

范式

这个部分为补充内容，教材上不够

真值函数 (逻辑函数)

定义1 称 $F:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 为 n 元真值函数

n 元真值函数共有多少个?

每一个命题公式(n 个命题变量) 对应于一个 n 元真值函数

每一个真值函数对应无穷多个命题公式

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2元真值函数（ 2^4 个不同函数）

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

3元真值函数会有多少个？（ 2^8 ）

思考

- n 元的真值函数对应于 n 个真值输入，一个真值输出，两种可能(0或者1)。
- n 元真值函数会有多少个？
- n 元真值函数的变量的赋值有 2^n 组不同的，每组赋值又有2种可能的函数值（真值）
- 所以一共有多少个可能的 n 元的真值函数？
- 每个真值函数其实对应于一个命题逻辑公式。
- 所以，在等价意义上，具有 n 个命题变量的不同的（互不等价的）逻辑表达式（命题公式）有多少个？对应于多少个不一样的真值表？

联结词完备集

- 定义2 设 S 是一个联结词集合, 如果任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数 (命题公式) 都可以由仅含 S 中的联结词 (运算符) 构成的公式表示, 则称 S 是联结词完备集
- 定理2.1 下述联结词集合都是完备集:
 - (1) $S1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
 - (2) $S2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
 - (3) $S3 = \{\neg, \wedge, \vee\}$ $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
 - (4) $S4 = \{\neg, \wedge\}$ $A \vee B \Leftrightarrow \neg \neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$
 - (5) $S5 = \{\neg, \vee\}$ $A \wedge B \Leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$
 - (6) $S6 = \{\neg, \rightarrow\}$? ? ? $A \vee B \Leftrightarrow \neg (\neg A) \vee B \Leftrightarrow \neg A \rightarrow B$

命题公式的对偶性及其对偶原理

- 限定性命题公式：最多仅含有否定、析取、合取逻辑联结词的命题公式。

- 命题公式A的对偶公式（Dual）：将限定性命题A中的析取联结词换成合取联结词： $\vee \rightarrow \wedge$

合取联结词换成析取联结词： $\wedge \rightarrow \vee$

1换成0，0换成1（如果存在的话）： $1 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 1$ 。

记为 A^D ,

例：A: $(P \wedge Q) \vee Q$
 $A^D: (P \vee Q) \wedge Q$

命题公式的对偶性及其对偶原理

- 对偶原理 (Duality Principle)
- 设P、Q是限定性命题公式。如果
- $P \Leftrightarrow Q$ 则 $P^D \Leftrightarrow Q^D$

对偶原理的意义：

例如如果证明了一个命题的等值式，那么根据对偶原理，该等值式的对偶式也是成立的，不用再证明。

举例说明…

有关对偶公式的一个定理

定理： 假设命题公式A与 A^D 互为对偶式， 它们涉及的命题变量有 P_1, P_2, \dots, P_n . 那么有：

$$\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow A^D(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

想象对比一下De.Morgan定律？

思考问题

- 如果证明了一个公式是永真式，那么其对偶式如何？
- 如果一个命题公式里面有 \rightarrow 及等值符号 \leftrightarrow ，那么对偶式样怎么求得？
- 如何利用有关的等值式将含有这符号 \rightarrow 与 \leftrightarrow 的公式等价替换成只有否定，析取及合取三种运算的限定性命题公式？

范式 Proposition Form

命题公式表示的某种标准化-----范式
构造新的逻辑等价式

注：教材中的范式讲得太简单，这里补充一些
（将来在逻辑设计中能用到）

范式内容

- 析取范式与合取范式
 - 简单析取式(质析取式) 与简单合取式(合析取式)
 - 析取范式与合取范式

主析取范式与主合取范式

- 极（最）小项与极（最）大项
- 主析取范式与主合取范式
- 主范式的用途、如何求主析取范式与主合取范式

范式

- 真值表可以用来判断命题公式的类型
- 真值表也可以判断两个命题公式是否等值（和蕴含）
- 真值表中包含了公式所有的信息
- 问题:随着命题公式中的命题变元增多,真值表会怎么样变化?
- 范式是命题公式的基于三个基本连接词 $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 某种意义下的规范表达式（**限定性命题公式表达方法**）
- 命题公式的范式的构造是另一种解决上述问题的方法——主析取范式和主合取范式,从这两种规范形式也可以得到真值表所具有的一切信息.
- 命题公式的范式的构造也是逻辑电路设计所需的

