第2章　　电阻电路等效变换

等效变换的概念 Concept of Equivalence

串联与并联 Series and Parallel Connections

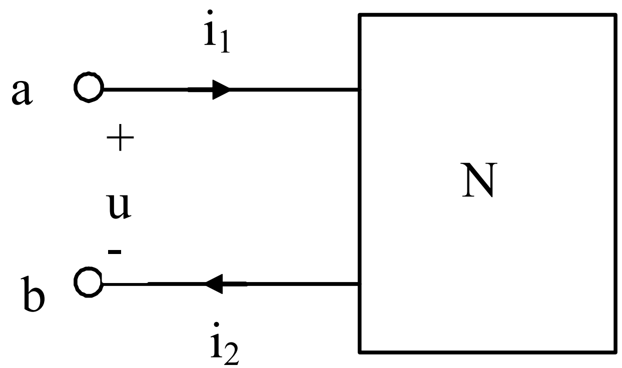
电桥 Bridge Circuits

星－三角互换 Wye-Delta Transformation

电源变换 Source transformation

2.1　概述

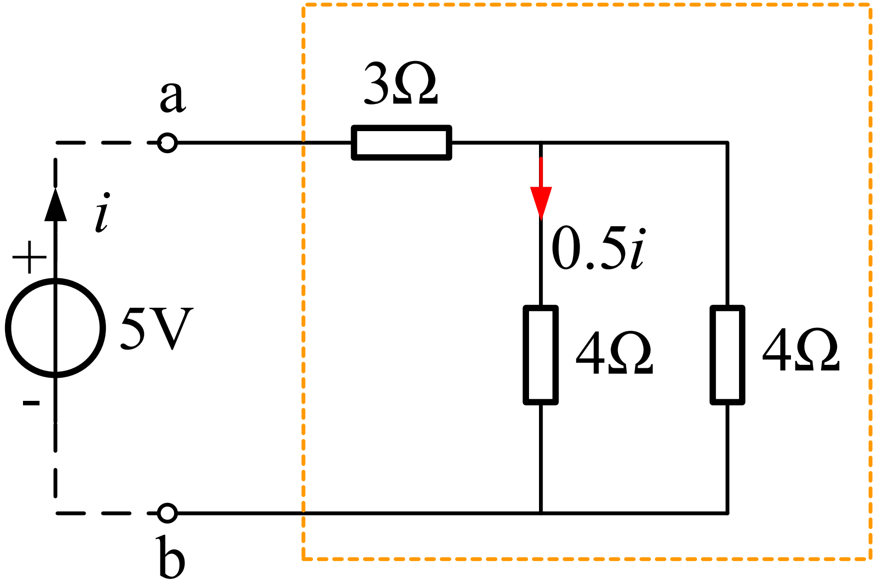
一、二端电路及端口的概念

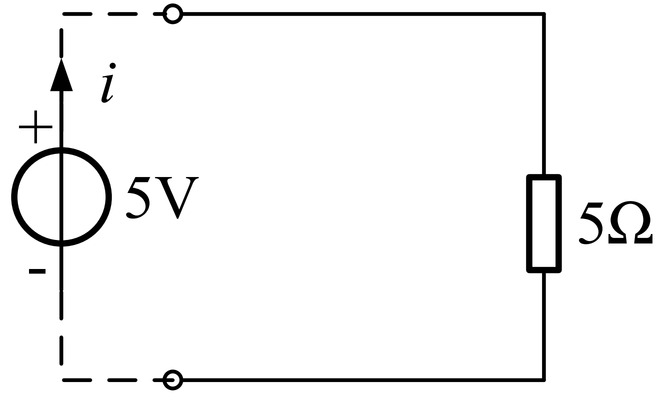


- 只有两个端子（a、b）与外部电路相连；
- 进出两个端钮的电流相同，即$i_1=i_2=i$；
- 二端电路可由任意的元件组合而成；
- 两个端钮上的电压、电流分别称为端口电压和端口电流，它们之间的关系式$u=f(i)$、$i=f(u)$称为端口伏安关系。

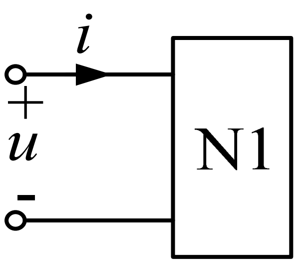
二. 等效的概念 Concept of Equivalence

两个二端电路N_1、N_2，无论两者内部的结构是怎样的不同，只要它们的端口伏安关系相同，则称N_1、N_2是等效的。





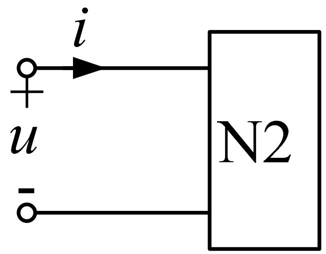
$i = 1\text{A}$



$f(u,i) = 0$

Equivalent networks

u-i 关系相同



$f(u,i) = 0$

三、等效变换的说明

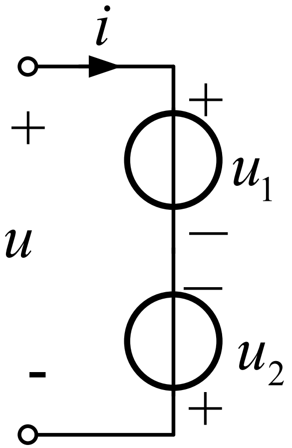
➢一个电路被它的等效电路替代后，未被等效的电路中的所有电压、电流不变。

➢两个内部结构不同的电路“等效” 等效的核心在于：两个电路对“任意”外电路的效果一致，而不是对某一特定的外电路等。

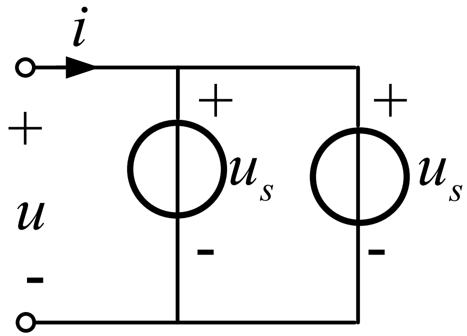
➢等效具有传递性。

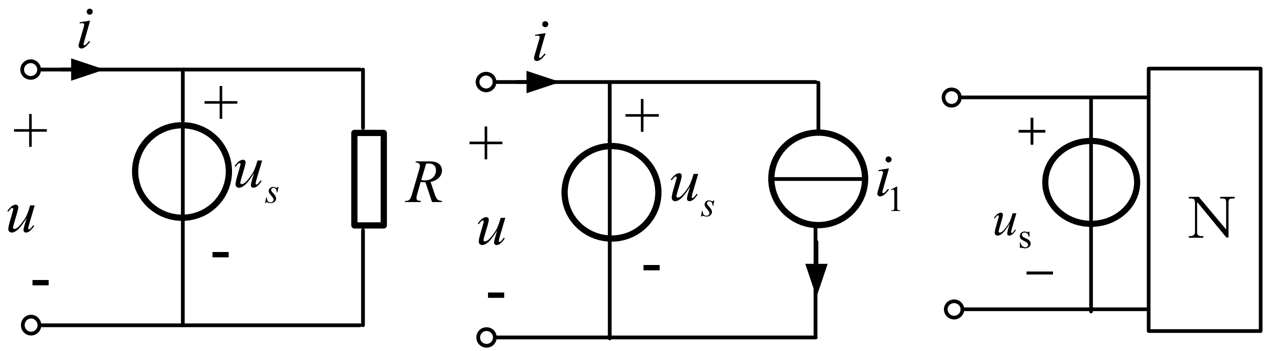
2. 2 串联与并联

2. 2.1 独立电压源串联与并联

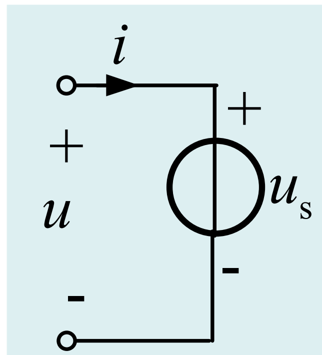


$$\boxed{u = u_1 - u_2 = u_s}$$



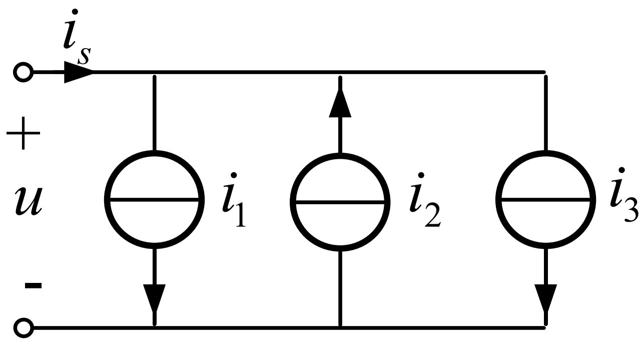


$$\boxed{u = u_s}$$

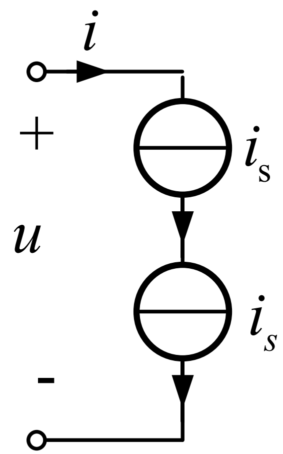


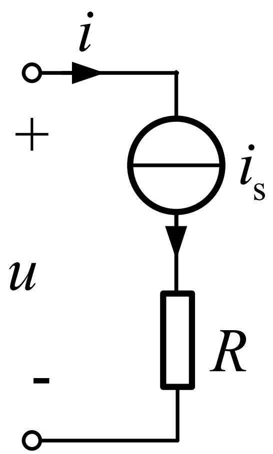
2. 2 独立串联与并联

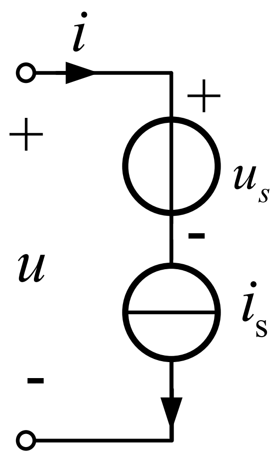
2. 2.2 独立电流源串联与并联

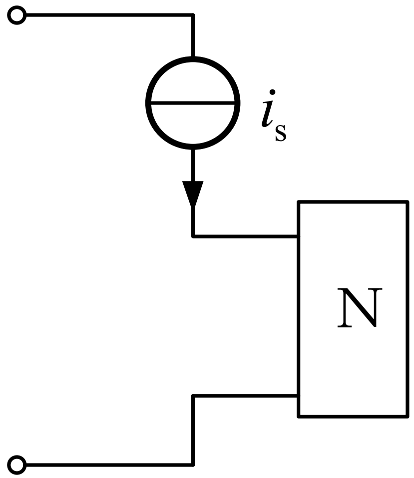


$$\boxed{i_s = i_1 - i_2 + i_3}$$



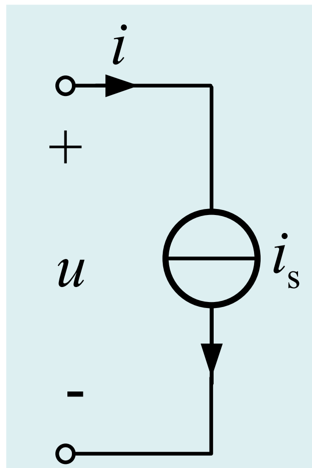






$$\boxed{i = i_s}$$

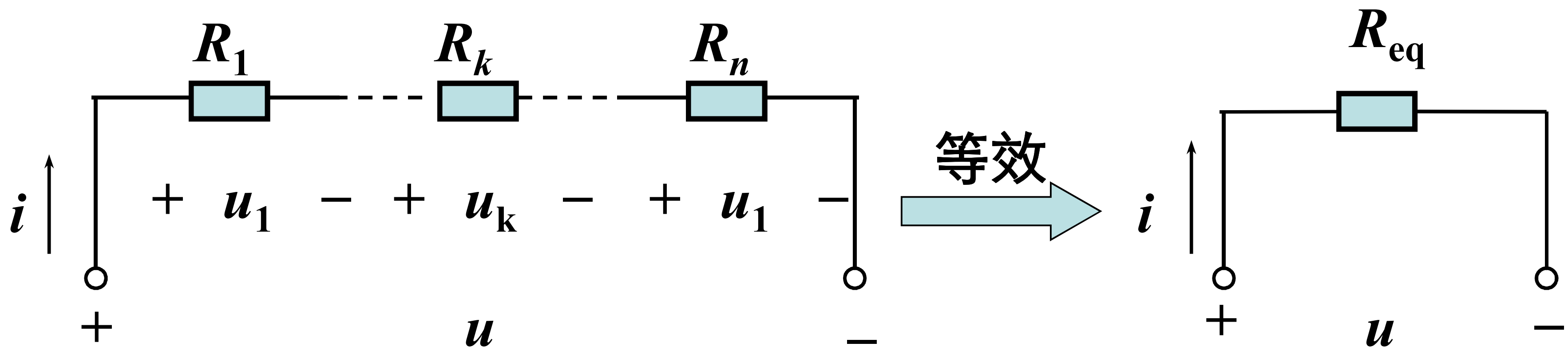
→



2.2.2 线性电阻元件的串联和并联

一 电阻元件的串联 (Series Connection of Resistors)

