# Partial Orders (偏序关系)

# Partial Orders (偏序关系)

- Ordering （排序） is a very important issue.
- There are so many useful techniques on “Ordering” .
- We often use binary relations to order some or all of the elements of sets. 用二元关系将集合的所有元素或者部分元素进行排序
- Examples: Lexicographic order(**字典排列法**), ordering real numbers, ordering students based on scores…
- Examples to introduce “partial order”

# Partial Orders (偏序)

**Definition:** Let *R be a relation on A. Then R is a partial order iff R is*

reflexive, antisymmetric and transitive

*(A, R) is called a partially ordered set or a poset.*

集合A上的同时满足自反、反对称和可传递性的二元关系称为偏序关系。

集合A与相应的偏序关系一起称为偏序集, 记作(A, R)

# Examples

- *例1*　实数集R上的“≤”关系显然是一个偏序关系。

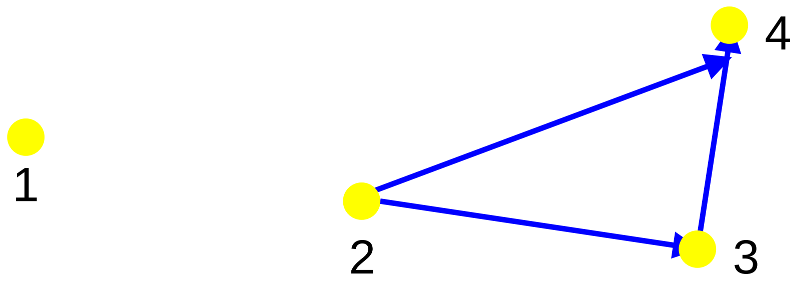
- *例2*　The relation “$\subseteq$” on the power set $2^U$ of U is a partial order as well。

同学们能否观察出这两个例题里的不一样的地方？

- *例3*　设A={1,2,3,4,6,8,12}，定义A上的整除关系：当且仅当$a$ 整除$b$ 时，有$a$R$b$。
容易证明 R是A上的偏序关系。

# Examples

- 例题4： 下图表示的二元关系是偏序吗？




•实数集R上的“＜”关系不是偏序关系。

•$2^U$上的真包含关系“$\subset$”也不是偏序关系。

# 理解偏序

Understand why the relation “order” needs the three properties from real ordering examples.

如何理解为什么“序”关系需要以上三种性质？

# Partial Orders (偏序)

- **Partial orders** allow elements to "precede" one another but not necessarily, which means that it is not required that any two things be related under a partial order.
- Denotation: $\leq$ （很多情况下偏序用这种符号表示）

  we use $a \leq b$ to denote that $(a,b) \in R$ in an arbitrary poset $(A,R)$.
- 偏序集下，一个元素可能"先于"另一个元素，但不是必须的，两个元素可以没有关系。

**That's the *partial part of it!***

- For elements a and b in A, if $a \leq b$ or $b \leq a$,

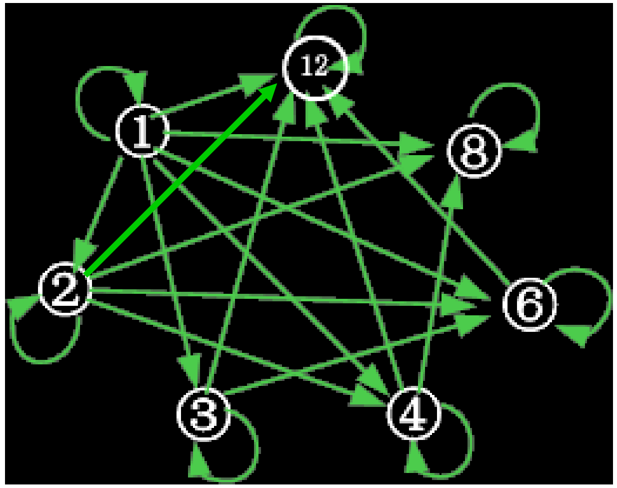
  we call a and b are comparable（可比较的）
- if neither $a \leq b$ nor $b \leq a$, we call a and b are incomparable （不可比较）
- 注：这里的$\leq$仅仅是个符号，并非实数集上的大小。

# 2 哈斯图 Hasse Diagram
# 偏序的一种特殊的图形表示方式

- **构造** Hasse diagram: (从关系的有向图出发构造Hasse图的方法）
- 1) 设计构造一个能表示 poset *(A, ≤)* 而且比较容易从中反映出内在的序的图形。我们让所有边由下朝上。
- 2) 去掉所有单边弧 Eliminate all loops
- 3) 去掉所有冗余的边，这些边本可以有传递性得到的，**凡是能从传递性得到的边都不再保留**。 Eliminate all arcs that are redundant because of transitivity
- 4) 去掉所有的箭头eliminate the arrows at the ends of arcs since everything points up. （由下朝上就代表着方向）

