华中科技大学计算机与科学技术学院

2019~2020 第二学期

“ 离散数学（一）”考试试卷 点评

分　数	
评卷人	

一. 填空题(每小题 3 分, 共 18 分)

(1) 命题公式$(p\wedge(p\vee q))\rightarrow q$ 是____可满足______公式。(填永真、永假或可满足)

(2) 谓词表达式$\forall x\exists y\,(x+y=xy)$ (个体域为实数集)的真值是___假______.

(3) 集合关系式 $A-B=C$ 是 $A\subseteq B\cup C$ 的_____充分（非必要）_______条件。

(4) 全体整系数二次三元多项式构成的集合__是_____可数集。(填是或不是)

(5) 无向图 G 有 n 个点 m 条边, 其中 $n>m$. 则 G 至少有___n-m___个连通分支。

(6) 一颗满二叉树有 6 个树叶, 则其它有_____11__个顶点。

分　数	
评卷人	

二. 逻辑与图论解答题 （共 27 分）

(7) 求命题公式$(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 的主合取范式。(5 分)

解答: 这道题目可以先列出真值表, 然后从真值表直接写出主合取范式; 也可以直接对该逻辑表达式进行等价变换, 一步一步变化到范式, 再到主合取范式。不需要特别技巧。

有同学看错题目, 求出来的是主析取范式。当然可以从主西取范式, 写出主合取范式. 主合取范式如下:

$(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee r)=M_6\wedge M_2\wedge M_0$

解答内容不得超过装订线

(8) 用谓词表达式将下列命题符号化：(5 分)

有人游览过中国每个省份的某些景点。

解答：用 $M(x)$表示 x 是人，$P(y)$: y 是中国的省，$V(z)$: z 是景点；

(以上三个谓词为特性谓词，起着指定个体域的作用)

$B(y,z)$: z 是属于 y 的景点，　$T(x,z)$: x 游览过 z;

（这两个是二元谓词，说明个体之间的关系；　量词涉及 3 个 存在，全称，　存在）

上面的明天符号化公式表达如下：

$\exists x(M(x) \land \forall y (P(y) \rightarrow \exists z(V(z) \land B(y,z) \land T(x,z))))$

第二种表示方法：将上面的两个二元谓词用一个 3 元谓词 $F(x,y,z)$，表示 x 游览过 y 的 z. 于是符号化公式表达为：$\exists x(M(x) \land \forall y (P(y) \rightarrow \exists z(V(z) \land F(x,y,z))))$

点评：不少同学根本不用特性谓词，对人、省、景点进行说明限制，而是简单地“用 x 表示所有人，y 表示中国所有省…”，　这种表述是错误的。

而且，在一个命题中，如果涉及到了不同的，尤其是不同类型的个体时，就应该采用全总个体域加特性谓词的表达方式。

在涉及到存在量词使用时，里面的是合取式，全称量词里面的是蕴含式，这个一些同学理解和应用错误。

　　在做谓词符号化时，首先是分析其中涉及到哪些个体，哪些个体受量词影响，哪些个体之间有什么关系等等。然后再来分别表述，再将其逻辑上合在一起成为

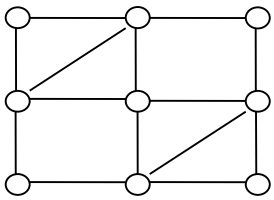
正确的表达公式。将来如果学校人工智能、知识表时时，也是需要正确符号化的。

(9) 判断下式是否成立，并说明理由。(5 分)

$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

解答：如果$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$成立，则有$\forall xP(x)$成立或者$\forall xQ(x)$成立，无论是哪个成立或者是两个都成立，都意味着$\forall x(P(x) \vee Q(x))$成立；但反之不成立。反例如下：考虑个体与为全体整数，P(x)表示 x 是偶数，Q(x)表示 x 是奇数，那么在这个个体域下，$P(x) \vee Q(x)$表示 x 是偶数或者是奇数，总是真的，于是$\forall x(P(x) \vee Q(x))$为真。但显然$\forall xP(x)$、$\forall xQ(x)$都不成立，所以$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$为假。

(10) 下图是否是欧拉图、哈密顿图，并说明理由。(6 分)