1. 等效电阻R_{eq}



KVL $\quad u= u_1+ u_2 +\ldots+u_k+\ldots+u_n$

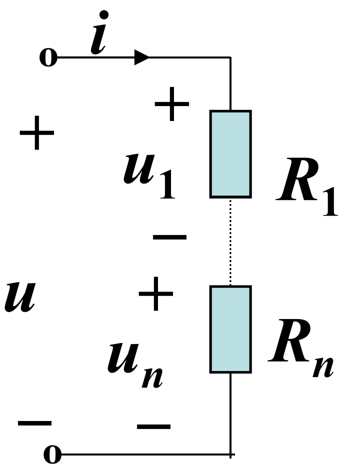
$$=(R_1+ R_2 +\ldots+R_k+\ldots+ R_n)\, i = R_{eq}i$$

$$R_{eq}=(R_1+ R_2 +\ldots+R_n) =\sum R_k$$

结论： 串联电路的总电阻等于各分电阻之和。

串联电阻上电压的分配

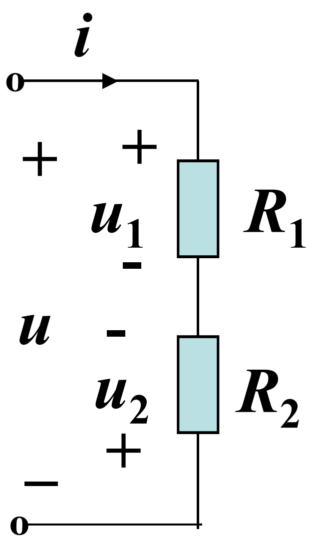
由 $$\frac{u_k}{u}=\frac{R_k i}{R_{eq} i}=\frac{R_k}{R_{eq}}=\frac{R_k}{\sum R_k}$$



即 电压与电阻成正比

故有 $$\boxed{u_k=\frac{R_k}{\sum R_j}u}$$

例：两个电阻分压，如下图



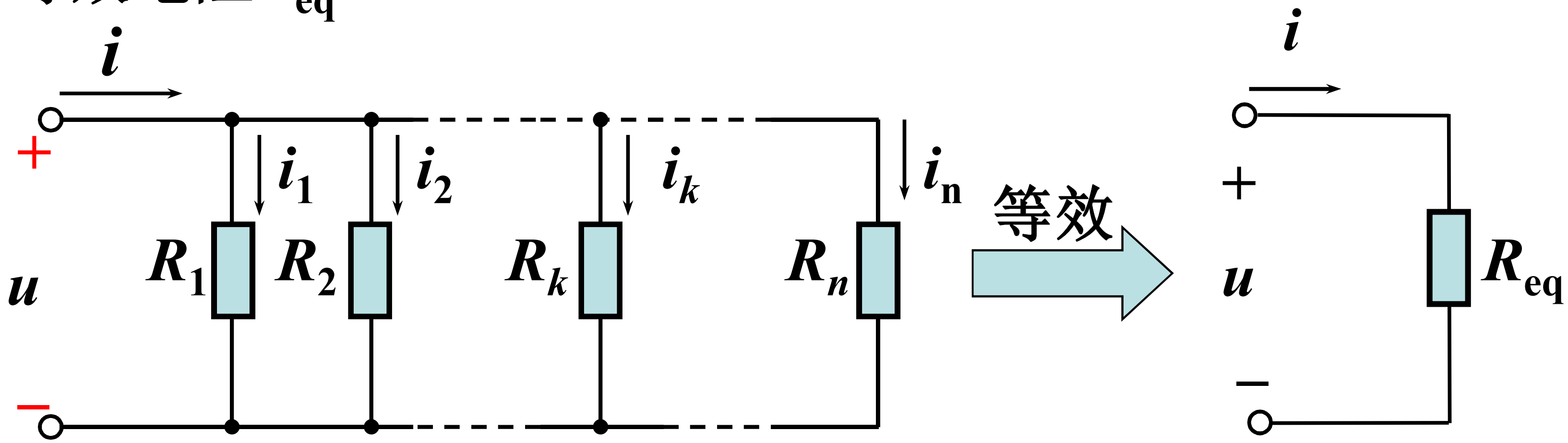
$$u_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}u$$

$$u_2=-\frac{R_2}{R_1+R_2}u$$

(注意方向！)

二　电阻元件的并联 (Parallel Connection)

1. 等效电阻R_{eq}



由KCL:　$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + i_n$

$= u/R_1 + u/R_2 + \ldots + u/R_n$

$= u(1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_n) = u/R_{eq}$

即　$1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_n$

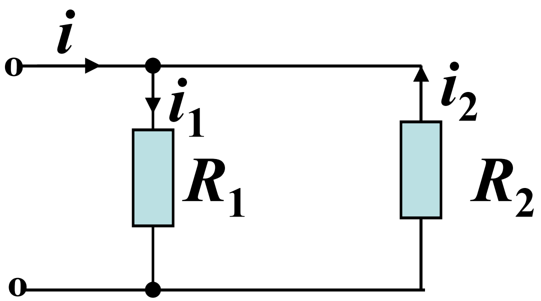
电导表示：　$G_{eq} = G_1 + G_2 + \ldots + G_k + \ldots + G_n = \sum G_k = \sum 1/R_k$

2. 并联电阻的电流分配

由 $\dfrac{i_k}{i}=\dfrac{u/R_k}{u/R_{eq}}=\dfrac{G_k}{G_{eq}}$ 即 电流分配与电导成正比

知 $$i_k=\frac{G_k}{\sum G_k}i$$

对于两电阻并联， 有



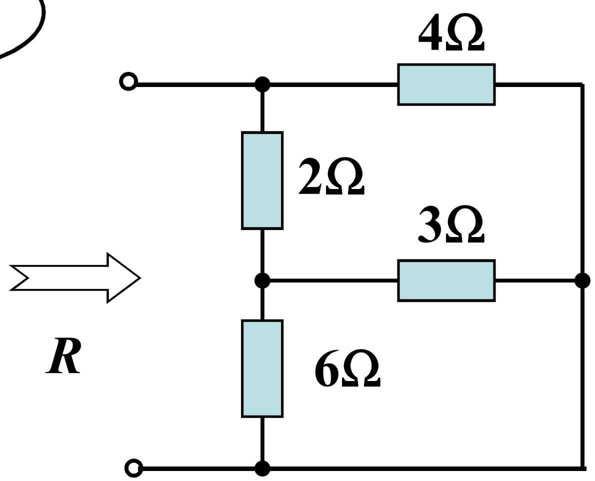
$$i_1=\frac{1/R_1}{1/R_1+1/R_2}i=\frac{R_2}{R_1+R_2}i$$

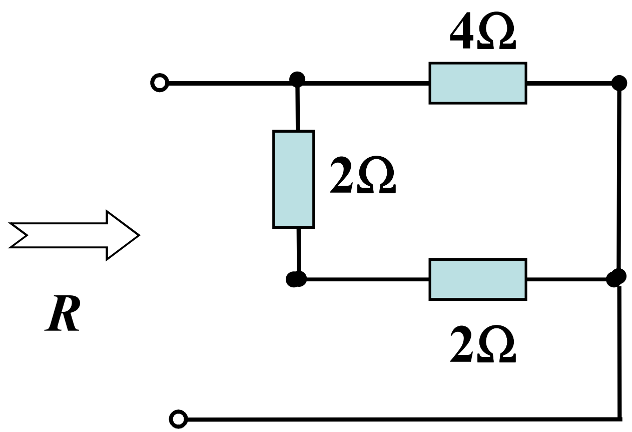
$$i_2=\frac{-1/R_2}{1/R_1+1/R_2}i=-\frac{R_1}{R_1+R_2}i$$

线性电阻元件的混联

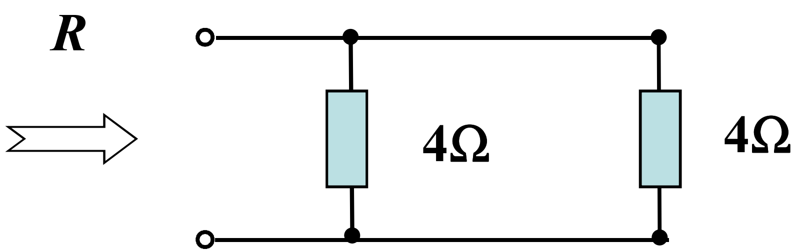
要求：弄清楚串、并联的概念。交替运用串并联等效电阻计算指定端口的等效电阻。

例1.

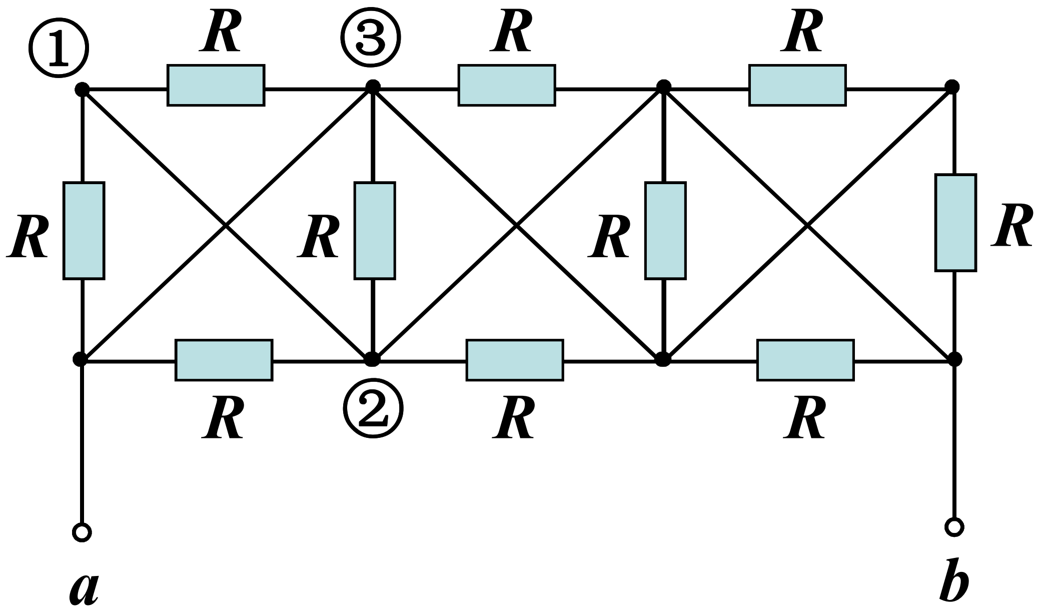




$R = 2\ \Omega$



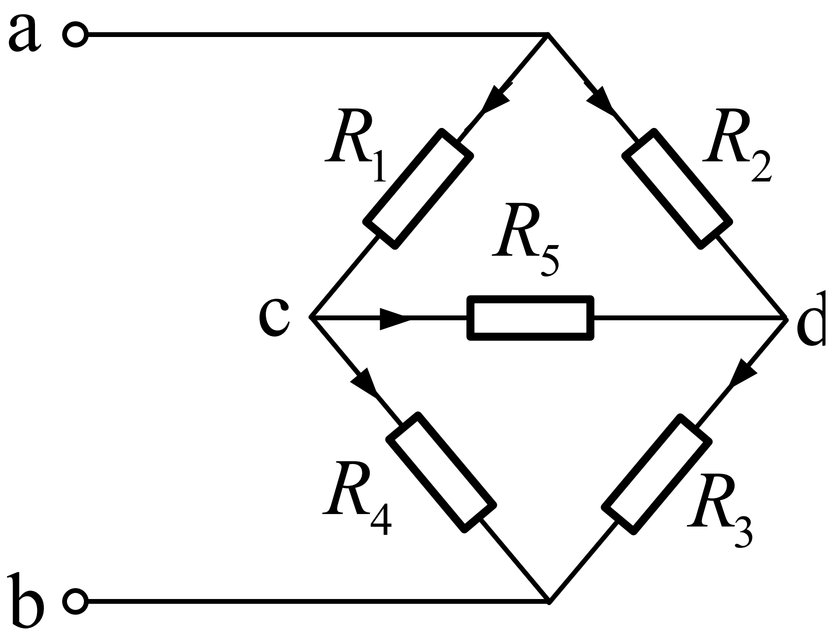
例2.



