考试安排

一、考试时间： 11月27日(第12周六)下午 2:30-5:00

考试地点： (略)　　均以具体通知为准！

二、答疑时间： 11 月 25 日 下午2:30-5:30 晚上7:00-9:30

11 月 26 日 上午8:30-11:30 下午2:30-5:30

晚上7:00-9:30

答疑地点： 科技楼南楼 702 室

计算机阅卷考生须知

- 自备正规的2B铅笔、橡皮擦、黑色中性笔或黑色钢笔。
- 正确填涂学号；正确填写考生的考号、姓名等信息。
- 考号、客观题或判断题填涂时，要注意使用2B铅笔填涂，填涂区域要丰满、不要使用划线、打钩等错误填涂方式。
- 修改客观题答题时，要注意使用橡皮擦擦除干净。
- 不要使用涂改液、涂改纸、透明胶粘贴等方式修改主观题和客观题的答题。
- 主观题使用黑色中性笔或钢笔，在正确的答题区域答题，且不要使用附加纸进行答题。
- 在标明禁止答题的区域内，请勿写入答题内容。

计算机阅卷考生须知

答题卡(纸)样式


第1页（共4页）

《复变函数与积分变换》期末考试答题卡

考生编号__________[监考老师填写]　　考试日期：　年　月　日

注意：答题卡共两张，正反均有解答区。不要在页边的黑色识别码附近涂写。

院（系）______　专业班级______

学号______　姓名______

学号（从左至右顺序书写和填涂）

书写填涂要求

1. 答题卡歪斜、破损等请报告监考老师处理；
2. 姓名和学号用黑色墨水笔书写；
3. 学号涂点和选择题涂点用2B铅笔填涂；
4. 按题号顺序填涂选择题，要涂满、涂实、涂均匀，涂点不要超出涂点方框，被擦除的涂点必须擦除干净；
5. 不要弄脏、折叠、撕破答题卡；
6. 填涂不规范，后果考生自负。

正确填涂　错误填涂

违纪

一、选择题（2x12=24分）

- 两张答题卡都有上述卡头。
- 正反两面，按照题号答题。
- 勿折叠，勿破坏定位标记。

计算机阅卷考生须知

- 答题卡(纸)样式


五、（2×5=10分）

1、

2、

计算机阅卷考生须知

- 答题卡(纸)样式

九、证明题（6分）

考试题型

一、客观题(选择题)

二、计算题

- 构造解析函数
- 将函数展开为 Laurent 级数
- 利用留数计算闭路积分
- 计算定积分
- 求像区域
- 构造共形映射
- 利用 Laplace 变换求解常微分方程(组)

三、证明题

主要内容

- 复数的几种表示及运算；区域，曲线；初等复变函数.
- Cauchy-Riemann 方程：(1) 判断可导与解析，求导数；
  (2) 构造解析函数.
- Cauchy 积分定理，Cauchy 积分公式，高阶导数公式.
- Laurent 展式.
- 留数：(1) 计算闭路积分；(2) 计算定积分.
- 共形映射：(1) 求像区域；(2) 构造共形映射.
- Fourier 变换的概念，δ 函数，卷积.
- 利用 Laplace 变换求解常微分方程(组).

主要内容

一、构造解析函数

问题 已知实部 u，求虚部 v (或者已知虚部 v，求实部 u)，

使 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 解析，且满足指定的条件.

注意 必须首先检验 u 或 v 是否为调和函数.

方法
- 偏积分法;
- 全微分法(略).

一、构造解析函数

方法 • 偏积分法（不妨仅考虑已知实部 u 的情形）

(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的两个偏导数：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}, & (A) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}. & (B) \end{cases}$$

(2) 将 (A) 式的两边对变量 y 进行(偏)积分，得

$$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\tilde{v}(x,y)+\varphi(x), \qquad (C)$$

其中，$\tilde{v}(x,y)$ 已知，而 $\varphi(x)$ 待定.

(3) 将 (C) 式代入 (B) 式，求解即可得到函数 $\varphi(x)$.

二、将函数展开为 Laurent 级数

1. 直接展开法(略)

2. 间接展开法

方法 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项积分等方法展开.

牢记 两个重要的已知展开式:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3\cdots,\qquad |z|<1.$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,\qquad |z|<+\infty.$$

二、将函数展开为 Laurent 级数

注意 无论是直接展开法还是间接展开法，在求展开式之前，都需要根据函数的奇点位置，将复平面(或者题目指定的展开区域)分为若干个解析环.

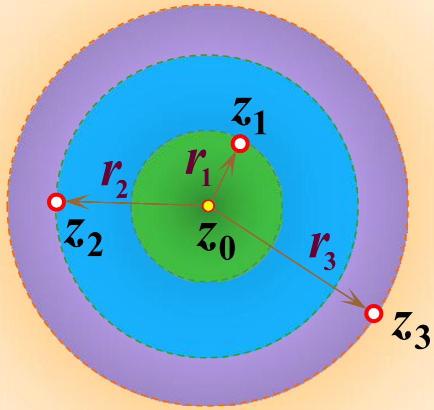
比如 设函数的奇点为 z_1, z_2, z_3，展开点为 z_0，则复平面被分为四个解析环：

$$0 \le |z - z_0| < r_1;$$

$$r_1 < |z - z_0| < r_2;$$

$$r_2 < |z - z_0| < r_3;$$

$$r_3 < |z - z_0| < +\infty.$$



三、利用留数计算闭路积分

1. 计算留数

法则 1 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\text{Res}[f(z), z_0] = 0$.