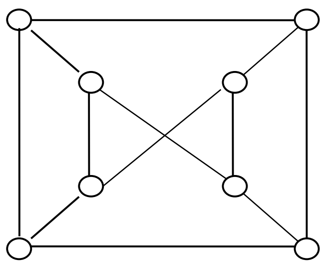
解答：(1) 这个图是欧拉图，因为没有奇数度的结点存在，而且是连通的；

(2) 也不是哈密尔顿图，这个图存在哈密尔顿开路，但不存在哈密尔顿回路。实际上，如果我们从图中删除掉两条斜边的端点（共 4 个）以及相关联的边后，就剩下 5 个孤立点了，形成了 5 个联通分支。根据哈密尔顿图的一个必要条件，删除的结点集的基数应该不小于剩下来的图的连通分支数。所以肯定该图不说哈密尔顿图。

点评： 这里不少哈密尔顿图的理由，不能简单地说是找不到哈密尔顿回路。

解答内容不得超过装订线

(11) 判断下图是否为平面图，并说明理由。(6 分)。



解答：不是平面图；从该图中删除一条竖着的边后，在做同胚变换，去掉度为 2 的结点，然后就可以变化到 $K_{3,3}$

这说明原图存在与 $K_{3,3}$ 同胚的子图。

分　数	
评卷人	

三． 集合函数关系求解题（共 25 分）

(12) 学校每年都举行秋季田径运动会。用 A 表示 2019 年秋季所有华中科技大学的在校学生的集合，B 华中科技大学 2019 年秋季运动会的所有运动项目的集合，每个人报名的项目不能多于 3 个. 已知|B|>10，每个项目都有学生报名，并且正常进行了比赛。定义一个从 A 到 B 的幂集 P(B) 的对应关系 f，将 A 中的每一个人对应到其所报名的项目的集合。（9 分）

(a) 那么 f 是否是 A 到 P(B)的一个函数？为什么？如果是函数，那么 f 是不是单射，是不是满射，是不是双射？ 为什么？

解答：因为没一个 A 中的元素（也即任一个学生）报的项目的集合是确定的，一定是 B 的一个子集，也即 P(B)的一个元素，一个确定的元素。 如果某人没有报任何项目，那么对应与空集。 所有这个对应关系 f 是 A 到 P(B)的一个函数。F 不是满射，

因为有不同的学生报的项目集合恰好一样。必然说很多人都没有报任何项目，他们对应的函数值都是空集，所以不是单射； 当然，f 也一定不是满射，因为每个人最多报 3 个项目，没有人能够报所有的项目，这就明显意味着 B 是没有原像的。 既不是单射，也不是满射，当然就不可能是双射了。

(b) 对于 B 的任一个子集 C，它在 f 下的原像 $f^{-1}(C)$是 A 中所有那些报的项目的集合**恰好（恰好这个词在这里很关键）**等于 C 的人的集合 ; $f^{-1}(\phi)$= 所有没有报任何项目的学生的集合______.

(c) 假设 $A=\{a_1,a_2, \ldots a_n\}$，那么$\{a_1\},\{a_2\}, \ldots \{a_n\}$ 是否是 A 的一个分划？ ____是____ (是或者不是)； $f(a_1)\cup f(a_2)\cup \ldots \cup f(a_n)$ =__B__.

点评： 这道题没有什么难度，只需要正确理解题目中的对应关系究竟是一个什么函数，正确理解单射、满射、原像这些概念，就能做好。

(13) T 是实数集 R 上的关系：aTb 当且仅当|a| ≤ b. （8 分）

请问，T 具有自反性、对称性、反对称性和传递性中哪些性质，并说明理由。

解答： 显然，T 不满足自反性，因为(1, -1)就不满足|1| ≤ -1，所以(1, -1)不属于 T; 但是(-1, 1)满足上面这个不等式，说明（-1,1）属于 T， 而(1, -1)不属于 T ，于是得到 T 不满足对称性；反对称性成立，因为如果有|a| ≤ b 且|b| ≤ a，则 a,b 都非负，在这里只能相等。

对任意的 3 个实数 a,b,c， 如果由|a| ≤ b , |b| ≤ c，说明 b,c 都非负，那么一定有|a| ≤ c． 于是 T 满足可传递性

(14) 下面 0-1 阵表示的集合 A={a, b, c}上的二元关系：（8 分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

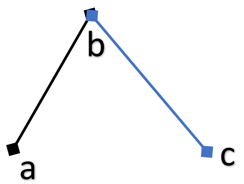
写出该二元关系；判断它是否为偏序，是否为全序，并说明理由；如果是偏序，请画出相应的 Hasse 图。

解答：记该关系矩阵为 M，M 代表的二元关系是 R={(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (c,b)}

