第10章　正弦稳态分析

正弦稳态电路分析思路
Sinusoidal Steady-state Analysis

Q1: 电阻电路有哪些分析方法？

Q2: 动态电路的暂态过程如何分析？

Q3: 何谓正弦稳态电路、正弦稳态电路有何特点？

Q4: 正弦稳态电路的分析方法？

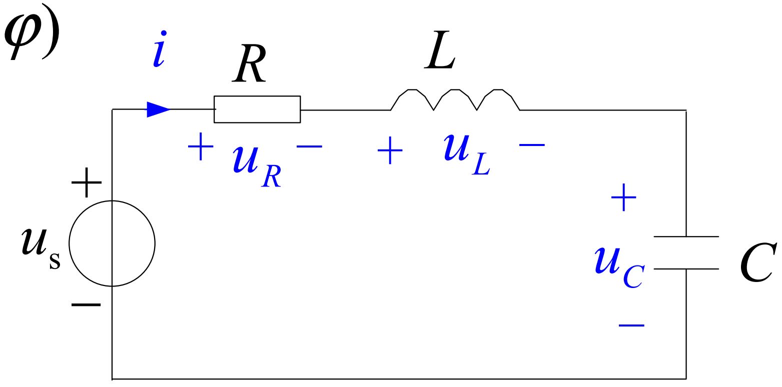
Q5: 上述分析方法的可行性如何？

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=\sqrt{2}U_\mathrm{s}\cos(\omega t+\varphi)$$

求特解！

特解的求取方法？

对高阶电路求解可行性？



$$u_\mathrm{s}=U_\mathrm{m}\cos(\omega t+\varphi)$$

正弦稳态电路分析思路
Sinusoidal Steady-state Analysis

正弦量 → 相量（复数）

电路

→ 相量模型

↓

相量方程（复数方程）

↓

相量解

↓

正弦量

实现上述思路，要解决哪些关键问题？

1.正弦量与相量的对应

2. 正弦量运算的相量方法

3. 电路基本方程的相量形式

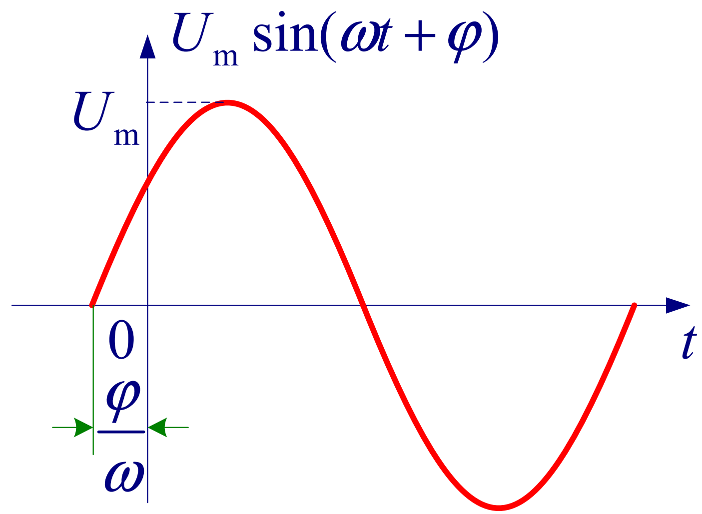
定义一种变换

同频率的正弦量 ⟷ 恒定的复数

10. 2　正弦电量

10.2.1 正弦电量的三要素

$$u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi)$$



- **振幅 (amplitude) U_m** :最大值
- **角频率(angular frequency) ω** ： 反映正弦量变化快慢
- **初相位(initial phase angle) φ** :反映了正弦量的计时起点

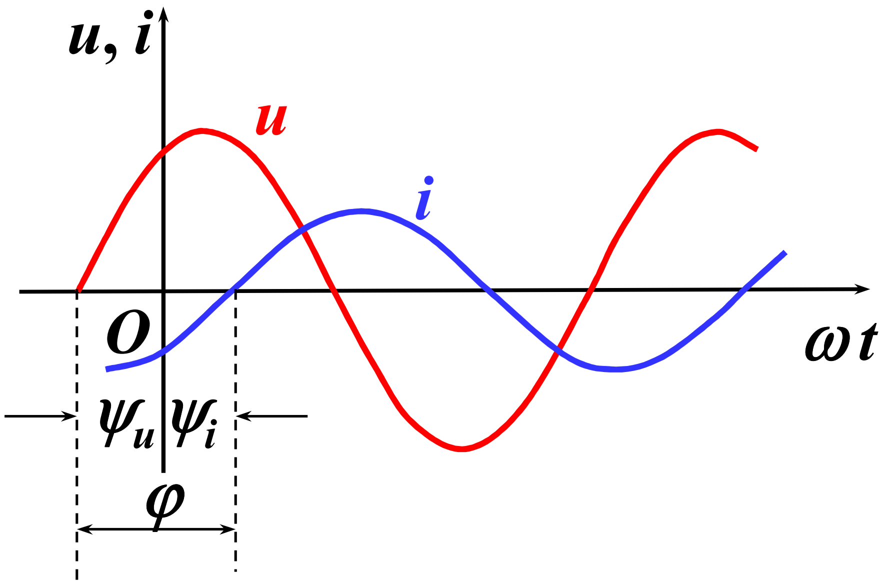
工频：f=50Hz，ω=2πf=314rad/s

10.2.2 同频率正弦量相位关系

设$u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u), i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi_i)$

则相位差$\varphi=(\omega t+\varphi_u)-(\omega t+\varphi_i)=\varphi_u-\varphi_i$

- $\varphi>0$， ***u*超前*i* φ 角**，**或*i* 滞后 *u* φ 角(*u* 比 *i* 先到达最大值)**；

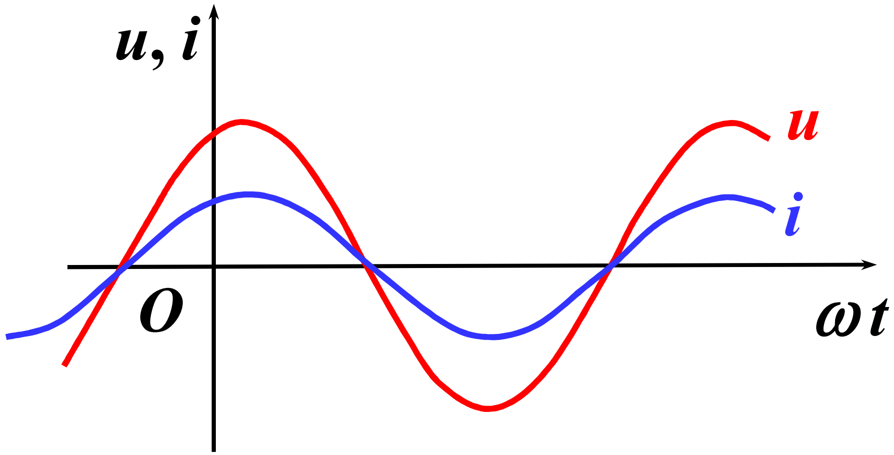


- $\varphi<0$， ***u* 滞后 *i* $|\varphi|$ 角，或 *i*超前*u* $|\varphi|$角(*i* 比 *u* 先到达最大值)**。

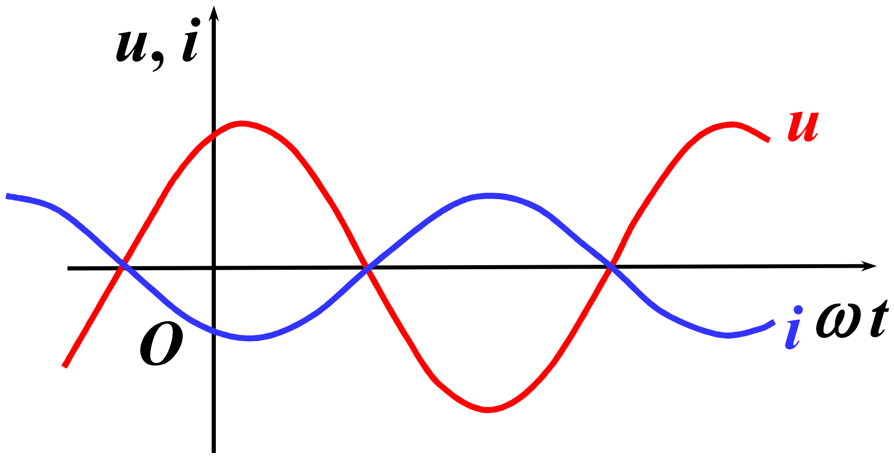
10.2.2　同频率正弦量相位关系

特例：

$\varphi=0$，　同相：

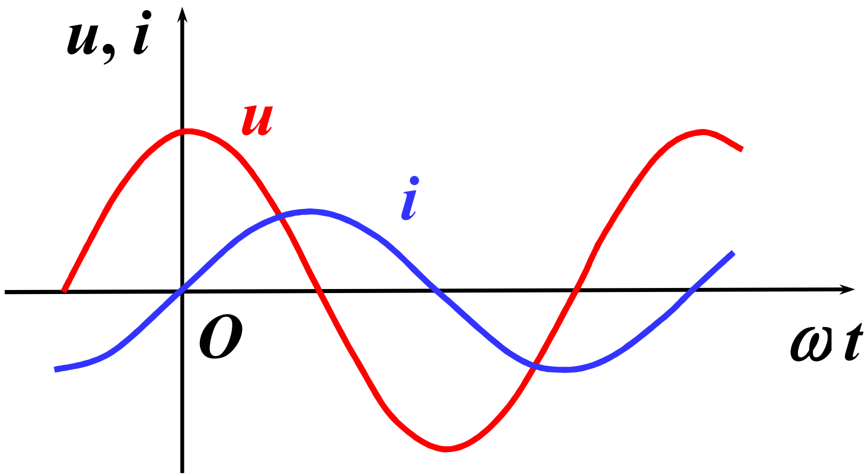


$\varphi=\pi\ (180^{\circ})$，反相：



10.2.2 同频率正弦量相位关系

规定：$|\varphi| \le \pi$ (180°)。



$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$：u超前$i\,\dfrac{\pi}{2}$，不说u滞后$i\,\dfrac{3\pi}{2}$，

或者：i滞后$u\,\dfrac{\pi}{2}$，不说i超前$u\,\dfrac{3\pi}{2}$，

同样可比较两个电压或两个电流的相位差。

10.2.3 正弦电量的有效值（ Effective Value ）

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了确切的衡量其大小工程上采用有效值来表示。

1 周期量的有效值

周期性电流 i 流过电阻 R，在一周期T 内吸收的电能：$W=\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t$

直流电流I 流过R 在时间T 内吸收的电能：$W=I^2RT$

$$I^2RT=\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t \Rightarrow I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

2 正弦电流、电压的有效值

设 $i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t}=\frac{I_m}{T}\sqrt{\int_0^T\frac{1-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{2}}I_m$$

$$\Rightarrow \boxed{I=\frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}=0.707I_{\mathrm{m}},\ I_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}I} \quad \boxed{i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)}$$

2 正弦电流、电压的有效值

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$$\boxed{U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{\mathrm{m}} \qquad \text{或} \qquad U_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}U}$$

若一交流电压有效值为U=220V，则其最大值为U_{m}≈311V；

U=380V，U_{m}≈537V。

工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。因此，在考虑电器设备的耐压水平时应按最大值考虑。

测量中，电磁式交流电压、电流表读数均为有效值。

* 区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

为什么用正弦量？

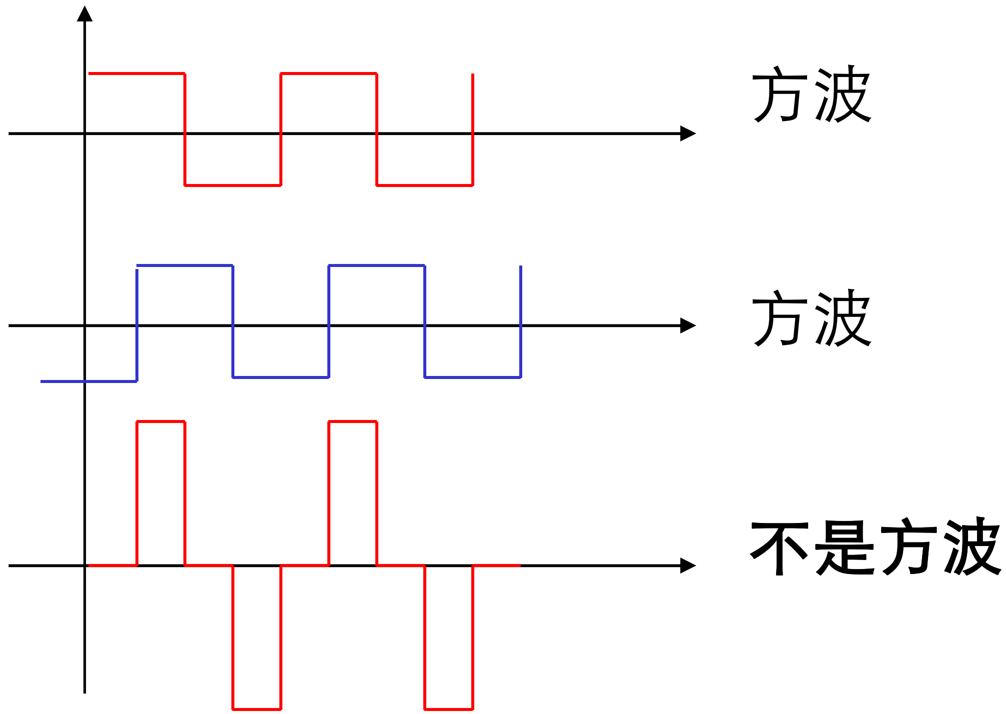
主要考虑以下几点：

1. 正弦量是最简单的周期量之一，同频正弦量在加、减、微分、积分运算后得到的仍为同频正弦量；

2. 应用广泛；

3. 非正弦量用傅立叶级数展开后得到一系列正弦函数。

例. 同频方波相加



10.3 相量法

两个正弦量 $i_1=\sqrt{2}\,I_1\sin(\omega t+\psi_1)$ $i_2=\sqrt{2}\,I_2\sin(\omega t+\psi_2)$

	i_1	i_2	$i_1+i_2\rightarrow i_3$
角频率：	ω	ω	ω
有效值：	I_1	I_2	I_3
初相位：	$\varPsi_1$	$\varPsi_2$	$\varPsi_3$

无论是波形图逐点相加，或用三角函数做都很繁。

因同频的正弦量相加仍得到同频的正弦量，所以，只要确定初相位和有效值(或最大值)就行了。于是想到复数，复数向量也包含一个模和一个幅角，因此，我们可以把正弦量与复数对应起来，以复数计算来代替正弦量的计算，使计算变得较简单。