需要学习解决的几个问题

- 1. 什么是范式？
- 2. 范式的存在性
- 3. 如何从已知命题公式的求等价范式？
- 4. 如何根据真值表构造一个等价的范式？如何寻找到对应于一个给定真值函数的命题逻辑表达式，进一步找到相应的逻辑电路设计？

（这个在逻辑设计里面是重要的）

- 5. 如何分析范式得到有关信息

简单析取式与简单合取式

文字: 命题变元及其否定的统称

简单析取式: 由有限个文字构成的析取式 (无重复文字)

如 $p, \neg q, p \vee \neg q, p \vee q \vee r, \dots$

简单合取式: 有限个不重复的文字构成的合取式

如 $p, \neg q, p \wedge \neg q, p \wedge q \wedge r, \dots$

定理1: (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变元和它的否定

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变元和它的否定

为什么? 那么如果上面的条件不满足, 那会是什么类型?

- 定理1的证明(1)
- 充分性：显然
- 必要性：如果简单析取式不包含定理中所说的命题变量及其否定项，那么可以将所有带否定词的项取1，而其它所有项取0，则得到的真值为0，不再是真，与重言式矛盾
- (2) 怎么证明？（是否是(1)的对偶？）

析取范式Disjunction Normal Form 与合取范式Conjunction Normal Form

析取范式(DNF): 由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_r$, 其中 A_1, A_2, \dots, A_r 是简单合取式
(注明: 教材上的合取式实际上也就是主合取范式了)

合取范式(CNF): 由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_r$, 其中 A_1, A_2, \dots, A_r 是简单析取式

范式: 析取范式与合取范式的统称

范式的性质:

定理2 (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每一个简单合取式都是矛盾式

(2) 一个合取范式是永真公式当且仅当它的每一个简单析取式都是永真公式

为什么?? 结合定理1, 请重述定理2

范式存在定理

定理3 任何命题公式都存在着与之等值(等价)的析取范式与合取范式.

证 求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的 $\rightarrow, \leftrightarrow$ (将命题公式表示成等价的限定性命题公式)

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

(2) 否定联结词 \neg 的内移或消去 (利用De.Morgan定律)

$$\neg \neg A \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

范式存在定理(续)

(3) 使用分配律

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad \text{变成合取范式}$$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \text{变成析取范式}$$

(4) 利用双重否定将 $\neg(\neg p)$ 换成 p

例1 求 $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r$ 的析取范式与合取范式

解 $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r \quad \text{析取范式}$$

$$\Leftrightarrow (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \quad \text{合取范式}$$

注意: 公式的析取范式与合取范式总是存在的, 但不一定唯一

求公式的析取范式或合取范式，并判断其类型

- 例题1 求公式 $P \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 的析取范式
- $P \leftrightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg P \wedge \neg(P \wedge Q))$
- done?
 - $\Leftrightarrow (P \wedge P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
 - done?
 - $\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
 - $\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P)$
 - Done! 由此也可以看出范式不唯一。类型？
 - 不是矛盾式，是重言式吗？怎么判断？

- 求公式的 $P \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 合取范式
- 解： $P \leftrightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee (P \wedge Q)) \wedge (P \vee \neg (P \wedge Q))$
再将 $(\neg P \vee (P \wedge Q))$, $(P \vee \neg (P \wedge Q))$
都换成合取范式，
 - 进一步判断是否是重言式

虽然不唯一，公式的类型还是可以判断的。然而，不容易判断两个公式是否存在等值或者蕴含关系。为了解决这个问题以及其它一些目的，设计了所谓的主范式。

析取范式在电路设计中非常重要

- Disjunctive Normal Form is important for the circuit design methods
- 例如：在机器学习、分类学中基于规则的分类，通常采用析取范式的方式来表示模型的规则
- 如： $R = (r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_k)$

作业

- 1.3节: T39(b) T45, T65 a
- 补充: 解释一下用于判断复合命题可满足性的算法如何能用来判断一个复合命题是否永真。[提示: 考虑 $\neg P$, 其中 p 是一个已经考察过的命题]

