选做的补充作业的解说

课后补充作业：将第 3 章的遗留问题“n 个不可辨别的物体放入 r 不可辨别的盒子”跟正整数拆分联系起来，找出求解方法，给出计算模型；并且用具体的例子进行说明。

- 这个问题现在没有现成的公式求解，问题很难。 所以这道题没有标准答案， 是一道探索题。
- 无序可重复将 N 拆分成由 a1,a2, …,an 的若干项之和的生成函数为：

$$G(x) = (1 + x^{a_1} + x^{2a_1} + ...)(1 + x^{a_2} + x^{2a_2} + ...) \\ ...(1 + x^{a_n} + x^{2a_n} + ...) \\ = \frac{1}{(1 - x^{a_1})(1 - x^{a_2})...(1 - x^{a_n})}$$

将上面的 a1,a2, …,an 替换为 1,2,3,…N 就是将 N 拆分成任意正整数之和的生成函数。 该生成函数的 x^N 项的系数，就是拆分方法数。

可以用这个模型来考虑这道作业题。 相当于将正整数 n 拆分成可重复的任意 r 个非负整数之和。 与上面的正整数拆分非常相似。唯一的不同是，上面的正整数拆分对拆分的项数没有限制，最多可以拆分成 N 个正整数之和。 而“n 个不可辨别的物体放入 r 不可辨别的盒子”的拆分不能超过 r 项。

所以，在编写程序或者利用计算机代数系统工具辅助计算时，不能只简单看 x^n 项的系数。而是在展开式的每一个乘积项（n 个的乘积）中，有 x 的不能超过 r 个.

特别注意的是，在计算有多少个 x 的项的乘积时，需要这样考虑：如 X^{3ai} 需要考虑是 3 个 x 的项，相当于 X^{ai} 重复了 3 次；其它依此类推。跳过那些超过 r 项 x 的乘积的项。

具体的例子：可以设 n=4, r=3。相当于将 4 个相同的乒乓球，不加任何限制第放

入 3 个一模一样的盒子的可能的方法数（不区分顺序）。

问题太难，目前我的想法中，就按这个思路探索。 如果同学们有其它思路，请给出，还可以跟我交流讨论。