10.3.1　正弦电量与相量的对应关系

1、复数

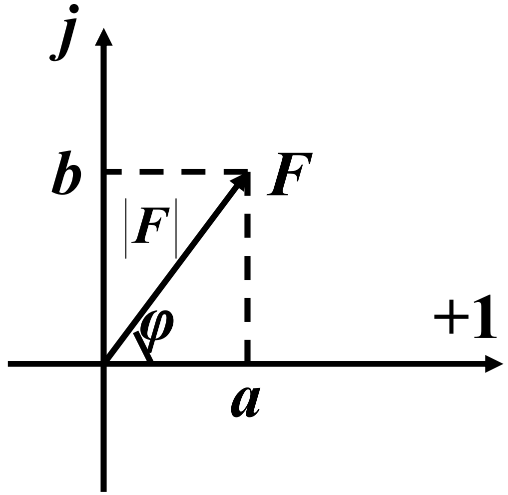
复数表示形式：

① 代数形式（直角坐标形式）

在电路中用j来代替i

$$F = a + jb \qquad j = \sqrt{-1}$$

$Re[F]$ 　　　　　　$Im[F]$



在复平面上用相量表示

$$F = |F|\cos\varphi + j|F|\sin\varphi = |F|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$|F| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\arg(F) = \varphi = \arctan\frac{b}{a}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|F|}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|F|}$$

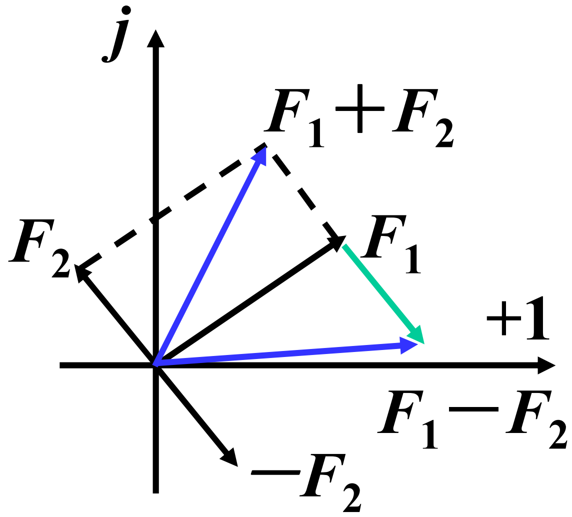
② 极坐标形式　$F = |F|\angle\varphi$

③ 指数形式　$F = |F|e^{j\varphi}$

2. 复数的运算：

$$F_1 = a_1 + jb_1 = |F_1|\angle\varphi_1$$

$$F_2 = a_2 + jb_2 = |F_2|\angle\varphi_2$$



（1）加法运算：

$$F_1 + F_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

作图方法：首尾相连

平行四边形

（2）减法运算：

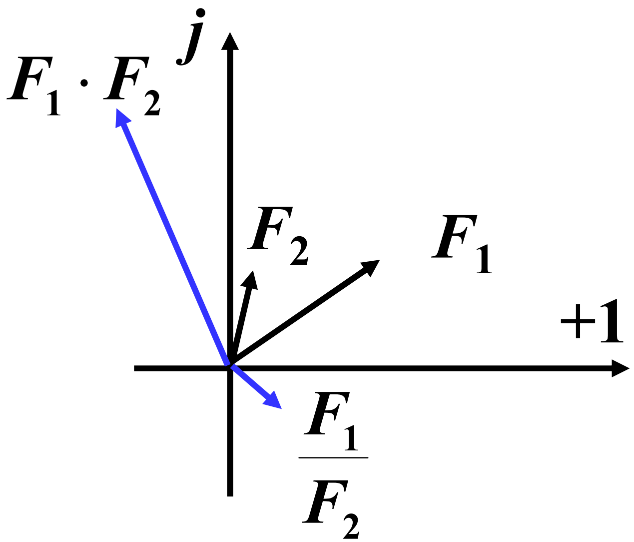
$$F_1 - F_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

（3）乘法运算：

$$F_1 \cdot F_2 = |F_1||F_2|\angle(\varphi_1 + \varphi_2)$$

（4）除法运算：

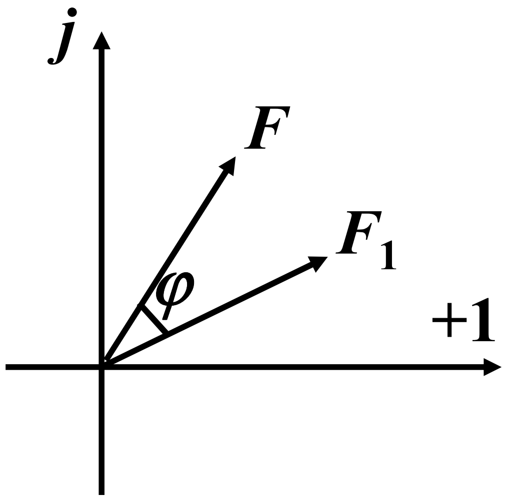
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1|}{|F_2|}\angle(\varphi_1 - \varphi_2)$$



旋转因子： $e^{j\varphi}=1\angle\varphi$

任何一个复数乘以一个旋转因子，就旋转一个φ角

【例8-1 】 $F=F_1 e^{j\varphi}$



特殊： $e^{j\frac{\pi}{2}}=j$ （逆时针旋转90°）

$e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$ （顺时针旋转90°）

$$e^{j(\pm\pi)}=\cos(\pm\pi)+j\sin(\pm\pi)=-1$$

+j，–j，-1 都可以看成旋转因子

10.3.1 正弦电量与相量的对应关系

2 用相量表示正弦量

$$设u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)$$

复函数 $R(t)=\sqrt{2}Ue^{j(\omega t+\theta)}$

$$=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)+\mathrm{j}\sqrt{2}U\sin(\omega t+\theta)$$

若对*R*(*t*)取实部:

$$\mathrm{Re}[R(t)]=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)=u(t)$$

***R*(*t*) 可以写成** $R(t)=\sqrt{2}\,\underbrace{U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}_{\text{复常数}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\,\dot{U}\,e^{\mathrm{j}\omega t}$

即: $\dot{U}=Ue^{j\theta}$

$\dot{U}$称为正弦量$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)$所对应的相量

$$\boxed{\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow\dot{U}=U\angle\theta}$$

10.3.1 正弦电量与相量的对应关系

余弦函数：$\boxed{\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{U}=U\angle\theta}$

$$\boxed{\sqrt{2}I\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{I}=I\angle\theta}$$

如为正弦函数：

$$\boxed{\sqrt{2}U\sin(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=U\angle\theta}$$

有效值相量

$$\boxed{\sqrt{2}I\sin(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{I}=I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=I\angle\theta}$$

在同一个电路中的正弦量形式要一致

如函数用最大值表示：

$$\boxed{U_m\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{U}_m=U_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=U_m\angle\theta}$$

最大值相量

$$\boxed{\sqrt{2}I_m\cos(\omega t+\theta)\Leftrightarrow \dot{I}_m=I_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=I_m\angle\theta}$$

由相量还原正弦量时要注意是有效值还是最大值

10.3.1 正弦电量与相量的对应关系

【例1】已知

$$i = 141.4\cos(314t + 30^\circ)\text{A}$$

$$u = 311.1\cos(314\text{t}+60^\circ)\text{V}$$

用相量表示i，u。

解：

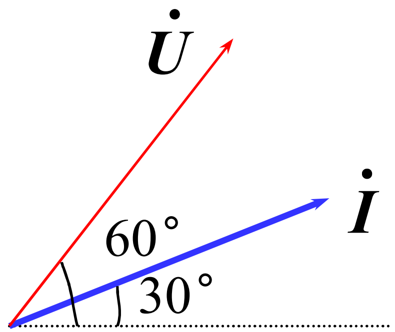
$$\dot{I} = 100\angle 30^\circ \text{A}$$

$$\dot{U} = 220\angle 60^\circ \text{V}$$

【例2】已知 $\dot{I} = 50\angle 15^\circ$ A，$f = 50$Hz．试写出电流的瞬时值表达式。

解：$i = 50\sqrt{2}\cos(314t + 15^\circ)$ A

相量图(相量和复数一样可以在平面上用向量表示)：



$$\dot{I} = 100\angle 30^\circ \text{A}$$

$$\dot{U} = 220\angle 60^\circ \text{V}$$

10.3.2 正弦电量运算的相量方法

1 线性代数运算

$\boxed{\times k}$ $ku=\sqrt{2}kU\cos(\omega t+\theta)$ $\boxed{ku} \longleftrightarrow \boxed{k\dot{U}}$

$\boxed{\pm}$

$$u_1=\sqrt{2}U_1\cos(\omega t+\theta_1) \qquad \dot{U}_1=U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}=U_1\angle\theta_1$$

$$u_2=\sqrt{2}U_2\cos(\omega t+\theta_2) \qquad \dot{U}_2=U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}=U_2\angle\theta_2$$

$$u_1\pm u_2=\mathrm{Re}[\sqrt{2}U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta_1)}]\pm\mathrm{Re}[\sqrt{2}U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta_2)}]$$

$$=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\cdot(U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}\pm U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2})\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\cdot U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$\boxed{u=u_1\pm u_2} \longleftrightarrow \boxed{\dot{U}=\dot{U}_1\pm\dot{U}_2}$

10.3.2 正弦电量运算的相量方法

1 线性代数运算

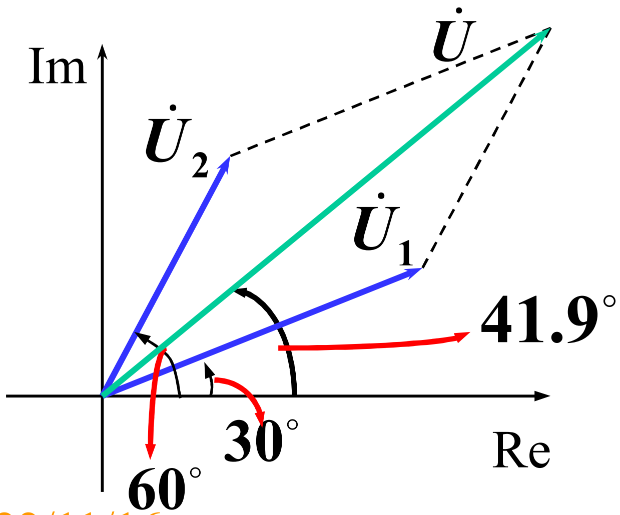
【例】$u_1(t)=6\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)\ \text{V}$ ⇒ $\dot{U}_1=6\angle 30^\circ\ \text{V}$

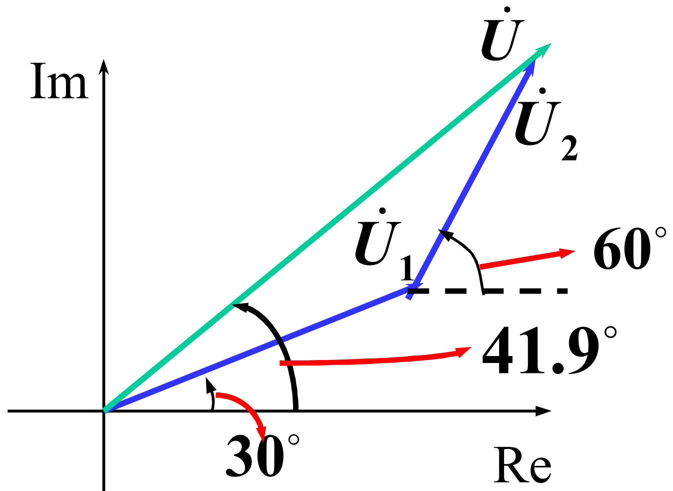
$u_2(t)=4\sqrt{2}\sin(314t+60^\circ)\ \text{V}$ ⇒ $\dot{U}_2=4\angle 60^\circ\ \text{V}$

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=6\angle 30^\circ+4\angle 60^\circ=5.19+j3+2+j3.46$$
$$=7.19+j6.46=9.64\angle 41.9^\circ\ \text{V}$$

$$\therefore u(t)=u_1(t)+u_2(t)=9.64\sqrt{2}\sin(314t+41.9^\circ)\ \text{V}$$

同频正弦量的加、减运算借助相量图进行。





首尾相接

10.3.2 正弦电量运算的相量方法

2 微分积分运算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$u=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta) \qquad \dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

$$u_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)]$$

$$=\sqrt{2}U[-\sin(\omega t+\theta)]\omega$$

$$=\sqrt{2}U\omega\cos(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2}) \qquad \dot{U}_d=j\omega U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

$$\boxed{u_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}} \Leftrightarrow \boxed{\dot{U}_{\mathrm{d}}=\mathrm{j}\omega\dot{U}}$$

$$\int\mathrm{d}t$$

$$\boxed{u_i=\int u\,\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{\dot{U}_i=\frac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega}}$$

Practice 哪些问题可以用相量法解决？

(1)确定特解。 $$2\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=100\sqrt{2}\sin(5t-30°)$$

$$u_{C\mathrm{p}}=\sqrt{2}U_C\sin(\omega t+\theta) \qquad u_{C\mathrm{p}}\leftrightarrow\dot{U}_{C\mathrm{p}}=U_C\mathrm{e}^{j\theta}$$

$$2\times(j5)^2\dot{U}_{C\mathrm{p}}+5\times(j5)\dot{U}_{C\mathrm{p}}+\dot{U}_{C\mathrm{p}}=100\mathrm{e}^{-j30°}$$

$$\dot{U}_{C\mathrm{p}}=\frac{100\mathrm{e}^{j-30°}}{2\times(j5)^2+5\times(j5)+1}=1.82\mathrm{e}^{j177°}$$

$$\boxed{u_{C\mathrm{p}}=1.82\sqrt{2}\sin(\omega t+177°)}$$

(2) 同频率三角函数运算。

$$u=3\sqrt{2}\sin(10t+30°)+4\sqrt{2}\sin(10t+120°)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[2\sqrt{2}\cos(10t+120°)]$$

$$\dot{U}=3\angle30°+4\angle120°-(j10)\times(-2\angle30°)=3\angle30°+4\angle120°+20\angle120°$$

$$=a+jb=A\mathrm{e}^{j\theta}=A\angle\theta$$

$$u=\sqrt{2}A\sin(10t+\theta) \qquad \cos(10t+120°)=-\sin(10t+30°)$$

Practice 哪些问题可以用相量法解决？

(3) 比较同频率正弦信号的相位关系。

$$u_1 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°)$$

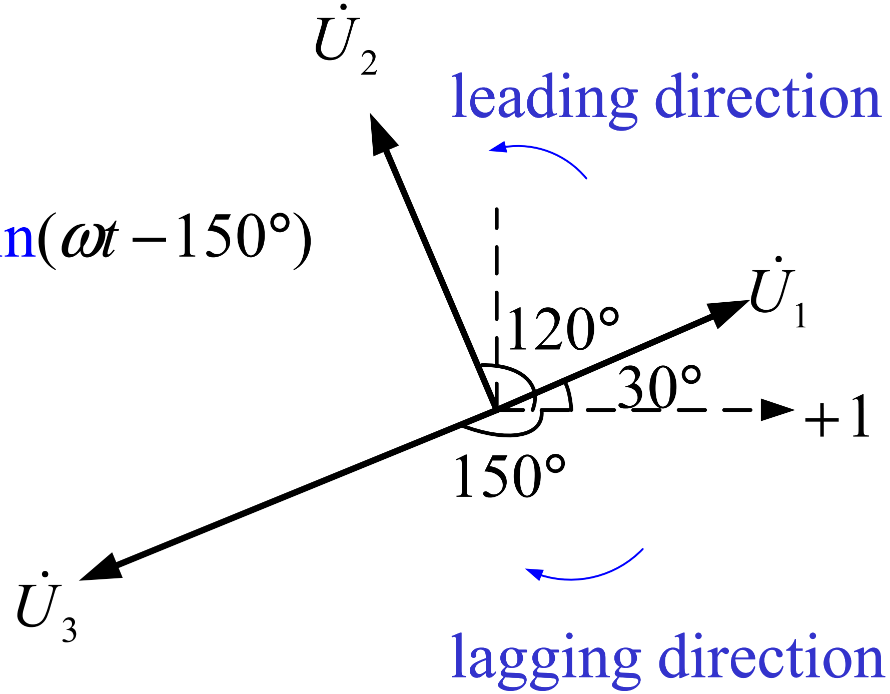
$$u_2 = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + 120°)$$

$$u_3 = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 120°) \quad = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 150°)$$

$$\dot{U}_1 = 3\angle 30°$$

$$\dot{U}_2 = 4\angle 120°$$

$$\dot{U}_3 = 5\angle -150°$$



$\dot{U}_2$ leads $\dot{U}_1$ by 90° $\qquad$ $\dot{U}_3$ leads $\dot{U}_2$ by 90° $\qquad$ $\dot{U}_1$ and $\dot{U}_3$ are in oppsite phase