法则 2 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则只好将 $f(z)$ 在 z_0 点的去心邻域内展开成洛朗级数.

注意 (1) 在具体展开时，并不需要写出较完整的洛朗级数，只需将其中的系数 a_{-1} 求出来就可以了.

(2) 其实，即使不是本性奇点，该方法有时也很有效，而且事先并不需要知道奇点的类型.

三、利用留数计算闭路积分

1. 计算留数

法则3 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则有

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

特别 若 $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$，其中，$g(z)$, $h(z)$ 在 z_0 点解析，

且 $h(z_0)=0$，$h'(z_0)\neq 0$，$g(z_0)\neq 0$，则有

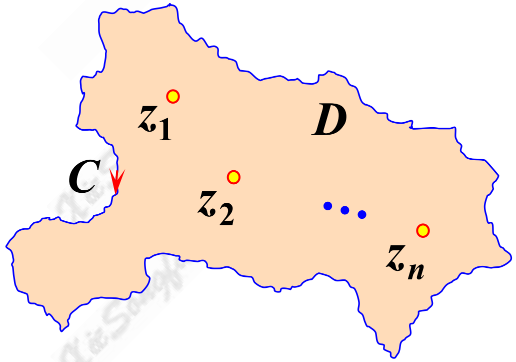
$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

三、利用留数计算闭路积分

2. 计算闭路积分

定理 设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析，在闭域 $\overline{D}$ 上连续，则有

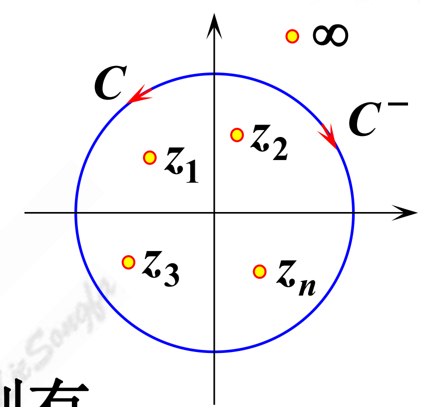
$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$



注意 只需计算积分曲线 C 所围成的有限区域内奇点的留数.

三、利用留数计算闭路积分

2. 计算闭路积分



定理 设函数 $f(z)$ 在扩充复平面上除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$ 外处处解析，则有

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] + \mathrm{Res}[f(z), \infty] = 0.$$

其中，$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z}) \cdot \frac{1}{z^2}, 0].$

四、计算定积分

1. 计算 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$.

要求 $R(u,v)$ 是 u,v 的有理函数，即 $R(u,v)$ 是以 u,v 为变量的二元多项式或分式函数.

方法 (1) 令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,

则 $\mathrm{d}z=i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta=iz\,\mathrm{d}\theta, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$,

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}.$$

四、计算定积分

1. 计算 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

要求 $R(u,v)$ 是 u,v 的有理函数，即 $R(u,v)$ 是以 u,v 为变量的二元多项式或分式函数.

方法 (2) $$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \boxed{R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}}\,\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \boxed{f(z)}$$

$$= 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

其中， z_k 是 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的所有孤立奇点.

四、计算定积分

2. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$.

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式;

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高二次;

(3) 分母 $Q(x)$ 没有实零点.

方法 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k} \mathrm{Res}[R(z), z_k]$.

其中，z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点.

四、计算定积分

3. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx\ (a>0)$.

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高一次；

(3) 分母 $Q(x)$ 没有实零点.

方法 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[R(z)e^{iaz}, z_k]$.

其中，z_k 是 $R(z)$ 在上半平面内的孤立奇点.

四、计算定积分

3. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$.

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高一次；

(3) 分母 $Q(x)$ 没有实零点.

应用（实际） 由 $2\pi i\sum_{k}\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{e}^{iaz}, z_k] \xlongequal{\text{结果记为}} A+iB$，（复数）

有 $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,\mathrm{d}x = A;}$ $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = B.}$

五、构造共形映射

● 求共形映射的一般方法与主要步骤.

步骤 (1) 预处理.

(一般)

目标　使区域的边界至多由两个圆弧段构成.

工具　分式线性映射、幂函数、指数函数等.

(2) 将区域映射为角形域(或者带形域).

方法　将区域边界的一个交点 z_1 映射为 ∞;

[另一个(交)点 z_2 映射为 0].

工具　$w = k\dfrac{1}{z-z_1}$;　或者 $w = k\dfrac{z-z_2}{z-z_1}$.

复變函數與積分變換復習

五、构造共形映射

- 求共形映射的一般方法与主要步骤.

步骤 (一般)

(3) 将角形域(或者带形域)映射为上半平面.