R_{ab}=0.1R

2.3 星形与三角形电路等效变换

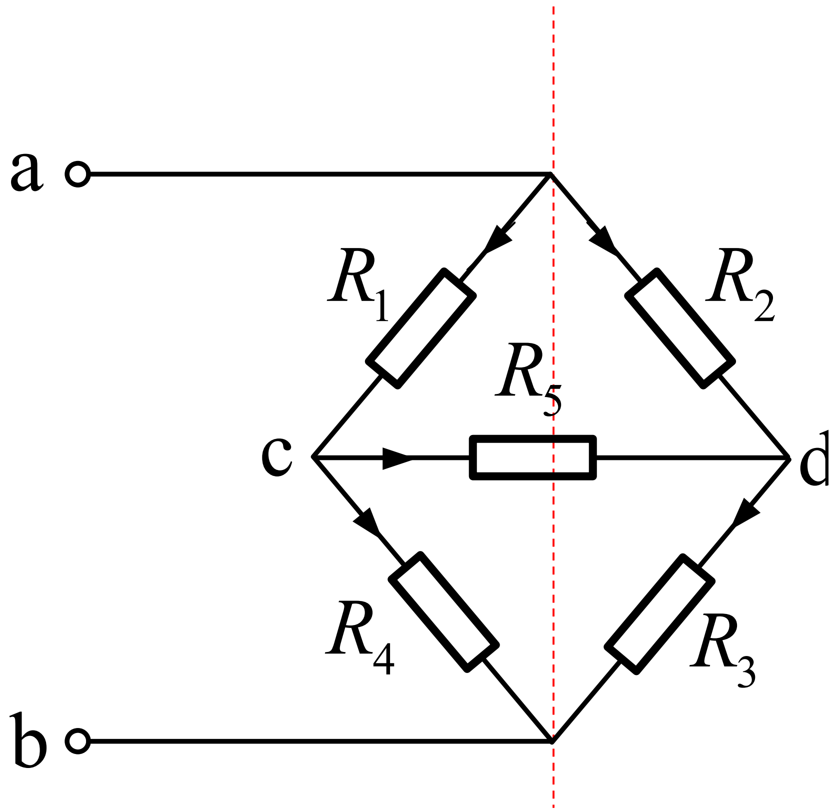
电桥电路



上图为电桥电路，电阻R_1、R_2、R_3、R_4称为电桥的“桥臂”，R_5支路称为“桥”。

2.3.1 电路对称

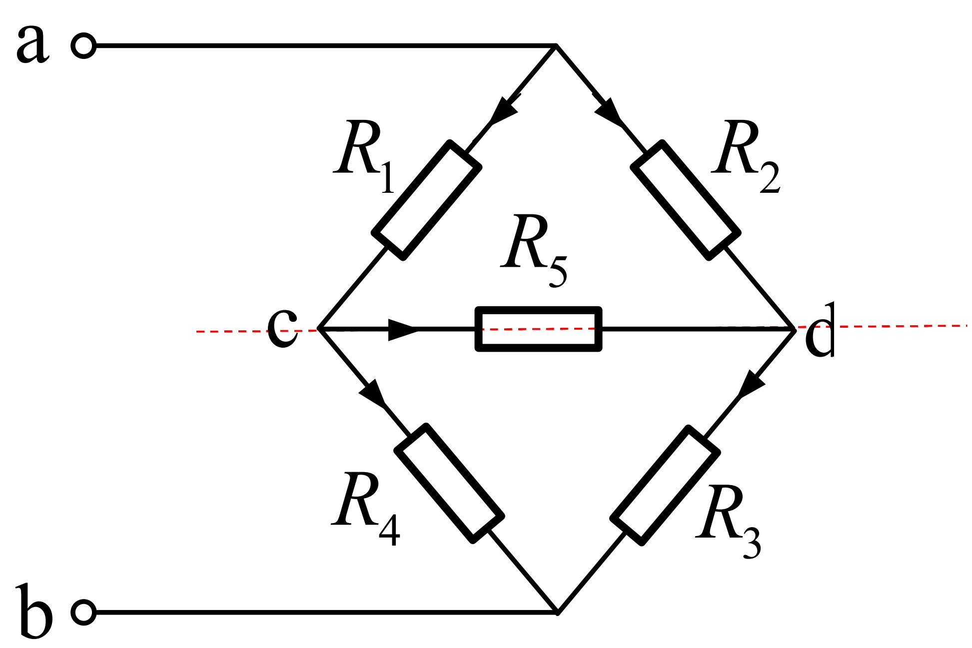
1、对称面通过端口： 电阻$R_1=R_2$、$R_3=R_4$，则电路存在对称面，即左右对称。



此时：对称面两侧有相同电流分布，**则垂直通过对称面的支路电流为0，可以断开该支路。** R_5电流$i_5=0$，可以断开该支路。

2.3.1 电路对称

2、对称面垂直于端口： 电阻$R_1=R_4$、$R_2=R_3$，则电路存在对称面，即上下对称。

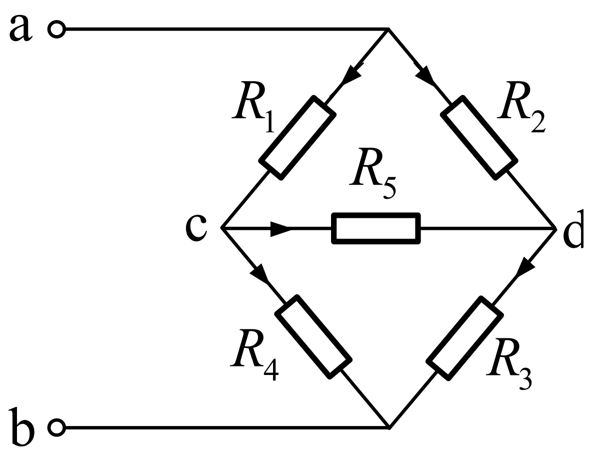


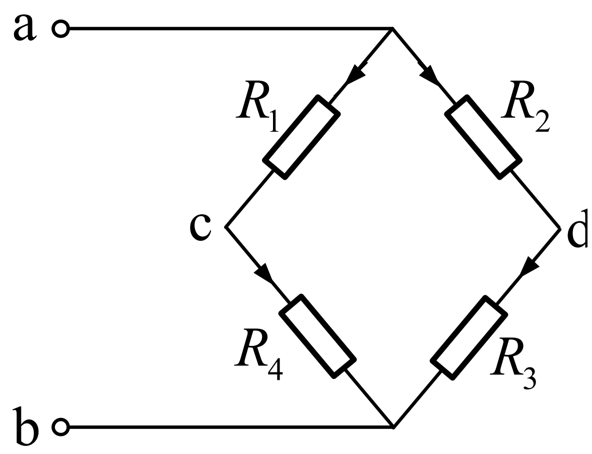
此时：位于对称面上结点ab电位相等，即$u_{cd}=0$

可以短接结点或断开支路R_5。

2.3.2 电桥平衡电路

电桥平衡条件：当电路中的c、d两点为自然等电位点时，此电桥电路称为“平衡电桥电路”。





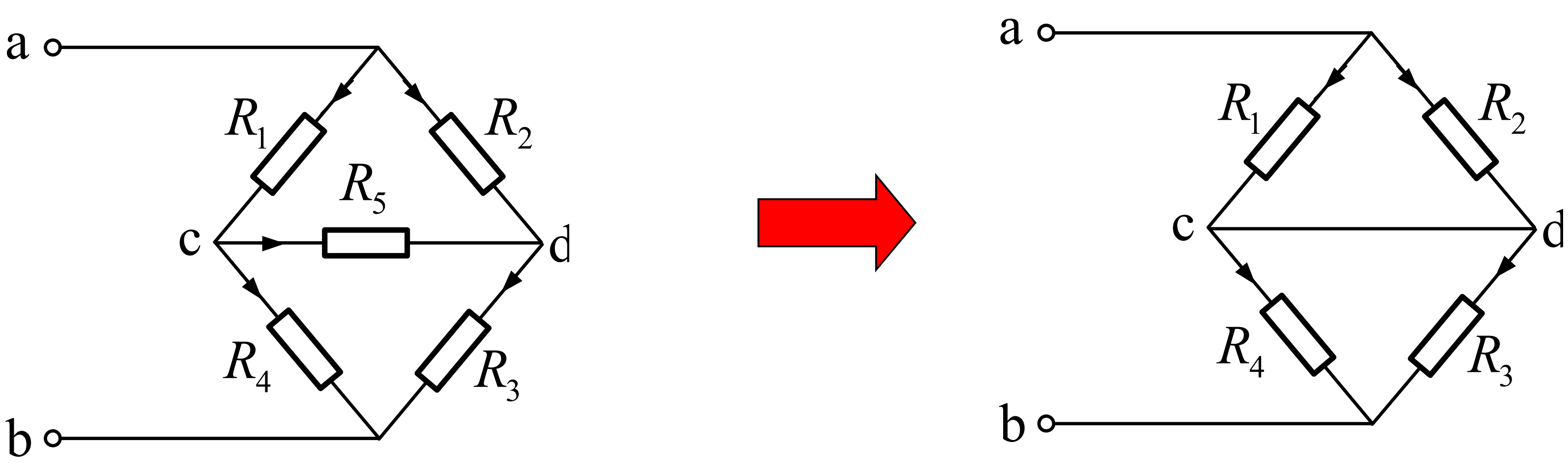
即 $u_{cd}=0$　　　则 $i_5=u_{cd}/R_5=0$

电路中桥支路可以用开路代替，如右图所示：

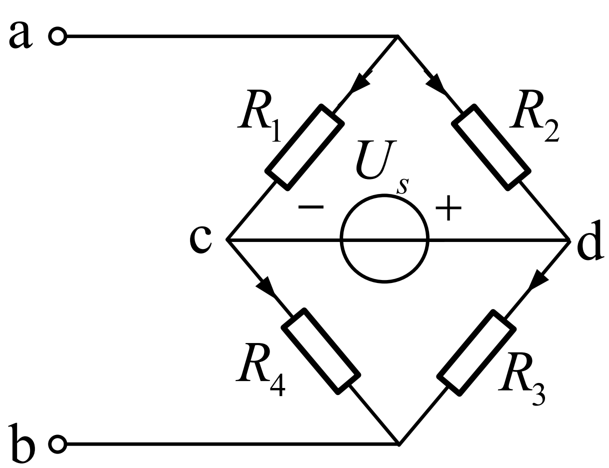
电桥平衡时，应满足的条件为：

$$u_{cd}=\frac{R_4}{R_1+R_4}U_{ab}-\frac{R_3}{R_2+R_3}U_{ab}=0 \quad \Rightarrow R_1R_3=R_2R_4$$

