·复数的模与辐角

辐角 $\theta = \mathrm{Arg}\, z \quad (z \neq 0)$ 是多值的.

$\theta = \arg z + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$-\pi < \arg z \leq \pi$

·复数的三角表示，θ为辐角

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$.

$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$.

$z_1/z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

$\begin{cases} e^{i\pi} = -1 \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i \end{cases}$

·乘方.开方

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$z^{\frac{1}{n}} = w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)\right) + i\sin\left(\frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)\right)\right]$

·一般多项式是复平面上连续函数.有理函数去除分母为0的点外也是处处连续的.

复变函数在有界闭区域上的性质?

解析函数 $f(z)$

求导法则

·函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在z处可导的充要条件.

柯西黎曼方程 (Cauchy-Riemann) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

$f'(z) = \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

·解析函数的 u.v 均为调和函数.有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

虚部是实部的共轭调和函数，v是u的共轭调和.

·第二大题.知u求v/知v求u/知u.v关系构造解析函数.

首先验证调和性质 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$.再依据偏积分法与C-R方程求解.注意初值条件.

初等函数.(z是复数.x.y是实数)

指数 $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$|e^z| = e^x, \quad \mathrm{Arg}\, z = y + 2k\pi$.

e^z是以$2k\pi i$为周期的周期函数，

$\lim_{z\to\infty} e^z$ 不存在

对数 $w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$ 是多值函数.

主值 $\ln z = \ln|z| + i\arg z \quad \mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i$

$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$

幂 $w = z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}$ (一般是)多值函数

$z^0 = 1$

三角 $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ 均单值.

$\sin\theta, \cos\theta$ 以2π为周期，奇偶性不变.

(反三角).

复积分

复函数在光滑的简单曲线上积分，可以直接写为 $\int_C f(z)dz=\int_C(u+iv)d(x+iy)$

$\int_C f(z)dz=\int_C(u+iv)dx+\int_C(iu-v)dy$ ，可通过两个二元实变函数的线积分来计算

- 柯西积分定理：函数在单连通区域D内解析，则闭合曲线积分 $\oint_C f(z)dz=0$
- 函数在单连通区域D内解析，D内任意两点，积分值与路径无关。$\int_{C_1}f(z)dz=\int_{C_2}f(z)dz$
- 闭路变形定理：C_1、C_2为两条闭曲线，C_2在C_1内部，函数在C_1、C_2所围区域内解析。
  有：$\oint_{C_1}f(z)dz=\oint_{C_2}f(z)dz$。大回路变小回路。
- 复合闭路定理：C为多连通区域D内一条闭曲线，C_1、C_2…C_n也是这样的闭曲线，对于C中，互不相含也互不相交，f(z)在D内解析 $\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz$ 大回路变多小回路。

(上述的简单闭曲线C均为顺时针方向)

- f(z)是单连通区域D内的解析函数，变上限积分 $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)dz$ 也是解析函数且 $F'(z)=f(z)$
- 单连通区域D内，函数F(z)恒满足条件 $F'(z)=f(z)$，则称F(z)是f(z)的原函数。
- 牛顿—莱布尼茨公式：G(z)是f(z)的一个原函数。$\int_{z_0}^{z_1}f(z)dz=G(z_1)-G(z_0)$
  z_1、z_0是解析域中的点
- 柯西积分公式：设f(z)在简单闭曲线C所围成的区域D内解析，在$\bar{D}$上连续，z_0是D内任一点，
  则 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$ $\qquad\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$
- 柯西积分公式的两个推论
  ① f(z)在 $|z-z_0|<R$ 内解析，$\le R$上连续，则 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})d\theta$
  ② 在C_1、C_2所围的多连通区域内解析，z_0为D内一点，则 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$
- 最大模
- 解析函数的高阶导数：解析函数的导数仍是解析的。
- $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ $\quad(n=1,2,3\cdots)\qquad\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$

级数

复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n=z_1+z_2+z_3+\cdots$

- 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 也收敛。$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 收敛

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=C_0+C_1(z-z_0)+C_1(z-z_0)^2+\cdots+C_n(z-z_0)^n+\cdots$

- Abel定理，在z_1收敛，则在 $|z-z_0|<|z-z_1|$ 内收敛。
  z_1绝对收敛，则在 $<$内收敛，在 $>$ 外发散。
- $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n}$ $\qquad\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}$
- 幂级数在收敛圆内部是解析函数，可以逐项求导或积分任意次 $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots$
- 泰勒级数，f(z)在D内解析，则可以从z_0到边界最小距离展开，收敛半径R。
  $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ $\quad C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\ (n=0,1,2\cdots)$ $\quad$ 函数解析 ⇔ 可展开为幂级数

- $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ $C_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

- $e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots$

  $\sin z=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

  $\cos z=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$

  $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots$

- 洛朗级数，包括正负次幂的级数，可以表示圆环上的解析函数

  $f(z)$在 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，有 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$

  $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ $(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$ C为任一简单闭曲线

  正整次幂和负整次幂分别为洛朗级数的解析部分和主要部分，在应用中，将函数在某不解析点z_0处的邻域展开成级数，就要利用洛朗级数来展开。展开式是唯一的。P084~085

留数，极点。

- $f(z)$在z_0不解析，在z_0去心邻域内解析，则z_0为$f(z)$的孤立奇点。
- $f(z)$在z_0的奇异性质完全由洛朗级数负整次幂的性质体现。

  没有负整次幂，$\lim_{z\to z_0} f(z)=C$ } 可去奇点

  负到m阶次，$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ } 极点(m阶)

  $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=C$.