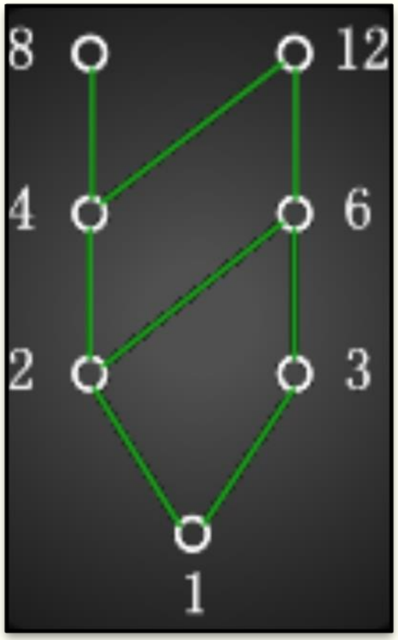
# 偏序关系的哈斯图（Hasse diagrams）续

*例如* 前面例3中整除关系Hasse图如下：




有限集A上偏序关系“≤”的Hasse图有|A|个结点。

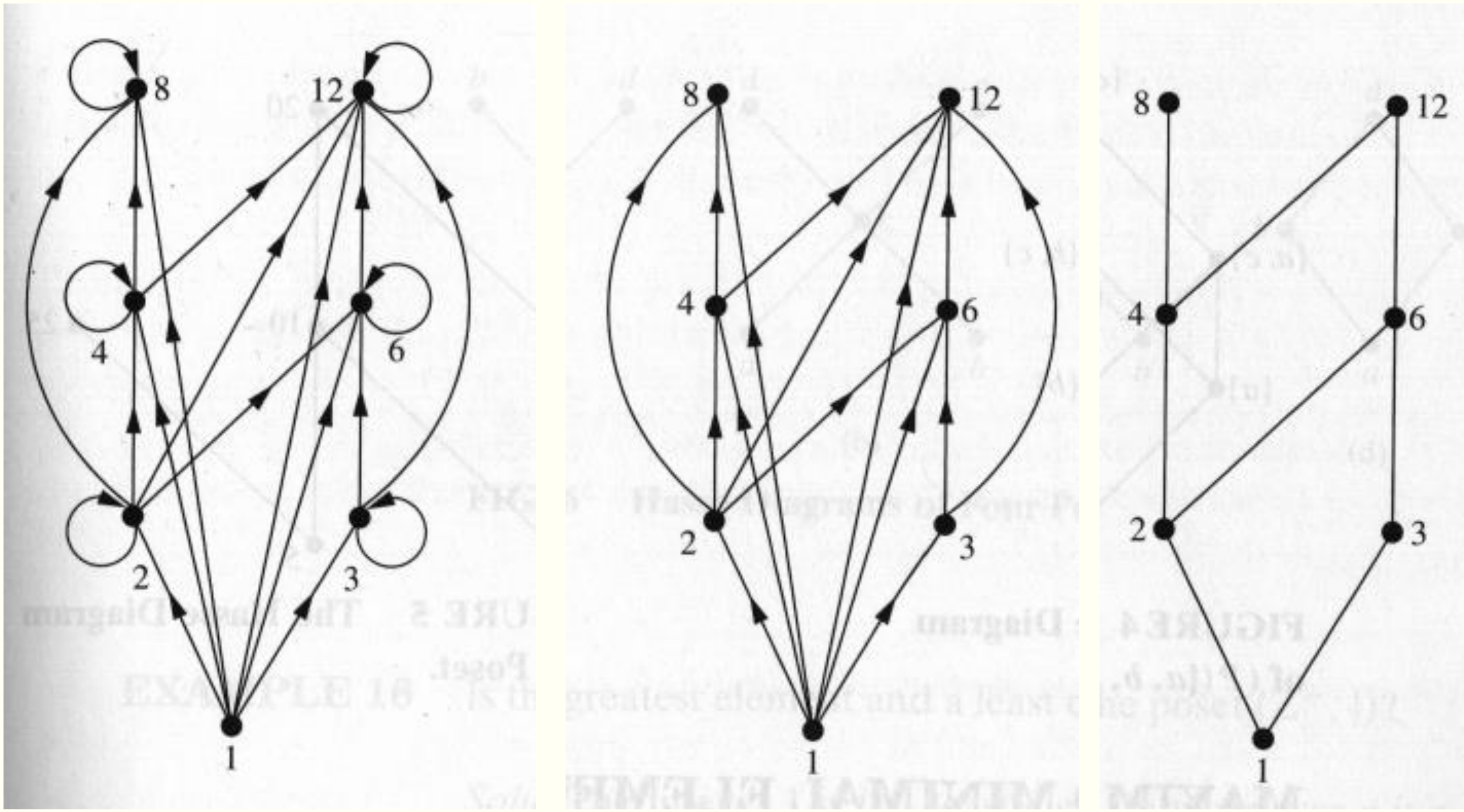
若元素a≠b且a≤b时，则结点a画在结点b的下方。




若a≤b ，且在集A中不存在任何其它元素c，使得a≤c, c≤b，则一条有向边由*a*指向*b*。

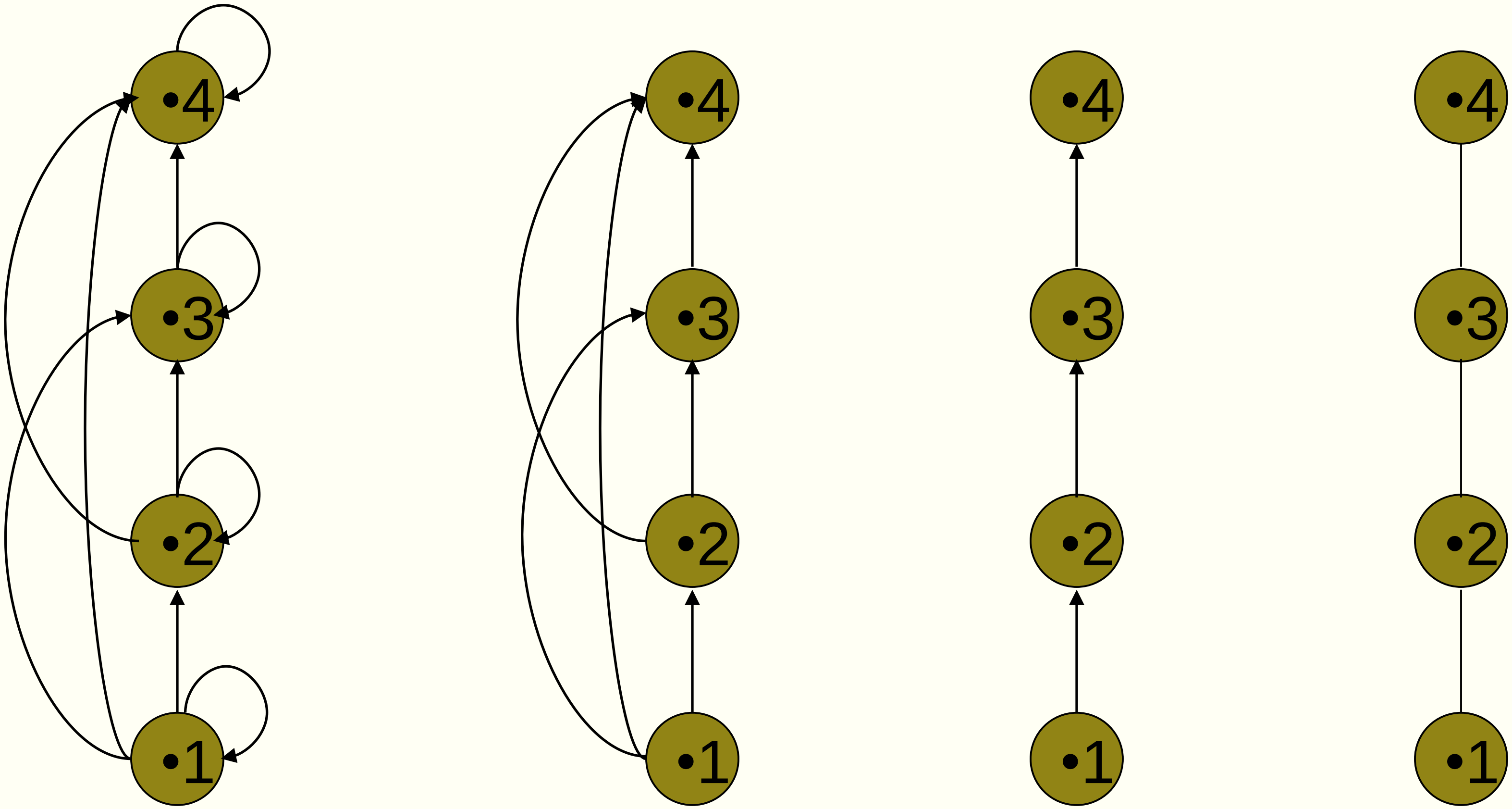
# Hasse Diagram

- For the poset ({1,2,3,4,6,8,12}, |)



# Example Hasse diagram

- "≤" on {1, 2, 3, 4}



**例4** 设$U=\{a, b, c\}$，则“$\subseteq$”关系是$2^U$上的偏序关系，偏序关系“$\subseteq$”的Hasse图如下：

Copyright ©The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.
Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and its Applications*, 7e

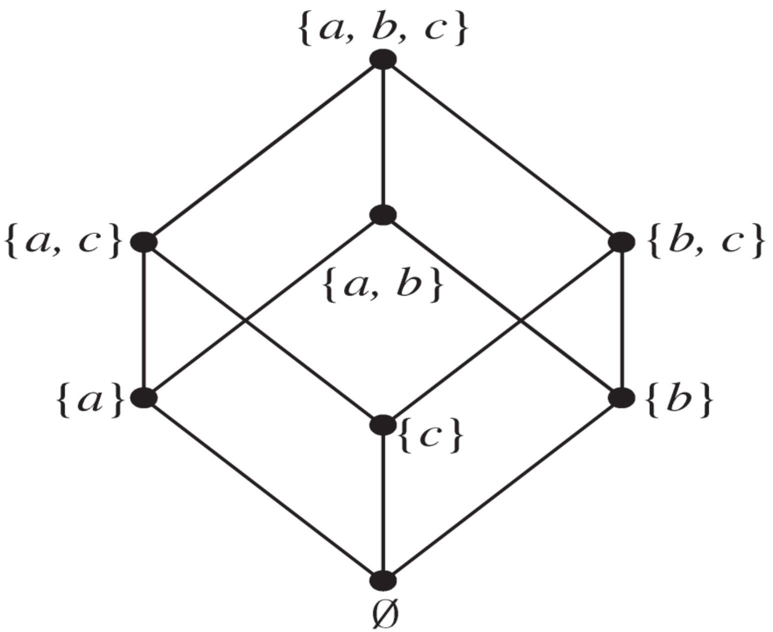
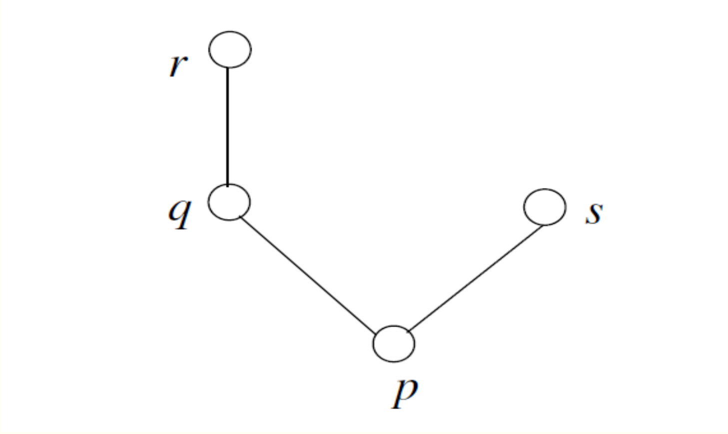



FIGURE 4 **The Hasse Diagram of $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$.**

# Hasse Diagram




- **想想：** 能根据这个HASSE 图还原出偏序关系吗？

# Partial Orders—Total Order(全序)

- Definition: if any two objects x and y are always related in a poset ,either $x \leq y$ or $y \leq x$ , it is called a total order or linear order or simple order. In this case the poset (A, $\leq$) is called a chain(链) as well

    (任意的两个元素都是可比较的，称为全序）
- *Your examples please…*
- *Understanding "**Partial**" …*
- *The key word "**Partial**" is used to describe partial orderings because pairs of elements may be incomparable, not always comparable. Otherwise, it is called* total order

# 最大、最小元（Greatest element & least element）

- 定义（**最小元**）一个偏序集(A, $\leq$), S为A的非空子集。如果S中存在一个元素a使得$\forall b \in S$, 有$a \leq b$。则称a为S的最小元。

问题：最小元是否一定存在？唯一吗？为什么？

•举例说明…

•**定义（良序）**：如果一个偏序集合的任一非空子集均有最小元，则称之为良序集

•Examples...