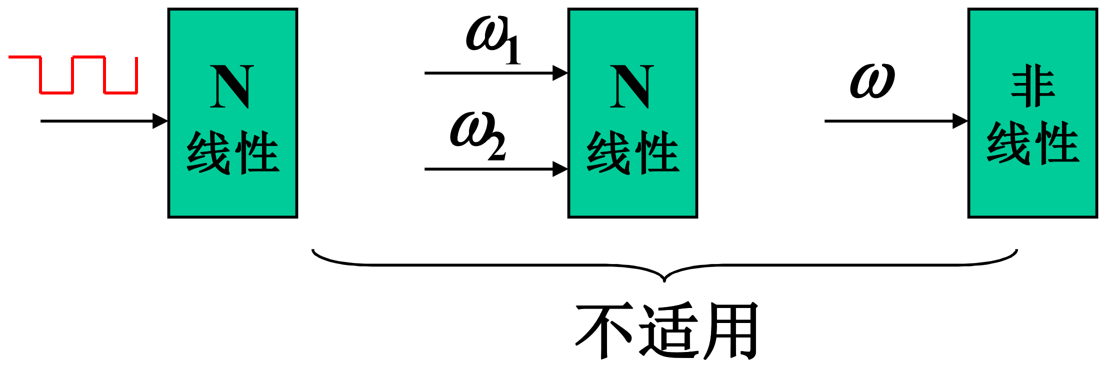
小结

① 正弦量 ⇄ 相量

时域　　频域

正弦波形图 ⇄ 相量图

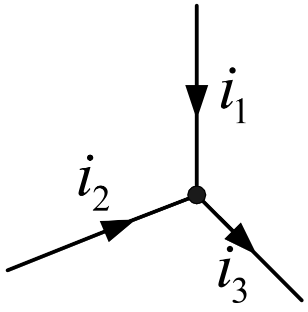
② 相量法只适用于激励为同频正弦量的非时变线性电路。

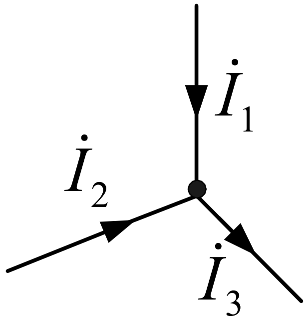


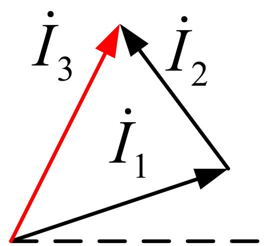
③ 相量法可以用来求强制分量是正弦量的任意常系数线性微分方程的特解，即可用来分析正弦稳态电路。

10.3.3 基尔霍夫定律的相量形式

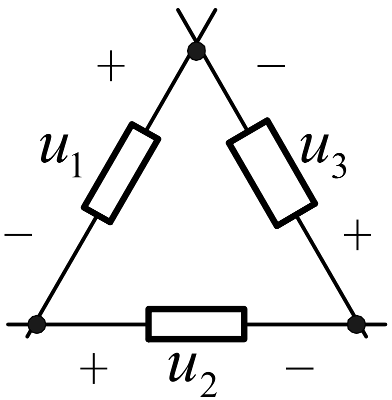
$$\sum i(t)=0 \Rightarrow \sum \dot{I}=0$$
$$\sum u(t)=0 \Rightarrow \sum \dot{U}=0$$

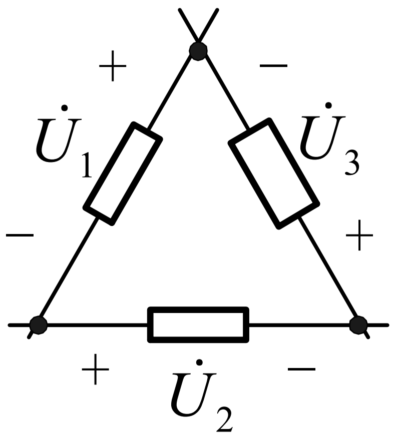


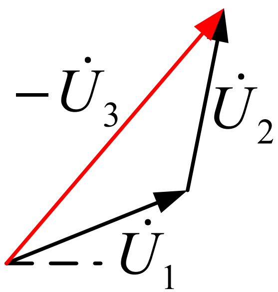




$$-i_1-i_2+i_3=0 \qquad -\dot{I}_1-\dot{I}_2+\dot{I}_3=0$$



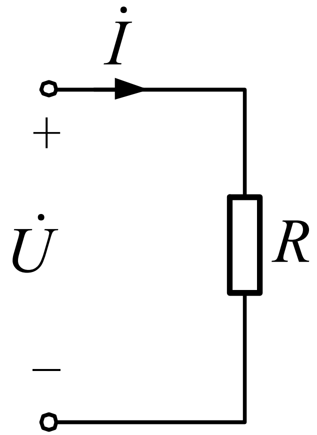


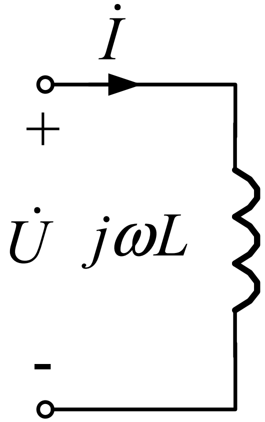


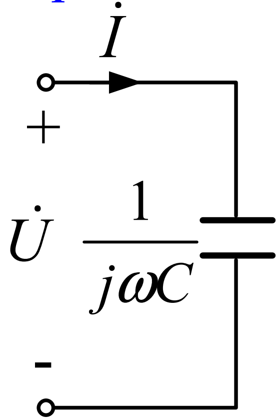
$$u_1+u_2+u_3=0 \qquad \dot{U}_1+\dot{U}_2+\dot{U}_3=0$$

10.3.4 电路的相量模型

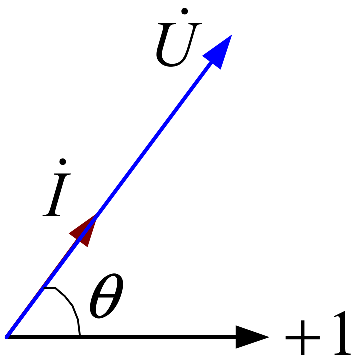
	1 电阻	2 电感	3 电容
时域	$u = Ri$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
相量形式	$\dot{U} = R\dot{I}$	$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$ 感抗inductive reactance	$\dot{U} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} = -\mathrm{j}X_C\dot{I}$ 容抗capacitive reactance

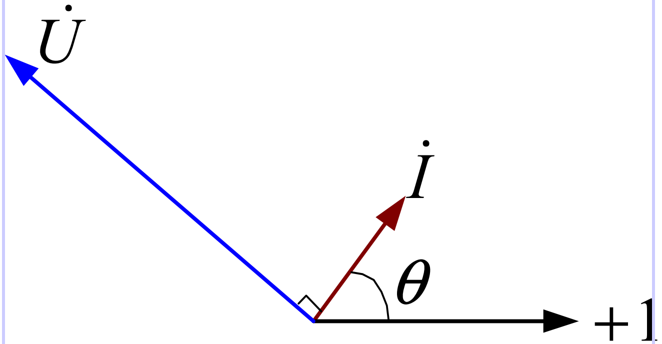


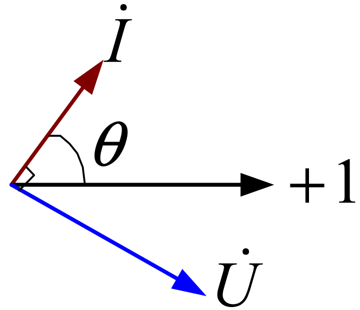




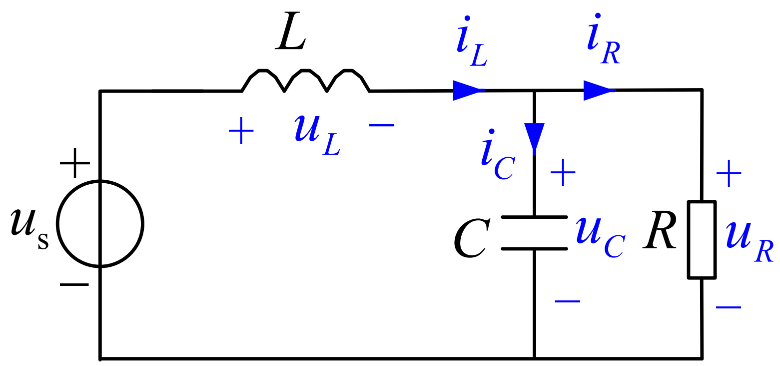
相量图





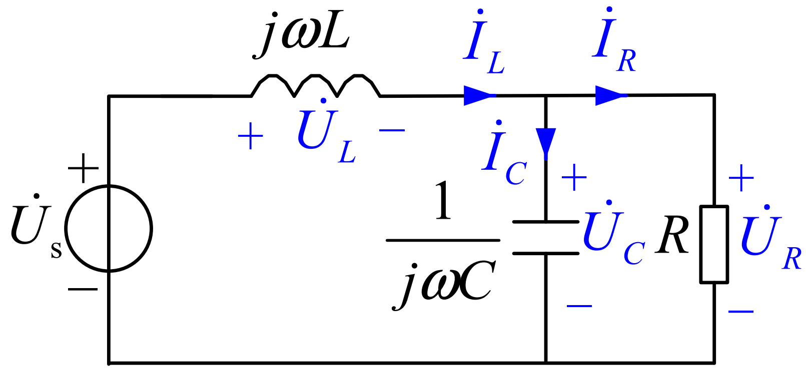


5. 电路的相量模型 (phasor model)与相量法



$$u_s = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

时域电路



$$\dot{U}_s = U\angle\varphi$$

相量模型

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_L = \boldsymbol{i}_C + \boldsymbol{i}_R \\ \boldsymbol{L}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_L}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{C}}\displaystyle\int \boldsymbol{i}_C \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{S}} \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{dt} + R\,i_R = u_s \end{cases}$$

时域列写微分方程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{I}}_L = \dot{\boldsymbol{I}}_C + \dot{\boldsymbol{I}}_R \\ \boldsymbol{j\omega L}\dot{\boldsymbol{I}}_L + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{j}\boldsymbol{\omega C}}\dot{\boldsymbol{I}}_C = \dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}} \\ j\omega L\dot{I}_L + R\dot{I}_R = \dot{U}_s \end{cases}$$

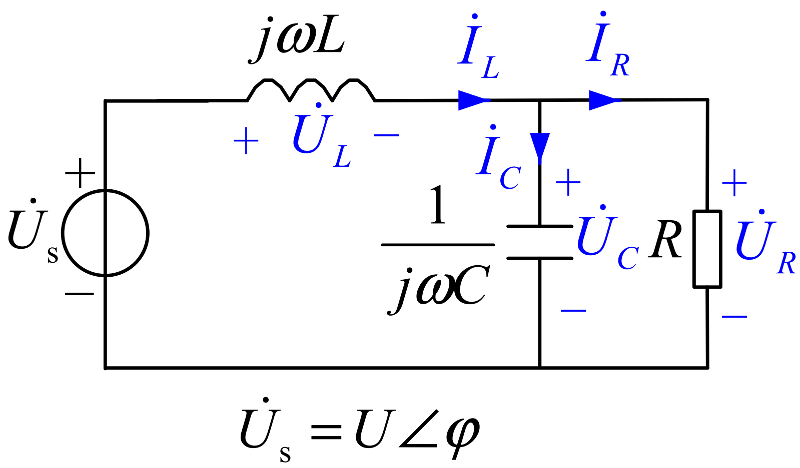
相量形式代数方程

相量模型：电压、电流用相量；元件用复数阻抗或导纳。

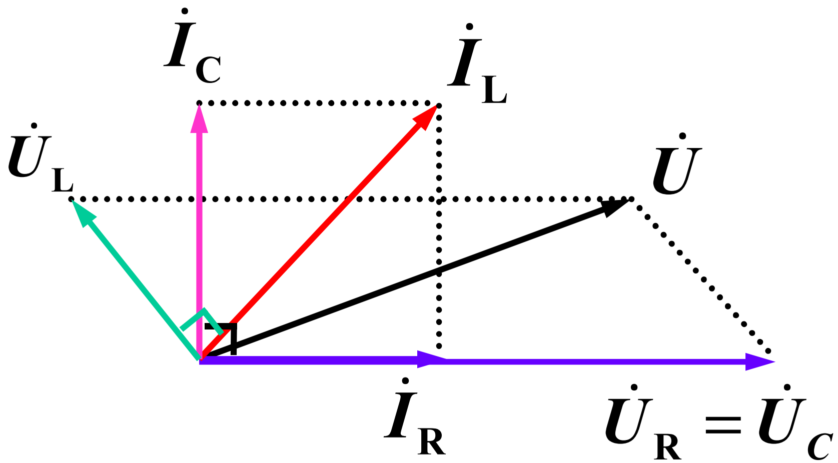
6 相量图

➢同频率的正弦量才能表示在同一个相量图中

➢选定一个合适参考相量(设初相位为零。)



