Advanced Counting Techniques

高级计数技术

Generating Functions

生成函数　（母函数）

生成函数

- **递推关系和生成函数**是组合数学中非常重要的工具，常用于求解组合计数问题。特别是在分析算法复杂度和设计动态规划以及递归算法时，具有强大的功效。

- 表示序列的一种有效方法是生成函数，**它把序列的项作为一个形式幂级数中变量x幂的系数**。这样的生成函数可以用来求解许多类型的计数问题，诸如

  (1)在各种限制下选取或分配不同种类的物体的方式数；
  (2)用不同面额钱币构成某个数额的钱的组合搭配问题；
  (3)求解某些带限制条件的不定方程的问题；
  (4)整数分解问题；
  (5)用生成函数求解特殊的递推关系；
  (6)用生成函数证明数学恒等式

幂级数型生成函数的定义

Def: for a given sequence $\{a_n\}$， the generating function of the sequence $\{a_n\}$ is a power series (形式幂级数,幂级数型生成函数)

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

(Note： if $\{a_n\}$ is finite, then $G(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_n x^n$ is a finite power series.) 每一个序列都唯一对应于一个生成函数(反之亦然)

Examples:

组合数序列$\{C(m,n)\}$的生成函数为 $(1+x)^m$

给定正整数k, 序列$\{k^n\}$的生成函数为

$$G(x) = 1 + kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \ldots$$

$$= 1/(1-kx)$$ （一定条件下收敛于这个函数）

注：这里关注的是幂级数的形式，幂级数是否收敛不重要

2. 泰勒级数定义:

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数,则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 的泰勒级数.

当 $x_0=0$ 时,泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 又称为麦克劳林级数.

待解决的问题:

$$f(x) \overset{?}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

常用函数的幂级数展开式

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots+\frac{(-)^n}{n+1}x^{n+1}+\ldots,x\in(-1,1]$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots+\frac{(-)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\ldots,x\in(-1,1)$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+\ldots..x\in(-1,1)$$

$$\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\ldots,x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

$$\csc x=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+\ldots,x\in(0,\pi)$$

Properties of Generating Function

生成函数的性质

1. $b_n=\alpha a_n$, α为常数，则$B(x)=\alpha A(x)$
2. $c_n=a_n+b_n$, 则$C(x)=A(x)+B(x)$

3. $c_n=\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, 则$C(x)=A(x)\cdot B(x)$

4. $b_n=\begin{cases} 0 & n<l \\ a_{n-l} & n\geq l \end{cases}$, 则$B(x)=x^l A(x)$

5. $b_n=a_{n+l}$, 则 $B(x)=\dfrac{A(x)-\sum_{n=0}^{l-1} a_n x^n}{x^l}$

生成函数的性质(续)

6. $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$， 则$B(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$

7. $b_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$， 且$A(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_i$收敛， 则$B(x) = \dfrac{A(1) - xA(x)}{1-x}$

8. $b_n = \alpha^n a_n$, α为常数， 则$B(x)=A(\alpha x)$

9. $b_n = na_n$, 则$B(x)=xA'(x)$

10. $b_n = \dfrac{a_n}{n+1}$， $B(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$

性质证明举例

6. $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$， 则$B(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$

证 $b_0 = a_0$

$$b_1 x = a_0 x + a_1 x$$

$$\ldots$$

$$b_n x^n = a_0 x^n + a_1 x^n + \ldots + a_n x^n$$

$$\ldots$$

$$B(x) = a_0 \frac{1}{1-x} + a_1 x \frac{1}{1-x} + \ldots + a_n x^n \frac{1}{1-x} + \ldots$$

$$= \frac{A(x)}{1-x}$$

说明：对于上面这些性质的证明，课堂内不讲，自己课后动手证明、验证

由序列求生成函数

例1 求序列$\{a_n\}$的生成函数 $a_n = 7 \cdot 3^n$

解

$$G(x) = 7\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = 7\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \frac{7}{1-3x}$$

由生成函数求序列通项

例2 已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$G(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x}$$

求序列$\{a_n\}$

解

$$G(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1-2x} = \frac{2}{1-2x} + 3x$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + 3x = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}x^n + 3x$$

$$a_n = \begin{cases} 2^{n+1}, & n \neq 1 \\ 2^2+3=7, & n=1 \end{cases}$$

一些有用的生成函数

TABLE 1 Useful Generating Functions.

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n,k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n,2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk} = 1 + C(n,1)x^r + C(n,2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n,k/r)$ if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 if $k \le n$; 0 otherwise
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	1 if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$	$k+1$
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k) = C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-1)^k x^k = 1 - C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 - \cdots$	$(-1)^k C(n+k-1,k) = (-1)^k C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n+1,2)a^2x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k)a^k = C(n+k-1,n-1)a^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$1/k!$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$(-1)^{k+1}/k$

Note: The series for the last two generating functions can be found in most calculus books when power series are discussed.

