

# Computação Científica

---

## Aula 2 - Máquinas de Turing e Aplicações

Prof. Gabriel Resende Machado

 [gabrielmachado@unifeso.edu.br](mailto:gabrielmachado@unifeso.edu.br)

 <https://www.linkedin.com/in/machadogabriel>

 <https://github.com/UNIFESO-Gabriel/computacao-cientifica>

# Introdução à Máquina de Turing

- O modelo de formalização de algoritmo mais utilizado, proposto inicialmente em 1936 por Alan Turing;
- Formaliza a ideia de uma pessoa que realiza cálculos, usando uma fita, um instrumento de escrita e um apagador;
- Existem três maneiras de abordar o estudo de Máquinas de Turing:
  - **Reconhecimento de linguagens formais;**
  - **Processamento de funções;**
  - **Solucionabilidade de problemas** (computáveis, não computáveis, intratáveis).

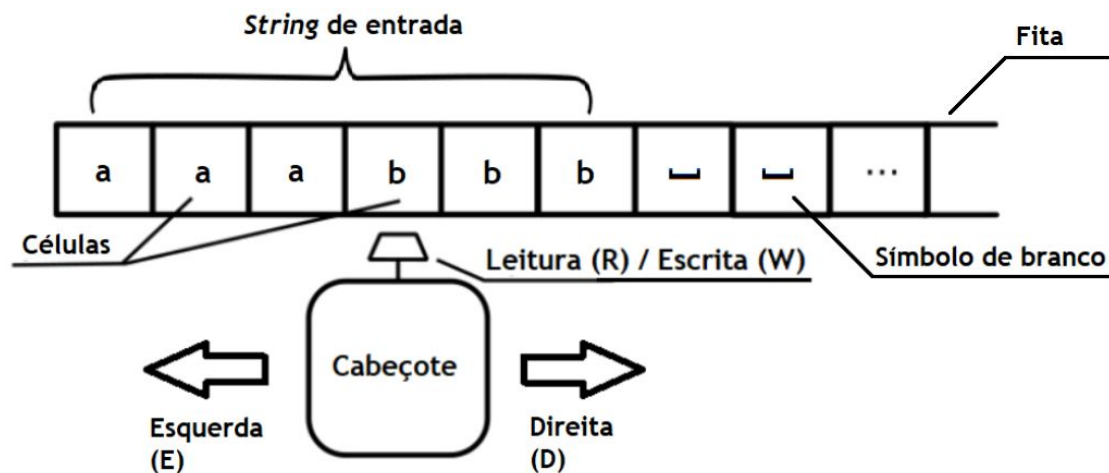


Alan Turing (1912 - 1954)

# Máquinas de Turing

## Modelo Padrão

- Fita composta por infinitas células;
- **Leitura (R)** ou **Escrita (W)** de símbolo contido na célula abaixo do cabeçote;
- Movimentação do cabeçote para a **Esquerda (E)** ou **Direita (D)**, exatamente uma célula;
- **Estados finais:** (i) Parada em *Aceito*; (ii) Parada em *Rejeitado*; (iii) Sem parada (*loop*).

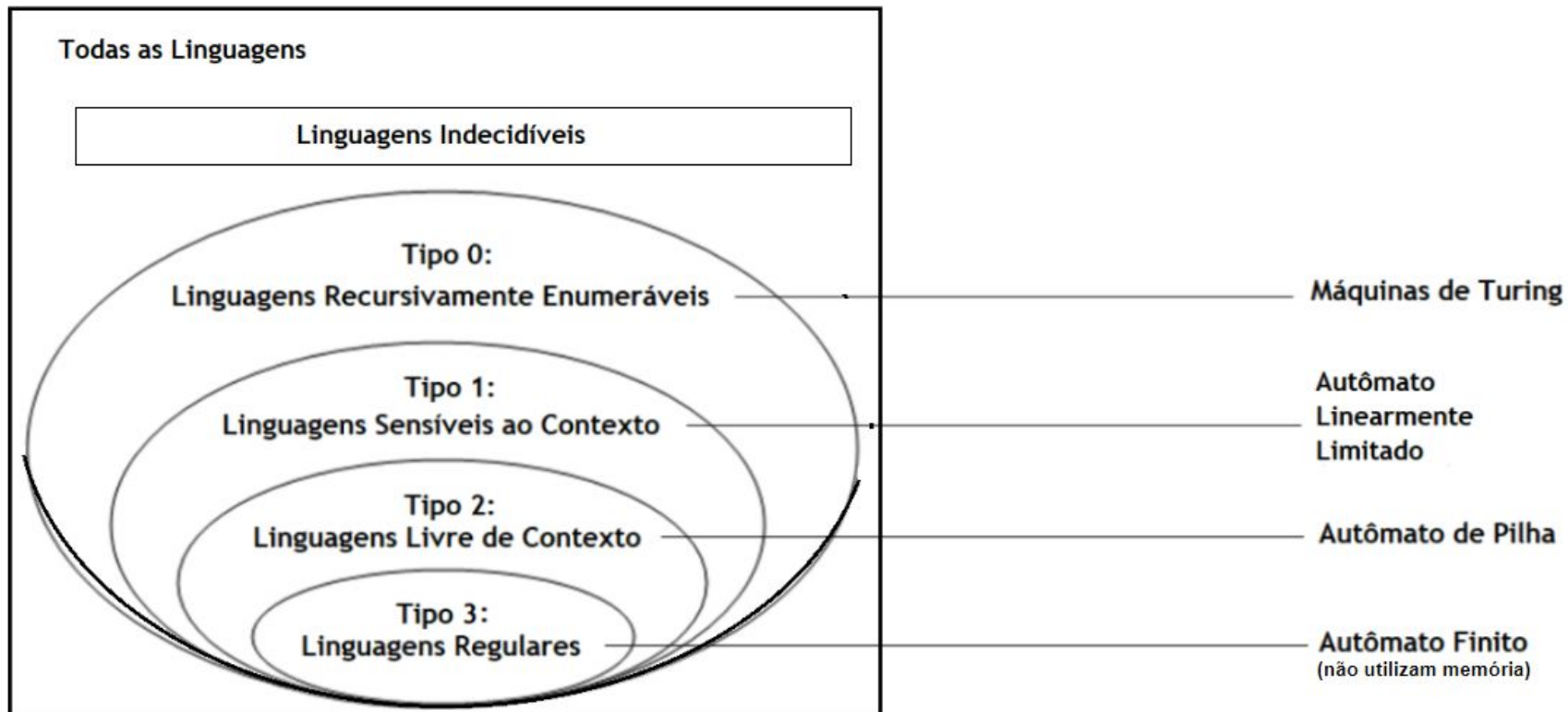


# Máquinas de Turing

## Modelo Padrão - Definição Formal

- Uma Máquina de *Turing*  $M$  pode ser definida a partir da sétupla  $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_a, q_r, \delta)$ , onde:
  - $Q$ : conjunto não vazio dos Estados;
  - $\Sigma$ : conjunto não vazio do Alfabeto da *String*, tal que  $\sqcup \notin \Sigma$ ;
  - $\Gamma$ : conjunto do Alfabeto da Fita, onde  $\sqcup \in \Gamma$  e  $\Sigma \subset \Gamma$ ;
  - $q_0$ : estado inicial, tal que  $q_0 \in Q$ ;
  - $q_a$ : estado de *aceite*, tal que  $q_a \in Q$ ;
  - $q_r$ : estado de *rejeitado*, tal que  $q_r \in Q$  e  $q_a \neq q_r$ ;
  - $\delta$ : função de transição, tal que  $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D\}$ ;
    - Exemplo:  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$ .