选 $\dot{U}_R$为参考相量



小　结：

1. 求正弦稳态解是求微分方程的特解，应用相量法将该问题转化为求解复数代数方程问题。

2. 引入电路的相量模型，不必列写时域微分方程，而直接列写相量形式的代数方程。

3. 采用相量法后，电阻电路中所有网络定理和一般分析方法都可应用于交流电路。

10.4 阻抗和导纳 Impedance and Admittance

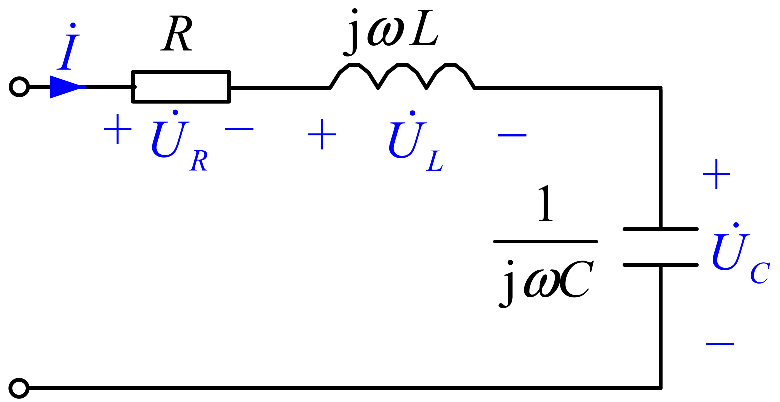
10.4.1 元件的阻抗和导纳

$$\left\{\begin{aligned} \dot{U} &= R\dot{I} \\ \dot{U} &= \mathrm{j}\omega L\dot{I} \\ \dot{U} &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} \end{aligned}\right. \Rightarrow \boxed{\dot{U} = Z\dot{I}}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_L &= \mathrm{j}\omega L \\ Z_C &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} Y_R &= \frac{1}{R} \\ Y_L &= -\mathrm{j}\frac{1}{\omega L} \\ Y_C &= \mathrm{j}\omega C \end{aligned}\right.$$

Z—Impedance Y—Admittance

10.4.2 1 RLC串联支路的阻抗

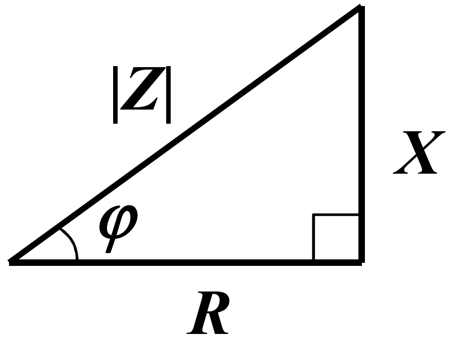


$$\dot U=\dot U_R+\dot U_L+\dot U_C$$
$$=R\dot I+\mathrm{j}\omega L\dot I+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot I$$
$$=R\dot I+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})\dot I$$
$$Z=\frac{\dot U}{\dot I}=R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$
$$=R+\mathrm{j}X$$

阻抗 $Z=\dfrac{\dot U}{\dot I}=R+\mathrm{j}X=|Z|\angle\varphi$

$$\begin{cases}|Z|=\dfrac{U}{I} & \text{阻抗模}\\ \varphi=\psi_u-\psi_i & \text{阻抗角}\end{cases}$$

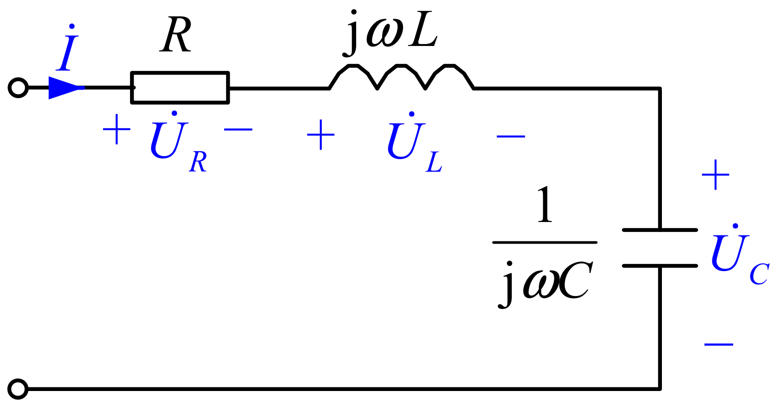
单位：Ω



阻抗三角形

R—电阻(阻抗的实部)；*X*—电抗(阻抗的虚部)

10.4.2 1 RLC串联支路的阻抗

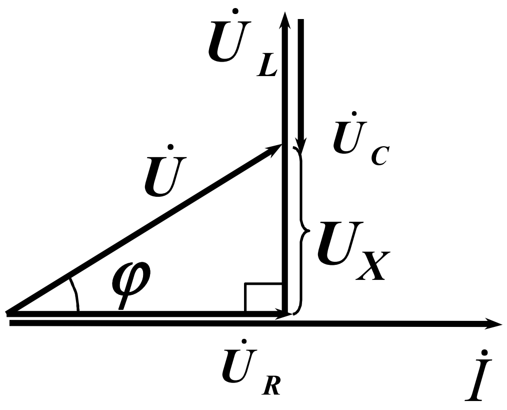


具体分析一下 *R*、*L*、*C* 串联电路：

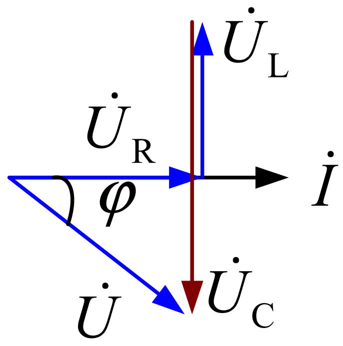
$Z=R+j(\omega L-1/\omega C)=|Z|\angle\varphi$

- $X>0$， $\varphi>0$，电路为感性，电压超前电流；
- $X<0$， $\varphi<0$，电路为容性，电压滞后电流；
- $X=0$， $\varphi=0$，电路为电阻性，电压与电流同相。

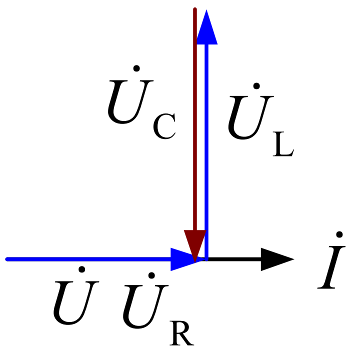
画相量图(位形图)：选电流为参考向量，$X>0$



感性

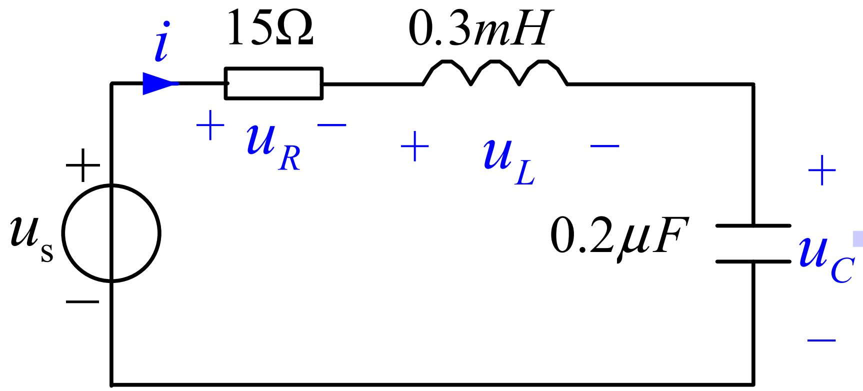


容性



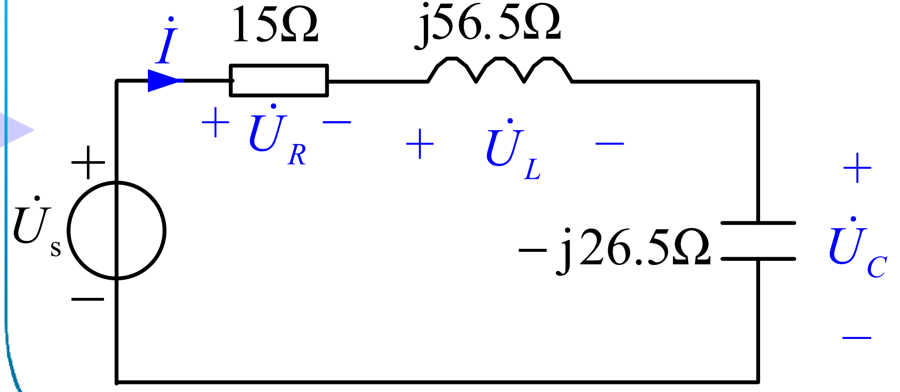
电阻性

例：已知$u_s = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ)$，$f = 3\times10^4\text{Hz}$。求$i$、$u_R$、$u_L$、$u_C$。



$$\mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}2\pi\times3\times10^4\times0.3\times10^{-3} = \mathrm{j}56.5\Omega$$

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\frac{1}{2\pi\times3\times10^4\times0.2\times10^{-6}} = -\mathrm{j}26.5\Omega$$



解：其相量模型为

$$Z = R + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = 15 + \mathrm{j}56.5 - \mathrm{j}26.5 = 33.54\angle63.4^\circ\ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{5\angle60^\circ}{33.54\angle63.4^\circ} = 0.149\angle-3.4^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{U}_R = 15\times\dot{I} = 2.235\angle-3.4^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}56.5\times\dot{I} = 8.42\angle86.4^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_C = -\mathrm{j}26.5\times\dot{I} = 3.95\angle-93.4^\circ\ \text{V}$$

$$i = 0.149\sqrt{2}\sin(\omega t - 3.4^\circ)\text{A}$$

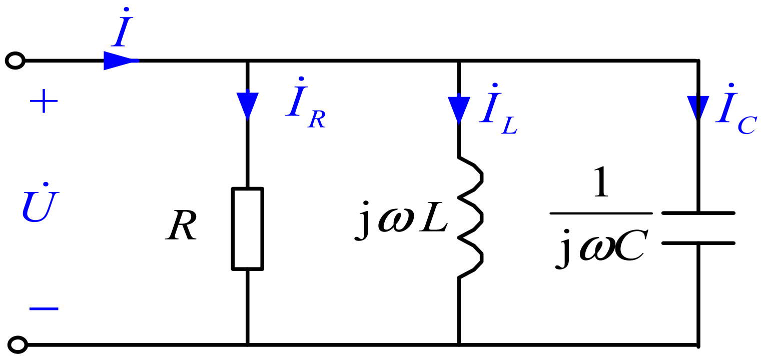
$$u_R = 2.235\sqrt{2}\sin(\omega t - 3.4^\circ)\ \text{V}$$

$$u_L = 8.42\sqrt{2}\sin(\omega t + 86.6^\circ)\ \text{V}$$

$$u_C = 3.95\sqrt{2}\sin(\omega t - 93.4^\circ)\ \text{V}$$

U_L=8.42>U=5，分电压大于总电压。

10.4.2 2 RLC并联支路的导纳



$$\boxed{\text{导纳 } Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+\mathrm{j}B=|Y|\angle\varphi'}$$

$$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C$$

$$=\frac{1}{R}\dot{U}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\dot{U}+\mathrm{j}\omega C\dot{U}$$

$$=[G+\mathrm{j}(\omega C-\frac{1}{\omega L})]\dot{U}$$

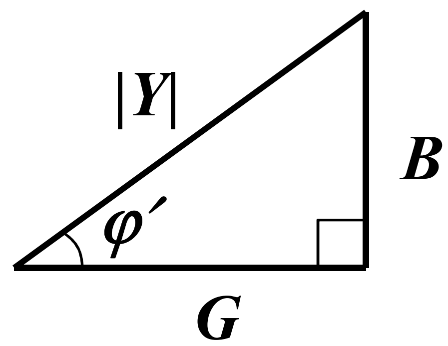
$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+\mathrm{j}(\omega C-\frac{1}{\omega L})$$

$$=G+\mathrm{j}B$$

$|Y|=\dfrac{I}{U}$ **导纳模**

$\varphi'=\psi_i-\psi_u$ **导纳角**

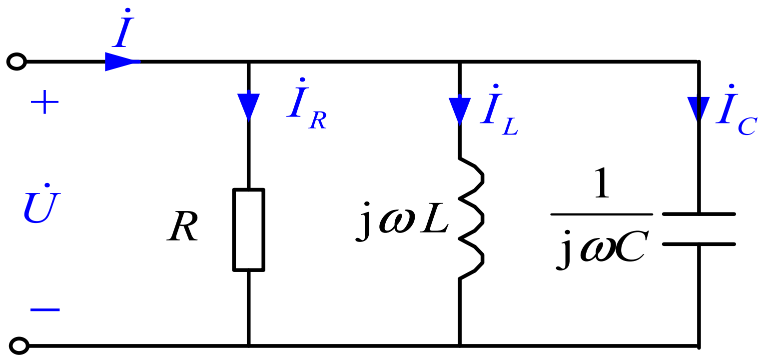
单位：S



导纳三角形

G—电导(导纳的实部)，B—电纳(导纳的虚部)

10.4.2 2 RLC并联支路的导纳

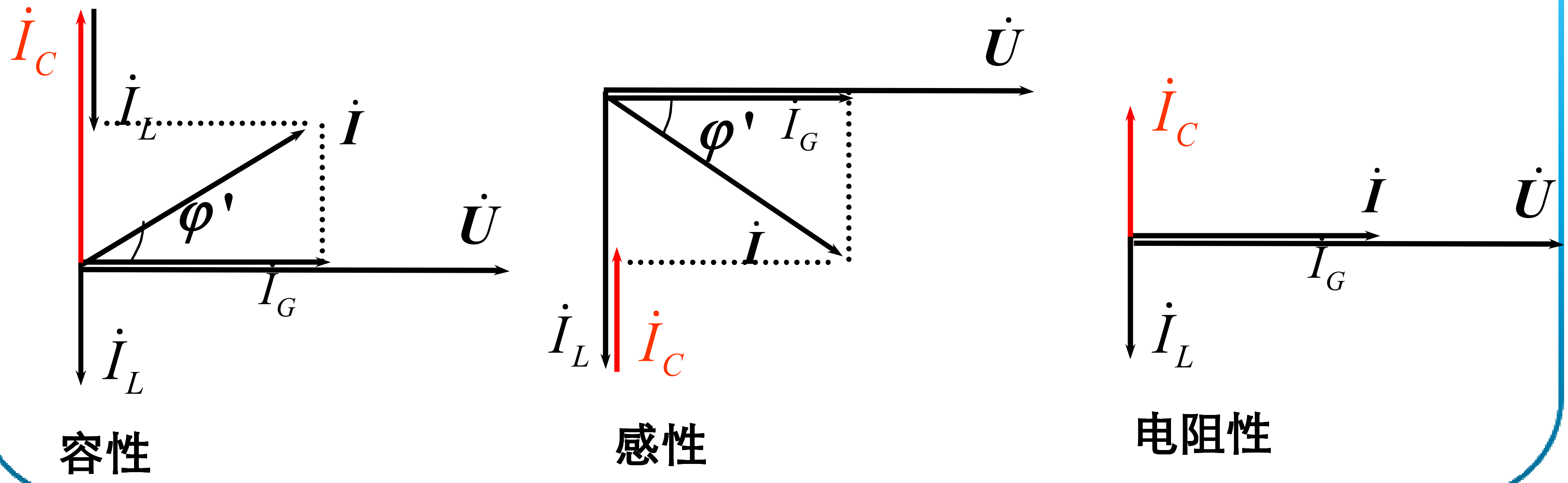


具体分析一下 *RLC* 并联电路:

$$Y=G+\mathrm{j}(\omega C-1/\omega L)=|Y|\angle\varphi'$$

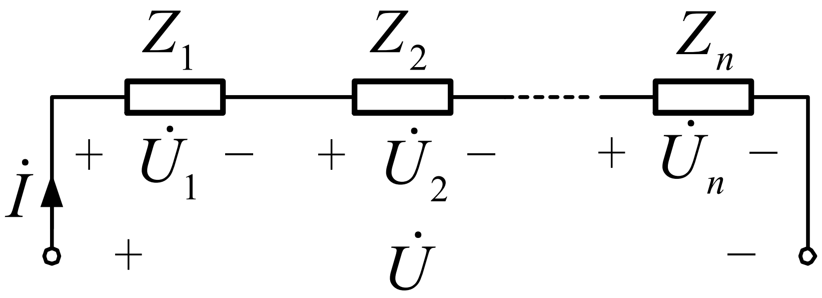
- $B>0$， $\varphi'>0$，电路为容性，i超前u；
- $B<0$， $\varphi'<0$，电路为感性， u超前i；
- B=0， $\varphi'=0$，电路为电阻性，u与i同相。