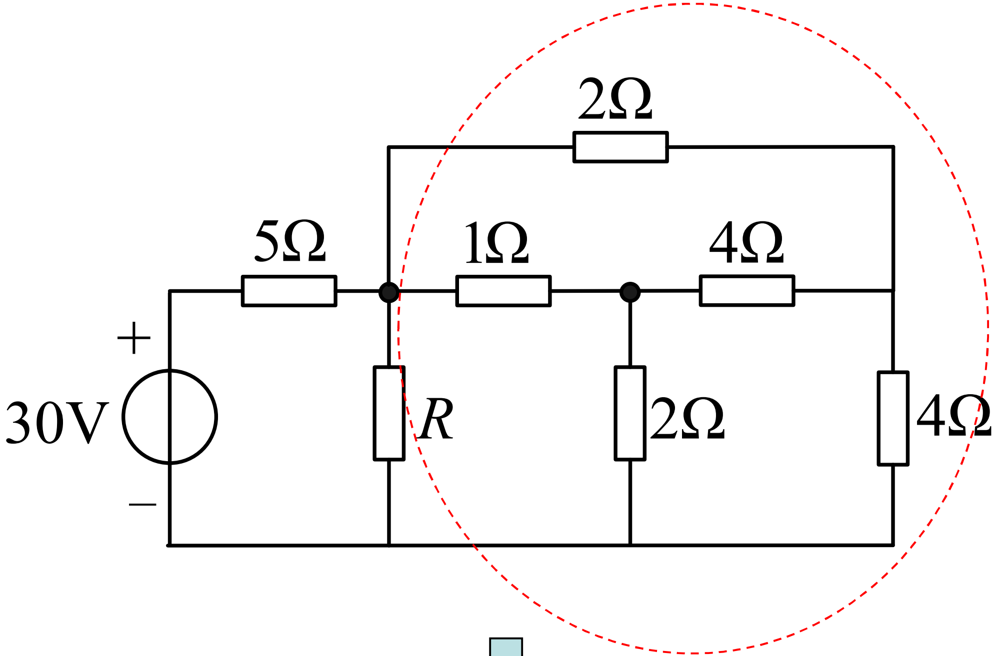
电路中桥臂可以用短路代替：



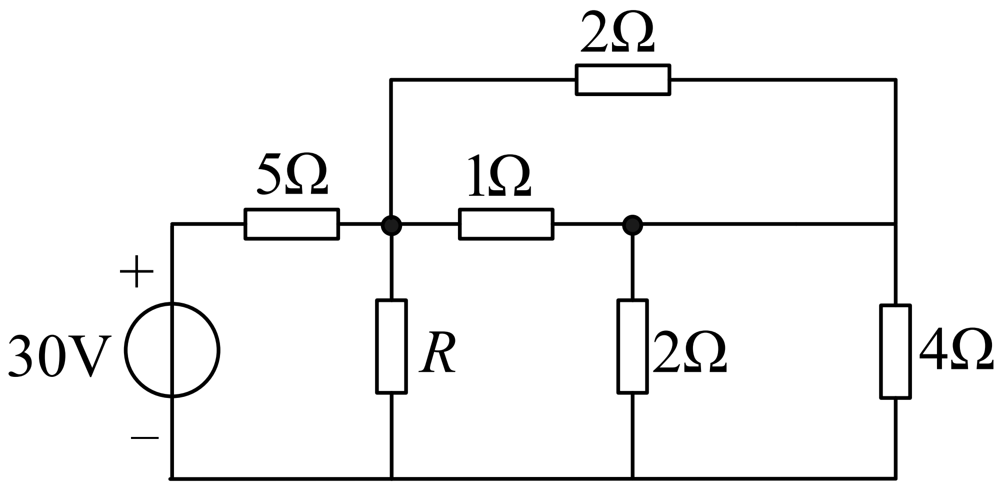
如果桥臂为“有源支路”，即使满足电桥平衡条件，c、d两点也不是等电位点。

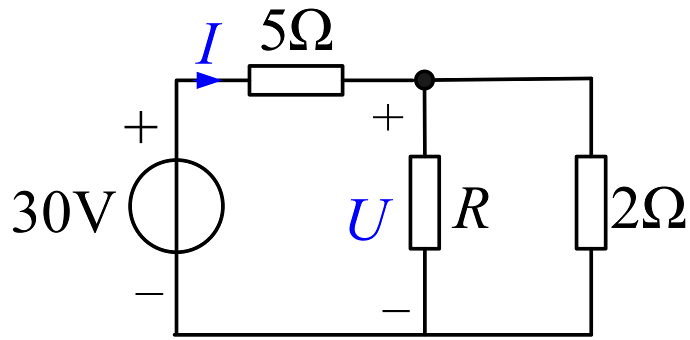


例3：电路消耗的总功率为150W，求R的阻值。

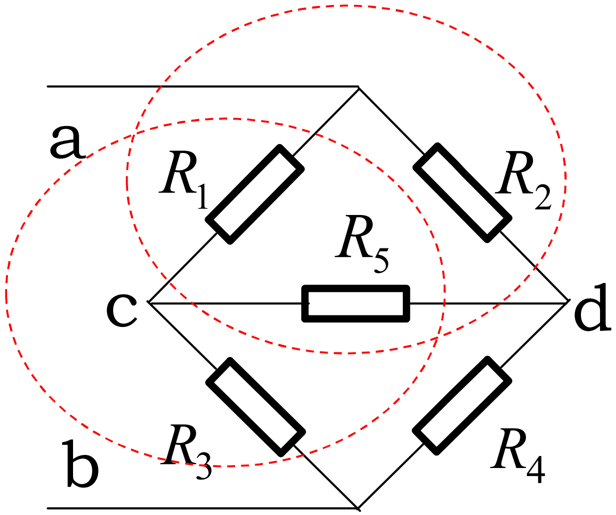


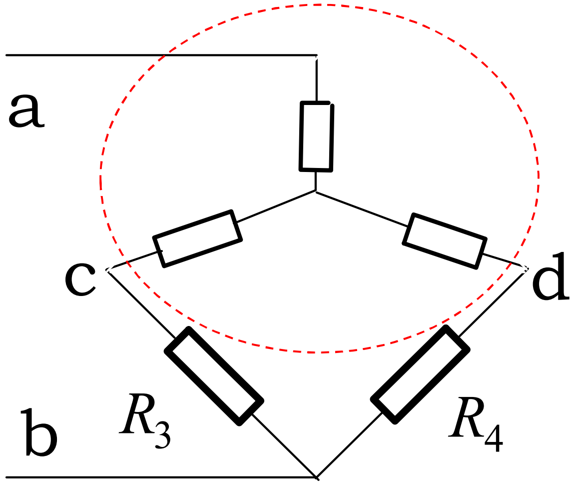
R=2Ω



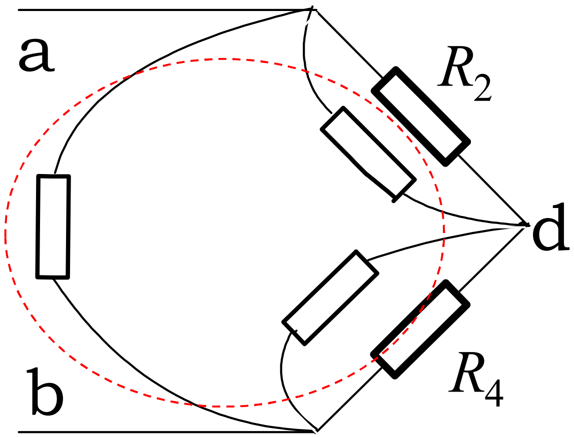


2.3.3　电阻电路的Δ—Y等效变换





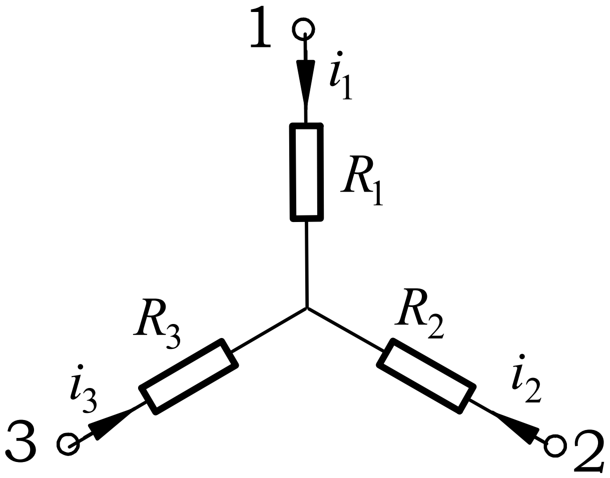
三角形→星形



星形→三角形

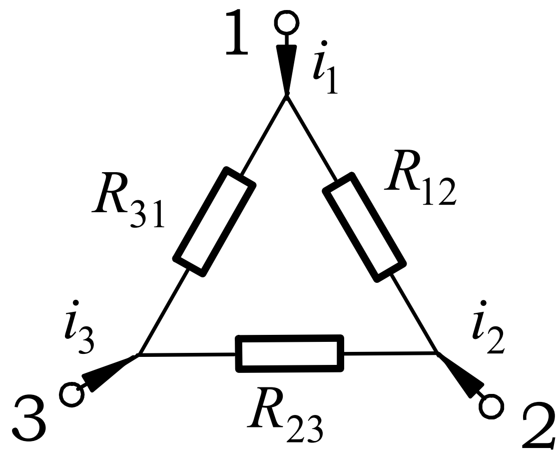
2.3.3 电阻电路的Δ—Y等效变换

Y、Δ电路：均有三条支路，且有三个端钮与外部电路相连。



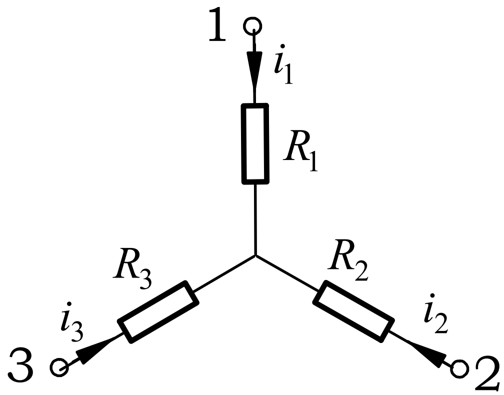
$$u_{ij} = f_k(i_1, i_2, i_3)$$

***u-i* 关系相同**



- 三个电阻的一端接在一个结点上，而它们的另一端分别接在三个不同的端钮上，这样的连接方式称为Y形（星形）电阻网络。
- 三个电阻的两端分别接在每两个端钮之间，使三个电阻本身构成回路这样的连接方式称为Δ形（三角形）电阻网络。

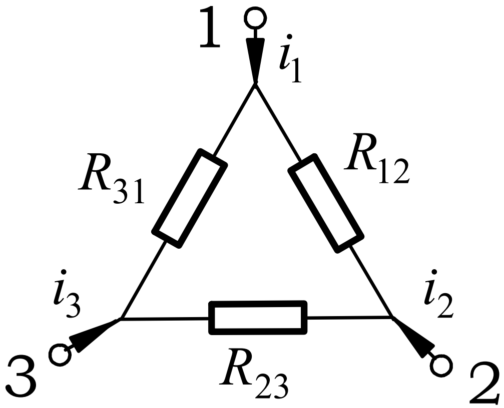
Δ、Y形电路等效的条件：



对星形连接，端钮处u-i特性方程为：

$$\begin{cases} u_{12} = R_1 i_1 - R_2 i_2 \\ u_{23} = R_2 i_2 - R_3 i_3 \end{cases} \quad (1)$$

对三角形连接，端钮处u-i特性方程和KCL、KVL方程分别为：



$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{u_{12}}{R_{12}} - \dfrac{u_{31}}{R_{31}} \\ i_2 = \dfrac{u_{23}}{R_{23}} - \dfrac{u_{12}}{R_{12}} \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

联立(2)、3)两式求解得：

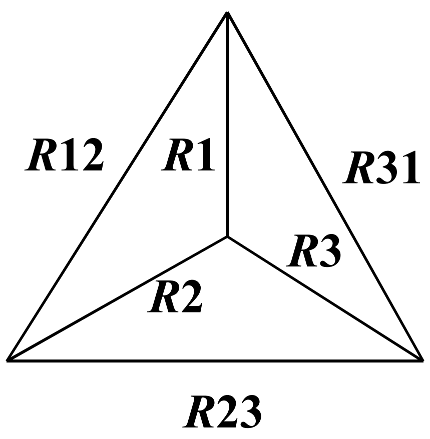
$$\begin{cases} u_{12} = \dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} i_1 - \dfrac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} i_2 \\ u_{23} = \dfrac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} i_2 - \dfrac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} i_3 \end{cases} \quad (4)$$

Δ→Y形电路等效的变换结果：

两种联接形式电路等效，即伏安完全相同，比较1、4两式得：

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 = \dfrac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 = \dfrac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{cases}$$

简记方法：



$$\text{Y的电阻} = \frac{\Delta\text{相邻电阻之积}}{\Delta\text{电阻之和}}$$

同样方法可得Y→ Δ的变换结果：

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

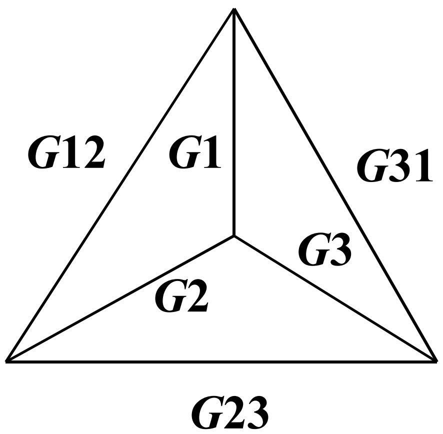
用电导表示：

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

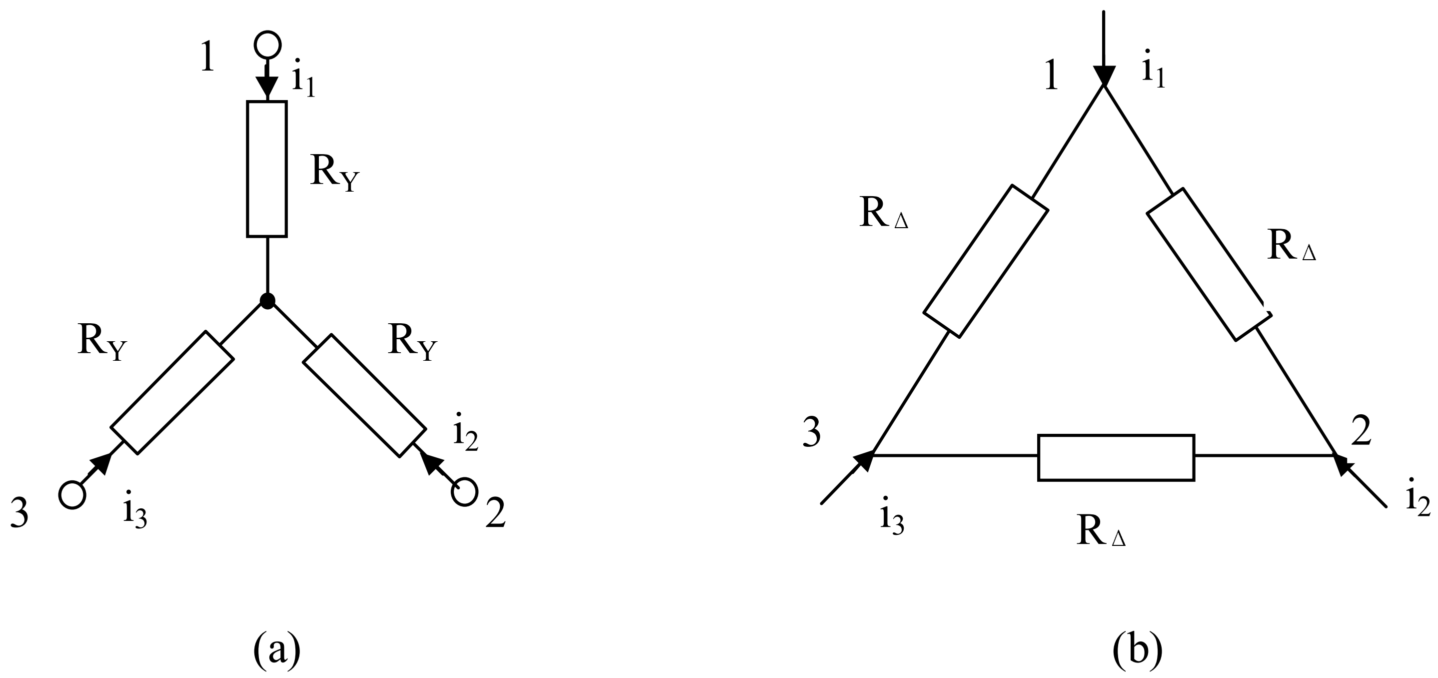
$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