主范式

Main Normal Form

极(最)小项与极(最)大项

极小项定义： 在含有 n 个命题变量 p_1, p_2, \dots, p_n 的简单合取式中，若每个变量都会出现一次，要么以肯定要么以否定式出现，而且也只出现一个；且第 i 个文字(约定按照下标由小到大顺序排列)出现在第 i 个位置，称这种形式的简单合取式 $\bigwedge_{i=1}^n p_i^*$ 为含有变量 p_1, p_2, \dots, p_n 的一个极小项（有些书上叫最小项）。其中 p_i^* 要么是 p_i 要么是 $\neg p_i$

极大项定义： 在含有 n 个命题变量 p_1, p_2, \dots, p_n 的简单析取式中，若每个变量都会出现一次，要么以肯定要么以否定式出现，而且也只出现一个；且第 i 个文字(约定按照下标由小到大顺序排列)出现在第 i 个位置，称这种形式的简单析取式 $\bigvee_{i=1}^n p_i^*$ 为含有变量 p_1, p_2, \dots, p_n 的一个极大项（有些书上叫最大项）。其中 p_i^* 要么是 p_i 要么是 $\neg p_i$

- 思考：极小项与简单合取式有什么异同？

极大项与简单析取式有什么异同？

续

说明:

(1) n 个命题变元产生 2^n 个不相同的极小项和 2^n 个不相同的极大项 (为什么?)

(2) 2^n 个极小项(极大项)均互不等值 (为什么?)

思考: 对于一个极小项, 如何赋值会使其为真?

思考: 使得一个极小项成真的、成假的赋值分别有多少可能?

(3) 用 m_i 表示第 i 个极小项, 其中 i 是该极小项成真的 n 个变量的真值赋值(2进制串)的十进制表示.

(4) 用 M_i 表示第 i 个极大项, 其中 i 是该极大项成假赋值的十进制表示, $m_i(M_i)$ 称为极小项(极大项)的名称.

思考: 使得一个极小项成真的、成假的赋值分别有多少可能?

极小项与极大项(续)

两个变量 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

定理 设 m_i 与 M_i 是由同一组命题变元形成的极小项和极大项, 则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \quad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$

为什么?

主析取范式与主合取范式

主析取范式: 由不同的极小项构成的析取范式

主合取范式: 由不同的极大项构成的合取范式

例如, $n=3$, 命题变元为 p, q, r 时,

$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3$ 是主析取范式

$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_5$ 是主合取范式

主范式的存在性定理:

定理 任何命题公式都存在着与之等价的主析取范式（非矛盾式）和 主合取范式（非重言式），并且是惟一的（如果不考虑排列顺序的话）。

（用真值表可以证明这点。）

注意：主范式并非是命题公式最简单的表达形式。

说明

- 矛盾式的主析取范式是一个空公式，它不包含任何最小项
- 思考：永真公式的主合取范式如何？

求主析取范式的步骤

设公式 A 含有命题变量 p_1, p_2, \dots, p_n

(1) 先求得 A 的析取范式 $A' = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_s$, 其中 B_j 是简单合取式 $j=1, 2, \dots, s$

(2) 若某个 B_j 既不含 p_i , 又不含 $\neg p_i$, 则将 B_j 展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \wedge p_i) \vee (B_j \wedge \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为 n 的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项, 即用 m_i 代替 $m_i \vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求主合取范式的步骤

设公式 A 含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n

(1) 先求得 A 的合取范式 $A' = B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_s$, 其中 B_j 是简单析取式 $j=1, 2, \dots, s$

(2) 若某个 B_j 既不含 p_i , 又不含 $\neg p_i$, 则将 B_j 展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \vee p_i) \wedge (B_j \vee \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为 n 的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项, 即用 M_i 代替 $M_i \wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

求主范式实例

例1 (续) 求 $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r$ 的主析取范式与主合取范式

解 (1) $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r$

$$p \wedge \neg q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge 1 \quad \text{同一律}$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (\neg r \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \quad \text{分配律}$$

$$\Leftrightarrow m_4 \vee m_5$$

$$\neg r \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge \neg r \quad \text{同一律}$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6 \quad \text{分配律}$$

得 $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$

由真值表构造等价的范式

- 构造出一个命题公式，使得它的真值表是给定的真值表：
- 1. 对真值表中真值为1的每一行，先找到相应的合取式（**极小项**），再将这些极小项进行析取，形成一个析取范式（**主析取范式**）。

或者：

- 2. 对真值表中真值为0的每一行，先找到相应的析取式(**极大项**)，再将这些极大项进行合取，形成一个**主合取范式**。
- **思考问题** (1) 为什么这样得到的公式刚好满足要求？
(2) 这样得到的**主析取范式** 与**主合取范式**是否等价？