画相量图：选电压为参考向量 (容性：$\omega C>1/\omega L$，$\varphi'>0$)



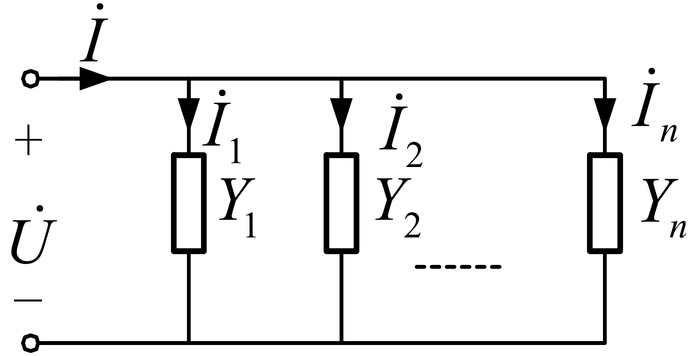
10.4 .3 阻抗的联结

1 阻抗的串联



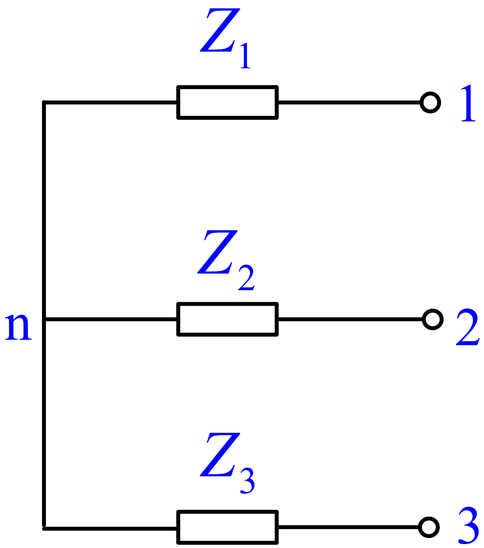
$$Z = \sum Z_k \qquad \dot{U}_k = \frac{Z_k}{\sum Z_k}\dot{U}$$

2 阻抗的并联



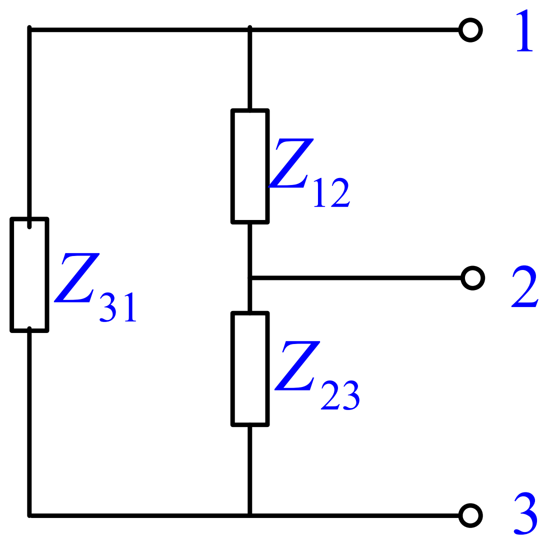
$$Y = \sum Y_k \qquad \dot{I}_k = \frac{Y_k}{\sum Y_k}\dot{I}$$

3 阻抗的星形和三角形联结

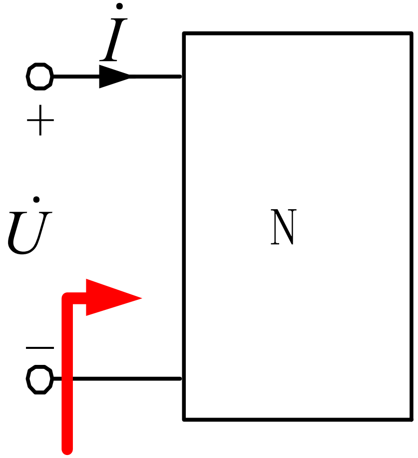


$$Y_{12} = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$Z_1 = \frac{Z_{12} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$



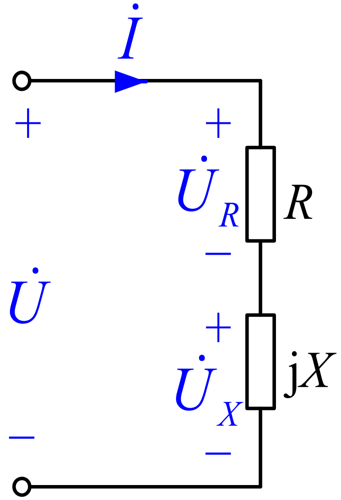
10.4.4 无源网络的等效模型

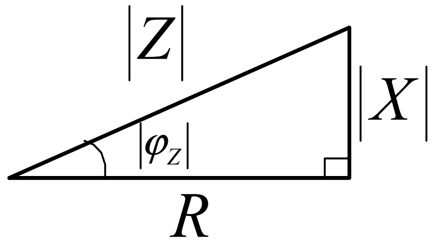


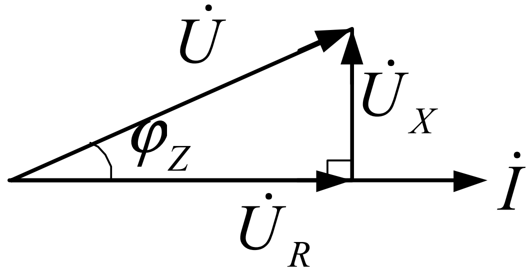
Z or Y

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i}$$

$$= |Z|\angle\varphi_Z$$



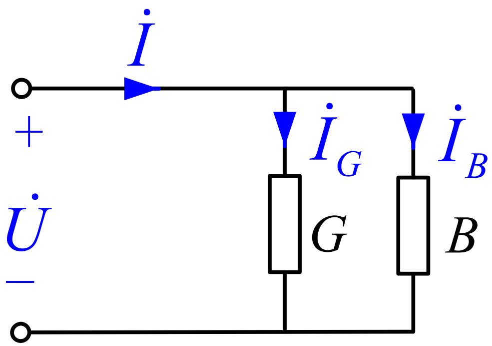


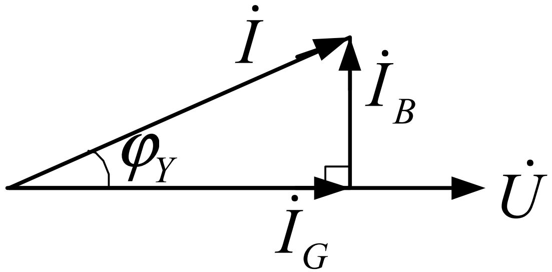


感性网络

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + \mathrm{j}B$$

$$= |Y|\angle\varphi_Y$$





容性网络

10.4.4 无源网络的等效模型

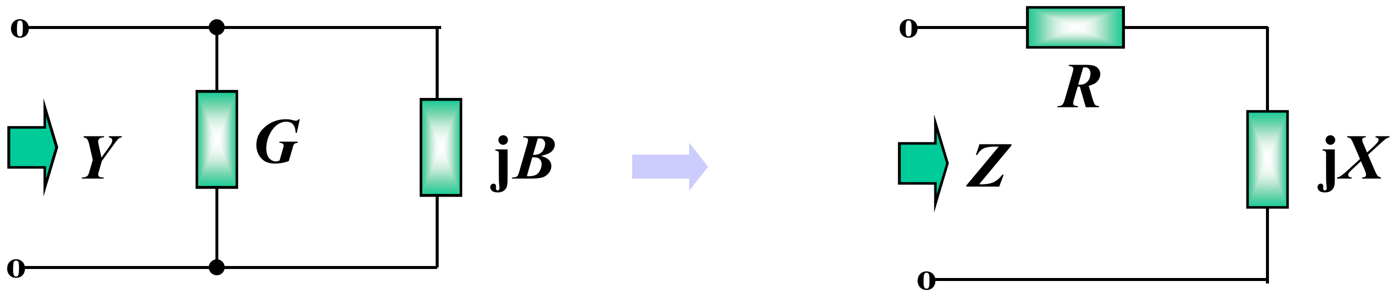
Y、Z之间等效变换：

已知：$Y = G + \mathrm{j}B = |Y|\angle\varphi', \qquad Z = R + \mathrm{j}X = |Z|\angle\varphi$

$$\boxed{Y = \frac{1}{Z} \rightarrow \quad |Y| = \frac{1}{|Z|}, \varphi = -\varphi'}$$

$$\boxed{R = \frac{G}{G^2+B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2+B^2}} \Leftarrow Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G+\mathrm{j}B} = \frac{G-\mathrm{j}B}{G^2+B^2} = R + \mathrm{j}X$$

$$\boxed{G = \frac{R}{R^2+X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2+X^2}} \Leftarrow Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+\mathrm{j}X} = \frac{R-\mathrm{j}X}{R^2+X^2} = G + \mathrm{j}B$$



10.5 复杂正弦稳态电路分析

电阻电路与正弦电流电路相量法分析比较：

电阻电路：

$$
\begin{cases}
\text{KCL}: & \sum i = 0 \\
\text{KVL}: & \sum u = 0 \\
\text{元件约束关系}: & u = Ri \\
& \text{或} \quad i = Gu
\end{cases}
$$

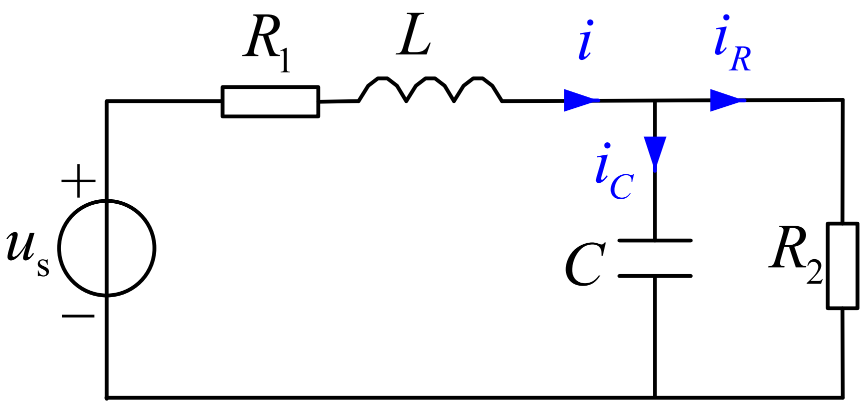
正弦电路相量分析：

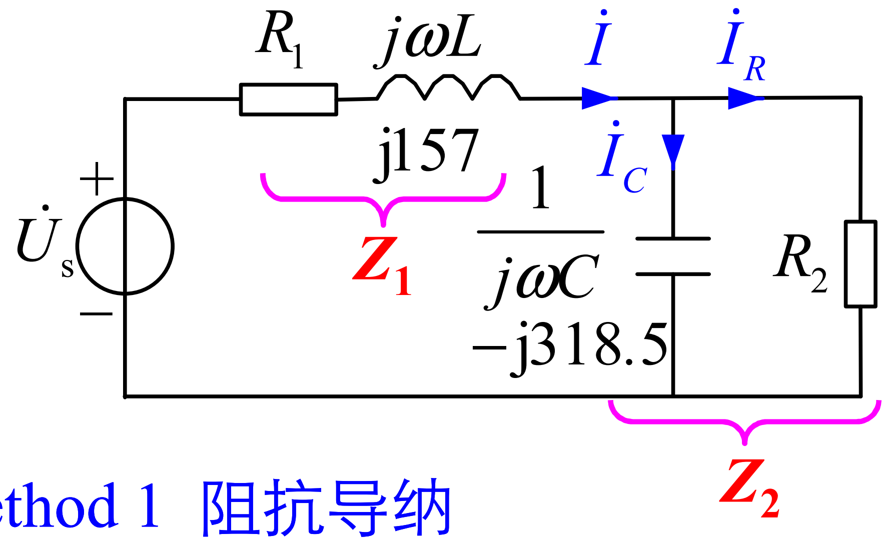
$$
\begin{cases}
\text{KCL}: & \sum \dot{I} = 0 \\
\text{KVL}: & \sum \dot{U} = 0 \\
\text{元件约束关系}: & \dot{U} = Z\dot{I} \\
& \text{或} \quad \dot{I} = Y\dot{U}
\end{cases}
$$

可见，二者依据的电路定律是相似的。只要作出正弦稳态电路的相量模型，便可将电阻电路的分析方法应用于正弦稳态的相量分析中。

【例1】：已知$R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 1000\Omega$，$L = 500\text{mH}$, $C = 10\mu\text{F}$,

$u_s = 100\sqrt{2}\sin 314t\text{V}$。求：各支路电流。





解：画出电路的相量模型 Method 1 阻抗导纳

$$Z_1 = R_1 + j\omega L = 10 + j157\ \Omega$$

$$Z_2 = R_2 // \frac{1}{j\omega C} = \frac{1000\times(-j318.5)}{1000 - j318.5} = 92.20 - j289.3\ \Omega$$

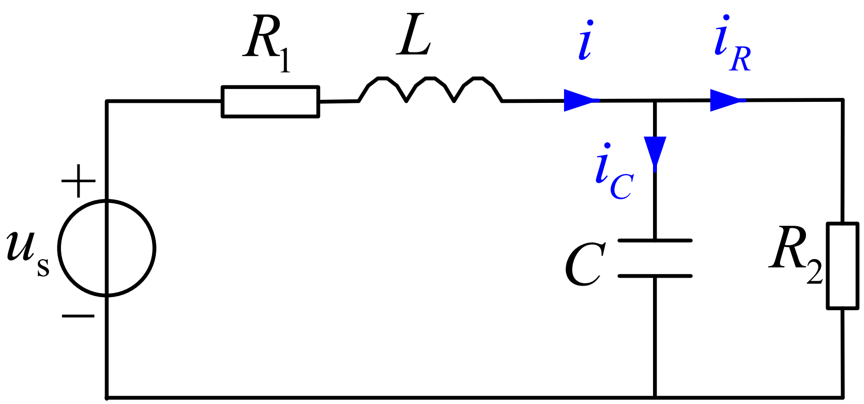
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z_1 + Z_2} = \frac{100\angle 0^\circ}{167.2\angle -52.2^\circ} = 0.6\angle 52.2^\circ\text{A}$$