简记方法：



$$\Delta\text{的电导} = \frac{\text{Y相邻电导之积}}{\text{Y电导之和}}$$

对称Δ—Y联接电路的等效变换公式：

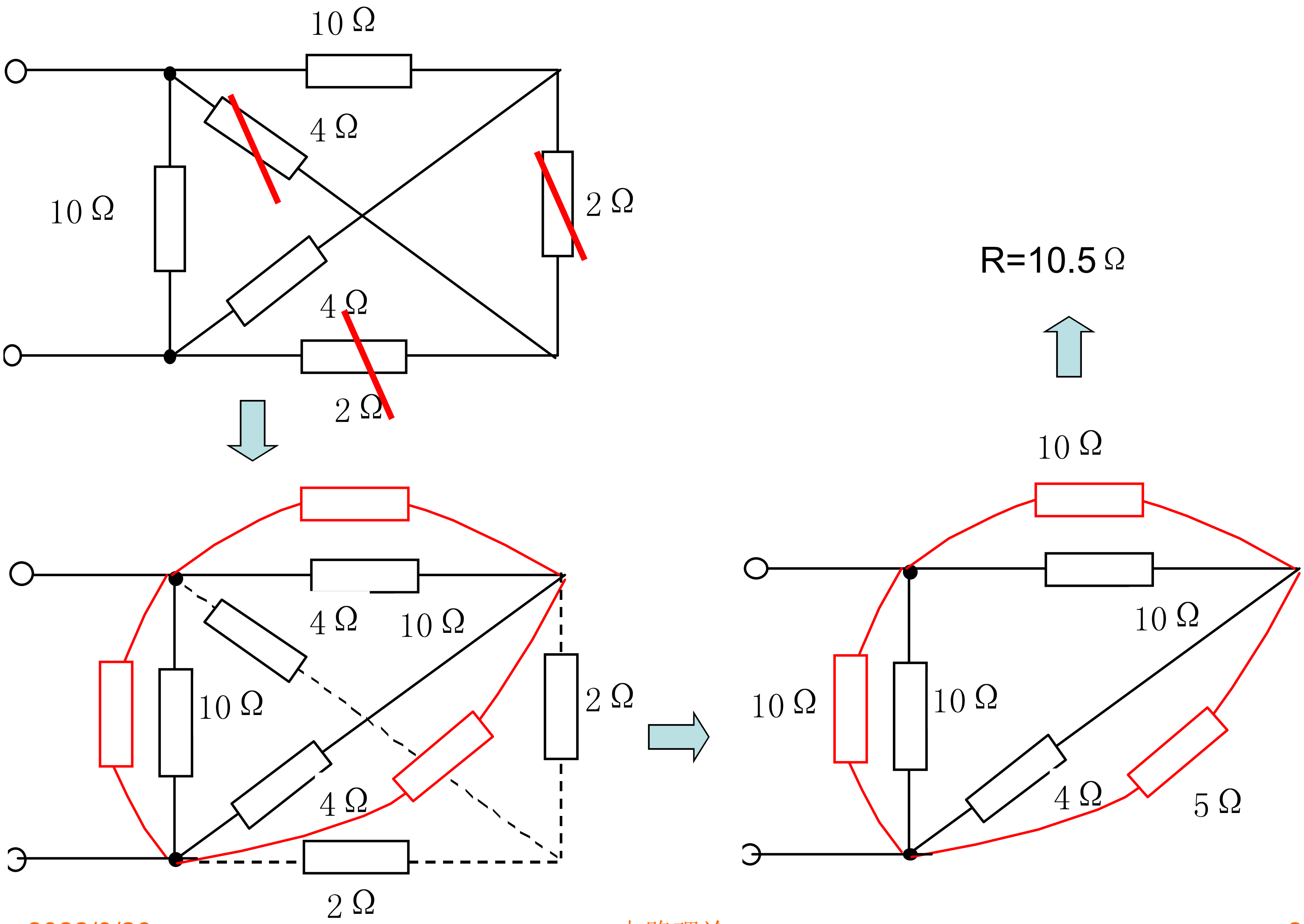


$$R_{\Delta}=R_Y+R_Y+R_Y R_Y/ R_Y=3R_Y$$

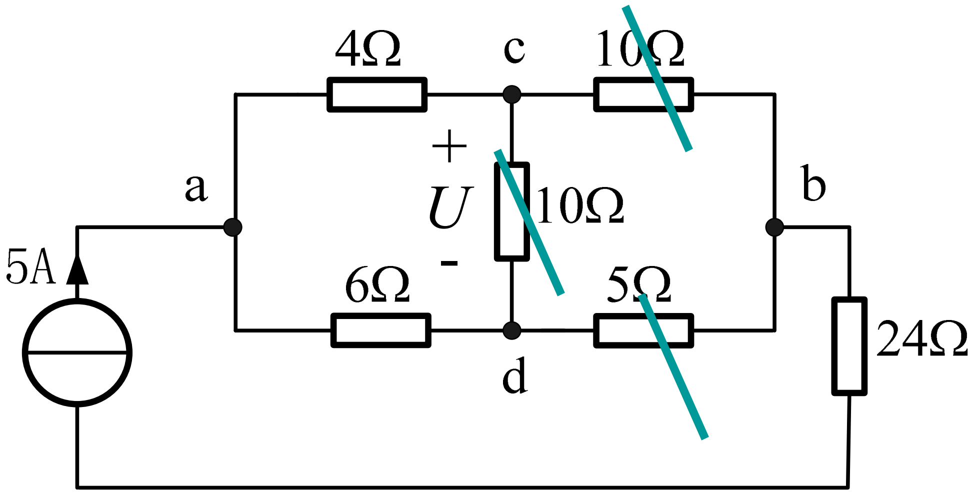
或

$$R_Y= R_{\Delta}/3$$

例4：求电阻Rab。

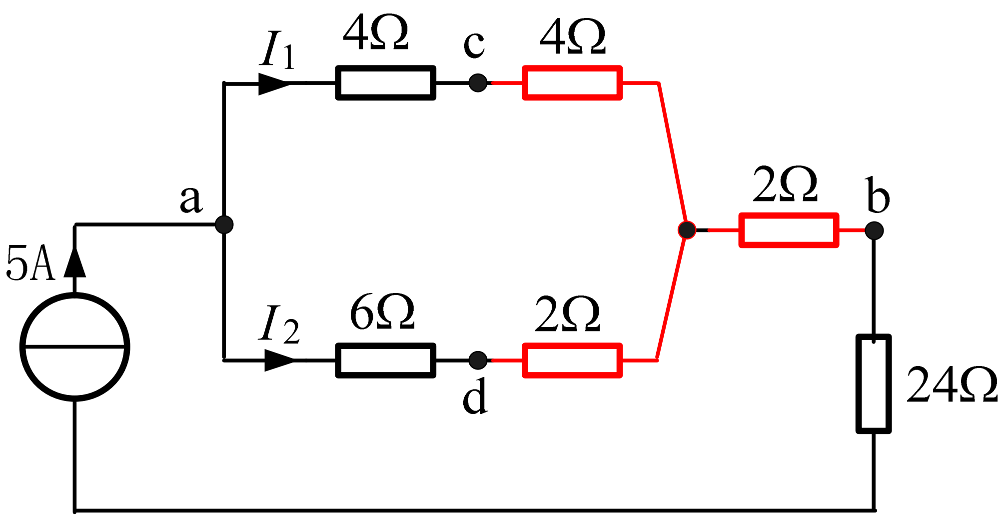

10 Ω
4 Ω
10 Ω
2 Ω
4 Ω
2 Ω
R=10.5 Ω
10 Ω
4 Ω
10 Ω
10 Ω
2 Ω
4 Ω
2 Ω
10 Ω
10 Ω
10 Ω
10 Ω
4 Ω
5 Ω

例5. 求 *U*.



$$I_1 = I_2 = \frac{5}{2}\text{A}$$

(Current division)



$$U = 4I_1 - 2I_2 = 5\text{V}$$

（KVL）

练习1：求入端等效电阻Rab

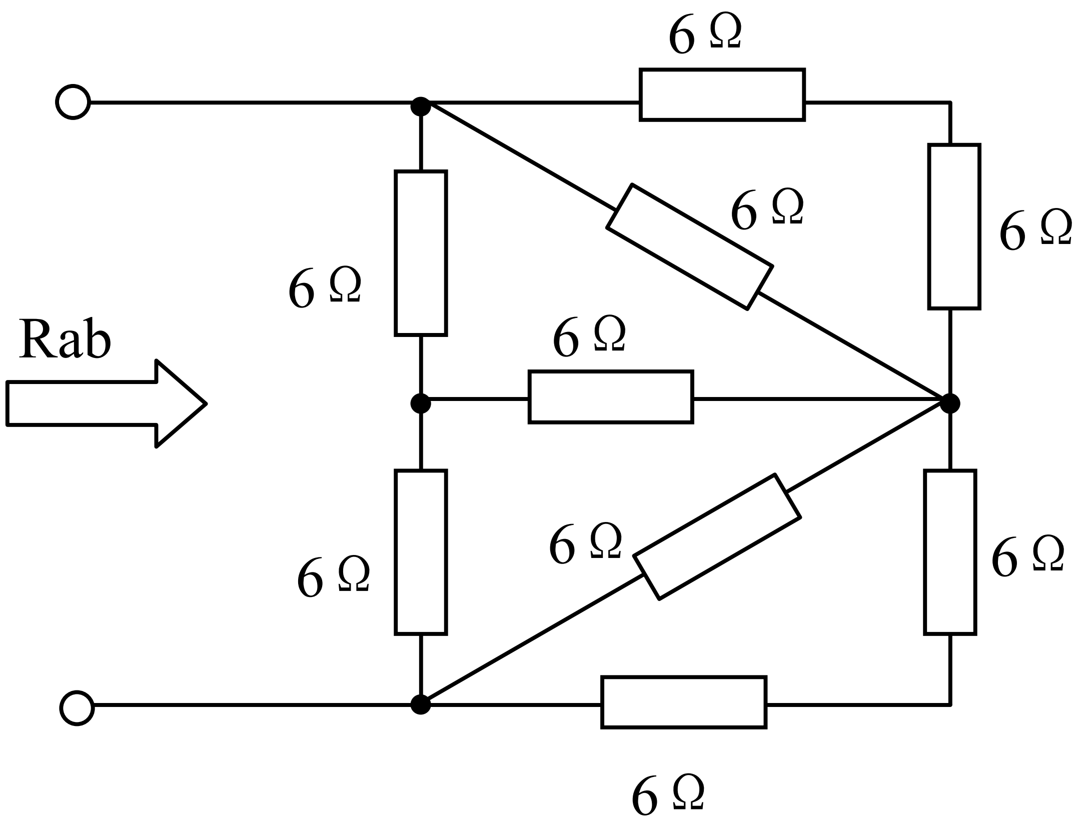
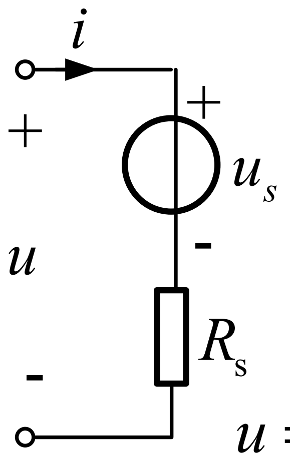