由真值表构造等价的范式举例（析取范式）

- 两个变量 p, q ，真值为真的行对应的合取式：

p	q	(公式F)
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

- Row 1: $p \wedge q$
- Row 2: $p \wedge \neg q$
- Row 4: $\neg p \wedge \neg q$
- 再将这3个合取式析取，就得到与F等值的主析取范式

由真值表构造等价的范式举例（合取范式）

- 两个变量 p, q ，真值为假的行对应的析取式：

p	q	(公式F)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- Row 2: $\neg p \vee q$
- Row 3: $p \vee \neg q$
- 再将这2个析取式合取，就得到与F等值的合取范式

思考：想想其中的道理，为什么这样做是正确的？

思考

- 根据刚刚的结论，如何判断公式的类型？
- 一个公式 A 的主析取范式有 s 个极小项，那么它的主合取范式有多少个极大项？
- 假如 A 的主析取范式已知，如何得到其主合取范式？反之又如何？
- 在等价意义上，含有 n 个命题变量的主析取范式（主合取范式）有多少个不一样的？

在逻辑设计中的应用

- 注意：由实际需求穷举列出真值表，再利用真值表求主范式
- 或者是由实际需求转换成真值（逻辑）函数（命题公式），求取范式再设计出相应的逻辑电路。
- 真值表是实际需求的反映（已知所有的输入，和真值输出），再由其转换成主范式，得到相应的命题公式（逻辑函数），再化简，设计出满足实际功能需求的逻辑电路。

主析取范式的用途

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值 （判断其可满足性）

设公式 A 含 n 个命题变元, A 的主析取范式有 s 个极小项, 则 A 有 s 个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余 2^n-s 个赋值都是成假赋值 为什么??

思考: 主合取范式结论如何?

例如 $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$

成真赋值: 000,010,100,101,110;

成假赋值: 001,011,111

主析取范式的用途(续)

(2) 判断公式的类型

设 A 含 n 个命题变项, 则

A 为重言式当且仅当 A 的主析取范式含 2^n 个极小项

A 为矛盾式当且仅当 A 的主析取范式不含任何极小项, 记作 0 , 或者叫空公式

A 为可满足式当且仅当 A 的主析取范式中至少含一个极小项

问题: 主合取范式有什么类似结论?

判断命题公式类型实例

例3 用主析取范式判断公式的类型:

$$(1) A \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \wedge q \quad (2) B \Leftrightarrow p \rightarrow (p \vee q) \quad (3) C \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$$

$$\text{解 (1) } A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0 \quad \text{矛盾式}$$

$$(2) B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \quad \text{重言式}$$

$$(3) C \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

$$\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \quad \text{非重言式的可满足式}$$

主析取范式的用途(续)

(3) 判断两个公式是否等值 (想想该怎么做?)

例4 用主析取范式判断下面2组公式是否等值:

(1) p 与 $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

解 $p \Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow m_2 \vee m_3$

$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow m_2 \vee m_3$

故 $p \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

总结方法...

判断等值实例(续)

(2) $(p \wedge q) \vee r$ 与 $p \wedge (q \vee r)$

解 $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

故 $(p \wedge q) \vee r \not\Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$

思考

- 能否从两个公式的主析取范式或者主合取范式判断或者推断出这两个公式是否存在蕴含关系？如果可能的话，怎么做？

主合取范式应用（请自己思考）

例6 求 $A=(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ 的主合取范式

解 $A \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_7$
 $\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

矛盾式的主合取范式含全部 2^n 个极大项 为什么??

重言式的主合取范式不含任何极大项, 记作1

应用实例

例5 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察,需满足下述条件:

- (1) 若A去,则C必须去;
- (2) 若B去,则C不能去;
- (3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记 p :派A去, q :派B去, r :派C去

(1) $p \rightarrow r$, (2) $q \rightarrow \neg r$, (3) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

问题建模分析: 这个问题的解, 需要同时使得上述3个逻辑表达式为真;

于是相当于 求下式的成真赋值

$$A = (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \quad (\text{SAT问题求解})$$

实例(续)