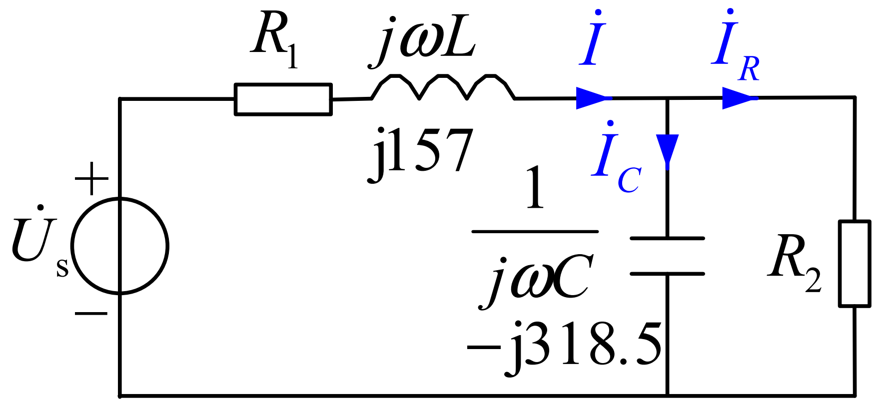
$$\dot{I}_R = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}\dot{I} = \frac{-j318.5}{1049\angle -17.67^\circ}\times 0.6\angle 52.2^\circ = 0.182\angle -20.0^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}_C = 0.57\angle 70^\circ\text{A}$$

【例1】：已知$R_1=10\Omega$，$R_2=1000\Omega$，$L=500\text{mH}$，$C=10\mu\text{F}$，

$u_s=100\sqrt{2}\sin 314t\text{V}$。求：各支路电流。





解：画出电路的相量模型 Method 2 结点法

$$\left(\frac{1}{R_1+j\omega L}+\frac{1}{R_2}+j\omega C\right)\dot{U}_{n1}=\frac{\dot{U}_s}{R_1+j\omega L}$$

$$\dot{U}_{n1}=180\angle-20.0^\circ\text{V}$$

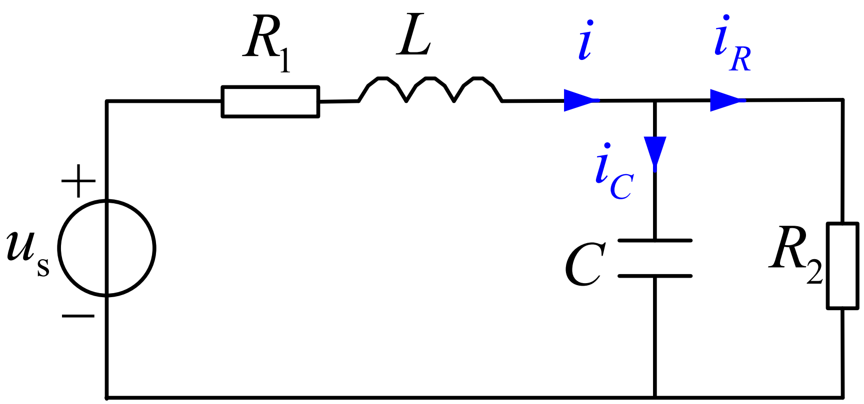
$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}_{n1}}{\frac{1}{j\omega C}}=\frac{180\angle-20.0^\circ}{-j318.5}=0.57\angle70^\circ\text{A}$$

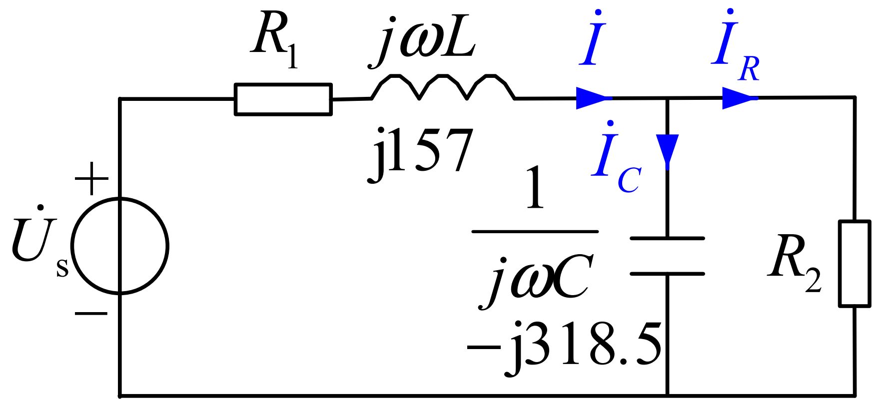
$$\dot{I}_R=0.18\angle-20.0^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_s-\dot{U}_{n1}}{R_1+j\omega L}=0.6\angle52.2^\circ\text{A}$$

【例1】：已知$R_1=10\Omega$，$R_2=1000\Omega$，$L=500\text{mH}$，$C=10\mu\text{F}$，

$u_s=100\sqrt{2}\sin 314t\,\text{V}$。求：各支路电流。





解：画出电路的相量模型　Method 3 网孔法

$$\left(R_1+\text{j}\omega L-\text{j}\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}-\frac{1}{\text{j}\omega C}\dot{I}_R=\dot{U}_s$$

$$-\frac{1}{\text{j}\omega C}\dot{I}+\left(R_2+\frac{1}{\text{j}\omega C}\right)\dot{I}_R=0$$

$$\begin{cases}\dot{I}=0.6\angle 52.2°\text{A}\\ \dot{I}_R=0.18\angle -20.0°\text{A}\\ \dot{I}_C=0.570\angle 70.0°\text{A}\end{cases}$$

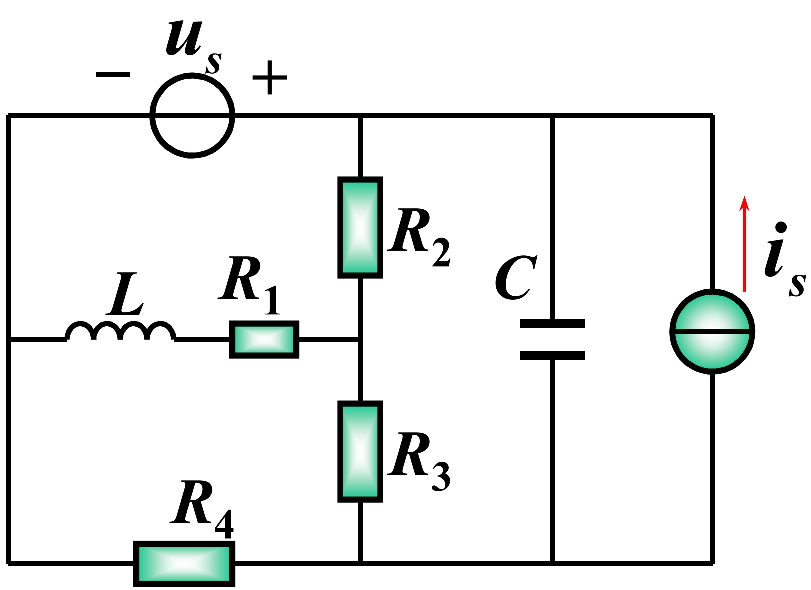
瞬时值表达式为：

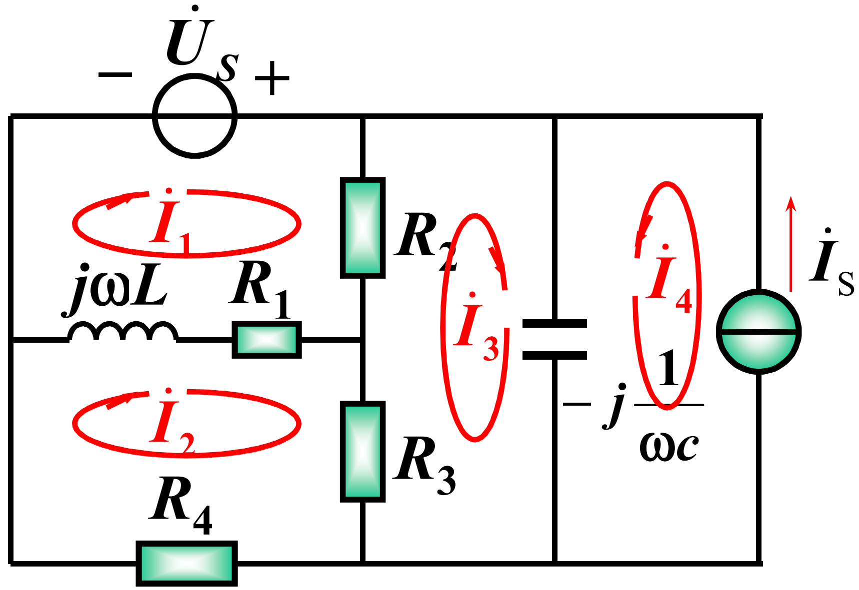
$$i=0.6\sqrt{2}\sin(314t+52.2^\circ)\,\text{A}$$

$$i_R=0.18\sqrt{2}\sin(314t-20^\circ)\,\text{A}$$

$$i_C=0.57\sqrt{2}\sin(314t+70^\circ)\,\text{A}$$

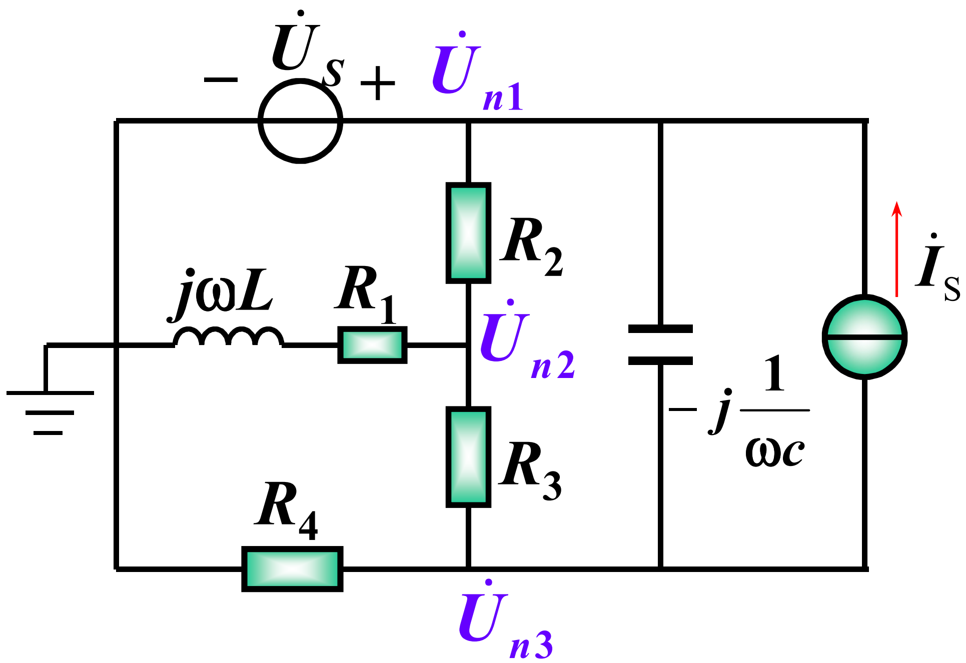
【练习】列写电路的网孔方程和结点电压方程。





解： 网孔法:

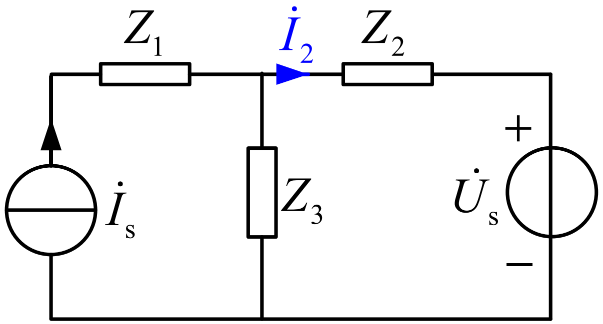
$$
\begin{cases}
(R_1+R_2+j\omega L)\dot{I}_1-(R_1+j\omega L)\dot{I}_2-R_2\dot{I}_3=\dot{U}_S \\
(R_1+R_3+R_4+j\omega L)\dot{I}_2-(R_1+j\omega L)\dot{I}_1-R_3\dot{I}_3=0 \\
(R_2+R_3-j\dfrac{1}{\omega C})\dot{I}_3-R_2\dot{I}_1-R_3\dot{I}_2+(-j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}_4)=0 \\
\dot{I}_4=\dot{I}_S
\end{cases}
$$

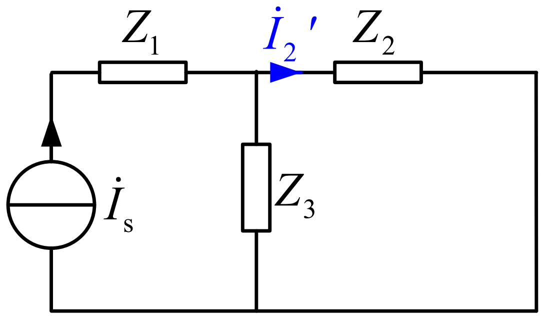


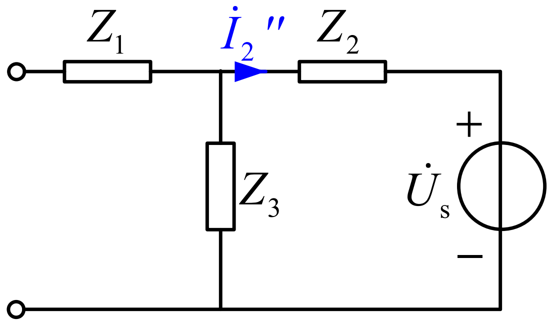
结点法:

$$\begin{cases} \dot U_{n1} = \dot U_S \\ \left(\frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\dot U_{n2} - \frac{1}{R_2}\dot U_{n1} - \frac{1}{R_3}\dot U_{n3} = 0 \\ \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + j\omega C\right)\dot U_{n3} - \frac{1}{R_3}\dot U_{n2} - j\omega C\dot U_{n1} = -\dot I_S \end{cases}$$

【例2】已知：$\dot{U}_S = 100\angle 45^\circ\,\text{V}$，$\dot{I}_S = 4\angle 0^\circ\,\text{A}$，$Z_1 = Z_3 = 50\angle 30^\circ\,\Omega$，$Z_3 = 50\angle 30^\circ\,\Omega$.
用叠加定理计算电流$\dot{I}_2$







(1) $\dot{I}_S$单独作用：

$$\dot{I}_2' = \dot{I}_S \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$= 4\angle 0^\circ \times \frac{50\angle 30^\circ}{50\angle -30^\circ + 50\angle 30^\circ}$$

$$= \frac{200\angle 30^\circ}{50\sqrt{3}} = 2.31\angle 30^\circ\,\text{A}$$

(2) $\dot{U}_S$单独作用：

$$I_2'' = -\frac{\dot{U}_S}{Z_2 + Z_3}$$

$$= \frac{-100\angle 45^\circ}{50\sqrt{3}} = 1.155\angle -135^\circ\,\text{A}$$

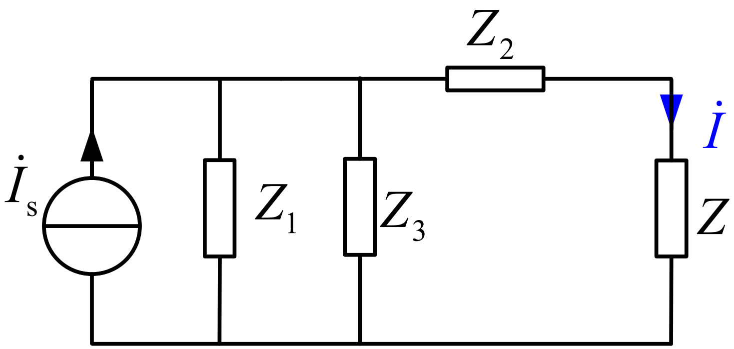
$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2''$$

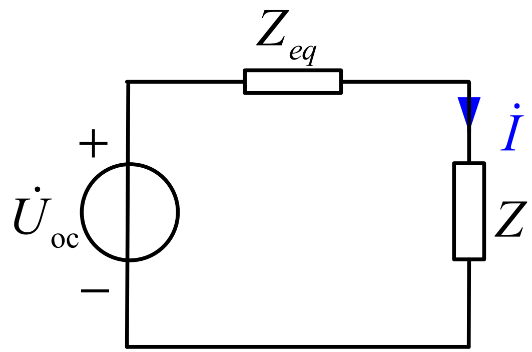
$$= 2.31\angle 30^\circ + 1.155\angle -135^\circ$$

$$= (2 + j1.155) + (-0.817 - j0.817)$$

$$= 1.23\angle -15.9^\circ\,\text{A}$$

【例3】已知：$\dot{I}_S = 4\angle 90^\circ\,\mathrm{A}$，$Z_1 = Z_2 = -\mathrm{j}30\ \Omega$，$Z_3 = 30\ \Omega$，$Z = 45\ \Omega$。求：$\dot{I}$.