图 1

R=4.8Ω

2.4 电源变换Source transformation

2.4.1 独立电源变换

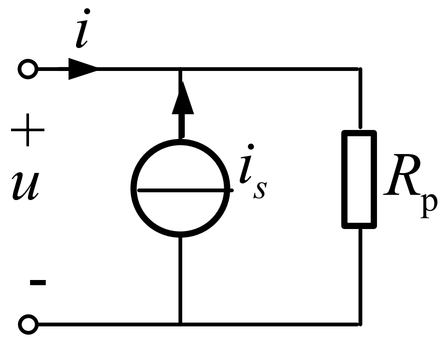


$u = u_s + R_s i$

$R_s = R_p = R$

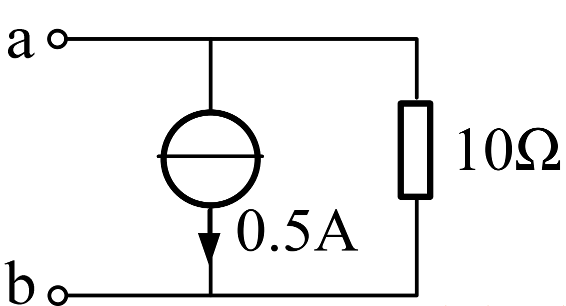
$u_s = Ri_s$

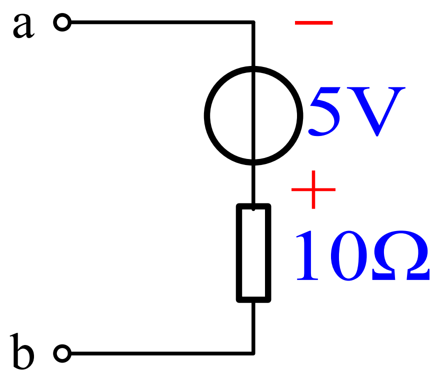
等效



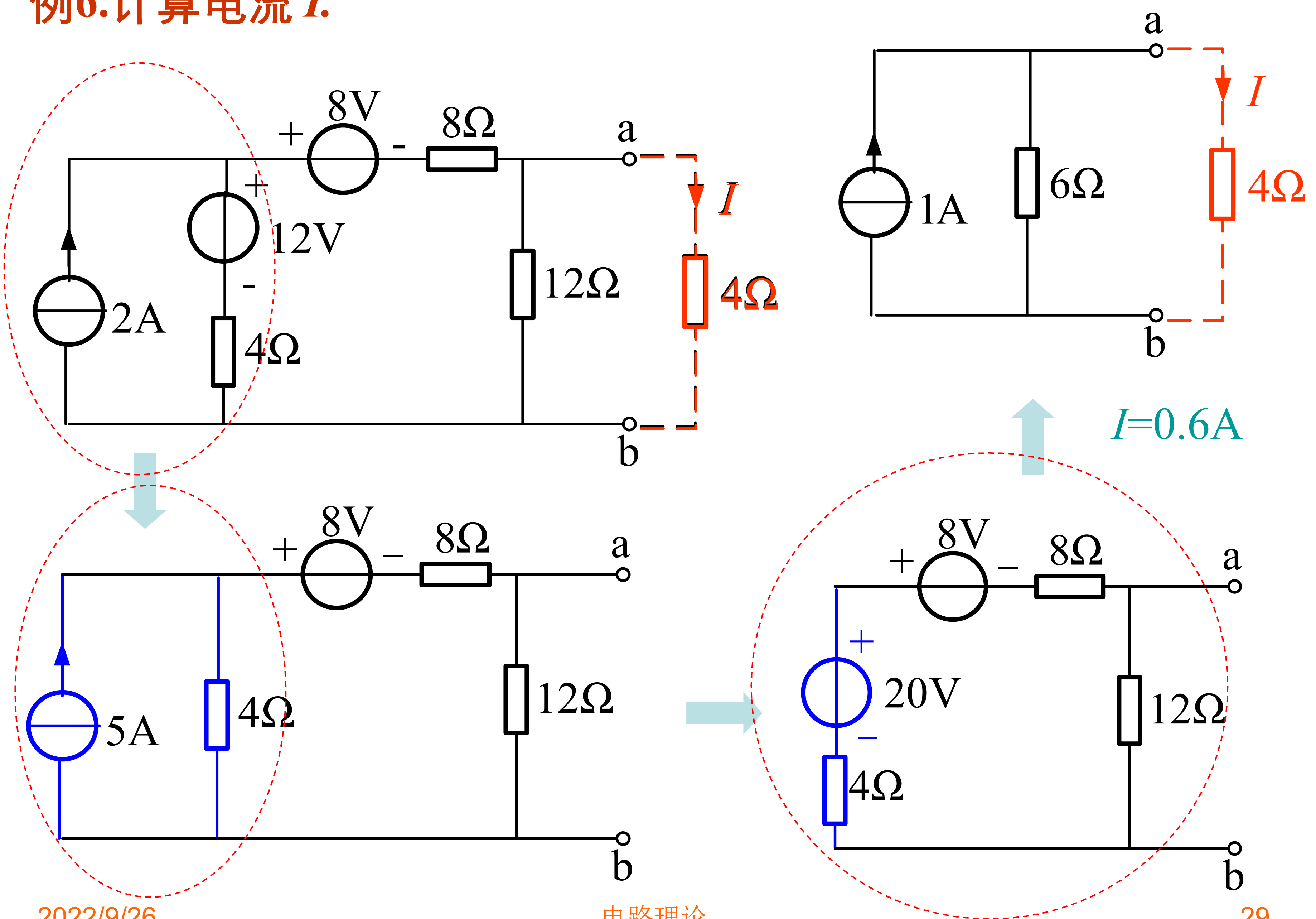
$u = R_p i_s + R_p i$

戴维南模型 **Two models of real DC source** **诺顿模型**

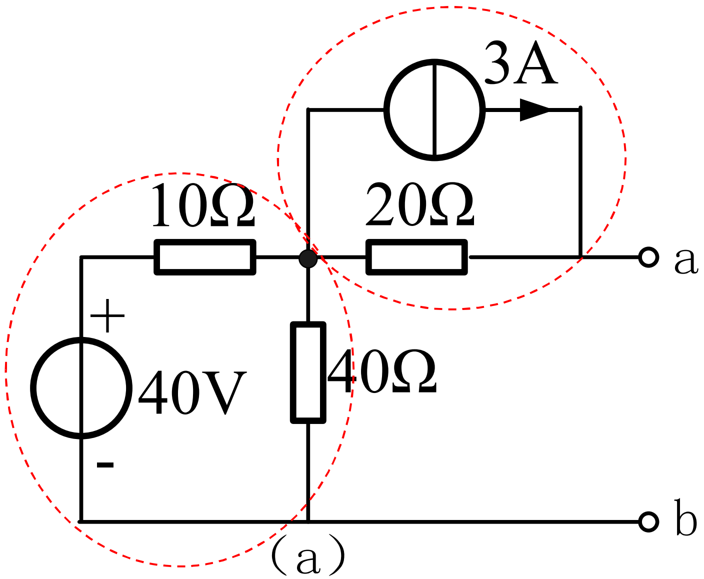


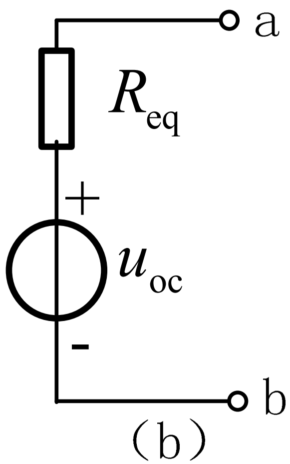


例6.计算电流 *I*.



练习：求图（a）等效电路图（b）的参数

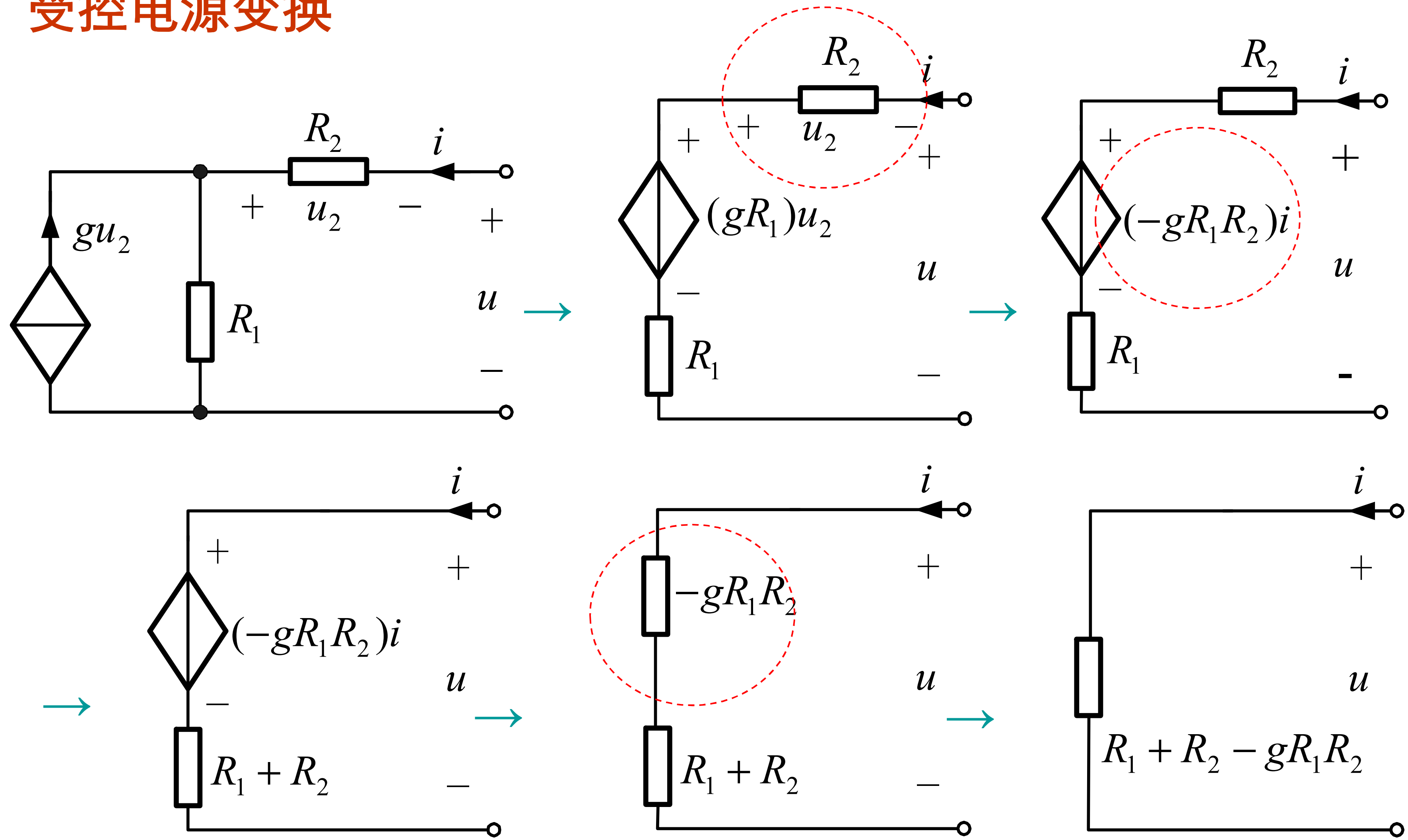




答案：28，92

2.4 电源变换Source transformation

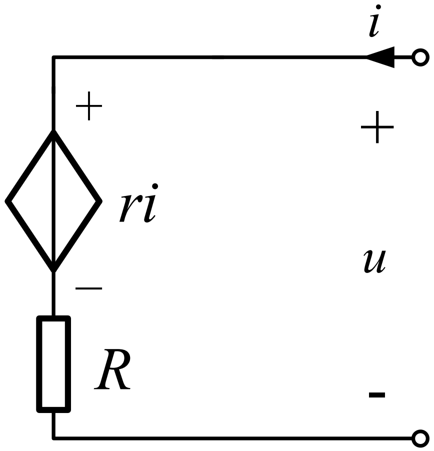
受控电源变换



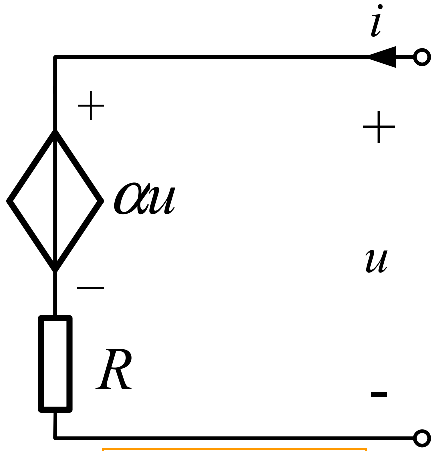
方法2:(1)图中 $u-i$ 关系 $: u = R_2 i + R_1(gu_2 + i) = (R_1 + R_2 - gR_1R_2)i$

