解答内容不得超过装订线

写在前面的话：种瓜得瓜，种豆得豆

平时的问题：

1. 课堂应该是 100 多人，但平时上课，平均下来有总有大约 30 多人缺课；
2. 上载到群里的 PPT，下载量经常只有几十。而最后的样本题、考试要求、相关答案，下载量高达 400 多。可以看出，很多人只关心考试，只想刷刷题。但这是大学学习，不能只像中学那样，靠刷题得高分。不理解，是很难得高分的，甚至及格都难。并非以前的考题做出来了，就意味着本次考试能通过，更不谈高分了。
3. 平时课堂里、群里很少有人问问题，答疑也没几个人有问题。
4. PPT 里很多要大家思考的题目，真正去思考的同学估计不多。

总体考试结果不太好，既在意料之外，也在意料之中。意料之外的是，题目本身不算难；意料之中的是，一些同学努力不足，平时付出不够，也就只能是这样的结果。

部分同学分数很低，需要好好反思。

(1)你或许不喜欢这个专业，如果是这样的话，趁早考虑转专业，不要把自己耽误了；

(2)你或许不喜欢这门课，如果是这样的话，得想想，全世界的这个专

业的学生都需要学这门课的，说明了它对于这个专业的重要性；

(3) 或许你不喜欢我的课堂。如果是这样，可以理解。但你可以跟我交流，我是 open 的，非常愿意听取大家的意见和建议，改进自己的教学。 你也可以选择去其它老师课堂听课，本学期的课堂，这门课是平行开的，没有冲突；你也可以选择自己学。 但就是不能选择放弃，不能听之任之！

(4) 都是成年人了，每个人都要学会、而且也必须为自己所做的一切负责。

解答内容不得超过装订线

“ 离散数学（一）”考试试卷 (A 卷)

分　数	
评卷人	

一．填空题(每小题 3 分，共 18 分)

(1) 命题公式$(p\to q)\to(p\vee q)$是___可满足__公式。(填永真、永假或可满足)

(2) 谓词表达式 $\exists x\forall y(\sin(x+y)=\cos(x-y))$ (个体域为实数集)的真值是___真___.

(3) R, S 是集合 A 上的对称关系，R•S 也一定是对称关系吗？___否_. (填是或否)

(4) A 是整数集到{0, 1}的递增函数构成的集合，则 A___是___可数集。(填是或不是)

解答说明：A = {f | f：Z→{0,1}的递增函数}。 分析 f 的两个特征：函数值只能是 0 或者 1， 递增， 所有 一旦某个整数 n 的函数值 f(n)=1，那么对任意的 x>n 都有 f(x)=1.

用 f0 表示函数对任意的整数 n，都有 f0(n)=0;

用 fn 表示函数 fn(x)=1 当 x>=n, fn(x) = 0 当 x<n 时； 于是 A={fn | n 为整数}

所以 从 A 到整数集合 Z 可以建立起一个双射 h 使得 h（n） = fn 。 所以 A 与 Z 基数相同，当然是可数集合。

(5) 一个平面图有顶点数是 15，边数是 20，面数是 10，则它的连通分支数是___4__.

解答说明：平面图可能有多个分支，也可能是连通的只有一个分支。

当图是不连通的时候，不能简单第使用欧拉公式。只能对每一个分支使用欧拉公式。 所以的分支都共享同一个无限面； 计算是需要把这个因素考虑进去。否则就是错误的。

(6) 满三元根树有 16 个结点，则它有__5__个割点。

解答说明：作为满三元根树，每一个内结点即为割点，也只有内结点为割点。 所以这里就是计算有多少个内结点即可。

分　数	
评卷人	

二．逻辑解答题 （共 15 分）

(7) 假如一个命题公式含有 3 个命题变量 p, q, r. 而且如下的几组真值赋值{001，111，100}下，公式为假；其它的真值赋值后公式真值不确定。 则该公式的主合取范式应该包含哪些极大项？有多少种可能的主合取范式？这些主合取范式之间有什么共同点？(5 分)

解答：{001，111，100}里面的 3 个二进制数对应于 3 个 10 进制数 1， 7， 5.