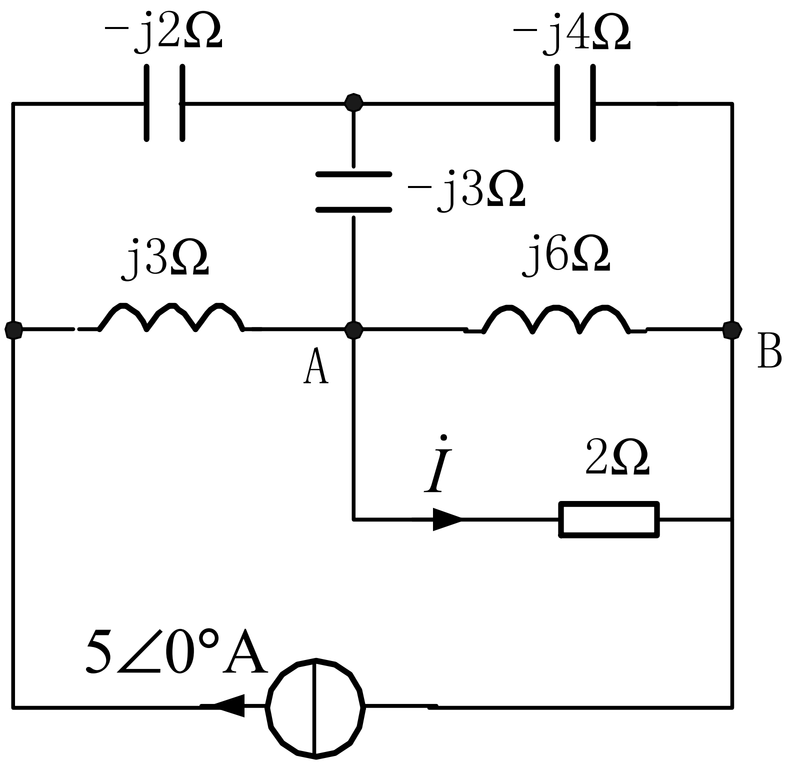
解：戴维南定理

$$\dot{U}_{oc} = \dot{I}_s(Z_1 // Z_3) = 84.855\angle 45^\circ\,\mathrm{V}$$

$$Z_{eq} = Z_1 // Z_3 + Z_2 = 15 - \mathrm{j}45\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{oc}}{Z_{eq} + Z} = 1.13\angle 81.9^\circ\,\mathrm{A}$$

【例4】计算 $\dot{I}$.

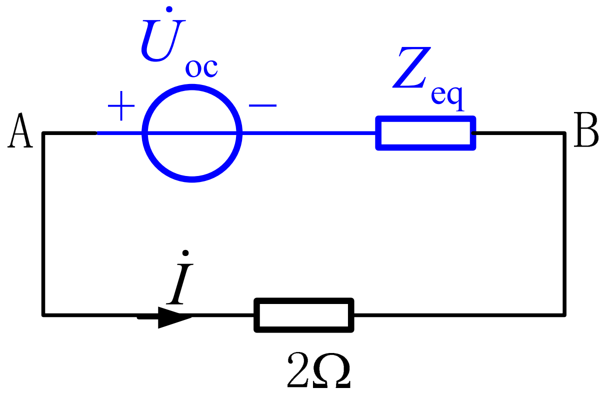


戴维南定理

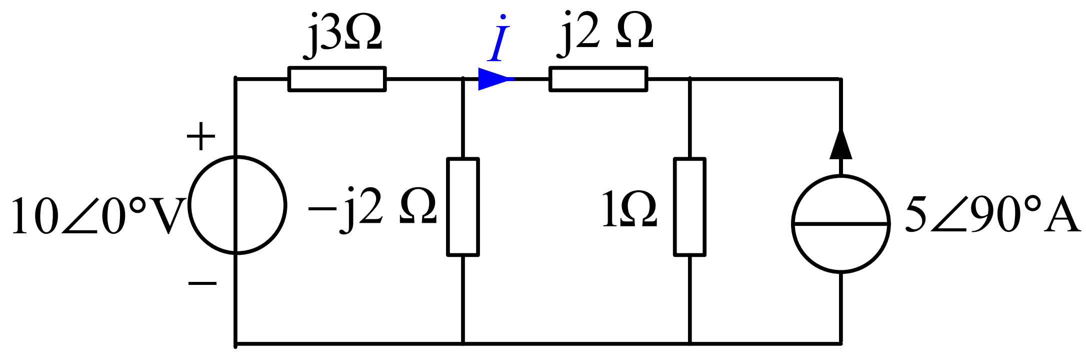
$$\dot{U}_{oc}=\left(\frac{-j6}{-j6+j9}\times 5\angle 0^\circ\right)\times j6$$

$$Z_{eq}=[(-j2+j3)//(-j3)-j4]//(j6)$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_{oc}}{2+Z_{eq}}$$



【课下练习】计算 $\dot{I}$.



戴维南定理

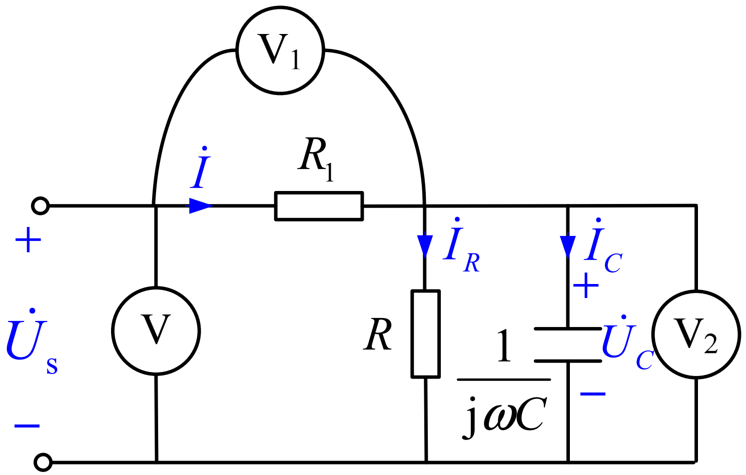
$$\dot{U}_{oc}=\frac{-j2}{j3-j2}\times 10\angle 0^{\circ}-5\angle 90^{\circ}=-20-j5$$

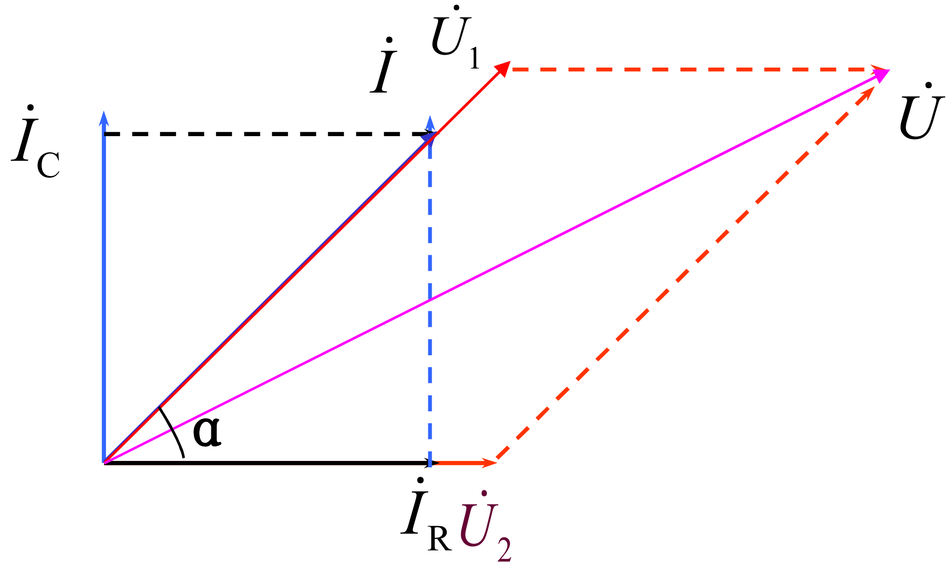
$$Z_{eq}=j3//(-j2)+1=-j6+1$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_{oc}}{Z_{eq}+j2}=\frac{-20-j5}{-j6+1+j2}=\frac{-20-j5}{-j4+1}=\frac{-5(4+j)}{-j(4-j)}=-j5\text{A}$$

10.6　相量图及位形相量图

【例1】：f=50Hz，R_1=20欧。V、V_1、V_2的读数为100V，60V，50V求R和C。



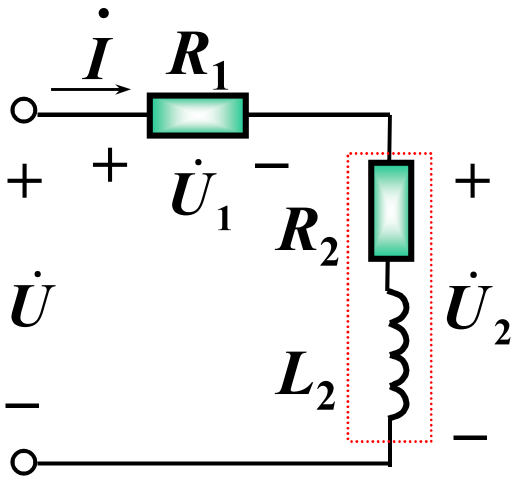


$$U^2=U_1^2+U_2^2-2U_1U_2\cos(180°-\alpha) \Rightarrow \alpha=49.46°$$

$$I=\frac{U_1}{R_1}=\frac{60}{20}=3A \Rightarrow I_R=3\cos 49.46°=1.95A \quad I_C=3\sin 49.46°=2.28A$$

$$R=\frac{U_2}{I_R}=25.64 \qquad X_C=\frac{U_2}{I_C}=21.93\Omega$$

$$=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi fC} \quad \Rightarrow C=145\mu F$$



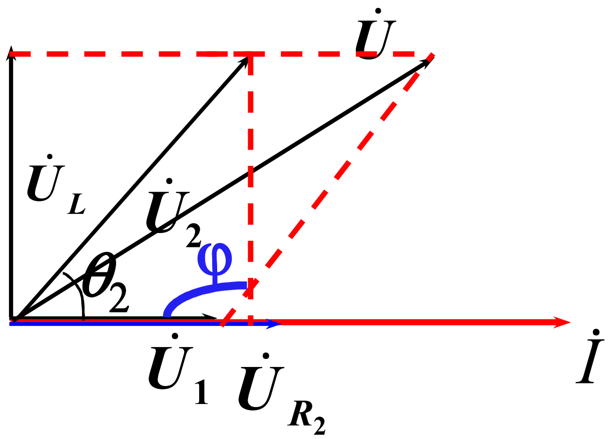
【例2】已知：U=115V，U_1=55.4V，U_2=80V，R_1=32Ω，f=50Hz

求：线圈的电阻R_2和电感L_2。

解：画 相量图进行定性分析。

$$I = U_1 / R_1 = 55.4/32 = 1.73\text{A}$$

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi$$



$$\cos\varphi = -0.4237 \quad \therefore \varphi = 115.1^\circ$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \varphi = 64.9^\circ$$

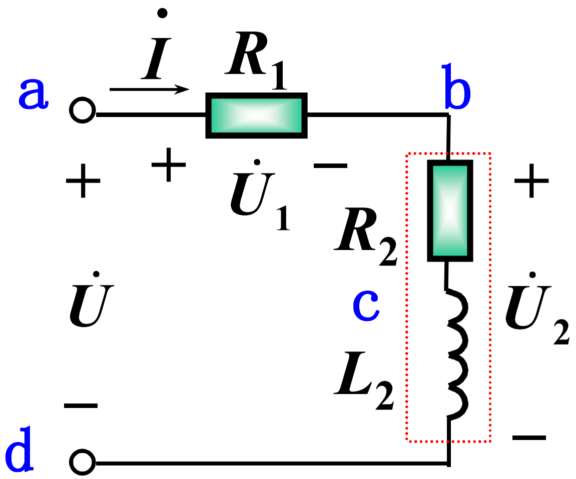
$$U_{L2} = U_2\sin\theta_2 = 80\times\sin 64.9^\circ = 72.45V$$

$$U_{R2} = U_2\cos\theta_2 = 80\times\cos 64.9^\circ = 33.9V$$

$$R_2 = U_{R2}/I = 33.9/1.73 = 19.6\Omega$$

$$\omega L = U_{L2}/I = 72.45/1.73 = 41.88\Omega$$

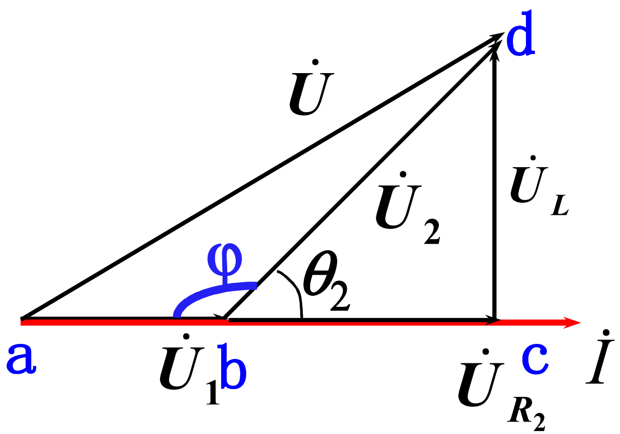
$$L = 41.88/314 = 0.133\,H$$



【例2】已知：U=115V，U_1=55.4V，U_2=80V，R_1=32Ω，f=50Hz

求：线圈的电阻R_2和电感L_2。

解：画位形相量图进行定性分析。



$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -0.4237 \quad \therefore \varphi = 115.1^\circ$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \varphi = 64.9^\circ$$

$$I = U_1 / R_1 = 55.4/32 = 1.73\text{A}$$

$$U_{L2} = U_2\sin\theta_2 = 80\times\sin 64.9^\circ = 72.45V$$

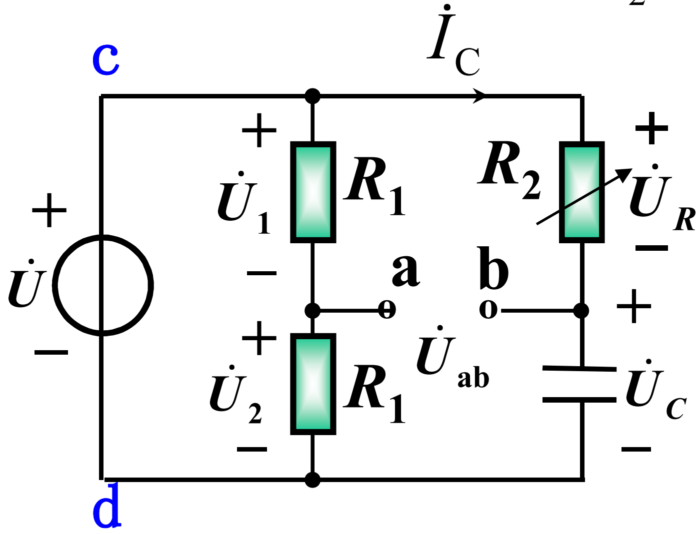
$$U_{R2} = U_2\cos\theta_2 = 80\times\cos 64.9^\circ = 33.9V$$