•鼓励学生自己定义最大元…

•**问题：全序与良序有什么关系?**

•**良序集合一定是全序，反之不真。 但有限全序一定是良序！**

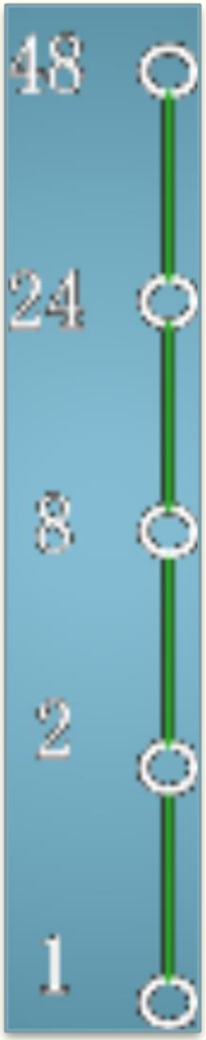
**为什么？ 请同学们自己课堂内动手证明上面的结论！**

- *例如*　实数集R上的数之间的小于或等于关系"≤"就是R上的一个全序，

- 正整数集N上的小于或等于关系"≤"也是N上的一个全序。

- N上的整除关系就仅是一个偏序而不是全序。

- *例5*　设A={1, 2, 8, 24, 48}，则A上的整除关系是A上的偏序，并且也是一个全序。是否是良序？



- 问题：（{1,2,3,4,5}，≤）是一个全序，容易得到其最大元和最小元。那么（{1,2,3,4,5}，≥）如何？

# 字典顺序举例

- 想象字典是如何排序的? 是全序还是良序?
- 计算机系统中的字符串排序比较

# 极大元、极小元
# (maximal element & minimul element)

- **定义**（极小元）一个偏序集(A, ≤) .如果a∈A. 如果A中不存在任何元素x使得x ≤ a。则称a为A的极小元。
- 注：笼统第说没有更小的就称为极小，没有更大的就称为极大
- **问题**：A存在极小元吗？ 唯一吗？ 为什么？
- 举例说明…

- 学生自己定义极大元…

- 问题：极大极小元与最大最小元的关系如何？

Copyright ©The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.
Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and its Applications*, 7e

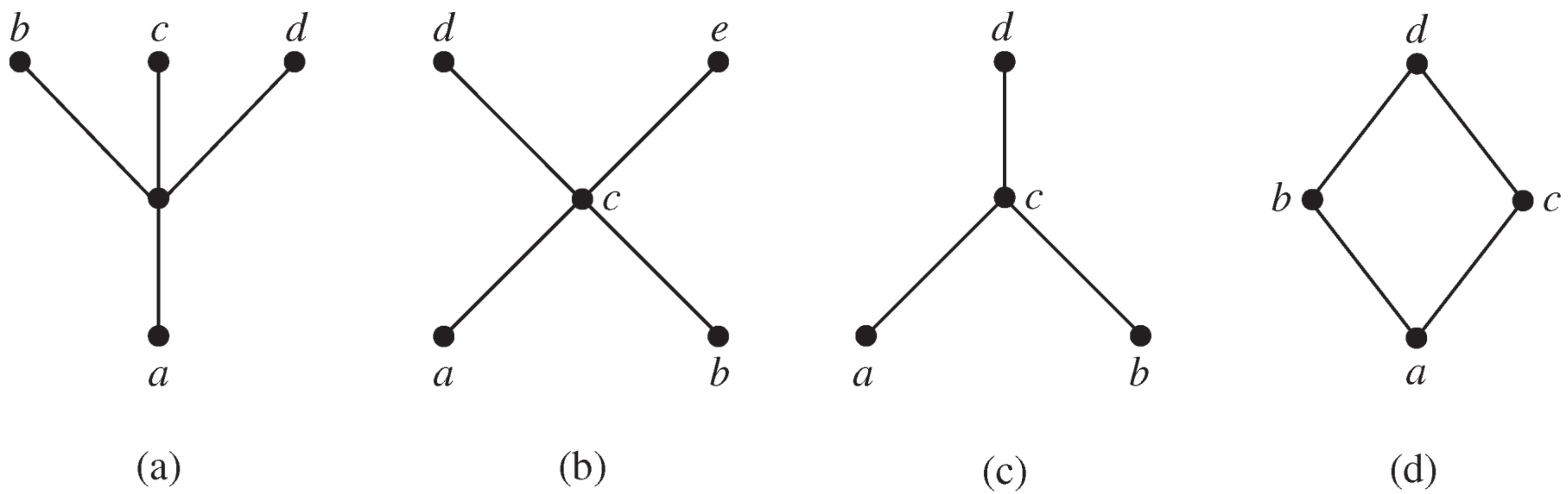



FIGURE 6 **Hasse Diagrams of Four Posets.**

上界、下界、最大下界、最小上界等概念
格的概念等等
引导学生进一步自学代数运算、格论基础知识

# 良序定理与数学归纳法

- **良序定理Well-ordering Theorem**：任何非空集合S，存在S上的二元关系R，使得<S，R>是良序集。它意味着：任何集合都可以良序化。
- **非负整数集合的良序性**：每个非空的非负整数集都有最小元
- **非负整数集合的良序性是数学归纳法正确性的依据！**