# Hierarquia de Chomsky



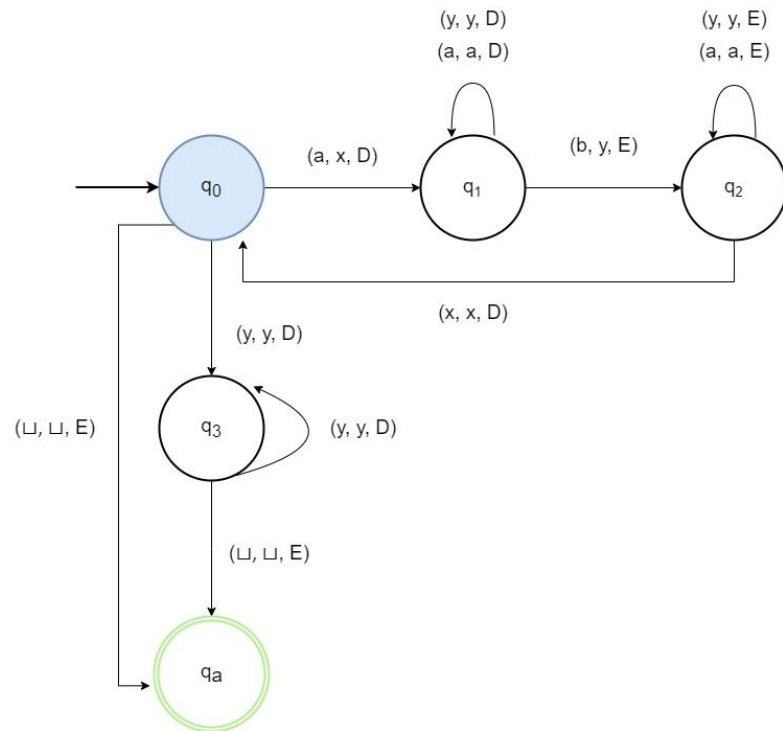
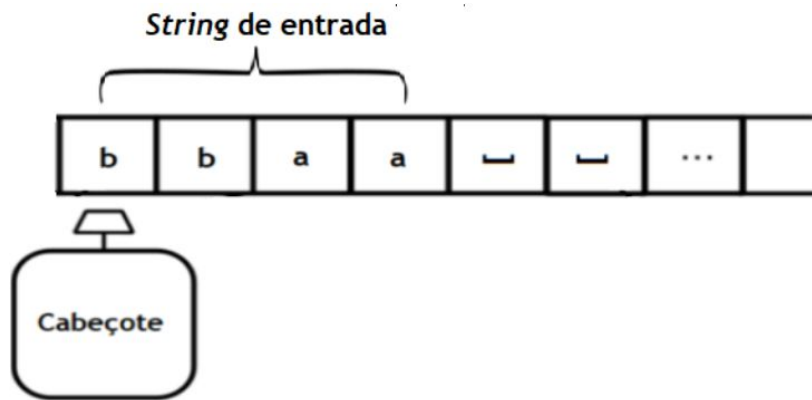
# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - Linguagem Livre de Contexto (LLC)

- Projete uma MT que reconheça a *string* 'bbaa' a partir da linguagem  $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ 
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_a, q_r\}$ ;
  - $\Sigma = \{a, b\}$ ;
  - $\Gamma = \{a, b, x, y, \sqcup\}$ ;
  - $\delta$  = transições (arestas) do autômato finito determinístico.

# Máquinas de *Turing*

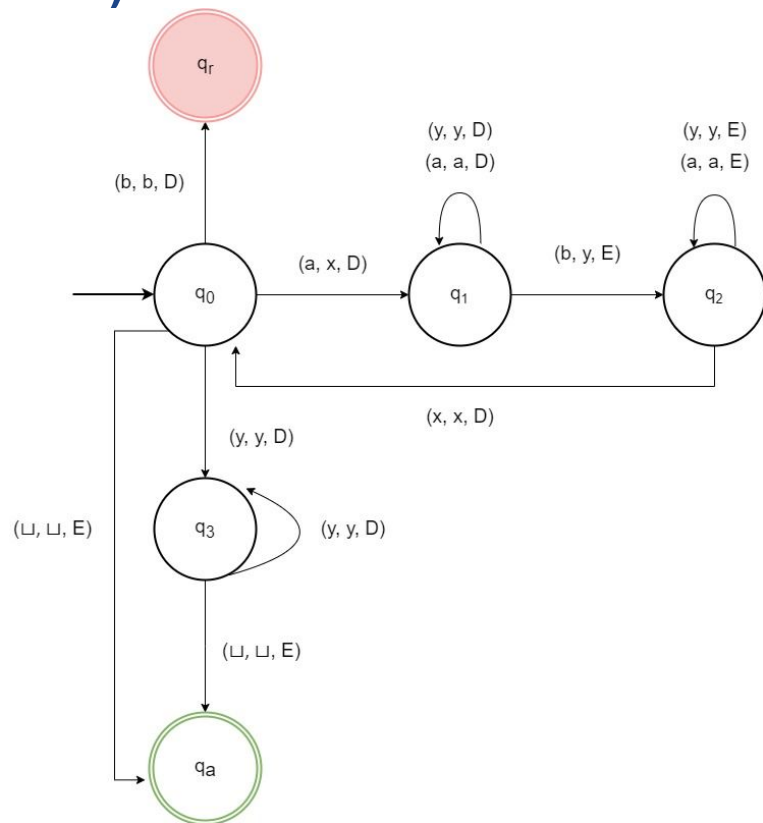
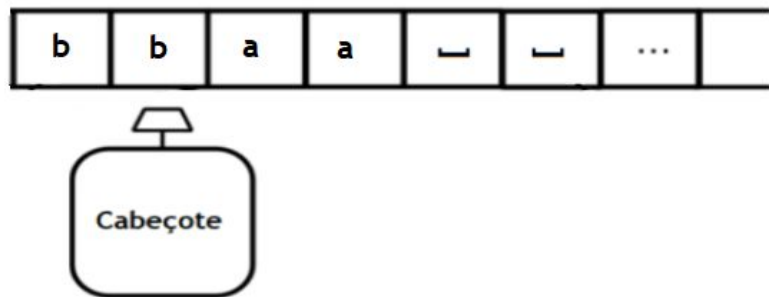
## Exemplo de Aplicação - Linguagem Livre de Contexto (LLC)



# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string* rejeitada)