既然这 3 组真值赋值使得公式为假，那么逻辑公式的主合取范式必然包含对应的三个极大项：$M1=p\vee q\vee \neg r$,$M5=\neg p\vee q\vee r$, $M7=\neg p\vee \neg q\vee \neg r$;

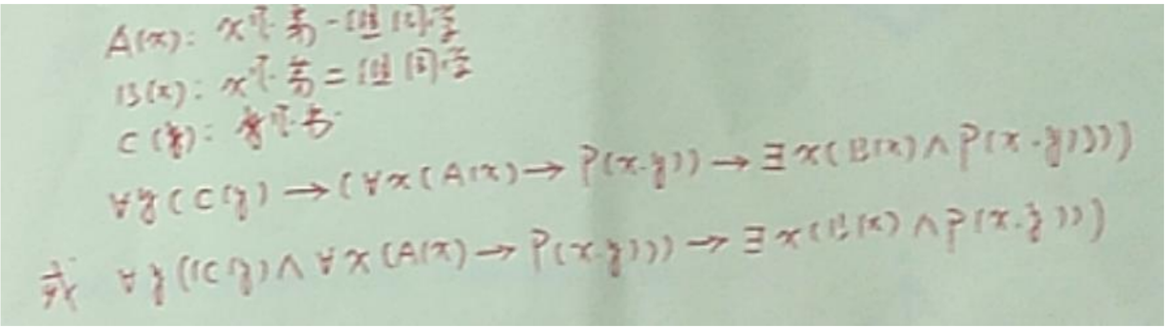
3 个命题变量对应的 8 个不同的极大项。所有，满足题设要求的命题逻辑公式的主合取范式已经必然包含 3 个极大项，可变的部分就是从剩余的 5 个极大项中任取 0 到 5 个跟已经包含的 3 个极大项，形成所有可能的极大项。 共有 2^5 个不同的主合取范式。

所有这些主合取范式都有一个共同点，就是都包含三个极大项 M_1,M_5,M_7.

(8) 用谓词表达式将下列命题符号化： (5 分)

(请使用全总个体域。主谓词设定为 P(x, y): x 读过 y， 其他谓词自行定义)

第一组同学都读过的书第二组必定有人也读过



点评：这道题得分率较低。 问题还是大家对于谓词逻辑的理解，尤其是量词混一起是理解不清楚。

要想知道自己写出来的表达式是否正确，自己解释一遍自己的表达式，是否跟题目的意思一致。 如果不一致，说明要么你的解释错误，连自己写的表达式都解释不了的话，就是对基本的谓词逻辑根本没搞清楚；要么就是表达式写错了，自己得想想怎么表达才能跟原来意思一致。

题目已经给出了主谓词， 分析问题本身，有 3 个个体是必须的。

书、第 1 组同学、第 2 组同学。 在用全总个体域时，也就需要 3 个相应的特征谓词来限制说明个体是 “书”、是“第一组同学”、是“第 2 组同学”等。 再将这些连在一起，来表达逻辑陈述。

(9) 判断下式是否成立，并说明理由。(5 分)

$\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x) \Rightarrow \exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$

解答：上面的蕴含关系不成立。举例说明如下：

假设个体域 U={1,2,3,4,5}， P(x):表示 x 是偶数；Q(x)表示 x>5.

那么$\forall x\, P(x)$为假，$\forall x\, Q(x)$ 无论为真还是为假$\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)$都为真；

$\exists x\, P(x)$也为真；$\exists x\, Q(x)$为假，于是$\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$为假；

这说明在这种谓词解释和个体域的的说明下，上面的蕴含是不成立的。

解法 2 的思路：可以指定个体域 U={1,2}就两个元素，然后上面的蕴含关系谓词逻辑表达式在有限个体域下，可以改写成：

$(P(1) \wedge P(2)) \rightarrow (Q(1) \wedge Q(2)) \Rightarrow (P(1) \vee P(2)) \rightarrow (Q(1) \vee Q(2))$

其中的 P(1),P(2), Q(1), Q(2)相当于 4 个命题逻辑的命题变量；这样就问题就变成了命题逻辑公式之间蕴含关系是否成立，也就容易理解一些。

点评： 这道题相对难点得分率很低。 需要大家充分理解表达式中的每个部分，也需要理解公式的蕴含究竟是什么意思，然后作出判断。并且要说明理由。

分 数	

解答内容不得超过装订线

评卷人	

三. 集合函数关系求解题（共 18 分）

(10) 函数 f: N → N^2，定义如下：（6 分）

$$f(x)=\begin{cases}(x-1,x+2), & x\neq 0\\ (x,x+2), & x=0\end{cases}$$

(i) f 是否是单射，是否是满射，并说明理由？

(ii) 计算 f(N)；

(iii) S = {(4, 3), (5, 8)}，计算原像集 $f^{-1}(S)$.