The Extended Binomial Theorem
广义二项式定理

二项式定理： $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$

广义二项式系数： $\binom{u}{k}=\begin{cases}u(u-1)\cdots(u-k+1)/k! & k>0\\ 1 & k=0\end{cases}$

The extended binomial theorem 广义二项式定理：Let x be a real number with $|x|<1$ and let u be a real number. Then

$$(1+x)^u=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{u}{k}x^k$$

请比较两个定理的区别…

思考

- 为了求某个未知的a_n(或者说序列$\{a_n\}$的项)，如果可以用一些方法构造求出这个序列对应的生成函数，那么是否就可以求出该序列?

生成函数的应用

- 物体配置的计数问题
- 计数多重集的r组合数
- 不定方程的整数解的计数问题
- 整数拆分
- 求解递推方程
- 证明数学恒等式

幂级数型生成函数应用举例

- 使用幂级数型生成函数求解计数问题时，我们将幂级数视作**形式幂级数**，而不必去考虑幂级数的函数值和幂级数的收敛问题。

- **重要的是：**
  - 关注其形式
  - 关注如何构成满足某种需要的形式幂级数（即生成函数）
  - 关注每个x的幂的系数
  - 关注序列对应的系数的求解问题

生成函数应用举例—物体的配置问题

- 例题1： 设有质量分别为n_1克，n_2克,...,n_k克的k个砝码。现在用天平秤i克的物体，物体放在左边，砝码放右边，共有多少种不同称法？

- 例题2： 用质量分别为1克，2克，4克，8克，16克的5个砝码，在天平上能称几种质量的物体？每种质量的物体有几种不同称法？

- 例题3： 用2个质量为1克，3个质量为2克，2个质量为5克的砝码在天平上能称几种质量的物体？且每种质量的物体有几种不同称法？

- 以下试图构造寻找出这些计数(a_n)问题的合适的生成函数，通过展开生成函数，其中的**对应的系数就是问题的解**。

生成函数应用举例—物体的配置问题

- 例题1： 设有质量分别为n_1克，n_2克,…,n_k克的k个砝码。现在用天平秤i克的物体，物体放在左边，砝码放右边，共有多少种不同称法？

- 解：假设有a_i种方法来秤i克的物体, 构造k个因式的乘积形式的有限幂级数：

$$(1+x^{n_1})\ (1+x^{n_2})\ \ldots(1+x^{n_k})$$

将其展开得项x^i的幂来自于

$$X^{m_1}x^{m_2}\ldots x^{m_k}=x^i,\ \text{其中}\ m_1+m_2+\ldots m_k=i,\ m_j=n_j\ \text{或者}\ m_j=0.$$

形式幂级数乘积中，第一个括号提供m_1, 第二个括号提供m_2, …， 第k个括号提供m_k.

当$m_j=n_j$ 时表示第j个砝码用上了， $m_j=0$表示没有用上。

因此展开式中每个出现的项x^i的代表着一种构成方法，x^i**的系数恰好代表着所有构成i克的砝码的方法数.**

问题转化为解带限定条件的不定方程

- 当然这个问题的解也相当于解不定方程$m_1+m_2+\ldots m_k= i$,其中每一m_j限制为：$m_j=n_j$ 或者$m_j=0$。

- 考察a_i生成函数 $f(x) =(1+x^{n_1})\ (1+x^{n_2})\ \ldots(1+x^{n_k})$展开式中项$x^i$的系数的形成

生成函数应用举例—物体的配置问题

- 例题2： 现有质量分别为1克，2克，4克，8克，16克的5个砝码，在天平上能称几种质量的物体？每种质量的物体有几种不同称法？
- 解：考察表达式$(1+x^{n_1})\ (1+x^{n_2})\ \ldots(1+x^{n_k})$
- 用实际的数字序列1,2,4,8,16代替$n_1,n_2,\ldots n_k$, 得到

$$f(x)=(1+x^1)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$$

$$f(x)=(1-x)f(x)/(1-x)=(1-x^{32})/(1-x)=1+x^1+x^2+\ldots+x^{31}$$

这个式子表明，只要不超过31克的物体，都可以用这5砝码称出，而且每一个恰好只有一种称法。

(重要的是体会为什么？)