1.  $\delta(q_0, b) \rightarrow (q_r, b, D)$





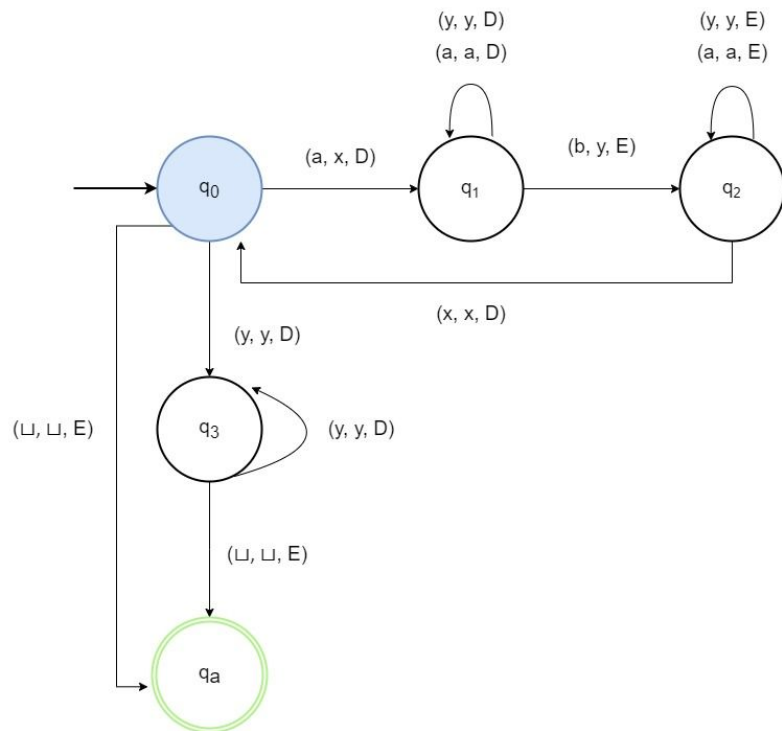
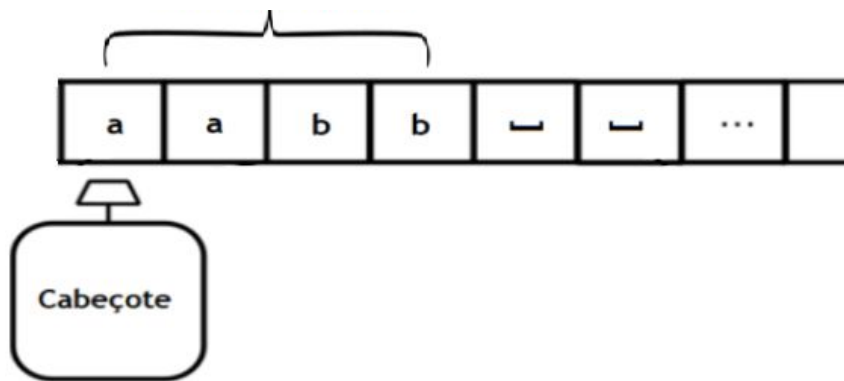
# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string* aceita)

- Projete uma MT que reconheça a *string* '*aabb*' a partir da linguagem  $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ 
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_a, q_r\}$ ;
  - $\Sigma = \{a, b\}$ ;
  - $\Gamma = \{a, b, x, y, \sqcup\}$ ;
  - $\delta$  = transições (arestas) do autômato finito determinístico.

# Máquinas de *Turing*

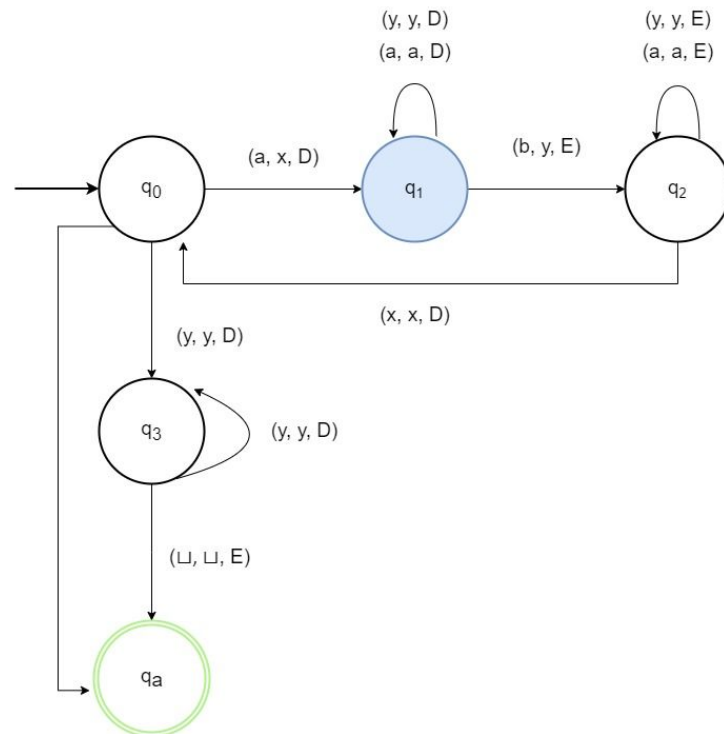
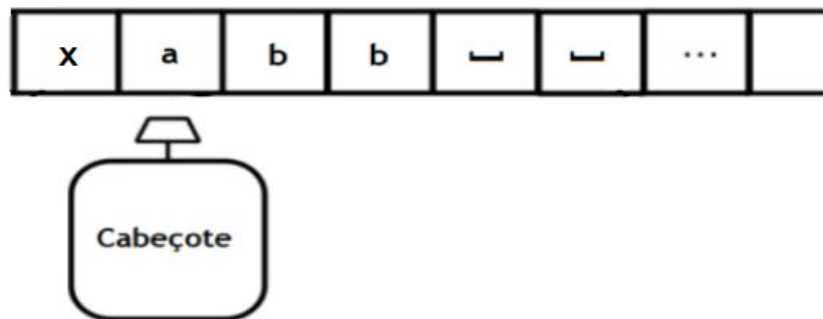
## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)



# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$

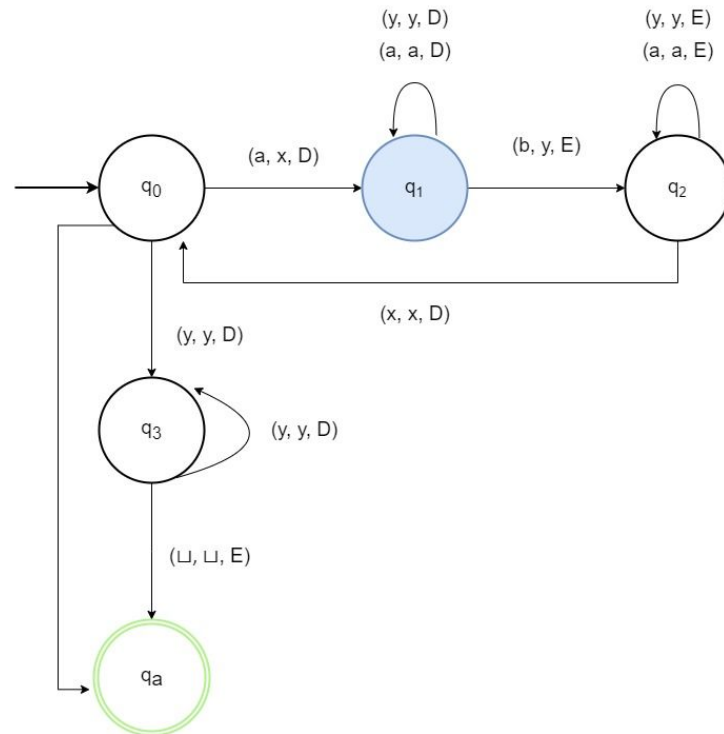
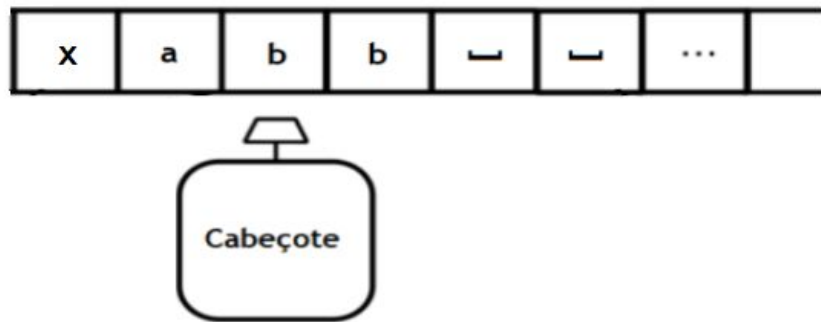


# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$

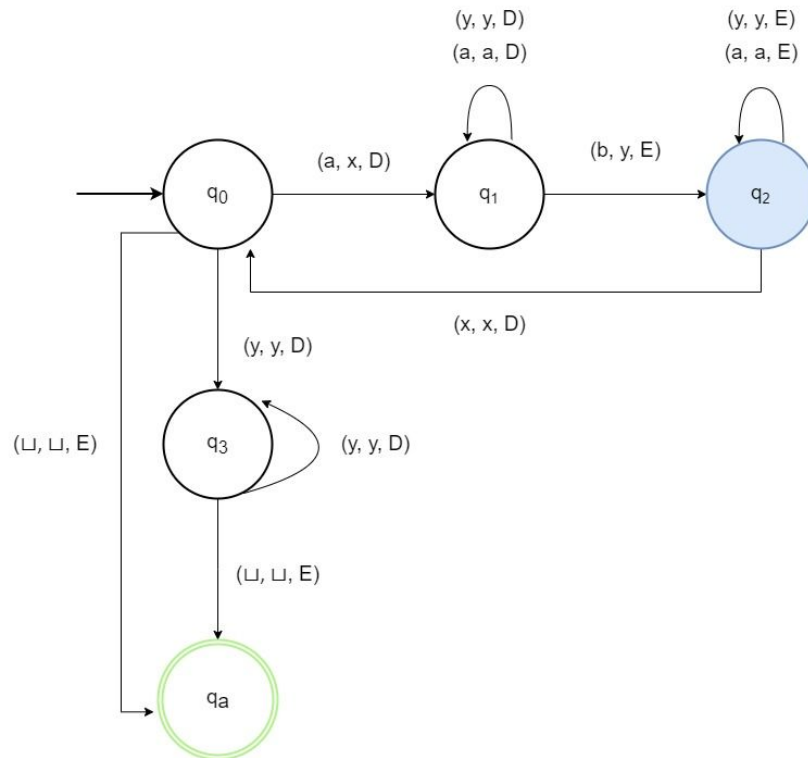
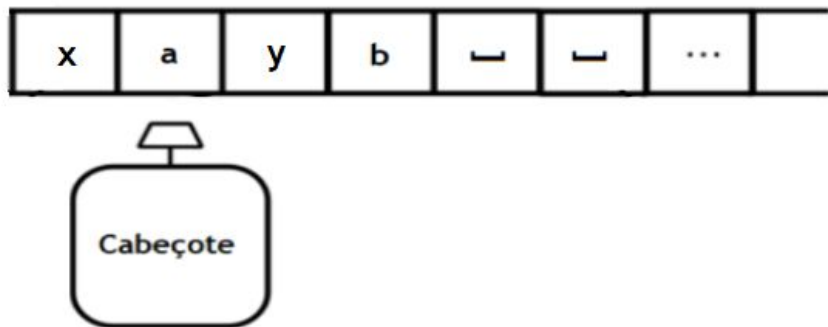
2.  $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$



# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

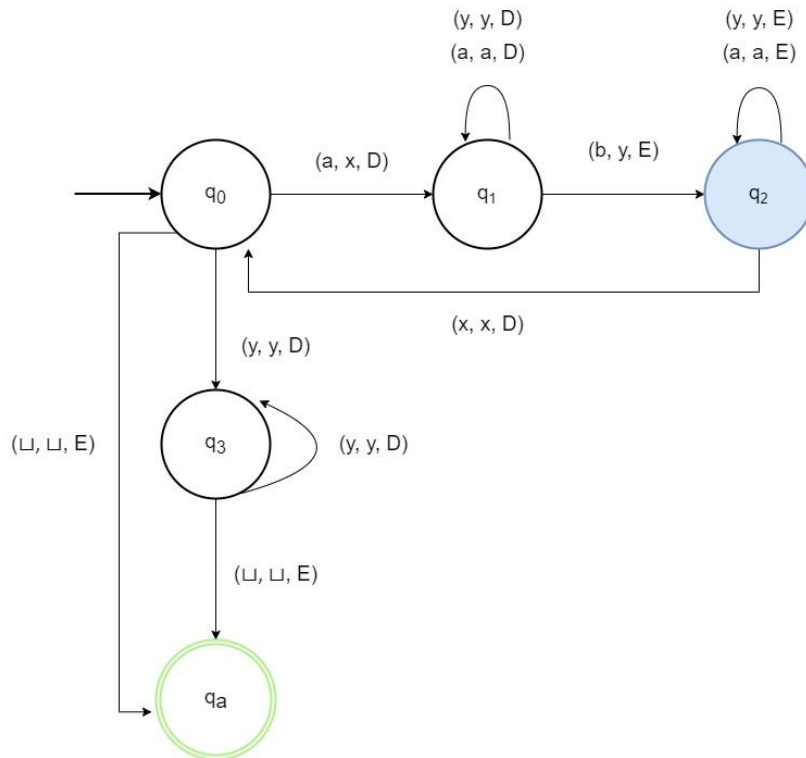
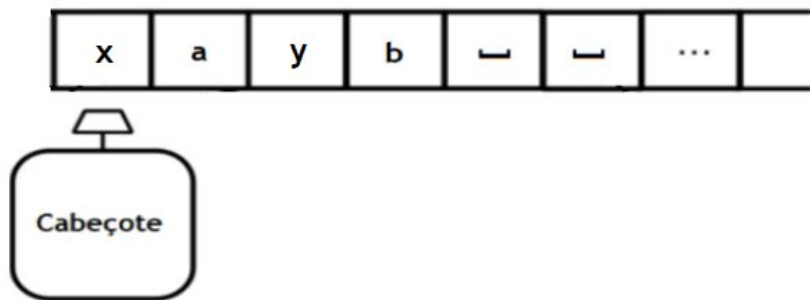
1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
2.  $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$
3.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$



# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

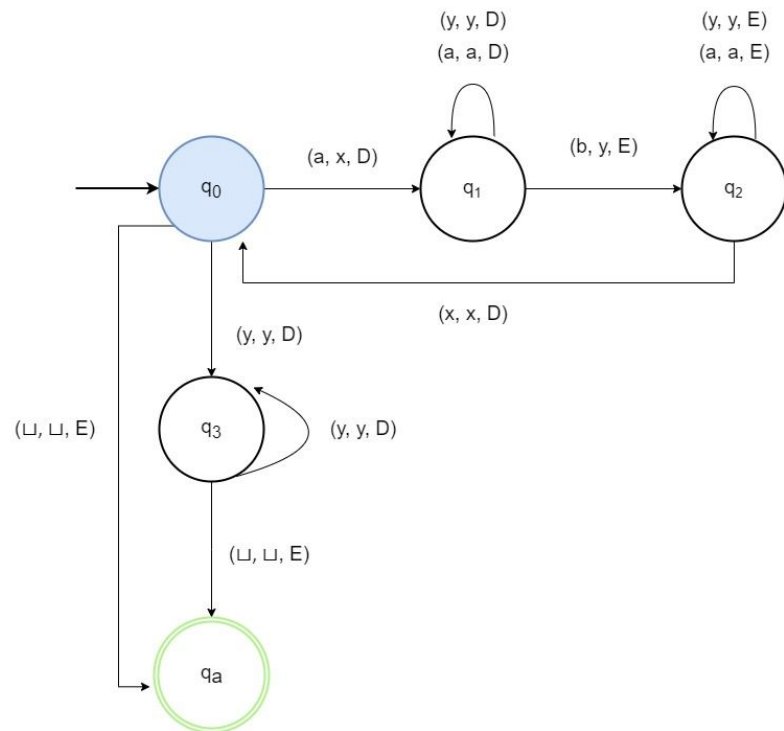
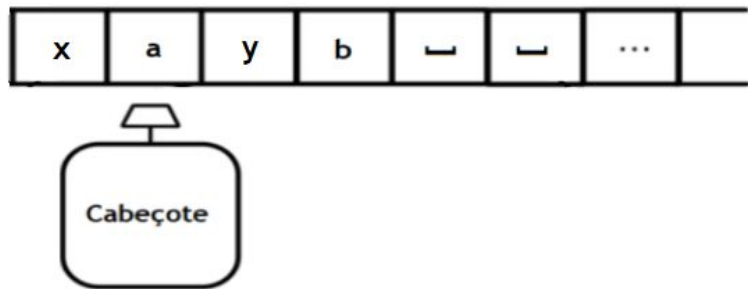
1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
2.  $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$
3.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$
4.  $\delta(q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E)$



# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
2.  $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$
3.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$
4.  $\delta(q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E)$
5.  $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$



# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$

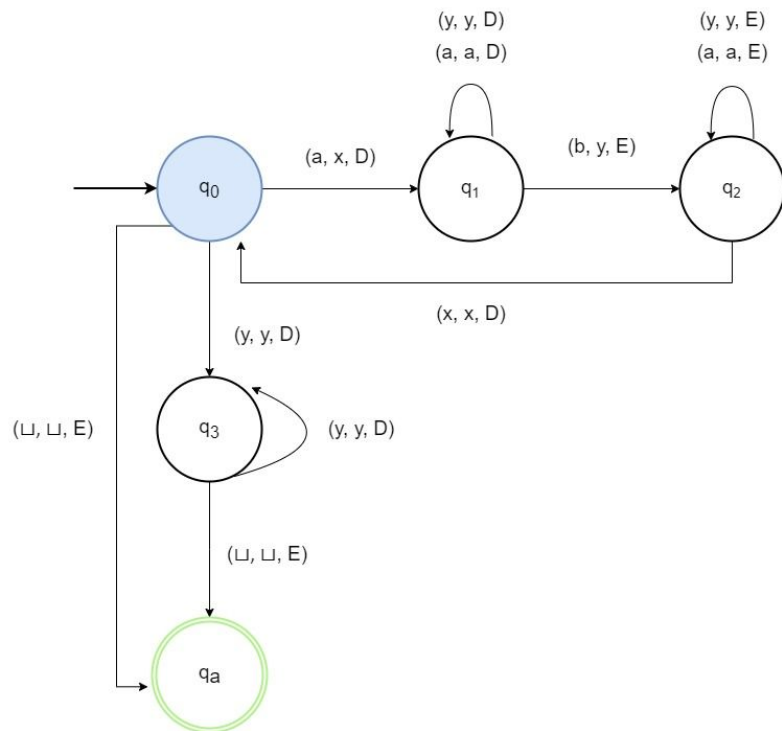
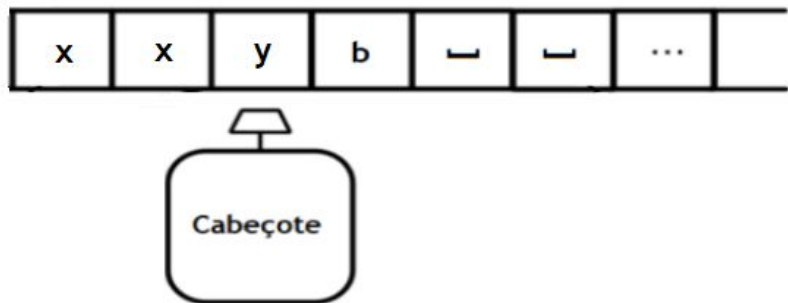
2.  $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$

3.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$

4.  $\delta(q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E)$

5.  $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$

6.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$

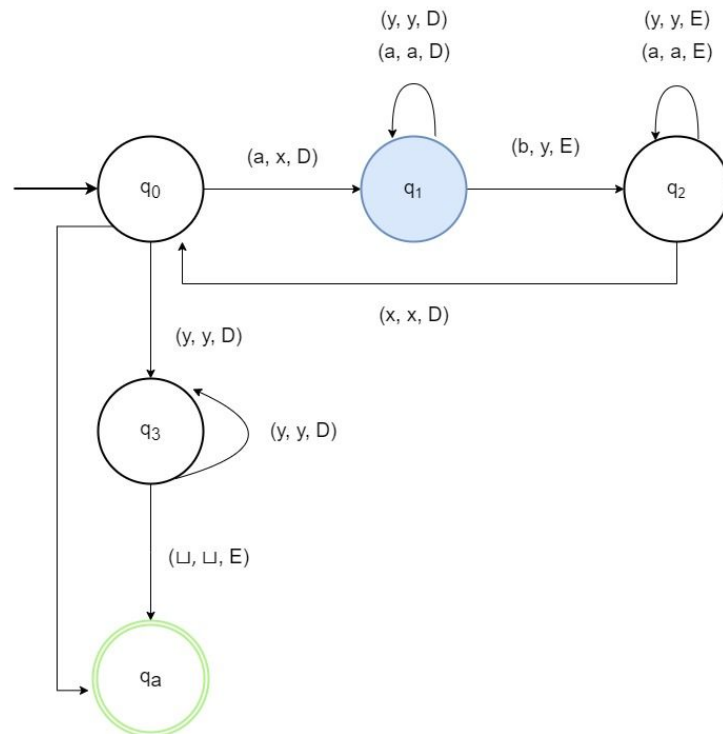
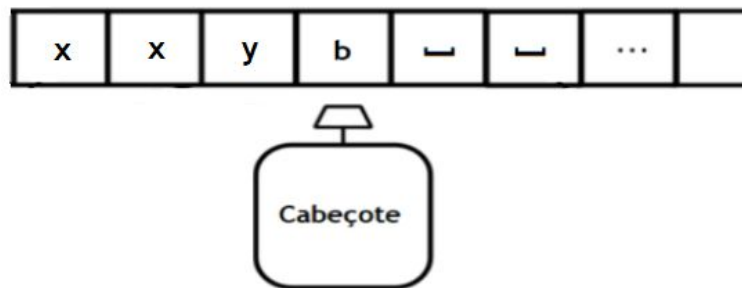




# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

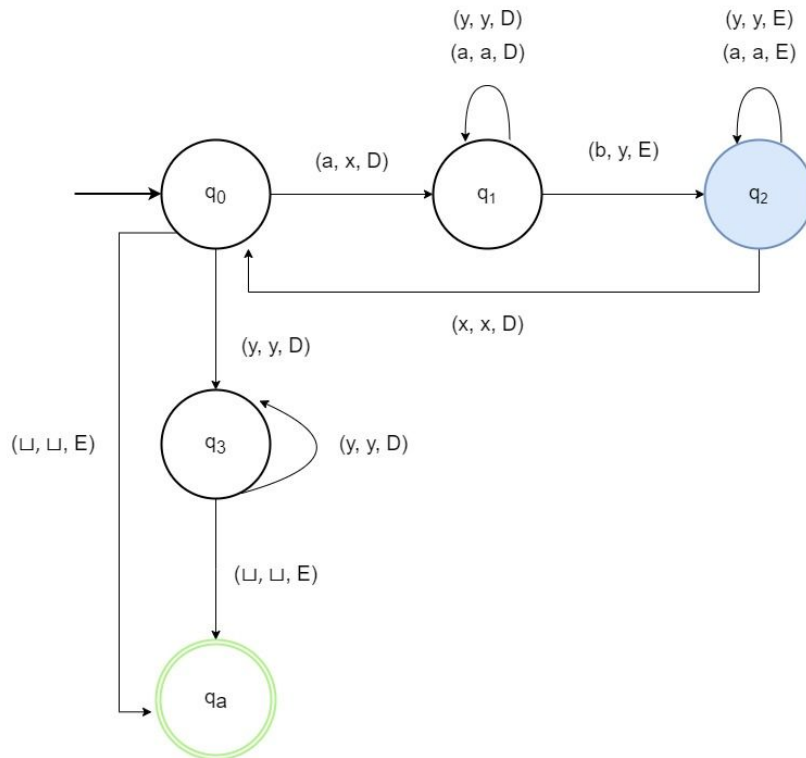
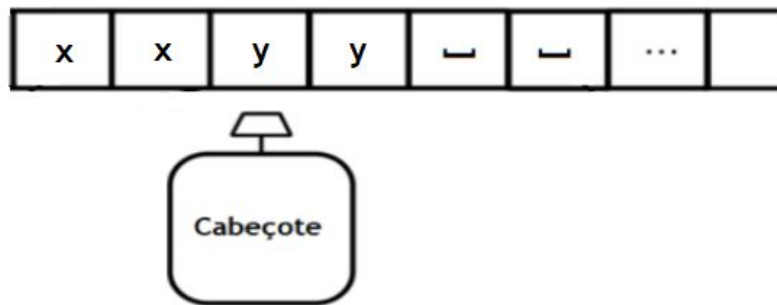
1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
2.  $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$
3.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$
4.  $\delta(q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E)$
5.  $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$
6.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
7.  $\delta(q_1, y) \rightarrow (q_1, y, D)$



# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

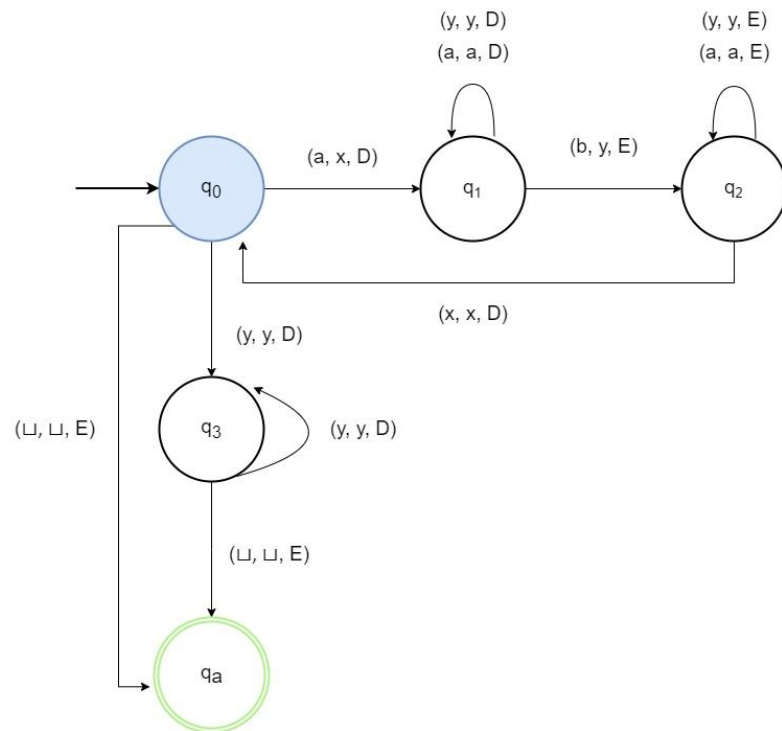
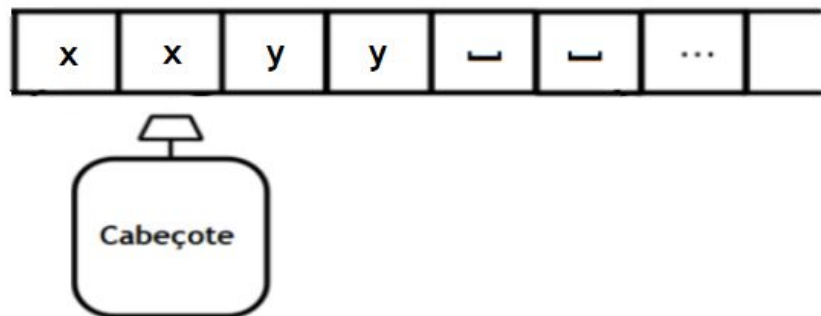
1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
2.  $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$
3.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$
4.  $\delta(q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E)$
5.  $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$
6.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
7.  $\delta(q_1, y) \rightarrow (q_1, y, D)$
8.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$



# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

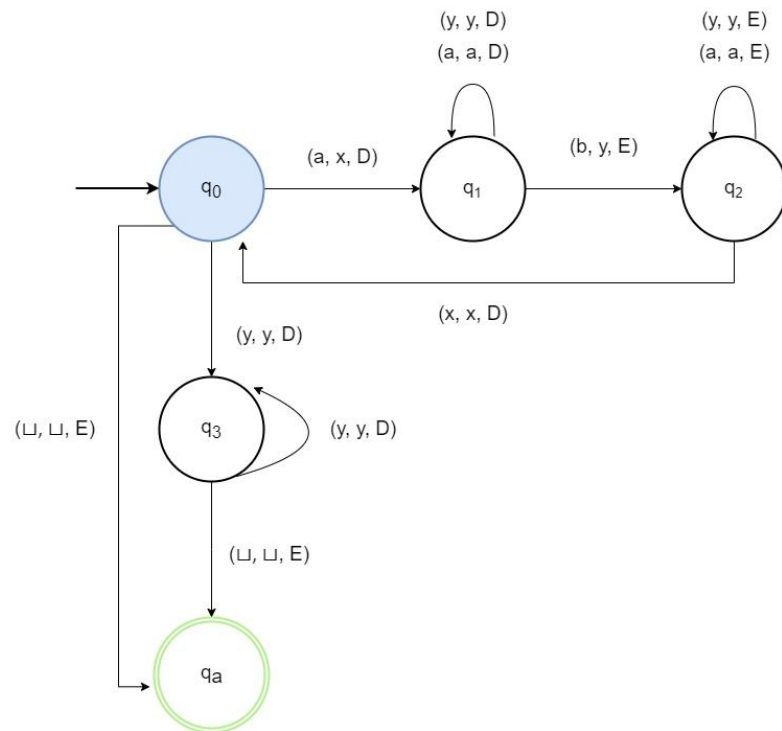
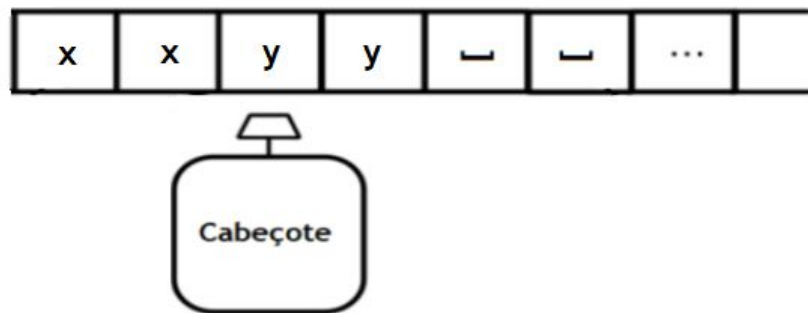
1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
2.  $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$
3.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$
4.  $\delta(q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E)$
5.  $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$
6.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
7.  $\delta(q_1, y) \rightarrow (q_1, y, D)$
8.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$
9.  $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$



# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

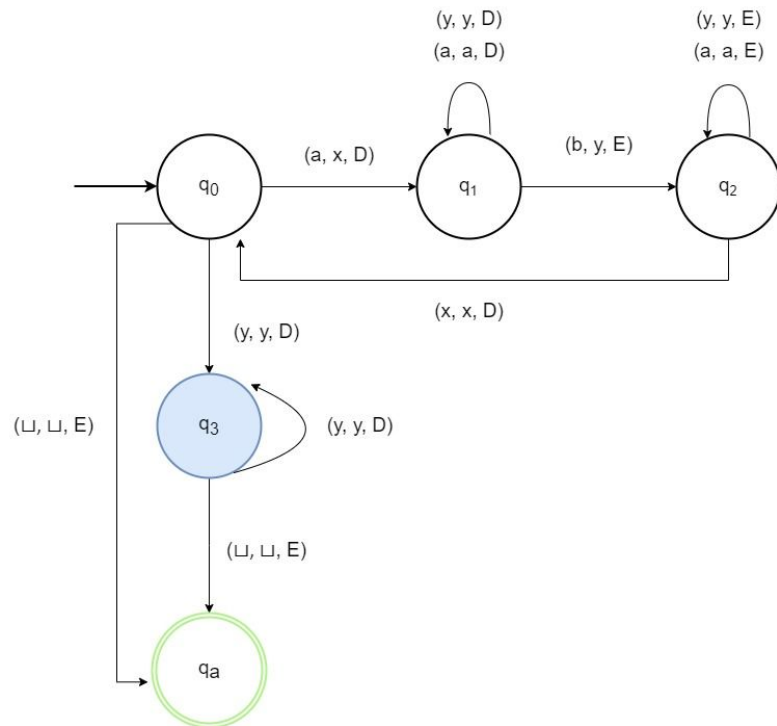
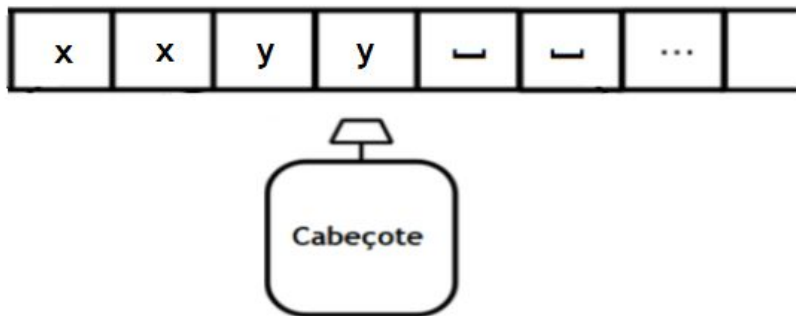
1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
2.  $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$
3.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$
4.  $\delta(q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E)$
5.  $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$
6.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
7.  $\delta(q_1, y) \rightarrow (q_1, y, D)$
8.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$
9.  $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$
10.  $\delta(q_0, y) \rightarrow (q_3, y, D)$



# Máquinas de *Turing*

## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

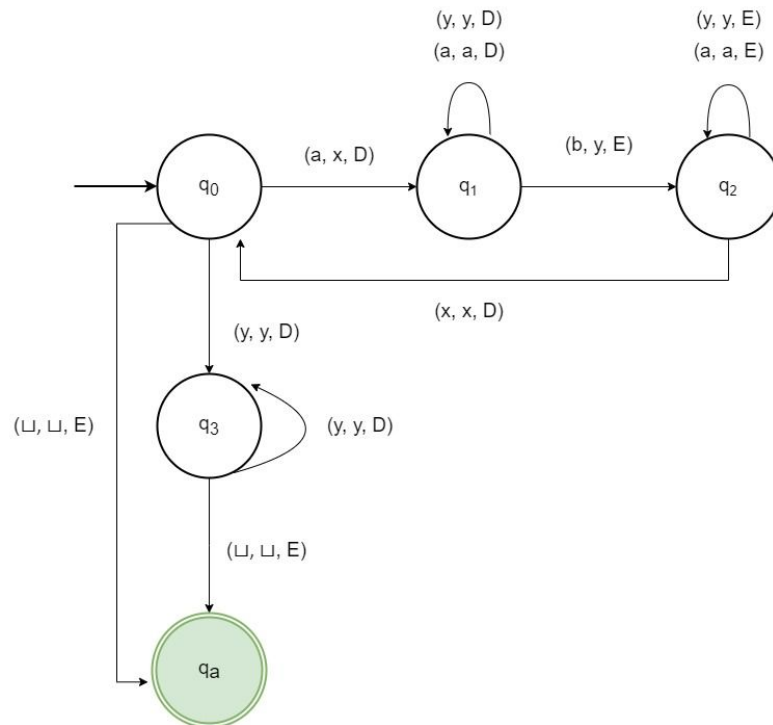
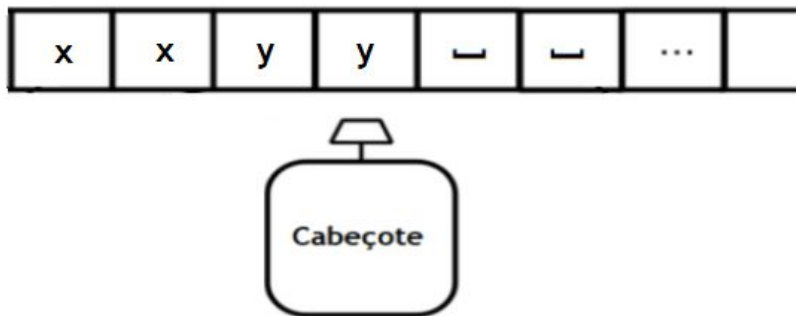
1.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
2.  $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$
3.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$
4.  $\delta(q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E)$
5.  $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$
6.  $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$
7.  $\delta(q_1, y) \rightarrow (q_1, y, D)$
8.  $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$
9.  $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$
10.  $\delta(q_0, y) \rightarrow (q_3, y, D)$
11.  $\delta(q_3, y) \rightarrow (q_3, y, D)$