解答：这个函数 f 是从 N 到 N×N (N 为包含 0 的所有自然数)的一个函数；

(i) 这个函数是单射。因为对于任意的x,y∈N,x≠y，（x−1, x+2）≠（y−1, y+2）; 但是，f肯定非满射，因为（0, 0）∈N×N（伴域），但该元素在f下没有原像。

(ii) 计算 f(N) （也即函数的值域）={（x-1,x+2）|x ∈N，且 x>0}∪{（0,2）}

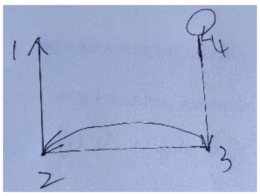
(iii) S = {(4, 3), (5, 8)}，原像集 $f^{-1}(S)$= {6}.

说明：这道题是基础题。

(11) R 集合 A = {1, 2, 3, 4} 上的关系，R 的关系矩阵是：$M=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

请计算 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包。(写成集合形式) （6 分）

解答：R={（2,1）,(2,3),(3,2),(4,3),(4,4)}，关系图如下：



R 的自反闭包 =R∪{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)}

= {(2,1),(2,3),(3,2),(4,3),(4,4), (3,3),(2,2),(1,1)}

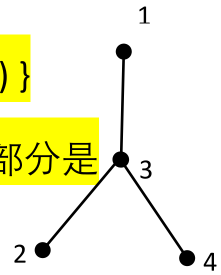
R 的对称闭包= R∪R^{-1}= {(2,1),(2,3),(3,2),(4,3),(4,4), (1,2), (3,4)}

从关系图的演变，容易求出

R 的传递闭包 = {(2,1),(2,3),(3,2),(4,3),(4,4), (4,2), (4,1), (2,2), (3,3) (3,1)}

说明：这道题是基础题。 唯一的麻烦点的是传递闭包。 但一旦从关系矩阵把关系图还原出来，通过简单的关系图，来求关系传递闭包也就不难了。

(12) 集合{1,2,3,4}上的偏序关系 R 的 HASSE 图如下。请写出偏序集 R；指出哪些元素是极大元，哪些元素是极小元；R 是否是全序？为什么？（6 分）



解答：R={(1,1),(2,2), (3,3),(4,4),   (3,1),(2,3),(4,3),   (2,1), (4,1) }

其中，第一个部分是偏序关系中满足的自反性所需；第 2 个部分是 HASSE 图中直接的边反应出来的关系；第 3 个部分是图中隐含的可传递性得到的关系序对；

如图，容易看出，1 为极大元，也是最大元；2,4 为极小元；

R 不是全序，因为显然元素 2 与元素 4 不可比较；

说明：这道题是基础题。 PPT 中都有要大家从偏序的 HASSE 图还原关系的思考题。 可能绝大多数同学都没有去思考。

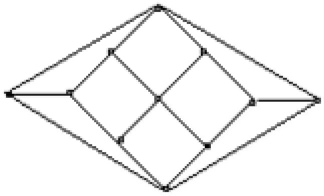
还原偏序关系是，有两点是需要注意的：一是偏序是自反的，二是可传递的。所有图形中没有直接表达的 自反和传递得到的序对，都必须有。

分　数	
评卷人	

四. 图论解答题 （共 19 分）

(13) 下图是否是二分图、欧拉图、哈密顿图，并说明理由。(9 分)

解答：(注意 不能只有结论，必须要说明理由)

该图是二分图，因为所有的回路都是偶数长。尽管不能穷尽所有的回路，但是从图中显示出来简单回路都是偶数长。每一条回路都会是一些或者一条简单回路，再拼接上一些原路去原路回的回路（这种类型的回路永远是偶数长)；

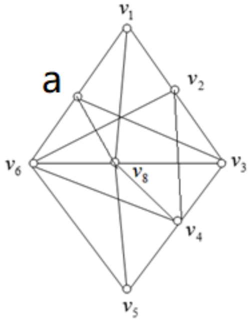
非欧拉图：　因为有度数为奇数的结点存在；

非哈密尔顿图：一种做法是从图中，删除其中的 5 个结点，　使得剩下的子图，含有 6 个连通分支。 再根据哈密尔顿的必要条件，知道原图不是哈密尔顿图。

另外一种做法是：既然这个图是哈密尔顿图，那么 11 个结点的结点集合可以做一个二分划，分成上面 r 个结点，下面 s 个结点，r,s 一个为偶数，一个为奇数。 哈密尔顿回路是包含所有 11 个结点的一条回路，而且每个点只到访一次。 这条回路起始于上面的某个结点，往返与上下，最终回到上面的起始点。 由于 r,s 一个为偶数，一个为奇数，导致这样的回路不可能存在。