求A的主析取范式

$$\begin{aligned} A &= (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \\ &\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg r)) \\ &\quad \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \\ &\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge \neg r) \wedge (p \wedge \neg q)) \\ &\quad \vee ((r \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) \\ &\quad \vee ((\neg p \wedge \neg r) \wedge (\neg p \wedge q)) \vee ((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \quad (\text{两个极小项}) \end{aligned}$$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去, 方案2 派B去

课堂作业

补充作业：利用下面的真值表，写出相应公式F的主合取范式和主析取范式。并且描述主合取范式跟主析取范式之间的关系和特征。

p	q	r	公式F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

命题公式可满足性问题介绍*

Propositional Satisfiability (SAT)

- 可满足性判断的概念、判断方法
- 可满足性判断的复杂度
- 可满足性判断问题与NP-Complete
- SAT问题的意义
- 特殊子类：霍恩子类、霍恩公式可满足性判断
- SAT问题举例：数独游戏问题建模，皇后格子问题建模

Propositional Satisfiability (SAT问题)

Definition: A compound proposition is *satisfiable* if there is an assignment of truth values to its variables that make it true.

When no such assignments exist, the compound proposition is *unsatisfiable*.

(也即判断一个命题公式是否是可满足公式)

Obviously, a compound proposition is *unsatisfiable* if and only if *its negation is a tautology*.

SAT问题的意义

- SAT问题的应用：
- 在数理逻辑、机器证明领域、人工智能、机器学习、约束满足问题、VLSI集成电路设计与检测、计算机科学理论等等领域具有广阔的应用背景.
- 很多问题的解决可以建模成SAT问题求解； SAT问题的解决，也同时能解决那些可以归约为SAT问题的NP问题的求解；
- 正是由于SAT的重要地位,各国学者对它进行了广泛而深入的研究，尤其是求解算法（快速算法的）研究，国际上也有相应的SAT问题算法大赛。

SAT问题的复杂度

- **思考问题：** 对于一个给定的含有 n 个命题变量的命题公式，如何寻找一组真值赋值，使得公式为真？
- (1)真值表？ (2) 转换成主合取范式或者主析取范式？
- **复杂度：** 上面问题及解决方法的复杂度如何？
- **现实：** 到目前为止，没有一个能在多项式时间类能解决的算法完成对任意公式判断。
- **NP问题：** SAT问题是第一个NP-Complete问题,并且是一大类NP-Complete问题的核心.大量的实践表明,许多NP-Complete问题无论是对于计算机科学理论还是工程应用都有着至关重要的意义。
- 1971年Cook首次证明了SAT是NP-Complete, 从而大量的计算问题都可以归约到SAT.

霍恩子类、霍恩公式

- SAT问题的复杂度是指数级的。但其中有一个特殊的、重要的子类--**Horn子类**的可满足性判断就相对容易得多。
- **霍恩子句 (Horn Clause)** 是带有最多一个肯定文字的子句 (一个简单析取范式)
- **霍恩公式** : 霍恩子句的合取范式, 也叫做 **霍恩公式**
- 例如: $\neg p_1 \vee \dots \vee \neg p_n \vee q$ 是一个霍恩子句, 它可以等价地表示为 $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$
- 霍恩子句得名于逻辑学家 Alfred Horn, 他在 1951 年首先在文章《On sentences which are true of direct unions of algebras》, Journal of Symbolic Logic, 16, 14-21 中指出这种子句的重要性。

霍恩子类、霍恩公式

有且只有一个肯定文字的霍恩子句叫做**明确子句**，没有任何肯定文字的霍恩子句叫做**目标子句**。由霍恩子句的合取式合取范式，也叫做 **霍恩公式**。霍恩子句在逻辑编程中扮演基本角色并且在构造性逻辑中很重要。

下面是一个霍恩子句的例子： $\neg p \vee \neg q \vee \cdots \vee \neg t \vee u,$

它可以被等价地写为：

$$(p \wedge q \wedge \cdots \wedge t) \rightarrow u.$$

- **问题：**对于一个霍恩子句，试着分析其可满足性判断的复杂度
- **霍恩公式的可满足性判断：**现在已经有比较有效的算法进行判断，并且容易编写成程序。略！

霍恩子类、霍恩公式

- 霍恩子句在自动定理证明中的使用，能使得子句在计算机上表示得更加高效。实际上，**Prolog** 就是完全在霍恩子句上构造的编程语言。
- 注：在离散数学课程里，不再展开这个话题。

Notation

$\bigvee_{j=1}^n p_j$ is used for $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$

$\bigwedge_{j=1}^n p_j$ is used for $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$

Needed for the next examples.