- 例题3： 用2个质量为1克，3个质量为2克，2个质量为5克的砝码在天平上能称几种质量的物体？且每种质量的物体有几种不同称法？

- 首先，相同重量的砝码看成没有区别
  - 2个质量为1克的砝码能够构成的是，0克，1克，2克。在砝码没有标记的情况下，能构成上面0克，1克，2克的方法数分别只能是1，1，1, 所以其生成函数为$1+x^1+x^2$
  - 类似地：3个质量为2克的生成函数为$1+x^2+x^4+x^6$
  - 2个质量为5克的生成函数为$1+x^5+x^{10}$
  - 于是这些个砝码对应的能称出的物体总方法数的生成函数为$(1+x^1+x^2)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5+x^{10})$

将此表达式展开，就能知道相应的方法数。

思考问题：如果每一个砝码都有标记，即便质量相同的砝码，当成不同的砝码对待，会有何区别？

生成函数应用举例—物体的配置问题

例4 1克砝码2个，2克砝码1个，4克砝码2个，问能称出哪些重量，方案有多少？

解 (建模) $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = r$

$0 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 2$

(这是什么数学模型？)

生成函数为：$G(x) = (1+x+x^2)(1+x^2)(1+x^4+x^8)$

$= 1+x+2x^2+x^3+2x^4+x^5+2x^6+x^7+2x^8+x^9+2x^{10}+x^{11}+x^{12}$

重量	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方案数	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1

生成函数用于求解不定方程

由非负整数形成的不定方程：　　$e_1+e_2+e_3+\ldots+e_n=c$

C是一个正整数，常数；　each e_i is non-negative integer

可以用生成函数来求解这种类型的方程

Example 5:　求不定方程 $e_1+e_2+e_3=17$ 的非负整数解的数目，其中 e_1, e_2，　e_3 为非负整数，而且满足 $2 \le e_1 \le 5$, $3 \le e_2 \le 6$, 和 $4 \le e_3 \le 7$.

构造模型：$x^{e1+e2+e3}=x^{17}$，想象其中的17怎么形成？

解：构造生成函数$(x^2+x^3+x^4+x^5)(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^4+x^5+x^6+x^7)$，那么这个生成函数的展开式中项$x^{17}$ 的系数就是该不定方程的解的数目。

为什么？

Continue…

观察$(x^2+x^3+x^4+x^5)(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^4+x^5+x^6+x^7)$

在该生成函数中，项x^{17}是由三个括号中的第1个括号里的某项x^{e_1}, 跟第2个括号中的一项x^{e_2}，以及第3个括号中的某项x^{e_3}乘积得到的，并且满足$e_1+e_2+e_3=17$。
于是枚举所有这样可能的组合生成项x^{17}，就是x^{17}的系数，也就是所有可能的组合的方法数，即方程的解的数目。在这个例题中答案为3.

思考问题：如果e_1 e_2 e_3 没有上面那些限制，如何？又如果e_1 e_2 e_3有些有限制有些没有限制，如何？

生成函数用于求不定方程的解的数目

Example 6：8块一样的饼干，分给3个孩子，并且每个孩子分配的饼干数为2到4块。 求有多少中可能的分配方案。

Solution：假设给3个孩子分的饼干数分别是x_1,x_2,x_3, 那么依题意有： $x_1+x_2+x_3=8$， 且$2<= x_1,x_2,x_3<=4$

每个孩子分配的饼干数为2到4块，因此每个孩子分配情况对应于

$$(x^2+x^3+x^4)$$

- 构造形如形如：$G(x)= (x^2+x^3+x^4)\,(x^2+x^3+x^4)\,(x^2+x^3+x^4)$
- 将这个生成函数展开后，x^8的系数6就是问题的答案。
- 从这个问题的解，可以看到，无论是8块饼干还是9块，10块，11块等，都可以一样地算出来。
- 推广应用：分饼干、分苹果、分银子、各种物体物资的分配、搭配组合等等…;
- 也包括把一些对象物体分配到盒子里去，并且带有一定的限制条件等等

The Number of Solutions of indefinite equation

不定方程解的个数问题

Basic indefinite equation （不带限定条件）

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$， x_i are non-negative integers

构造： $G(y) = (1 + y + \ldots)^k = \dfrac{1}{(1-y)^k}$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(k)(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} y^r$$

$$N = \binom{k+r-1}{r} = C(k+r-1, r)$$

问题：上面这个结论能让你们想起什么？

更一般化的不定方程解的个数(续)

带限制条件的不定方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r, \quad l_i \le x_i \le n_i$$