# Climb an Infinite Ladder and Doninoes

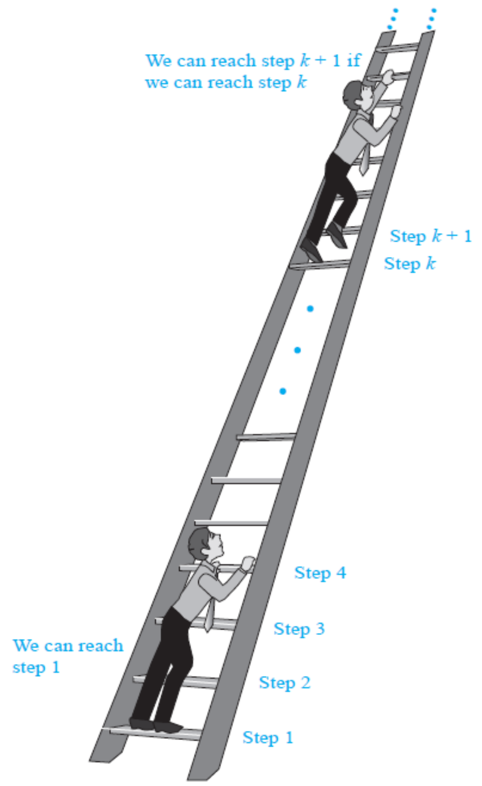



**FIGURE 1** Climbing an Infinite Ladder.

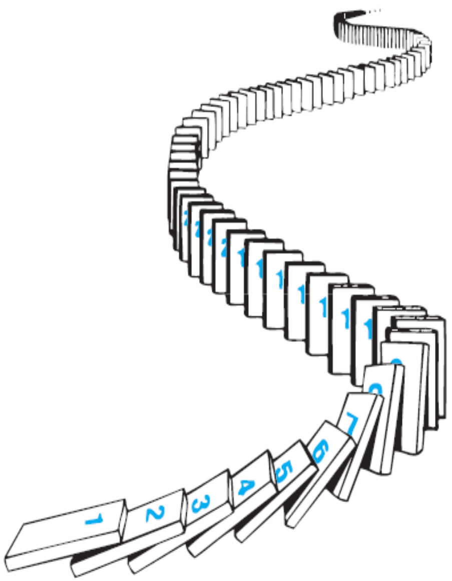



**FIGURE 2** Illustrating How Mathematical Induction Works Using Dominoes.

# 引言—归纳发现规律

- 前$n$个正奇数之和的公式是什么？
- 对$n$=1,2,3,4,5来说，前$n$个正奇数之和为：
  - 1=1，1+3=4，1+3+5=9，
  - 1+3+5+7=16，1+3+5+7+9=25
- 猜测前$n$个正奇数之和是$n^2$
- 假如这个猜测是正确的，就需要一种方法来证明

# 证明归纳发现的断言

- 数学归纳法：是证明这种类型的断言的极为重要的证明技术
  - 如何使用数学归纳法
  - 为什么它是有效的证明技术
- 注意：
  - 数学归纳法只能证明通过其它方式获得的结果
  - 但它本身不是发现公式或公理的工具

# 整数集的良序性

- 数学归纳法的有效性来源于如下关于整数集的基本公理：
  **良序性:** 每个非空的非负整数集都有最小元

- 例：用良序性证明除法算法（同学们课后自己试试）。
  - 若$a$是整数而且$d$是正整数，则存在唯一的整数$q$和$r$，满足$0 \le r < d$和$a = dq + r$

- 注意：
  - 数学归纳法的假设，并非假定对所有正整数来说$P(n)$为真，
  - 只是证明了：若假定$P(n)$为真，则$P(n+1)$也为真
  - 因此，数学归纳法不属于循环论证

# 为什么数学归纳法是有效的？

- 假定知道$P(1)$为真，而且对所有正整数$n$来说$P(n)\rightarrow P(n+1)$为真
- 为了证明对所有正整数来说$P(n)$为真，假定至少存在一个使$P(n)$为假的正整数
- 那么使$P(n)$为假的所有正整数的集合$S$非空
- 根据良序性，$S$有一个最小元，把它表示为$k$
- 可以知道$k$不是1，因为$P(1)$为真
- 因为$k$是正的，并且大于1，所以$k$-1是一个正整数
- 因为$k$-1小于$k$，所以它不属于$S$
- 所以$P(k-1)$必然为真
- 因为$P(k-1)\rightarrow P(k)$为真，所以$P(k)$为真
- 这与对$k$的选择相矛盾

# 数学归纳法的第二原理

## （strong induction 强数学归纳法）

- To prove that $P(n)$ is true for all positive integers $n$, where $P(n)$ is a propositional function, complete two steps:
  - *Basis Step*: Verify that the proposition $P(1)$ is true.
  - *Inductive Step*: Show the conditional statement

  $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$ holds for all positive integers $k$.
- 假定对$k$=1,2,…,$n$来说$P(k)$为真，证明在这个假定的基础之上$P(n+1)$也必然为真（或者称为：第二数学归纳法）
- 证明对所有正整数$n$来说$P(n)$为真的两个步骤：
  - 基础步骤：证明$P(1)$为真
  - 归纳步骤：证明对每个正整数$n$来说，$[P(1)\wedge P(2)\wedge\ldots\wedge P(n)]\rightarrow P(n+1)$为真

- 例如：
- 证明：若$n$是大于1的整数，则$n$可以写成素数之积
  - 解：设$P(n)$：$n$可以写成素数之积
  - 基础步骤：$P(2)$为真，因为$P(2)$可以写成一个素数之积，即它自身
  - 归纳步骤：假定对所有满足$k \le n$的正整数$k$来说$P(k)$为真，要完成归纳步骤就必须证明在这个假定下$P(n+1)$为真