SAT问题举例--Sudoku数独游戏

举例：A **Sudoku puzzle**: a 9×9 grid (九宫格)

9个 3×3 子块. 81 个格子中部分被赋值了 $1, 2, \dots, 9$ 中的一个

The puzzle is solved by assigning numbers to each blank cell so that every **row**, **column** and **block** contains each of the nine possible (**distinct**) numbers.

问题的解决是使得每行、每列、每子块都恰好含有9个不同的数字。

(思路：利用可满足性对问题进行建模，然后解决问题。)

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
						6		

Modeling as a Satisfiability Problem

Let $p(i,j,n)$ denote the proposition that is true when the number n is in the cell $(i^{\text{th}}, j^{\text{th}})$.

There are $(9 \times 9) \times 9 = 729$ such propositions.

In the sample puzzle $p(5,1,6)$ is true, but $p(5,j,6)$ is false for $j = 2,3,\dots,9$

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

Encoding as a Satisfiability Problem

For each cell with a given value, assert $p(i,j,n)$, when the cell (i^{th} , j^{th}) has the given value.

将约束条件转换成等价意义上的：“命题逻辑公式为真”

(1) Assert that **every row** contains every number.

$$\bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 p(i, j, n)$$

(2) Assert that **every column** contains every number.

$$\bigwedge_{j=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{i=1}^9 p(i, j, n)$$

Encoding as a Satisfiability Problem

(3) Assert that each of **the 3 × 3 blocks** contain every number.

$$\bigwedge_{r=0}^2 \bigwedge_{s=0}^2 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{i=1}^3 \bigvee_{j=1}^3 p(3r + i, 3s + j, n)$$

(4) Assert that **no cell contains more than one number**.

Take the conjunction over all values of n, n', i , and j , where each variable ranges from 1 to 9 and $n \neq n'$, of

$$p(i, j, n) \rightarrow \neg p(i, j, n')$$

Solving Satisfiability Problems

To solve a Sudoku puzzle, we need to find an assignment of truth values to the 729 variables of the form $p(i,j,n)$ that makes the conjunction of all assertions above true. 就是去寻找使得这个包含729个命题变量的上面的4组逻辑表达式都为真的所有真值赋值，或者说四组表达式的合取式为真的赋值。

A truth table can always be used to determine the satisfiability of a compound proposition. But this is too complex even for modern computers for large problems. 理论上真值表可以解决这个可满足性问题。

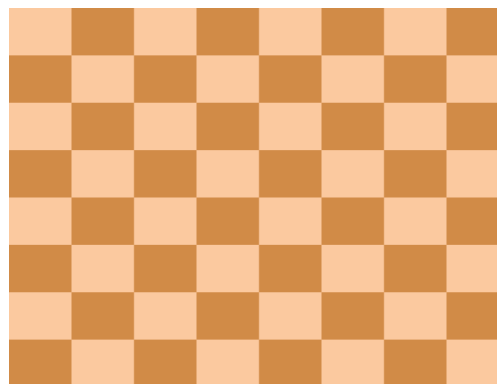
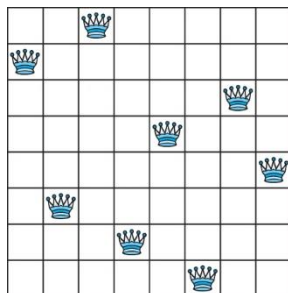
There has been much work on developing efficient methods for solving satisfiability problems as many practical problems can be translated into satisfiability problems. 要建立有效算法解决实际问题中的可满足性问题，还有很多工作要做。

Eight Queens Puzzle 8皇后谜题

The **eight queens puzzle** is the problem of placing eight chess queens on an 8×8 chessboard so that no two queens threaten each other; thus, a solution requires that **no two queens share the same row, column, or diagonal**. 同行、同列、同对角线不能有俩皇后

The eight queens puzzle is an example of the more general **n queens problem** of placing n non-attacking queens on an $n \times n$ chessboard, for which solutions exist for all natural numbers n with the exception of $n = 2$ and $n = 3$.

解决思路：一样可以利用可满足性对其进行建模，具体模型参见教材。



- 作业： 1.3 节 T67 (b)

- 补充作业：

求公式的主合取范式与主析取范式：

$$(\neg \mathbf{R} \wedge (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P})) \rightarrow (\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}))$$