ben nota disuguaglianza

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \geq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \qquad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Es. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. Devo studiare il valore assoluto di a_n, ovvero $|a_n| = \frac{1}{n}$, quindi
$\sum|a_n| = \sum\frac{1}{n} = +\infty$, quindi converge per il Criterio di Leibnitz, ma non assolutamente (indeterminato)

Es. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$. Ho che $\sum|a_n| = \sum\frac{1}{n^2}$ che converge, quindi $\sum a_n$ converge

Es. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie numerica reale e sia $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una applicazione biunivoca; la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ si chiama **riordinamento** della serie data. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ viene detta **incondizionalmente convergente** se ogni suo riordinamento converge, e in questo caso si dice anche che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gode della **proprietà commutativa**. Le serie a termini positivo godono della proprietà commutativa, ma questo non è vero in generale per una serie infinita di addendi. Per esempio, una serie oscillante i cui termini pari siano -1 e quelli dispari 1 è oscillante, ma se si disordinano gli addendi la serie risultante può essere divergente.

Es. Conosciuto anche come **Teorema di Riemann-Dini**, sia una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente ma non assolutamente convergente, e sia $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty + \infty\}$. Allora esiste la permutazione $x: \mathbb{N} \to \mathbb{N} :\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{x(k)} \to_{n\to\infty} \alpha$
Informalmente, il teorema afferma che se una serie è (semplicemente) convergente, ma non assolutamente convergente, allora, dato un qualsiasi numero reale, esiste una permutazione dei suoi termini che la rende convergente a tale numero; inoltre, esistono permutazioni dei termini che rendono la serie divergente a $+\infty$ e a $-\infty$.

Serie logaritmica

Una serie logaritmica è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \log\frac{1}{x}$$

e si sviluppa con il seguente calcolo $\sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n}} \to x$

- Se $x < 1$ la serie converge
- Se $x > 1$ la serie diverge
- Se $x = 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x}$ quindi la serie diverge

Serie esponenziale

Una serie esponenziale è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Si può dimostrare che questa serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$ e risulta

$\forall x \in \mathbb{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ si ha dunque che $\lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^n$

Dimostrazione. Applicando il criterio del rapporto, abbiamo $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$ questo rapporto converge a 0, dunque la serie esponenziale è convergente $\forall x > 0$.

Un altro modo per definire il valore è proprio come somma della serie esponenziale per $x = 1$, cioè

$$e \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

serie notevoli			
simbologia		**carattere**	**nome**
$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$	$\sum \frac{1}{n}$	divergente	serie armonica
$1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ $p \in \mathbb{R}$	$\sum \frac{1}{n^p}$	$p \leq 1$ divergente $p > 1$ convergente	serie armonica generalizzata
$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$	$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$	$q \leq -1$ irregolare $-1 < q < 1$ convergente $q \geq 1$ divergente	serie geometrica di ragione q
$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \ldots$	$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n$	$q \leq -1$ irregolare $-1 < q < 1$ convergente $q \geq 1$ divergente	serie geometrica di punto iniziale a e ragione q
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$	$\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$	convergente	serie di Mengoli