- 注意：
  - 为了证明对$n=k,k+1,\ldots$来说$P(n)$为真，其中$k$是整数
  - 首先证明$P(k),P(k+1),\ldots,P(r)$都为真（基础步骤）
  - 然后证明对每个整数$n\geq r$来说$[P(k)\wedge P(k+1)\wedge\ldots\wedge P(n)]\rightarrow P(n+1)$为真（归纳步骤）

# 注

- 后面学习树的知识，证明树的边数=结点数-1的定理时，也会用第二数学归纳法。

# 一般化的良序归纳原理

良序归纳原理 The principle of Well-Ordered induction : Suppose

That $(S, \prec)$ *is a well-ordered* set. Then $P(x)$ *is true for all* $x \in S$, *if*

*Inductive step: For every* $y \in S$, *if* $P(x)$ *is true for all* $x \in S$ *with* $x \prec y$,
*then* $P(y)$ is true.

•Note: strong Induction is sometimes called the *second principle of mathematical induction* or *complete induction somewhere*. 第二数学归纳法 就是良序归纳原理在整数集合上的结论

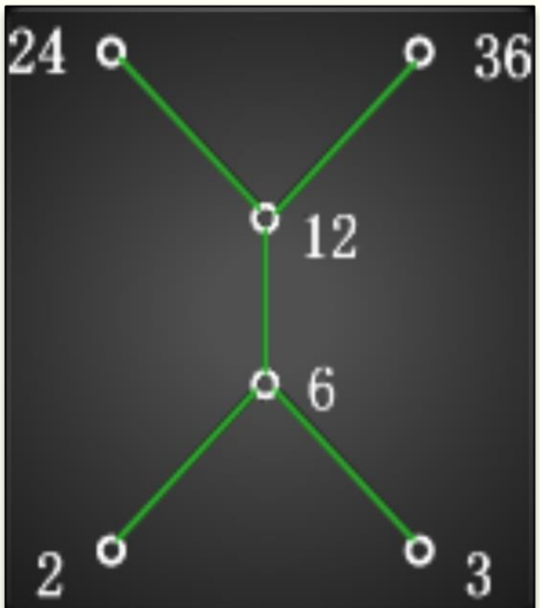
# 作业

- 5.6 T7 (a)， T11， T25, T33， T39

- 以下是一些练习和例子, 同学们自己看看做做

# 偏序集练习

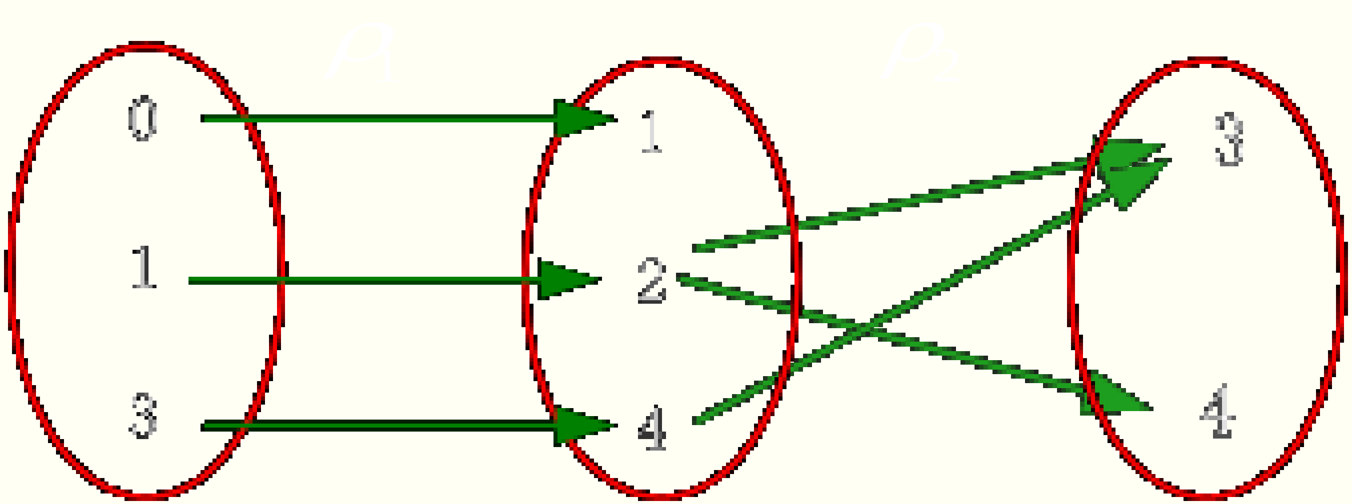
- 1. 对下述论断判断正确与否，在相应括号中键入“Y”或“N”。
- （1）设A={2, 3, 6, 12, 24, 36}，A上的整除关系是一偏序关系，用“≤”表示。 •Y
- （a）该偏序关系的次序图是 （ ）




- (b)“≤”={(2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6), (6, 12), (12, 12), (12, 24), (24, 24), (36, 36)} （ •N ）
- （2）集合A={3, 9, 27, 54}上的整除关系是A上的全序
- （ •Y ）

## •*例 题*

•1．给定$R_1$=｛(0,1),（1,2），（3,4），$R_1 \circ R_2$ =｛(1,3)，（1,4），（3,3）｝，求一个基数最小的关系，使满足$R_2$的条件. 一般地说,若给定$R_1$和$R_1 \circ R_2$ ，$R_2$ 能被唯一地确定吗?基数最小的$R_2$能被唯一确定吗？