这个关系显然是自反的，也是反对称的；

计算 M^2（布尔积）结果=M，说明 $R^2 \subseteq R$，这说明 R 是可传递的。于是 R 是一个偏序关系；R 不是全序，因为元素 a 与元素 c 是不可比较的。

R 的 Hasse 图如下：



分　数	
评卷人	

四．证明(每题 10 分，共 30 分)

(15)形式证明：P→(Q→R)是前提¬R→(¬P∨S), Q→¬S 的结论。

证明：

(1) ¬R→(¬P∨S)　　　　前提

(2) R∨¬P∨S　　　　等价变换

(3) ¬P∨ R∨S　　　　交换律

(4) P→(R∨S)　　　　等价变换

(5) P　　　　附加前提

解答内容不得超过装订线

(6) $R \vee S$ (4), (5)

(7) $Q \to \neg S$ 已知前提

(8) $\neg Q \vee \neg S$ 等价变换

(9) $\neg Q \vee R$ (6),(8) 消解

(10) $Q \to R$ 等价变换

(11) $P \to (Q \to R)$ （5）,(10)

证毕。

注解：如果这里的第(9)步骤的消解不知道，也可以从（8）开始改写如下：

（8） $S \to \neg Q$ (7) 逆否

(9) $\neg R \to S$ （6）等价变换

(10) $\neg R \to \neg Q$ (8), (9)

(11) $Q \to R$ (10) 逆否

（12） $P \to (Q \to R)$ （5）,(11)

证法二：（这里给出另外一个附加前提，整个证明很顺畅，类似于反正法）

(1) $\neg (Q \to R)$ 附加前提 （目标是去得到 $\neg P$）

(2) $\neg (\neg Q \vee R)$ 等价变换

(3) $Q \wedge \neg R$ Demorgan 定律

(4) Q (3)

(5) $\neg R$ (3)

(6) $Q \to \neg S$ 已知前提

(7) $\neg S$ (4), (6)

(8) $\neg R \to (\neg P \vee S)$ 前提

(9) $\neg P \vee S$ (5), (8)

(10) $\neg P$ (7), (9)

(11) $P \to (Q \to R)$ (1), (10)

点评：这种形式证明的题目，虽然没有要求一定要把第 3 列的理由写得很清楚，也没有要求背下所有的有关定律以及法则的名称和编号，但是尽可能标注清楚是必要的。尤其是对于每一步推导出来的结果，是根据前面哪几个标号行的结论综合得到的，这点是重要的。不能也不应该说你阅卷老师应该知道是怎么来的。

(16) M 是全体二阶实对称方阵构成的集合，R 是其上的关系：

ARB 当且仅当存在实可逆矩阵 P 使 $P^TAP=B$. (其中 P^T 为 P 的转置)

(a) 证明：R 是 M 上的等价关系；

(b) 写出$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$所在的等价类；

(c) 写出 R 的全部等价类。

解答：

(a) 分别证明 R 是 M 上的自反、对称的和可传递的二元关系。

对于 M 中的任意一个元素（矩阵）A，用 I 表示二阶单位矩阵，显然 I 是可逆的，而且 $I^TAI=A$， 说明 A 与 A 具有关系 R，也即 R 是自反的；

假设 ARB，那么根据 R 的定义知，存在可逆矩阵 P 使得 $P^TAP=B$；因为 P 为可逆矩阵，那么 P 的逆矩阵 P^{-1} 也是可逆的，而且可以得到 $A=(P^{-1})^TBP^{-1}$，所以 BRA， 说明 R 是对称的二元关系；再假设 A、B、C 为二阶实矩阵，而且 ARB,BRC， 那么存在可逆矩阵 P,Q 使得 $P^TAP=B$， $Q^TBQ=C$。 于是有 $Q^T(P^TAP)Q=C$， 也即 $(PQ)^TA(PQ)=C$， 因

为 P、Q 均为可逆矩阵，所以 PQ 也为可逆矩阵。由 R 的定义可知，ARC，所以 R 是可传递的。 综上 3 条性质，得到 R 是等价关系；

(b) $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$所在的等价类就是所有与矩阵$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$具有关系 R 的二阶实矩阵，等价定义

我们知道写出$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$所在的等价类={P$^T\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}P|P$ *为二阶实可逆矩阵*}

(c) 在合同变换意义下，二阶实方阵的标准型有如下 6 个：$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix}$， $C=\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}$， $D=\begin{bmatrix}-1 & \\ & -1\end{bmatrix}$， $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$，$F=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