工具 $w = z^n$, $w = \sqrt[n]{z}$. (对于角形域)

$w = \mathrm{e}^z$. (对于带形域)

(4) 将上半平面映射为单位圆域.

工具 $w = \dfrac{z-i}{z+i}$. (无附加条件)

$w = \mathrm{e}^{i\theta_0}\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$. (由附加条件确定 θ_0, z_0)

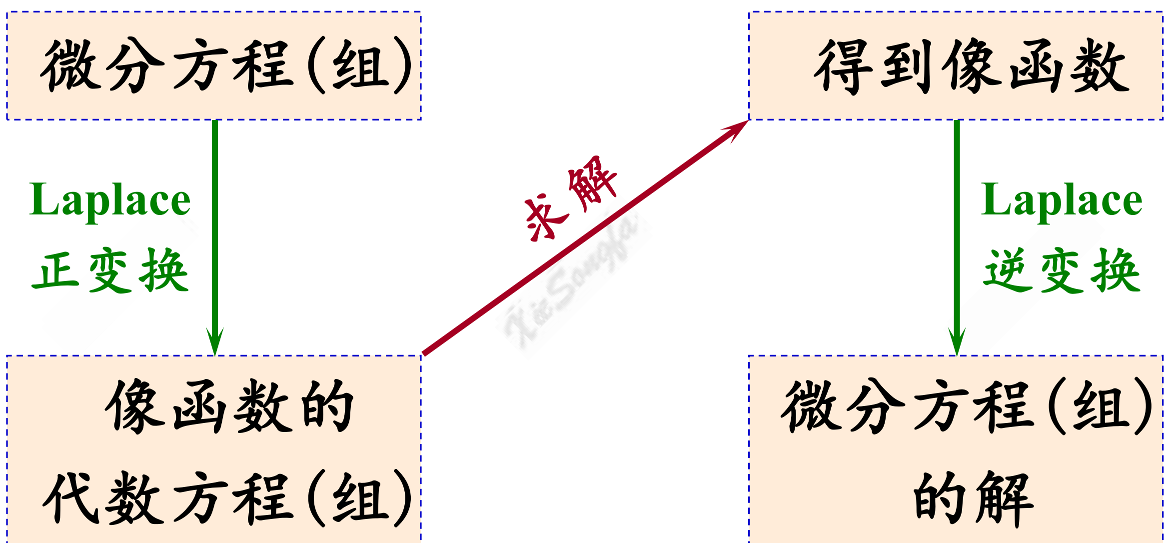
六、利用 Laplace 变换求解常微分方程(组)

工具 $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$

步骤 (1) 将微分方程(组)化为像函数的代数方程(组);

(2) 求解代数方程(组)得到像函数;

(3) 求 Laplace 逆变换得到微分方程(组)的解.



六、利用 Laplace 变换求解常微分方程(组)

- 几个常用函数的 Laplace 变换.

$$\mathscr{L}[1]=\frac{1}{s}.$$

$$\mathscr{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}.$$

$$\mathscr{L}[\cos bt]=\frac{s}{s^2+b^2}.$$

$$\mathscr{L}[\sin bt]=\frac{b}{s^2+b^2}.$$

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=1.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{s-a}.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}t^m]=\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}\cos bt]=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}\sin bt]=\frac{b}{(s-a)^2+b^2}.$$

七、其它

- 已知复数的实部与虚部，求模与(主)辐角.
- 求复数的方根 $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$, $(k=0, 1, \cdots, n-1)$.
- 对数函数 $w = \ln z = \ln|z| + i\arg z$.

  $w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.
- 幂函数 $w = z^{\alpha} = e^{\alpha\, \mathrm{Ln}\, z}$.
- 求导公式 $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

七、其它

- **柯西积分定理** 函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在闭域 $\overline{D}$ 上连续，

则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$.

- **柯西积分公式** 函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在闭域 $\overline{D}$ 上连续，

则 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$，$(z \in D)$.

- **高阶导数公式** 函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在闭域 $\overline{D}$ 上连续，

则 $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$，$(z \in D)$.

七、其它

- 幂级数的收敛半径.

(1) 比值法　如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lambda$，则收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

(2) 根值法　如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

(3) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点展开为泰勒级数，其收敛半径等于从 z_0 点到 $f(z)$ 的最近一个奇点 $\tilde{z}$ 的距离.

- 求共形映射下的像区域.

(1) 分式线性函数、幂函数以及指数函数的映射特点.

(2) 共形映射的分解与复合.

七、其它

- **Fourier 变换:**

$$\begin{cases} \mathscr{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt . \\ \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega . \end{cases}$$

- **Laplace 变换:**

$$\begin{cases} \mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt . \\ \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \dfrac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (t > 0). \end{cases}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s) e^{st}, s_k].$$

七、其它

- 单位冲激函数.

(1) 筛选性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0).$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0).$$

(2) 对称性质 $\delta(t)=\delta(-t).$

(3) 重要公式 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=2\pi\delta(t).$

- 卷积与卷积定理 $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$

$$\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega).$$

放松一下吧！……