• **解** 满足上述条件的最小基数的关系

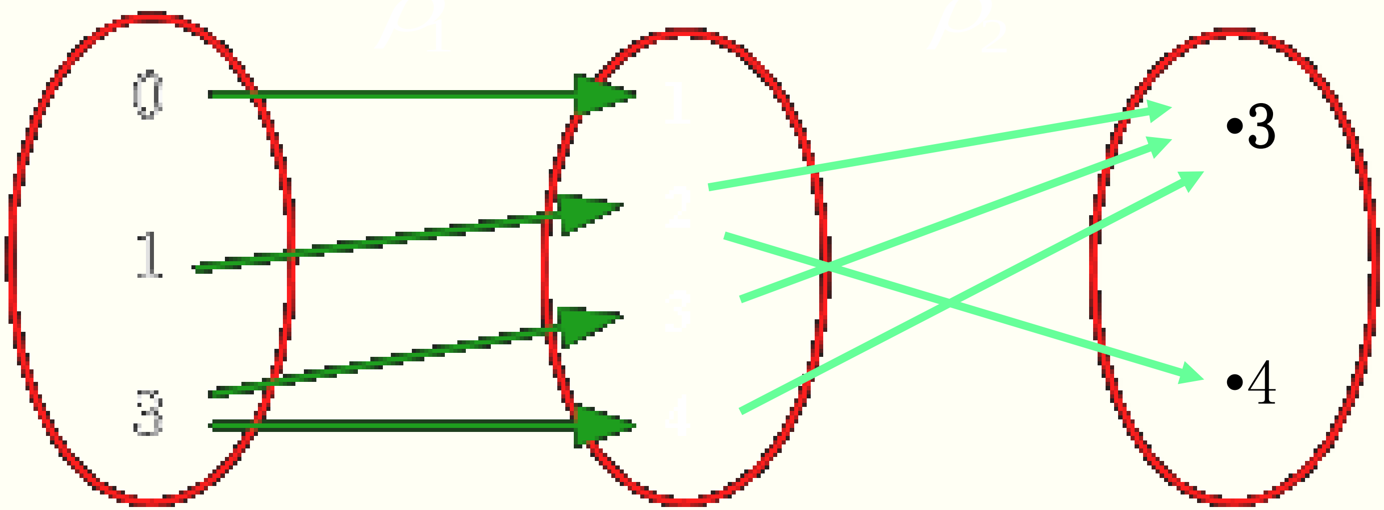
• $R_2$ =｛（2, 3），（2, 4），（4, 3）｝

•一般说，给定$R_1$和$R_1 \circ R_2$，不能唯一的确定$R_2$ 。 例如$R_2$=｛（2,3），(2,4)，(4,3)，(0,0)，(3,3)｝也可以.

- 给定$R_1$和$R_1 \circ R_2$，也不能唯一的确定出最小基数的$R_2$。

- 例如 $R_1$=｛（0, 1），(1, 2)，(3, 3)，(3, 4)｝，

$R_1 \circ R_2$=｛（1, 3），(1, 4)，(3, 3)｝，




- 则$R_2$=｛（2, 3），(2, 4)，(4, 3)｝或
- $R_2$=｛（2, 3），(2, 4)，(3, 3)｝都可以。

•2. 下列关系哪一个是自反的、对称的、反对称的或可传递的？

- （1）当且仅当$n_1n_2<8$($n_1, n_2 \in N$）时，有$n_1Rn_2$
- （2）当且仅当$r_1 \leqslant |r_2|$ ($r_1, r_2 \in R$)时，有$r_1Rr_2$

- 解（1）R不是自反的，如4∈N，但4·4=16>8。
- R是对称的，因为 对于任意的 $n_1$, $n_2 \in N$，

若有 $n_1n_2 < 8$，则 $n_2n_1 = n_1n_2 < 8$。

- **R不是反对称的，例，2·3<8，3·2<8，但3≠2.**

•R不是可传递的，例如，3·2<8，2·3<8，但3·3=9>8。

•（2）R是自反的，因为对任意的$r \in R$，有$r \leqslant |r|$。

•R不是对称的，如$-1 \leqslant |3|$，但$3 > |-1|$。

•R不是反对称的，如$-3 \leqslant |2|$，$2 \leqslant |-3|$，但$-3 \neq 2$。

•**R不是可传递的，$100 \leq |-101|$， $-101 \leq |2|$，但$100 > |2|$**

3 设$R_1$和$R_2$是集合A上的任意两个关系,判断下列

- 命题是否正确,并说明理由.
- （1）若$R_1$和$R_2$是自反的，则$R_1 \circ R_2$也是自反的；
- （2）若$R_1$和$R_2$是非自反的，则$R_1 \circ R_2$也是非自反的；

- 解 （**1**）正确。
  - 因为对任意的$a \in A$，有$aR_1a$，
  - 又对任意的$a \in A$，有$aR_2a$ .
  - 所以对任意的$a \in A$，有 $a(R_1 \circ R_2)a$ ，
  - 因此$R_1 \circ R_2$也是自反的。
- (2)否。
  - 例如，设集合A=｛a, b｝.
  - $R_1$=｛(a ,b)，(b ,a)｝，$R_2$ =｛(a, b)，(b, a)｝
  - 显然$R_1$和$R_2$都是非自反的，但$R_1 \circ R_2$自反。

- （3）若$R_1$和$R_2$是对称的，则$R_1 \circ R_2$也是对称的；
- （4）若$R_1$和$R_2$是反对称的，则$R_1 \circ R_2$也是反对称的；
- （5）若$R_1$和$R_2$是可传递的，则$R_1 \circ R_2$也是可传递的；

- **解** （3）否．例如，设集合A=｛1,2,3｝，
- $R_1$=｛（1,2），（2, 1）｝ ,$R_2$=｛（1,3），(3,1)｝，
- 显然 $R_1$和$R_2$都是对称的，