说明：这道题哈密尔顿图判断稍微难点。

(14) 判断下图是否为平面图，并说明理由。（5 分）



解答：该图为非平面图。

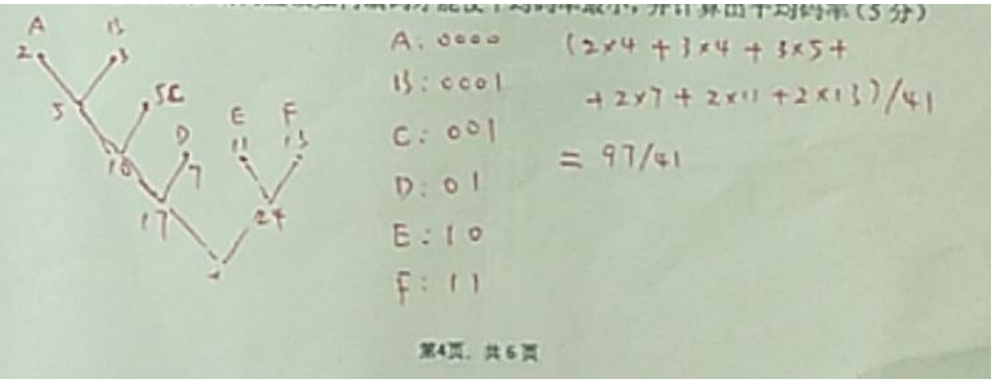
原图中有一个结点没有标记，为方便起见，记该点为 a 点。

从图中删除边 av_8 和边 v_2v_4，得到一个子图。该子图的上半部分就是 $k_{3,3}$.

也就是说原图有一个子图是 $k_{3,3}$. 所有原图是非平面图。

点评：这题的难点在于要看出上面部分包含 $k_{3,3}$. 然后才知道怎么去处理。

(15) A, B, C, D, E, F 六个字符出现的相对频率是 2, 3, 5, 7, 11, 13，现在要对它们进行二进制编码。请问应该如何编码才能使平均码率最小，并计算出平均码率（5 分）



说明：这道题就是构造一棵哈夫曼树，也算是基础题。

分 数	
评卷人	

五．证明(每题 10 分，共 30 分)

(16) 形式证明：$\neg R \to (P \to S)$， $Q \to \neg S$, $P \Rightarrow Q \to R$

证明:

(1) $\neg R \to (P \to S)$ 前提引入

(2) $R \vee (\neg P \vee S)$ (1)，等值替换

(3) $\neg P \vee (R \vee S)$ (2)，析取交换律，结合律

解答内容不得超过装订线

(4) P　　　　　　　前提引入

(5) $R \vee S$　　　　　　(4,), (3)

(6) $\neg S \rightarrow R$　　　　　(5), 等值替换

(7) $Q \rightarrow \neg S$　　　　　前提引入

(8) $Q \rightarrow R$　　　　　(7), (6).

证明法 2:　（增设一个附加条件 Q，推出 R）…

点评:

这道题在 3 道证明题中，可以说是最简单的，基本属于送分题。无论是考试要求，还是课堂上都说了，肯定要考。 虽然说得分率相对比较高，但还是有不少人丢掉了，很遗憾，也需要反思自己。

(17) $N^+ = N - \{0\}$, T 是 N^+上的关系，

$$m\,T\,n \text{ 当且仅当：存在 } a, b \in N^+ \text{使，} a^2 m = b^2 n,$$

（i）证明 T 是等价关系；

（ii）写出 12 所在的等价类。

解答:

（i）　自反性证明：$\forall x \in N^+$, 显然有 $1^2x = 1^2x$, 所以 有 xTx. 自反性成立；

对称性证明：$\forall m, n \in N^+$, 且 mTn, 由 T 的定义知，存在 $a, b \in N^+$使，

$$a^2 m = b^2 n,$$

那么显然 $b^2 n = a^2 m$, $b, a \in N^+$ 所以有 nTm, 对称性成立；

可传递性证明：$\forall m, n, k \in N^+$, mTn 且 nTk. 那么根据 T 的定义，只存在

$a,b,c,d \in N^+$ 使得 $a^2 m = b^2 n$, 且 $c^2 n = d^2 k$.

于是有：$c^2a^2 m = c^2b^2 n$, 且 $b^2c^2 n = b^2d^2 k$.

所以有：　$c^2a^2m = b^2d^2k$，　也即：$(ca)^2m=(bd)^2k$.
显然，　ca, bd ∈ N+　所以由 T 的定义知, mTk. 可传递性成立；
综合上面三个结论，得到 T 为 N^+上的一个等价关系.

（ii）　12 所在的等价类:

$12 = 2^2 3 = 1^2 12$, 所以 12T3, 也即 12 与 3 等价；那么 12 所在的等价类等于 3 所在的等价类。由 T 的定义可以得到：$[12]_T = [3]_T = \{3a^2 \mid a \in N^+\}$.