2.4 电源变换Source transformation

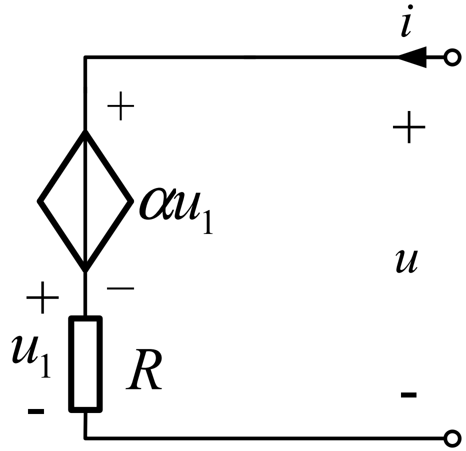
例7 计算等效电阻。



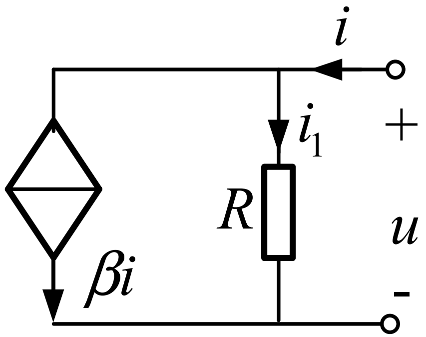
$R_{\text{eq}} = R + r$



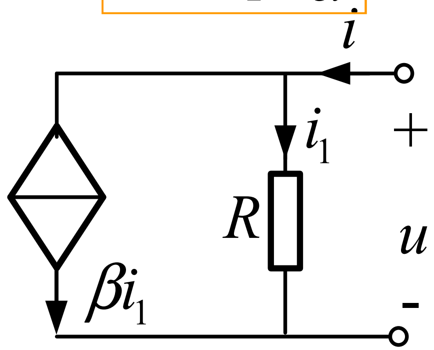
$R_{\text{eq}} = \dfrac{R}{1-\alpha}$



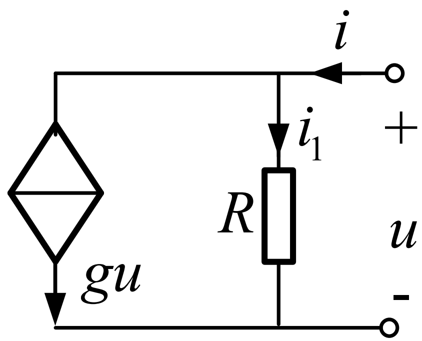
$R_{\text{eq}} = (1+\alpha)R$



$R_{\text{eq}} = (1-\beta)R$



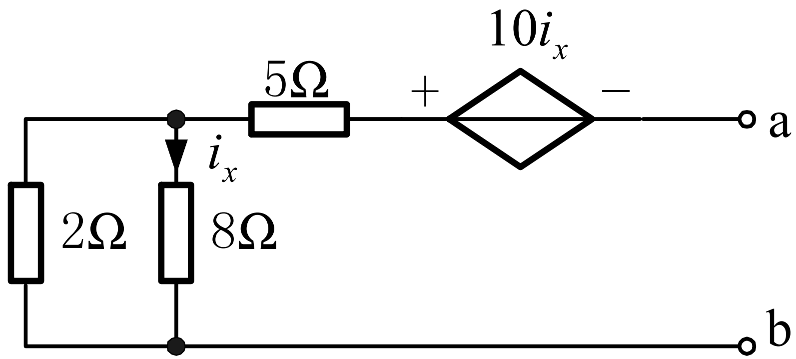
$R_{\text{eq}} = \dfrac{R}{1+\beta}$

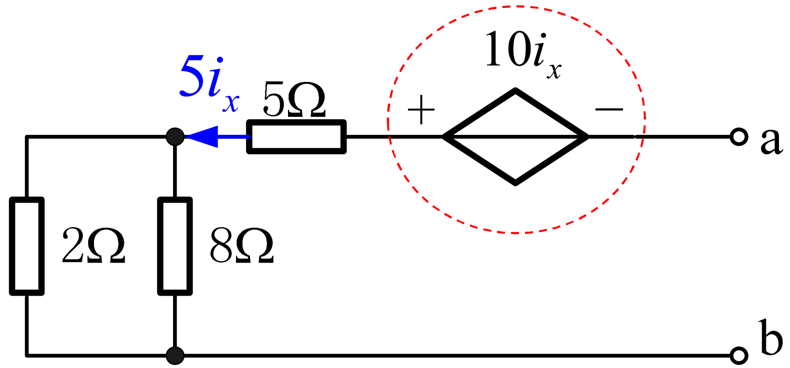


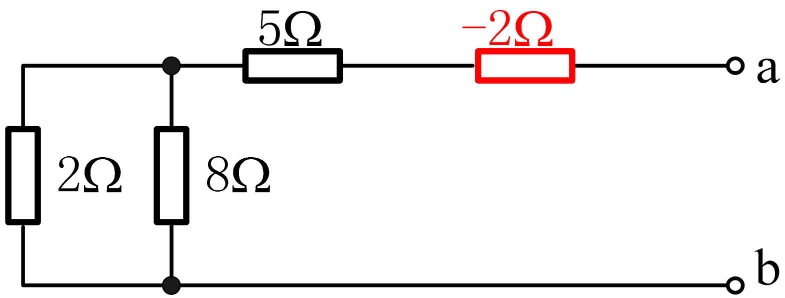
$R_{\text{eq}} = \dfrac{R}{1+gR}$

2.4 电源变换Source transformation

例8.计算端口等效电阻。



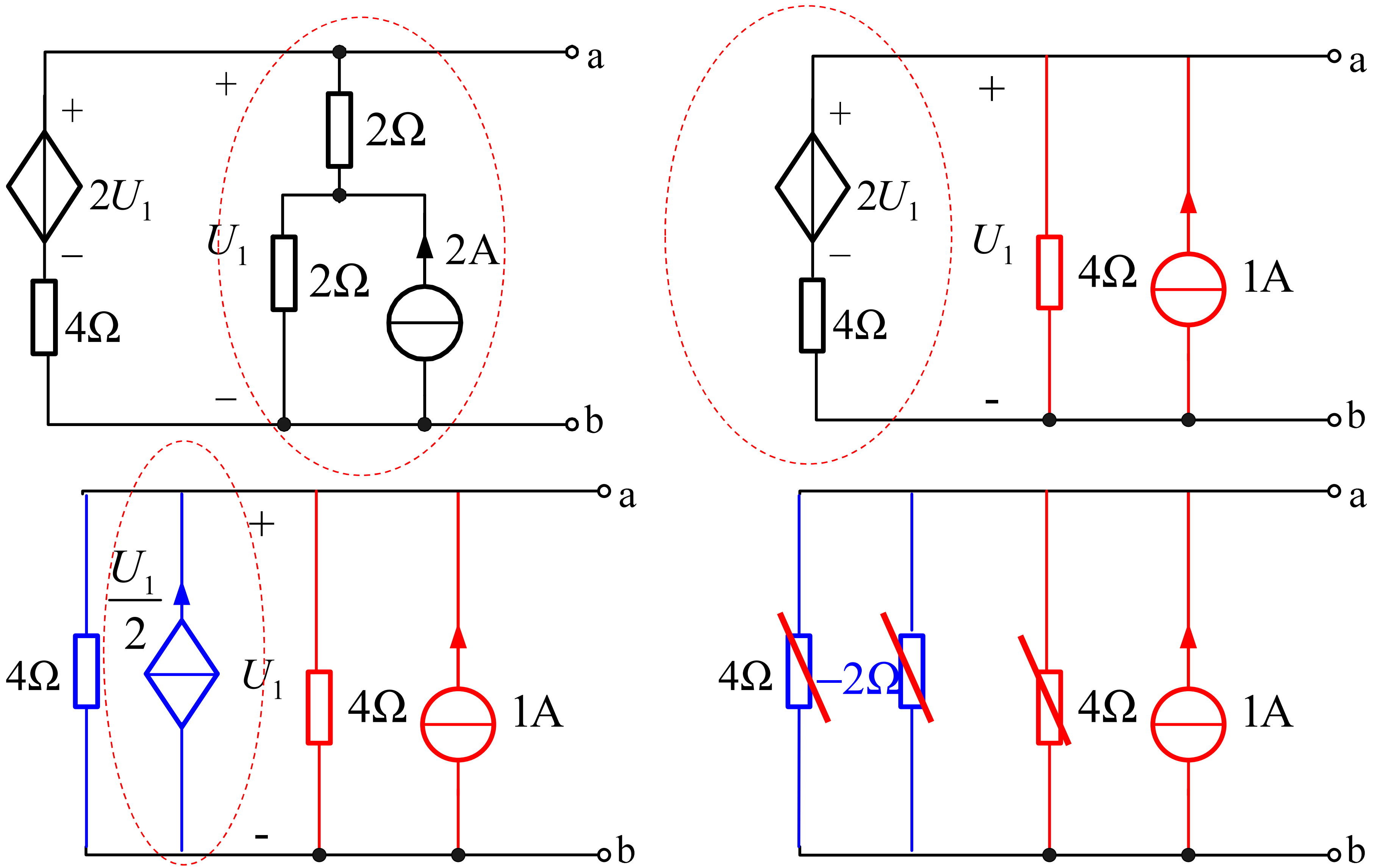




$$R_{ab} = 4.6\Omega$$

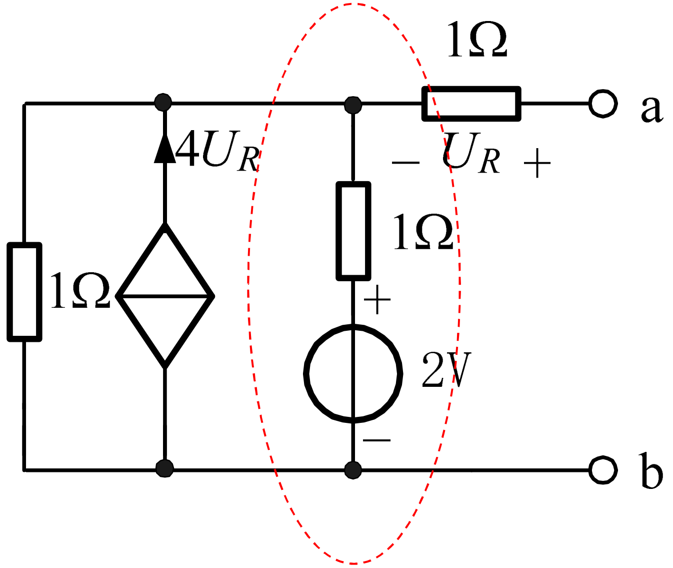
2.4 电源变换Source transformation

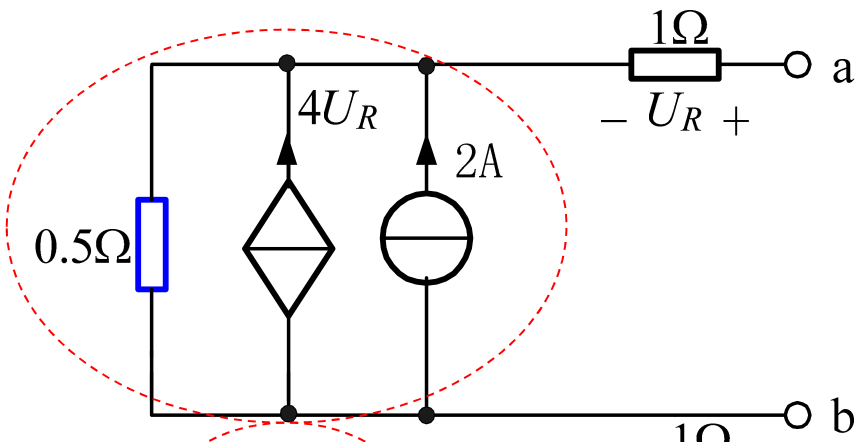
例9.找出最简等效电路。

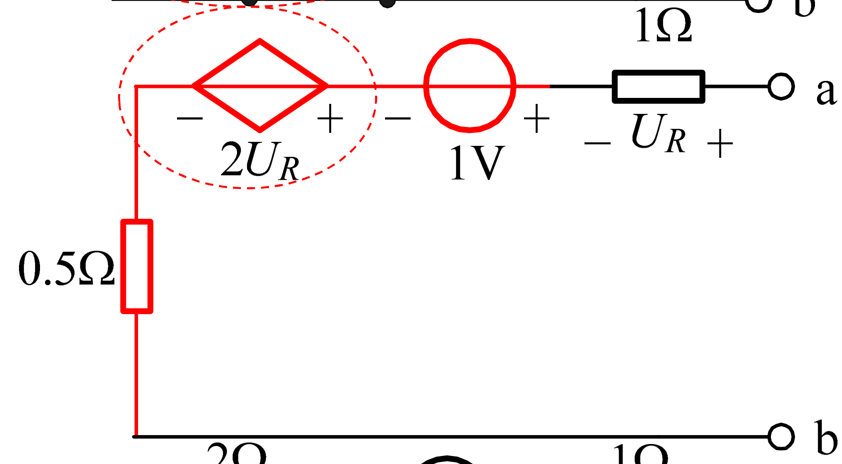


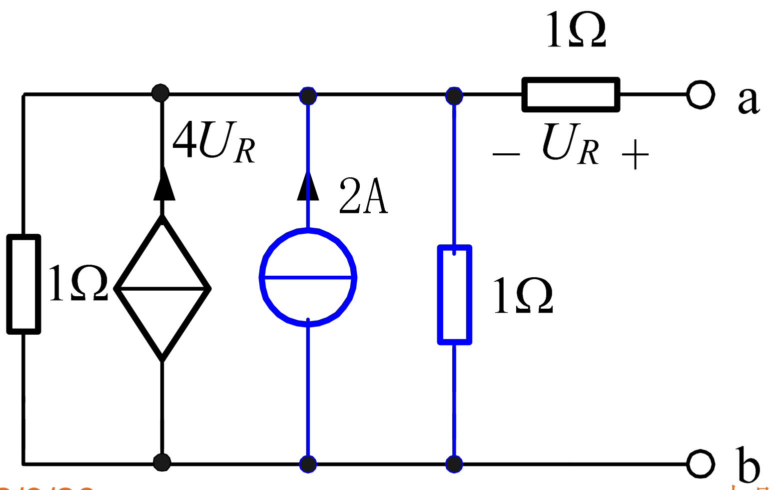
2.4 电源变换Source transformation