- 但$R_1 \circ R_2$=｛（2,3）｝不是对称的。

- (4) 否 ．例如设 A =｛1, 2, 3｝, $R_1$=｛(1, 2), (3， 3）｝，
- $R_2$ =｛(2, 3）, (3， 1）｝显然$R_1$和$R_2$都是反对称的，

- 但$R_1 \circ R_2$ =｛（1， 3），(3, 1)｝不是反对称的。

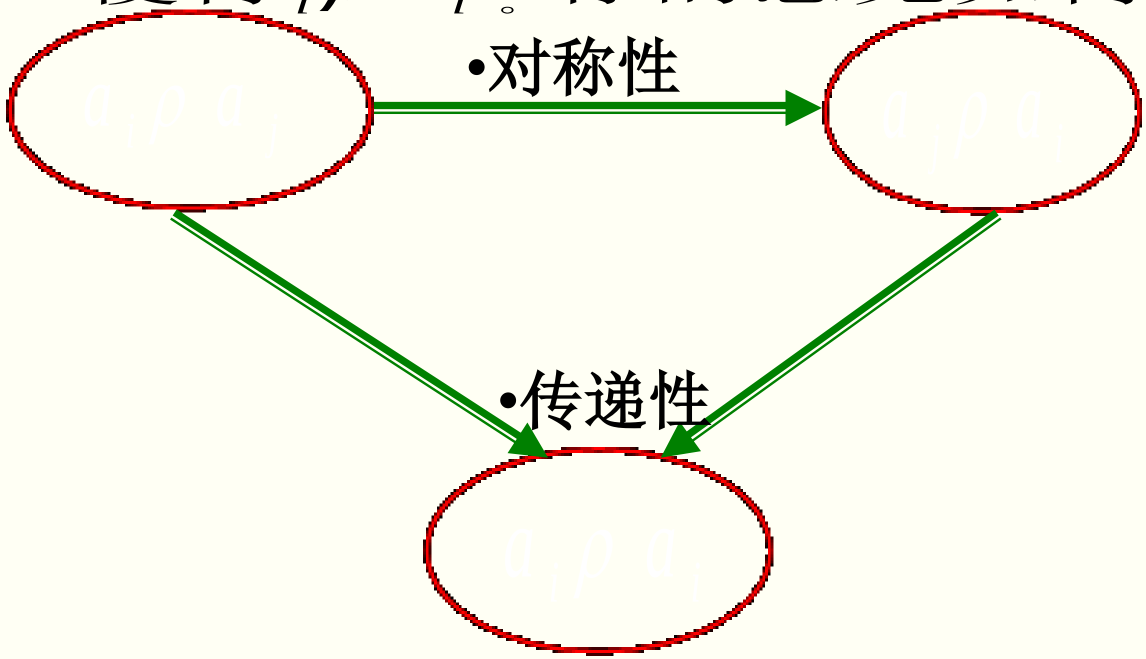
- （5）否 ．例如设 A =｛1, 2, 3｝, $R_1$=｛(1, 2), (2, 3）, (1, 3）｝，
- $R_2$ =｛（2， 3），（3， 1），（2， 1）｝，
- 显然$R_1$和$R_2$都可传递的.

- 但$R_1 \circ R_2$=｛(1, 3）, (2, 1）, (1, 1)｝ 不是可传递的。

• 4．有人说，集合A上的关系 $\rho$ ，如果是对称的且可
• 传递，则它也是自反的。其理由是，从 $a_i \rho a_j$，

由对称性 $a_j \rho a_i$，再由可传由可

便得 $a_i \rho a_i$。你的意见如何？




• **错!**

• 例　设 A＝{1,2，3}

• R＝{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)}

- 5.　设$R_1$是集合A上的一个关系，$R_2$=｛（a, b）｜ 存在 c，使（a, c）$\in R_1$且（c, b）$\in R_1$｝，试证明：
- 若 $R_1$是一个等价关系，则$R_2$也是一个等价关系。

- 证明　因为$R_1$是自反的，所以对于任意的 a $\in$A ，有（a, a）$\in R_1$ ，　由（a, a）$\in R_1$ , (a, a) $\in R_1$
- 因此有 （a, a)$\in R_2$ , $R_2$ 是自反的。

- 对于任意的a，b$\in$A, 若（a, b）$\in R_2$ ,
- 则必有元素c$\in$A，使得（a, c）$\in R_1$, 且（c, b）$\in R_1$ ,
- 由$R_1$的对称性, 又有（b, c）$\in R_1$ , 且（c, a）$\in R_1$ ,
- 因而有（b, a）$\in R_2$ , 故$R_2$ 是对称的。

•对于任意的a, b, c∈A，若（a, b）∈$R_2$, (b, c) ∈$R_2$,

•则必有元素 d , e ∈ A ，使得

•（a, d）∈$R_1$ (d, b) ∈$R_1$ (b, e) ∈$R_1$ (e, c) ∈$R_1$

• 由$R_1$的可传递性，又有（a, b）∈$R_1$, (b, c) ∈$R_1$,

•于是有（a, c）∈$R_2$,故$R_2$是可传递的。

•由上证得$R_2$ 是一个等价关系。

•证法二

•设（a, b）∈$R_1$,

•由$R_1$的自反性，又有（a, a）∈$R_1$,

• 由（a, a）∈$R_1$,(a, b) ∈$R_1$,

•于是有（a, b）∈$R_2$，因此$R_1$ $R_2$ 。

•反之，设（a, b）∈$R_2$ ，

•则必存在c∈A, 使得（a, c）∈$R_1$,（c, b）∈$R_1$,

•而由$R_1$的可传递性，又有（a, b）∈$R_1$,因此$R_2$ $R_1$ .

•由上可知$R_2$=$R_1$，因此$R_2$是等价关系。