点评：第 2 问得分率较低，原因是很多人对等价类没有理解。 不理解就没有办法，无论刷多少题都没用。
第 1 问的证明是最基础的，不会做只能说明平时努力严重不足，或者对等价关系完全不理解，也没有去努力搞清楚。

解答内容不得超过装订线

(18) 简单图 G 的顶点数 $n \geq 3$，边数是 m，证明：

(i) 若 $m \geq n$，G 必含有简单回路；

(ii) 若 $m < n$，G 必有连通分支是树。

证明：

(i)　假设 G 没有简单回路，那么 G 的每一个连通分支也当然没有简单回路。所以图 G 的每一个连通分支都是没有简单回路的连通图。于是 G 为树(G 连通时)或者是森林（G 不连通时）；

再假设 G 有 t 个连通分支（$1 \leqslant t$），

由于每一个连通分支的结点数都等于其边数减 1，
所有 G 的总结点数 n = 总边数 m-t, t 为正整数，与题设 m≥n 矛盾。
于是可以断定 G 必然含有简单回路。

(ii)　$m < n$，假设 G 的每一个连通分支都不是树；
每一个连通分支都不是树，但又是连通的，所以其必然又简单回路；
任一个连通分支本身都又其自身的生成树，生成树的结点树等于分支的结点数减一，　所以有简单回路的连通分支的结点数≤其边数；

假如所有的分支都有简单回路，那么所有的分支的结点数之和（G 的结点

数 n）也必然≤所有的分支的边数之和（G 的边数 m).

与题设矛盾。

所有至少有一个连通分支为树。

点评：这道题两小题，本身就有提示作用。

图论中，简单回路、树、结点树与边数的关系， 有了这些因素，很自然地联系到树的定义和相关定理，以及树的特征。 就差一个“连通性”了。 这道题的解答本身用的理论是最基础的，方法也没有任何奇特之处。

然而实际上这道题得分率确很低。没有得到这道题分数的同学，可以好好反思一下。

这道题的证明中，出现了很多问题，几种主要的错误如下：

(1) 对于第 1 问，假设没有简单回路，就下结论说是树，根本不考虑连通性。 由于是树，n=m+1 立刻推出矛盾；
第 2 问，明明题目里面都说到了连通分支，已经可以说提示了可能不连通。一些同学还是按照连通图的来解决。 假设 m=n-1， 就下结论说是树。 否则就怎么怎么地。

(2) “说是就是”的逻辑：对于第一问，有同学直接说没有简单回路，那么边数就会小于结点数，这是矛盾的，所以就成立了。 更有甚者，假设结论成立，说没有推出矛盾，所有结论成立。
而对于第 2 问，有同学就说，假设都有简单回路，那么边数大于等于结点数，矛盾。 却不给出任何理由说明为什么边数大于等于结点数。 而这个理由的说明恰恰是这一问证明的关键理由，是一个不能省略的理由！

(3) “逻辑混乱”：不少同学在证明第 2 问时，说“由(1)的结论得”。 这是逻辑混乱。
第 1 问的 条件是 m>=n, 结论是有简单回路。 这些同学刚好用反了，说有简单回路，则推出 m>=n。

(4) 不少同学只用”回路” 代替词“简单回路”，这是基本错误。 只要有边，就有回路。
所以，无论证多少，结论都是错误的。

(5) 很多同学用平面图的欧拉公式。 欧拉公式前提是平面图+连通性；
否则是不能用的。 本身这个问题中的图，可能不是平面图，也就不谈面数了；也不一定是连通图，欧拉公式不能用。
当然有些同学考虑到了不连通的情况，但即使不连通的变通公司，还是需要平面图作为前提。
有同学会说，非平面图一定有简单回路，这个说法是对的，但需要提供理由说明。

不能只是凭想象。

(6) 不少同学采用数学归纳法。 由于这里变的不只是结点数，还有边数，两个量，这两个量是独立的。 无论是对结点数用归纳法，还是对边数用归纳法，都不正确。因为另一个量的变化，导致，假设的前提中的条件可能不再满足，也就不能从假设推出下一个的成立。 所有凡是用数学归纳法证明的，基本上是错误的。

(7) 也有不少同学，试图去分析，如何构成回路 v1v2v…vn 什么的，基本是错误的。尤其是有些同学是有一个结点的度是 n-1， 然后怎么怎么就有了回路。 图本身不一定连通，而且边的情况很复杂，有各种各样的情况，很难穷尽所有可能的结构情况去一一说明清楚。