生成函数

$$G(y) = (y^{l_1} + y^{l_1+1} + \ldots + y^{n_1})(y^{l_2} + y^{l_2+1} + \ldots + y^{n_2})$$

$$\ldots (y^{l_n} + y^{l_n+1} + \ldots + y^{n_k})$$

带系数的不定方程

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k = r, \quad x_i \in N$$

生成函数

$$G(y) = (1 + y^{p_1} + y^{2p_1} + \ldots)(1 + y^{p_2} + y^{2p_2} + \ldots)$$

$$\ldots (1 + y^{p_k} + y^{2p_k} + \ldots)$$

思考问题：这个带系数的不定方程，是否跟前面的不同砝码称物体有相似之处？能否解决钱币组合的问题（也即不同面值的钞票组合问题）？

使用生成函数找出容许重复时n个元素的r组合数

n个元素中任意取r个容许重复的元素的组合数就相当于以下解不定方程的解的数目：

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r，\quad x_1, x_2, \ldots, x_n \text{为非负整数}$$

于是可以构造相应的n个相同的生成函数

$G_i(x)=(1+ x^1 + x^2 + \ldots + x^r +\ldots)=1/ (1- x)$， $i=1,2,\ldots n$

由这n个生成函数乘积构成一个生成函数：

$G(x) = (1+ x^1 + x^2 + \ldots + x^r+\ldots)^n = 1/ (1- x)^n$

该乘积中的项x^r 的系数就是所要的答案。利用广义二项式定理可以得到： $G(x) = \sum_{r=0}^{\infty} C(n+r-1,r)x^r$

于是解的数目为:C(n+r-1, r). （与上一章方法结果一致）

使用生成函数找出当容许重复时n个元素的r组合数

- **例题**：使用生成函数求出从n类不同物体中选择r个物体，并且每类物体至少选一个的方式数a_r (r≥n)。
- **解**：由于每类物体至少一个，且容许重复不限，这n个类中的每类物体都对应于一个因式$(x^1 + x^2 + \ldots + x^r + \ldots)$,
- a_r 是从n类不同物体中选择r个物体且每类至少选1个形成的的方式数，因此有生成函数

$$\mathbf{G(x) = (x^1 + x^2 + \ldots + x^r + \ldots)^n}$$, 由广义二项式定理有

$$G(x) = x^n/(1-x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} C(r-1, r-n)x^r$$

所以选择r个物体的方法数为：$C(r-1, r-n)$

思考：还有别的解法不？

多重集的*r*-组合数

$S = \{ n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k \}$ 的 r 组合数就是不定方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r \text{ ,}$$

(其中$x_i \le n_i$ *表示r组合中元素*a_i *的个数，* $i = 1,2,\ldots,k$)

的非负整数解的个数。

先分析每个x_i的取值范围，

思考这个函数$(1 + y + \ldots + y^{n_1})$能说明些什么？

生成函数

$$G(y) = (1 + y + \ldots + y^{n_1})(1 + y + \ldots + y^{n_2})\ldots(1 + y + \ldots + y^{n_k})$$

的展开式中 y^r 的系数就是问题的解

多重集的r-组合数(续)

例　$S=\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的10 -组合数

解：生成函数$G(y)$

$= (1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$

$= (1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$

$= (1 + \ldots +3y^{10}+2y^{10}+y^{10} + \ldots)$

$N = 6$

组合方案

$\{a, a, a, b, b, b, b, c, c, c\}$, $\{a, a, a, b, b, b, c, c, c, c\}$,

$\{a, a, a, b, b, c, c, c, c, c\}$, $\{a, a, b, b, b, b, c, c, c, c\}$,

$\{a, a, b, b, b, c, c, c, c, c\}$, $\{a, b, b, b, b, c, c, c, c, c\}$

幂级数型生成函数应用总结

- 前面问题的解决告诉我们：
- 使用幂级数型生成函数求解计数问题时，我们将幂级数视作**形式幂级数**，而不必去考虑幂级数的函数值和幂级数的收敛问题。

- **重要的是：**

关注其形式

关注如何构成满足某种需要的形式幂级数（即生成函数）

关注每个x的幂的系数

关注序列对应的系数的求解问题

生成函数展开时存在的问题

- 当一个计数问题对应的生成函数建立后，如何求得相应的系数？对于复杂的生成函数，如果次数比较高的时候，是一个难题。
- “暴力方式”展开求解，理论上是可以的。实际操作就是问题。
- 充分利用高等数学已经有的展开式；
- 借助“计算机代数系统”工具求解，这样的系统用于公式推导、代数符号计算（非精确数值计算）。例如MatLab工具包里的代数运算， Maple 系统（加拿大Waterloo大学研究小组开发的）等等，成功实现了利用计算机进行一些代数符号的计算和操作。
- 这样的系统工具，可以进行多项式展开等符号运算，可以成功用于生成函数的展开运算。
- 同学们自己可以上网查询相关知识...
- **在此鼓励同学们自己开发一个的计算机代数程序，帮助解决求生成函数x^k项系数的问题**