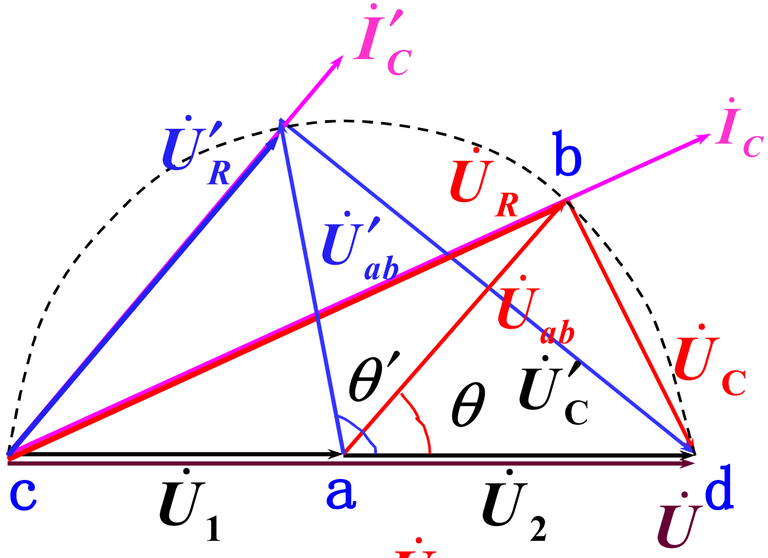
$$R_2 = U_{R2}/I = 33.9/1.73 = 19.6\Omega$$

$$\omega L = U_{L2}/I = 72.45/1.73 = 41.88\Omega$$

$$L = 41.88/314 = 0.133\ H$$

【例3】移相桥电路。当R_2由$0 \to \infty$时，$\dot{U}_{ab}$如何变化？





解：用相量图分析

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2，\quad \dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \frac{\dot{U}}{2}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_R - \dot{U}_1$$

由相量图可知，当R_2改变，$U_{ab} = \frac{1}{2}U$不变，相位改变；

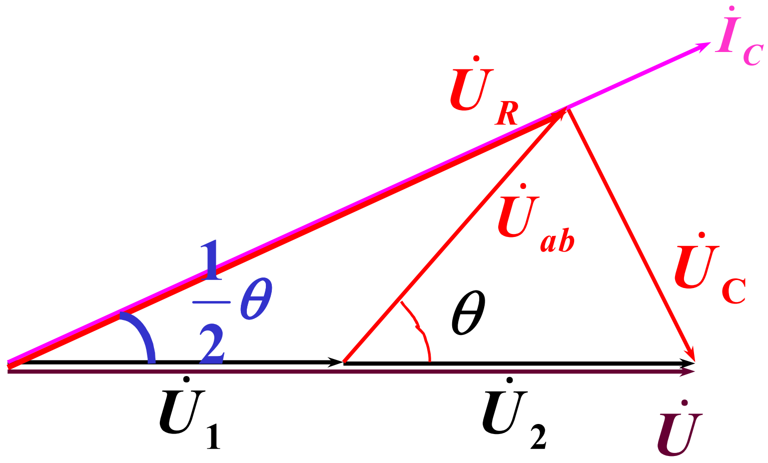
当R_2=0，θ=180°；当$R_2 \to \infty$，θ=0°。

θ为移相角，范围为180°~ 0° 。

给定R_2求移相角

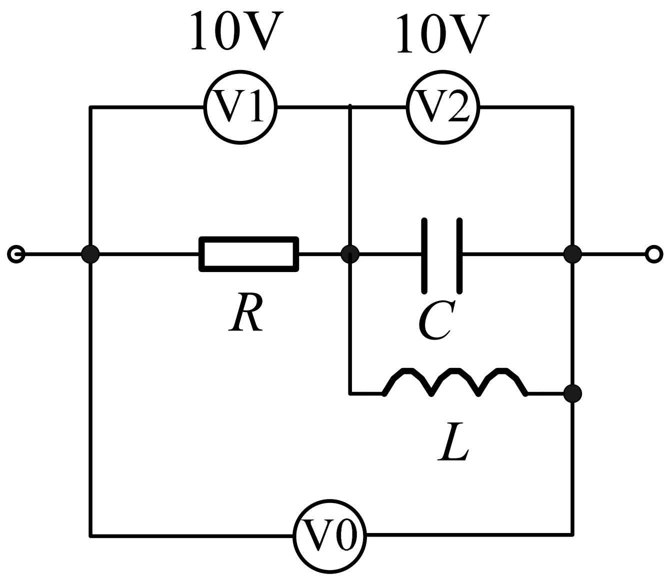
$$\tan(\frac{1}{2}\theta)=\frac{U_C}{U_R}$$

$$=\frac{I_C\dfrac{1}{\omega C}}{I_C R_2}=\frac{1}{R_2\omega C}$$



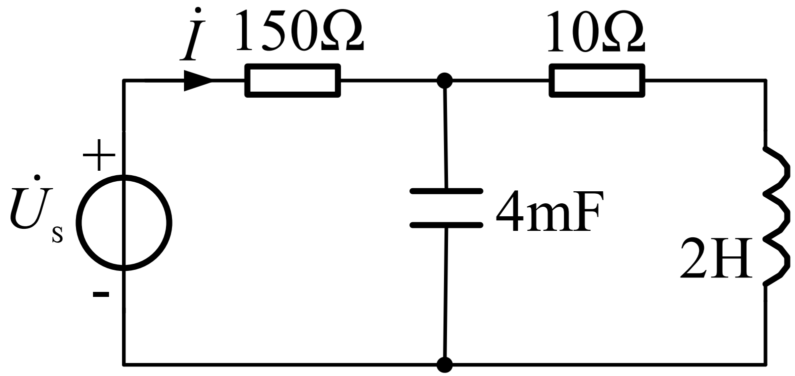
由此可求出给定电阻变化范围下的移相范围

【练习1 】. 计算电压表的读数V_0.



$$V_o = 10\sqrt{2}\text{V}$$

【练习2】.电压源和电流 I同相位，试确定电源的频率。



$$Y=\frac{1}{10+\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C$$

导纳的虚部B=0时，电压源和电流 I同相位

$$\frac{-\mathrm{j}\omega L}{10^2+(\omega L)^2}+\mathrm{j}\omega C=0$$

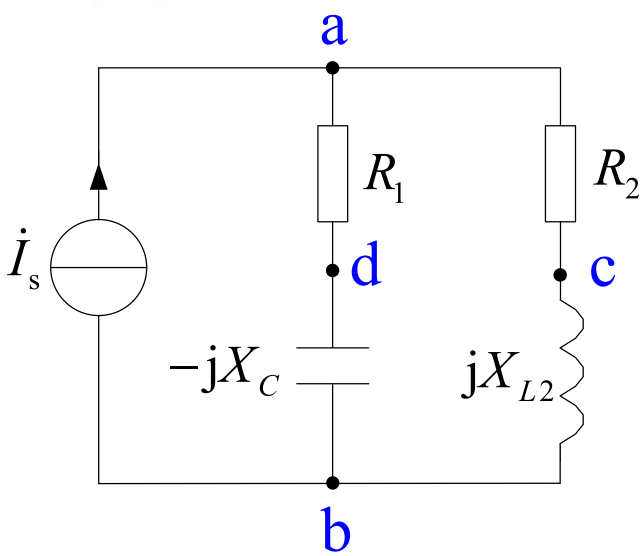
$$\frac{L}{10^2+(\omega L)^2}=C\rightarrow\omega=10rad/s$$

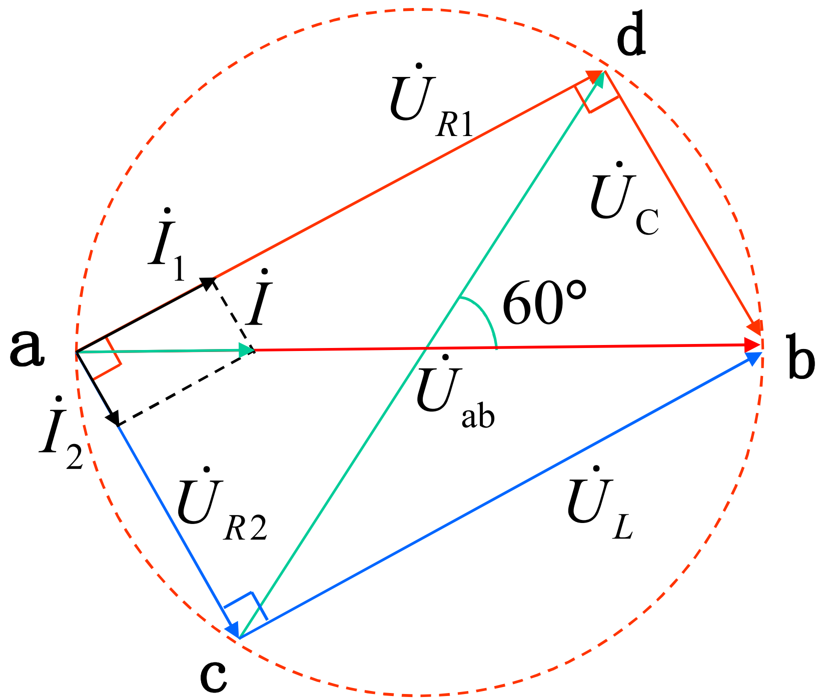
计划学时：6学时；课后学习18学时

作业：

10-13，10-34 / 阻抗与导纳
10-41/正弦稳态分析
10-51/ 相量图分析
10-53 /综合应用

10-51 题 10-51 图所示电路中，$R_1=R_2$，$I_s=10$ A，$U_{cb}=5\sqrt{3}$ V，且 $U_{ab}=U_{cd}$，$\dot{U}_{ab}$ 与 $\dot{U}_{cd}$ 的相位差为 60°。确定 R_1、R_2、X_L 及 X_C 的值。





解：设 U_{ab} 为参考相量

四边形对角互补，四点共圆，U_{ab} 为直径

$U_{ab}=U_{cd}$，U_{cd} 也为直径；I 与 U_{ab} 相位角相等

由 $U_{cb}=5\sqrt{3}\text{V}$ 可以得出：$U_{R1}=5\sqrt{3}\text{V}$　$U_C=5\text{V}$

$U_{R2}=5\text{V}$　$U_L=5\sqrt{3}\text{V}$

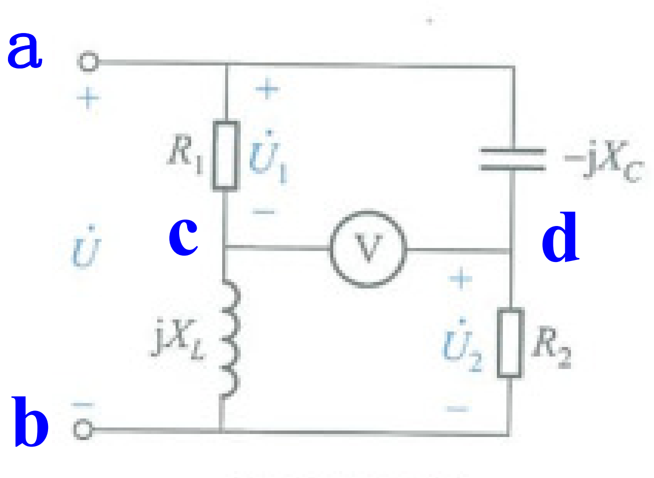
$I_s=10\text{A}$ 可以得出： $I_1=5\sqrt{3}\text{A}$　$I_2=5\text{A}$

$$R_1=R_2=\frac{U_{R1}}{I_1}=\frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=1\Omega$$

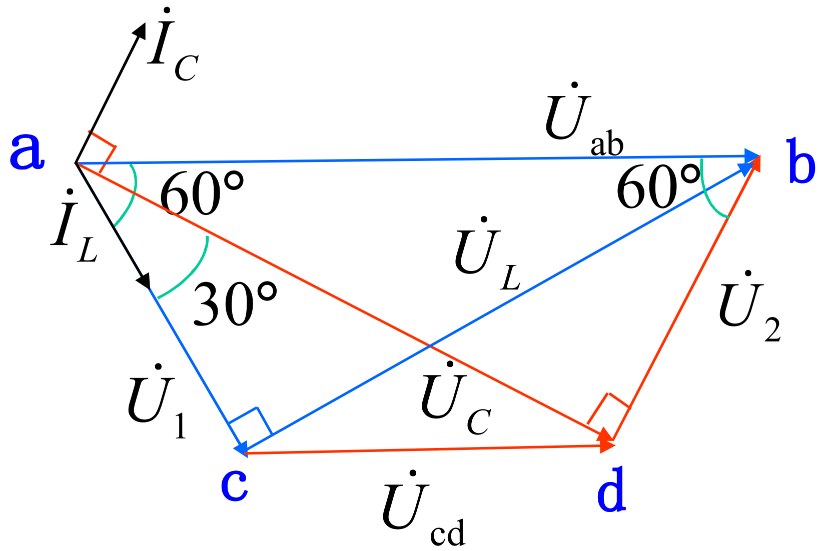
$$X_C=\frac{U_C}{I_1}=\frac{5}{5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Omega$$

$$X_L=\frac{U_L}{I_2}=\frac{5\sqrt{3}}{5}=\sqrt{3}\Omega$$

11-25　图示电路中，端口电压U的有效值为100V，U_1、U_2的有效值均为50V，求电压表的读数。



题 11-25 图



解：设端口电压U为参考相量　$\dot{U}=100\angle 0°\text{V}$

$U_1 = 50\text{V}$**可以得出：**　$U_L = 50\sqrt{3}\text{V}$

$$U_{cd}{}^2 = U_1{}^2 + U_L{}^2 - 2U_1 \times U_L \cos 30°$$
$$= 50^2 + (50\sqrt{3})^2 - 2\times 50\times 50\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$U_{cd} = 50\text{V}$$