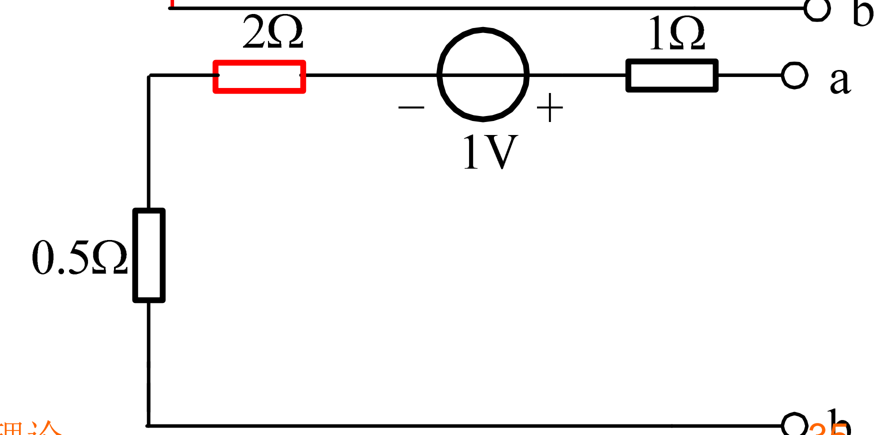
例10.找出最简等效电路。



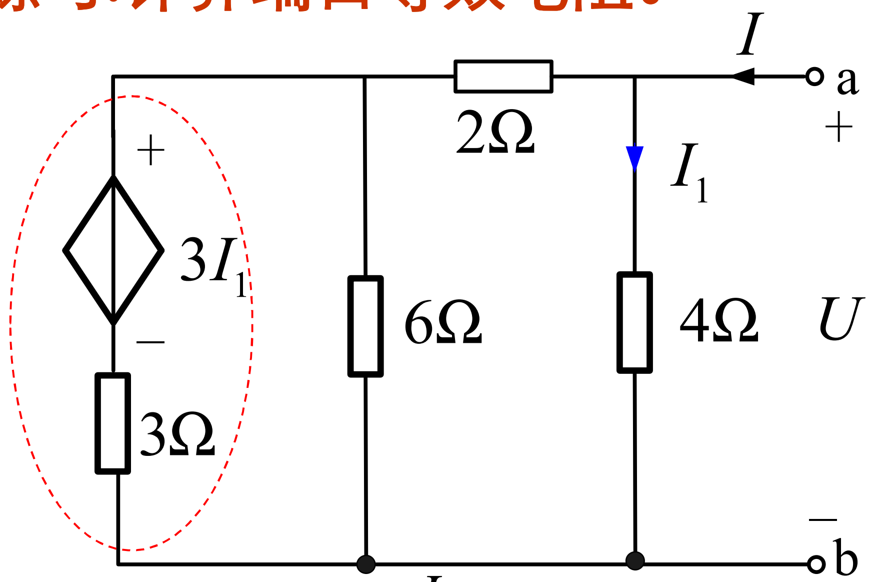


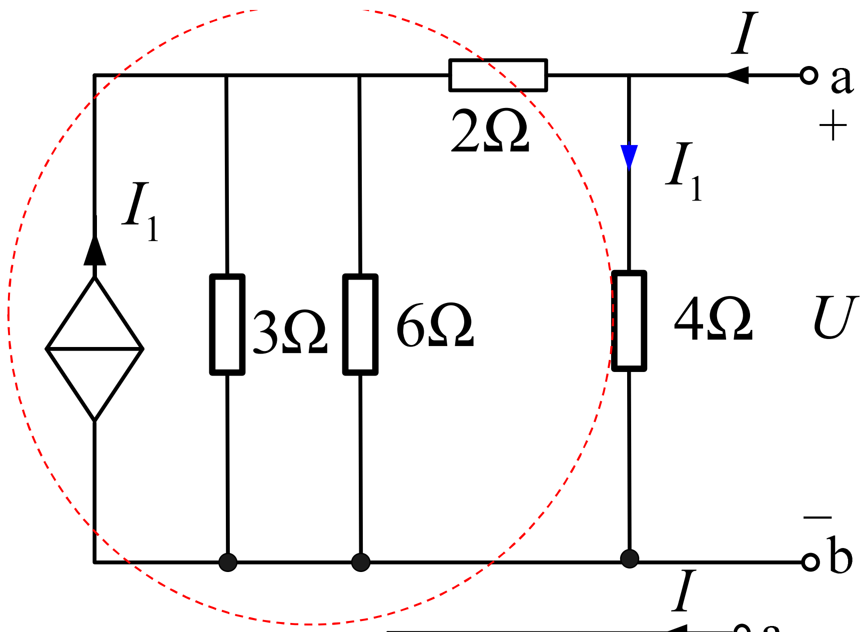


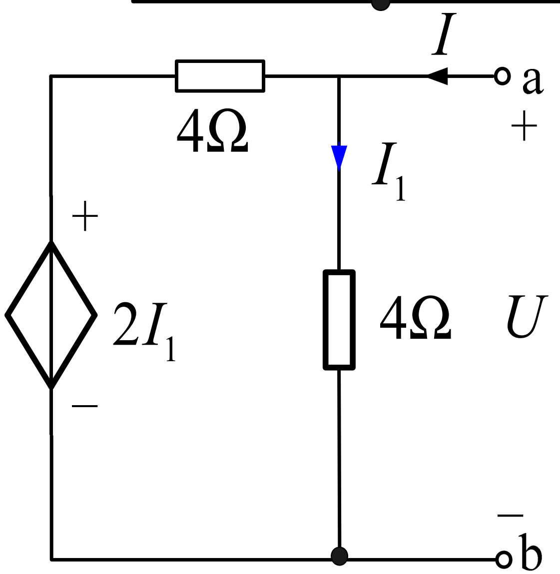


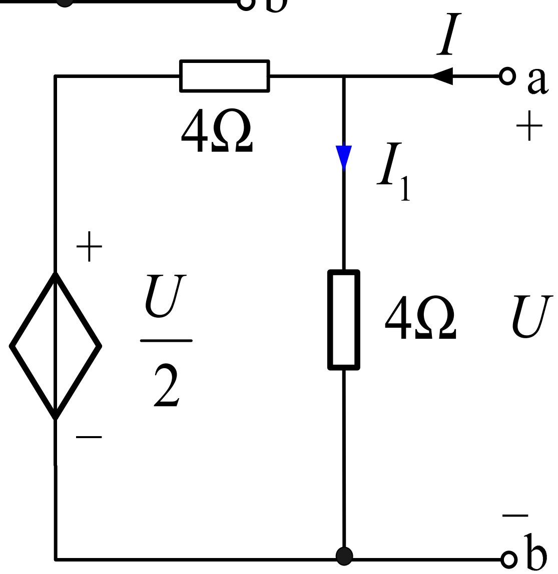


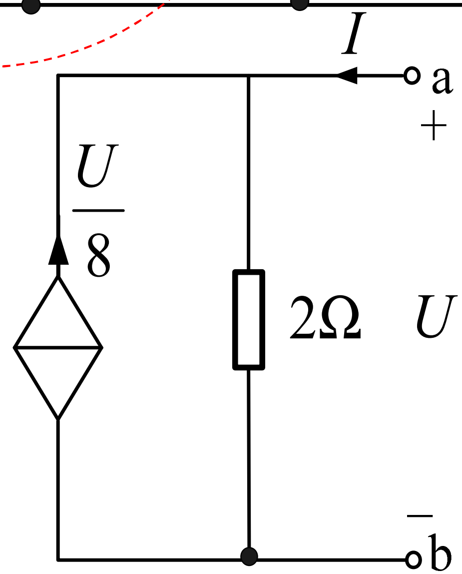
练习.计算端口等效电阻。











方法2:

$$R_{eq}=2//(-8)=\frac{8}{3}\Omega$$

方法1: $u-i$ 关系:$I=\frac{U}{2}-\frac{U}{8}, R_{eq}=\frac{U}{I}=\frac{8}{3}\Omega$

计划学时：3学时；课后学习9学时

作业：

2-12，2-14　/串并联

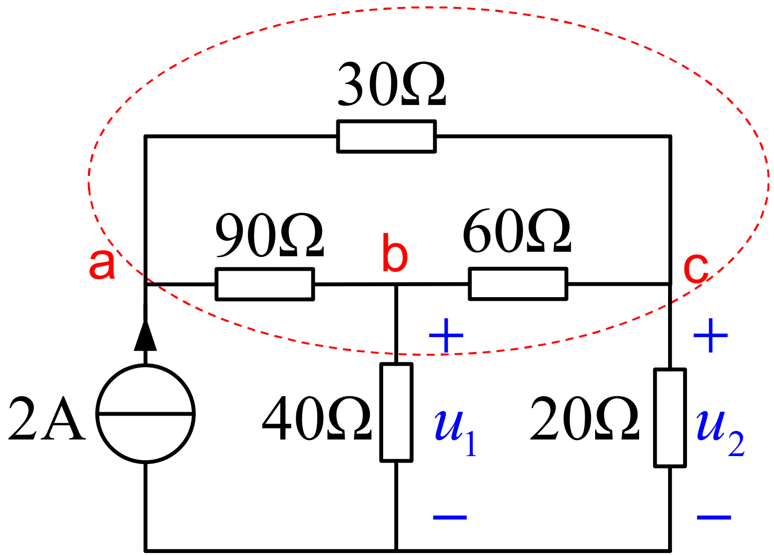
2-16，2-20，2-24 平衡电桥 星三角变换

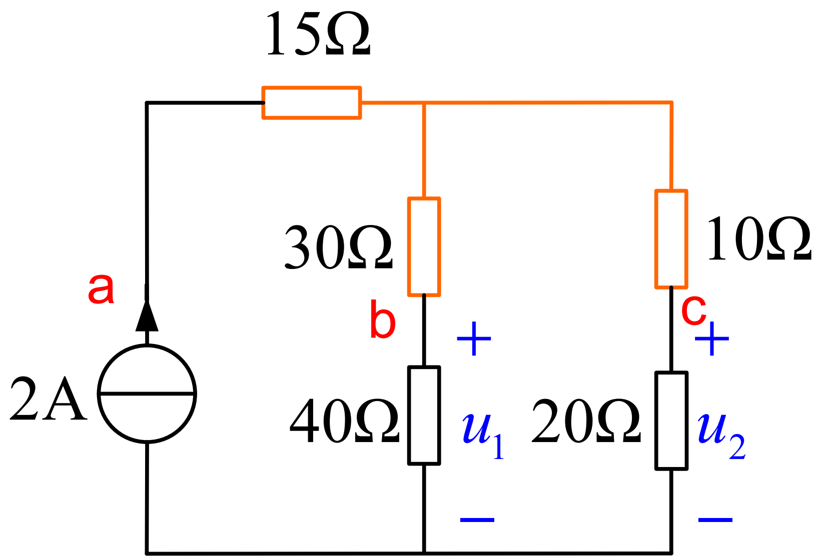
2-26 /独立电源变换

2-32 / 受控电源变换

2-36 /综合分析

2-24：确定电路中电压u_1、u_2。

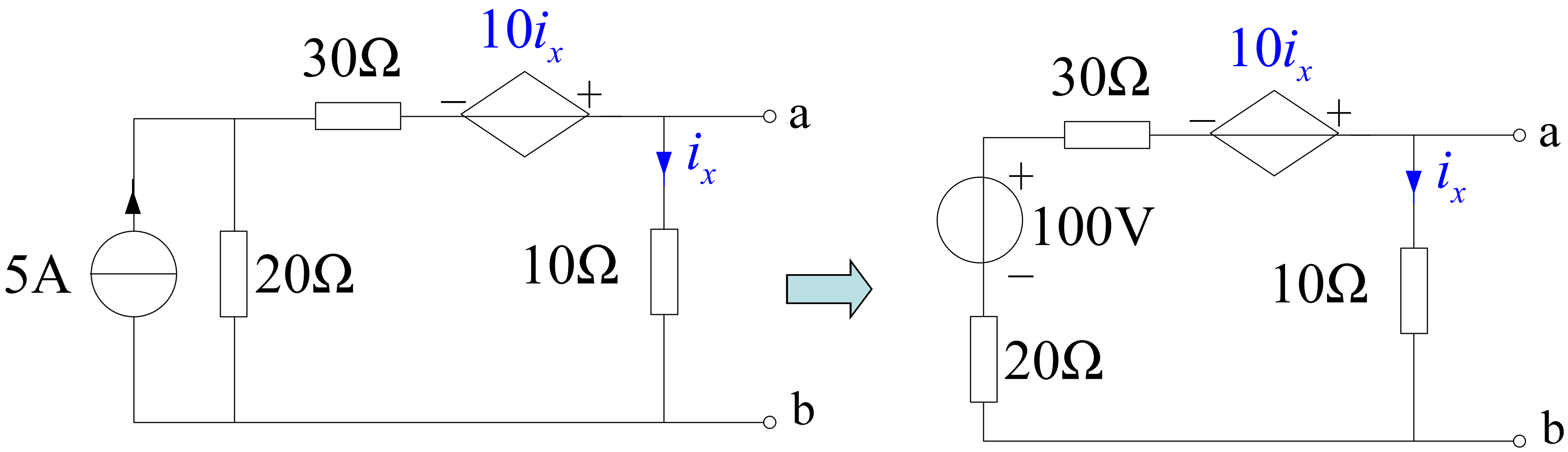


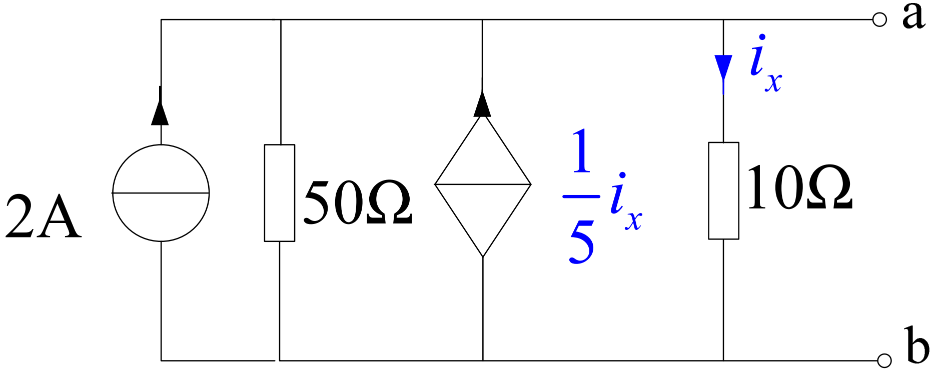


$$u_1 = \frac{30}{70+30} \times 2 \times 40 = 24\text{V}$$

$$u_2 = \frac{70}{70+30} \times 2 \times 20 = 28\text{V}$$

2-32：确定最简单等效电路。





$$R = 50\,//\,(-50)\,//\,10 = 10\Omega$$