每一个就是一个等价类的代表元。 一共 6 个等价类：

{P^{T}A$P|P$ *为二阶实可逆矩阵*}，{P^{T}B$P|P$ *为二阶实可逆矩阵*}

，{P^{T}C$P|P$ *为二阶实可逆矩阵*} ，{P^{T}D$P|P$ *为二阶实可逆矩阵*}

，{P^{T}E$P|P$ *为二阶实可逆矩阵*}，{P^{T}F$P|P$ *为二阶实可逆矩阵*}

点评：这道题看起来好像需要很多线性代数知识，其实不然。除了第 3 问需要知道合同意义下有哪些个标准型，其它的两问所需要的是最基本的矩阵知识。重要的是需要理解等价关系，理解里面定义的关系究竟是怎么样的一个关系。

每一次考试基本上都要考这种类型的题目，唯一不同的是具体定义的关系不同而已。 这里不需要任何特别的技巧，是最基本的要求，要求对等价关系的理解，对等价类的理解，而不是刷几道题背几个定义和公式。 否则，只要定义的关系和论语变了，还是不会做。

对于那些完全不会做的，只能说你根本没有学或者至少是完全不理解。

(17) 简单图 G 的结点数 $n \geqslant 5$，证明：G 或其补图$\overline{G}$中必包含有简单回路。

证明：反正法。假设图 G 中不包含简单回路，由于 G 是简单图，那么 G 必然是树或者是树林。当 G 连通时是树，其边的数是结点数 n-1; G 不连通时，其每一个连通分支都是树，此时 G 是树林，其结点数是 n-t (t 为其连通分支数)，由于 t 必然是正整数，所以 n-t < n-1。于是无论如何 G 的边数≤n-1.

同理，如果补图$\overline{G}$也不包含简单回路，那么其边数也是小于等于 n-1.

这样，如果假设 G 与其补图都不包含简单回路，那么两个图的总边数≤2(n-1).

然而，G 与其补图合起来是 n 个结点的完全图，边的数目是 n(n-1)/2. 当 n≥5 时，n(n-1)/2≥2(n-1)，矛盾。 这个矛盾说明 G 或其补图$\overline{G}$中至少有一个包含有简单回路(完全由可能都包含简单回路)。

点评：总的说来，这道题的得分情况不理想，虽然说这道题的证明没有什么特别的技巧，也不需要什么特别的方法。基本就是一个反证法。 这道题有不少人动不了笔。主要存在一下一些问题：

(1) 有少部分同学没有搞清楚图与补图的关系，分别假设图 G 与其补图$\overline{G}$的节点集合为 V_1,V_2, 然后说它们加起来等于 n. 首先这两者是有共同的结点集。

(2) 不少同学有着不好的习惯，随意冒出字母符号（如 e,v,h,l,r,f,等等），而不说明每个字母符号代表什么意思，这在数学上是不容许的。我在样板题的点评里面就强调过这一点。希望大家以后坚决改正，否则还会为这个丢分。将来如果搞研究写论文，也一样会因为这些问题被拒。除非是全世界达成共识通用的约定的符号不需要解释说明，所有的都一定要解释说明你的符号代表什么意思。

(3) 不少同学都下结论说，如果 G 没有简单回路，那么它的边数=n-1．这是一个错误的结论。 也不能下结论就说是树。

(4) 更多同学是，如果 G 没有简单回路，立马下结论说边数≤n-1.这个结论是正确的，但是，下这个结论的理由在这里也是关键的一部分，不能就这么跳过去。

(5) 也有不少同学利用平面图的欧拉公式来证明。但是，利用欧拉公式的前提是先要证明相应的图是平面图。基本上没有人去证明“如果没有欧拉回路的简单图就一定是平面图”。个别人说了一句，如果不是平面图，就一定有简单回路。但是，却不说明为什么会有这样的结论。 如果要证明是平面图，最简单的还是说明是树或者是树林，那就一定是平面图了。

即使是平面图，欧拉公式也还是不一定成立。因为欧拉公式有一个前提就是要连通！ 如果不连通，欧拉公式不成立。 这里的图 G 和补图都不一定连通。 在不连通的情况下，欧拉公式需要修改。

就算是利用欧拉公式，也需要说明，为什么里面的“面”的数目为什么是 1，不能一上来就直接让它等于 1.

(6) 还有不少同学试图去分析图的形状和构成，试图从中寻找出简单回路。 这种做法，绝大部分都没有能够穷尽所有该包括的情况进行讨论。

(7) 少数同学还是搞混“回路”与“简单回路”的概念，通篇讲如果没有回路，怎么怎么地。实际上，只要是右边就一定有回路，只是可能是原路返回的回路罢了。