# Máquinas de *Turing*

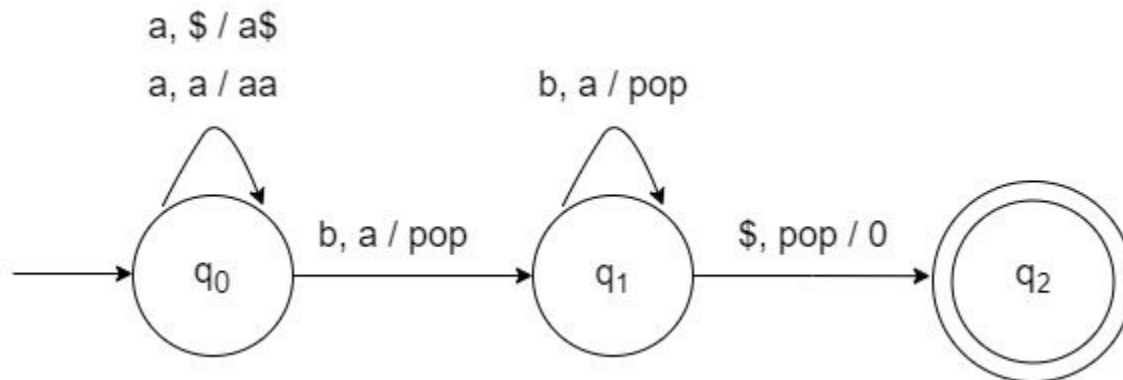
## Exemplo de Aplicação - LLC (*string aceita*)

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$ | 7. $\delta(q_1, y) \rightarrow (q_1, y, D)$            |
| 2. $\delta(q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D)$ | 8. $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$            |
| 3. $\delta(q_1, b) \rightarrow (q_2, y, E)$ | 9. $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$            |
| 4. $\delta(q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E)$ | 10. $\delta(q_0, y) \rightarrow (q_3, y, D)$           |
| 5. $\delta(q_2, x) \rightarrow (q_0, x, D)$ | 11. $\delta(q_3, y) \rightarrow (q_3, y, D)$           |
| 6. $\delta(q_0, a) \rightarrow (q_1, x, D)$ | 12. $\delta(q_3, \sqcup) \rightarrow (q_a, \sqcup, E)$ |



# Hierarquia de Chomsky

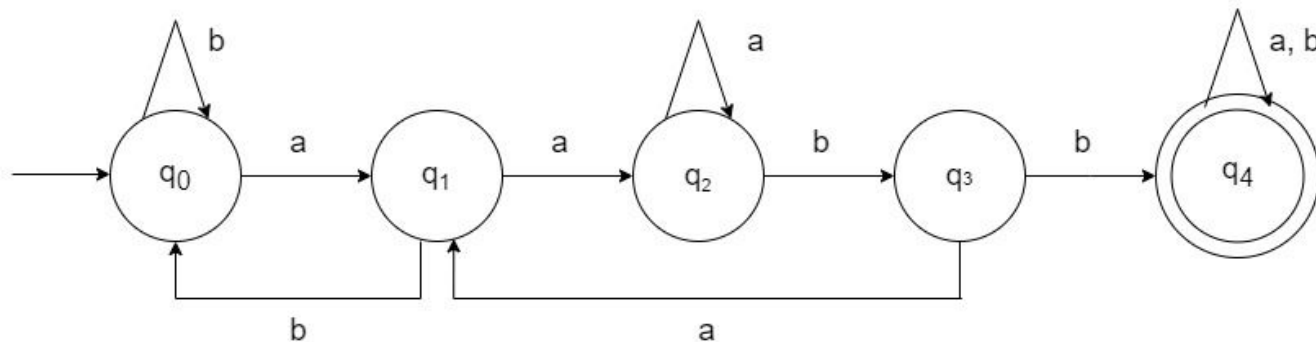
Autômato de Pilhas - Exemplo de Aplicação:  $L = \{a^n b^n | n > 0\}$



# Hierarquia de Chomsky

## Linguagens Regulares - solução via AFD

- Construa um Autômata Finito Determinístico (AFD) que reconheça a seguinte linguagem  $L = \{\text{todas as strings que contêm 'aabb'}\}$ . Utilize o alfabeto  $\Sigma = \{a, b\}$ .





# Hierarquia de Chomsky

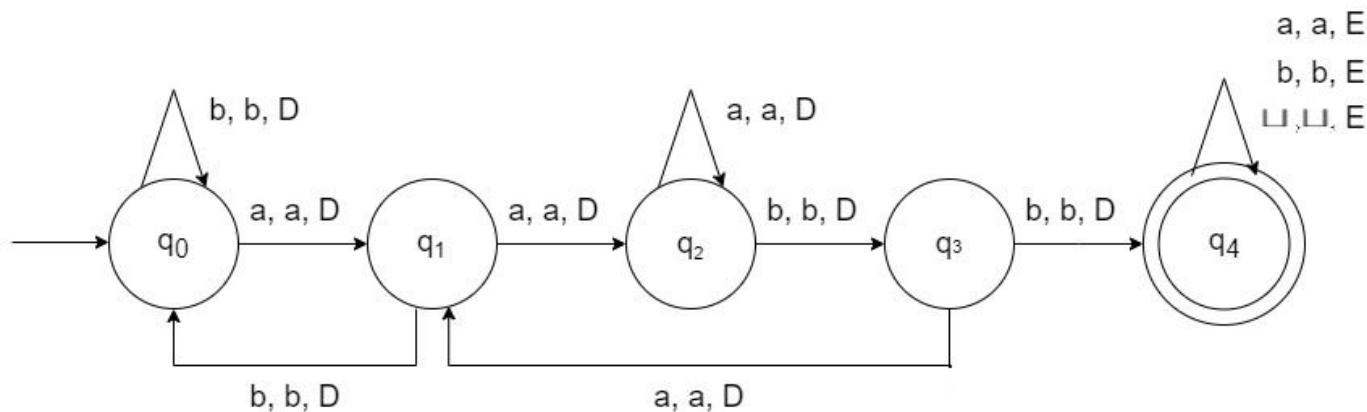
## Linguagens Regulares - solução via Máquina de Turing

Construa uma Máquina de Turing (MT) que reconheça a seguinte linguagem  **$L = \{\text{todas as strings que contêm 'aabb'}\}$** . Utilize o alfabeto  $\Sigma = \{a, b\}$ .

# Hierarquia de Chomsky

## Linguagens Regulares - solução via Máquina de Turing

- Construa uma Máquina de Turing (MT) que reconheça a seguinte linguagem  $L = \{\text{todas as strings que contêm 'aabb'}\}$ . Utilize o alfabeto  $\Sigma = \{a, b\}$ .



# Exercícios (entrega para o dia 06/09)

1. Construa uma Máquina de Turing que reconheça a linguagem  $L = \{w/w \text{ possui o mesmo número de símbolos 'a' e 'b'}\}$ ;
  - *E.g.: string aceita: “ababab”, string recusada: “abaa”.*
2. Construa uma Máquina de Turing que reconheça a linguagem palíndromos de comprimento par  $L = \{ww^r \text{ t.q. } w \in \{a,b\}^* \text{ e } |ww^r| \bmod 2 = 0\}$ .
  - *E.g.: string aceita: “abba”, string recusada: “aabb”.*
3. Construa uma Máquina de Turing que realize a soma de dois números inteiros. Considere  $\Sigma = \{1, \#\}$ , onde ‘#’ fará a separação entre os números a serem somados.
  - *E.g.: string de entrada: “1111#11111” -> saída: “111111111”.*

# Computação Científica

---

## Aula 2 - Máquinas de Turing e Aplicações

Prof. Gabriel Resende Machado

 [gabrielmachado@unifeso.edu.br](mailto:gabrielmachado@unifeso.edu.br)

 <https://www.linkedin.com/in/machadogabriel>

 <https://github.com/UNIFESO-Gabriel/computacao-cientifica>