  负到无穷次，$\lim_{z\to z_0} f(z)$不存在 } 本性奇点

- $f(z_0)=0$，z_0是$f(z)$的零点。$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ $\varphi(z_0)\neq0$，z_0是$f(z)$的m阶零点
- 若$f(z)$在z_0解析，则 $f^{(m-1)}(z_0)=f^{(m-2)}(z_0)=\cdots=f'(z_0)=0$ 且 $f^{(m)}(z_0)\neq0$，z_0是$f(z)$的m阶零点。

  第一次导数不为零点，导数阶数等于零点阶数。

- 若z_0是$f(z)$的m阶零点 $\Longleftrightarrow$ z_0是$\frac{1}{f(z)}$的m阶极点
- $f(z)$在∞邻域内解析，则∞为$f(z)$的孤立奇点
- $f(z)$在∞的奇异性质完全体现在洛朗级数正整次幂。

  没有正整次幂 $\lim_{z\to\infty} f(z)=C$ } 可去奇点。

  正到m阶次，$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$ } 极点(m阶)

  正到无穷次，$\lim_{z\to\infty} f(z)$不存在 } 本性奇点

- z_0是孤立奇点，$f(z)$在z_0处的洛朗展开中-1次项系数C_{-1}为$f(z)$在z_0的留数 $\text{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}$
- 留数定理：$f(z)$在D内有有限个(n个)孤立奇点，其余位置解析 $\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[f(z),z_k]$
- 在极点的留数。$\text{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$ (z_0是m阶极点)

  在无穷远点的留数，是C_{-1}的负值 $-C_{-1}$ $\text{Res}[f(z),\infty]=\text{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$

- $f(z)$在复平面上仅有有限个孤立奇点 $\Rightarrow$ $f(z)$在各点留数之和为0 (包括无穷远点)

留数在定积分计算中的应用

- 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$　$e^{i\theta}=z$. $dz=izd\theta$

通过 $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$　$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ 将原积分式转化为 $\oint_{|z|=1} f(z)\frac{dz}{iz}$. 用留数计算

- 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 的积分　$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$. $Q(z)$ 比 $P(z)$ 高两次，$Q(z)$ 在实轴上无零点

将原积分转化为 $2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[R(z),z_k]$. z_k 是上半平面内 $R(z)$ 的极点.

$R(x)$ 为偶函数时　$\int_0^{+\infty} R(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}[R(z),z_k]$.

- 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx$ 的积分　$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}[R(z)e^{iaz},z_k]$. z_k 是上半平面内的奇点.

注意到 $e^{iax}=\cos ax+i\sin ax$. 则求出 $R(x)e^{iax}$ 积分后，取实部与虚部，

分别得到 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,dx$ ，为我们求解带三角函数积分提供了思路

共形映射

- 伸缩率与旋转角

C是平面上曲线. 经 $w=f(z)$ 映射后到w平面上. 切线转过角度为旋转角. $\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}$ 为伸缩率.

- 旋转角不变性. 伸缩率不变性. 仅与 $f(z)$ 有关. 与曲线C的模样无关.
- 在区域内的映射D $w=f(z)$ 具有保角性. 伸缩率不变性，则称 $w=f(z)$ 是第一类保角映射，
- 若函数在D内解析. 且 $f'(z)\neq 0$. 则它构成的映射就是第一类保角映射.
- 设 $w=f(z)$ 是D内的保角映射，若 $\forall z_1\ z_2$，$z_1\neq z_2$ 时. $f(z_1)\neq f(z_2)$. 则称 $f(z)$ 是共形映射.
- 给定原区域和映射，求像区域；给定原区域和像区域 求映射函数.
- 区域经解析函数映射后仍为区域，区域边界映射后仍为像区域的边界

在原区域边界上取三点. 经映射后得到像区域的边界

- D. G是单连通区域，若各自边界上存在两点，则一定存在解析函数 $w=f(z)$ 把D共形地映射为G
- 平移 $w=z+b$　旋转 $w=ze^{i\theta_0}$　相似 $w=rz$　反演 $w=\frac{1}{z}$　$(z=re^{i\theta})$

以b方向平移　以原点为转轴转θ　以原点为中心　将单位圆内部一点映射到外部. 辐角反号.

- 讨论 $f(z)$ 在 ∞ 附近的性态时，可以利用 $\varphi(\xi)=\varphi(\frac{1}{z})=f(z)$ 来讨论 $z=0$ 处 $\varphi(z)$ 的性态
- 分式线性映射都是共形映射. 能把圆变成圆. 直线是特殊的圆，

具有保形性. 保对称点性.

- 给出三点到三点 $(z_1,z_2,z_3)\to(w_1,w_2,w_3)$ 则分式线性映射被唯一确定.

$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$. 以此可以求出 $w=f(z)$　若有点为 ∞，则含 ∞ 的项取为1.

- 已知两对点时. 可以设 $\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$.　$w_1=0.\ w_2=\infty$ 时. $\to w=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$

· 几个初等函数的共形映射.

幂函数 $w=z^n$ 将 $0<\theta<\theta_0$ 共形映射为 $0<\varphi<n\theta_0$ 的角形域 ($n\theta_0\leq 2\pi$)

幂函数的特点是扩大角形域，根式函数的特点是缩小角形域.

指数函数 $w=e^z$ (不一定是共形映射)

将 $0<\operatorname{Im} z<h$ 共形映射为角形域 $0<\arg w<h$ ($h\leq 2\pi$).

相应地. 对数函数 $w=\ln z$ 将角形域 $0<\arg z<h$ 变为带形域 $0<\operatorname{Im} w<h$

上半平面变单位圆 $0,1,\infty$ 变为 $1,-i,1$. $w=\frac{z-i}{z+i}$ 单位圆变上半平面 $w=i\frac{1+z}{1-z}$.

傅里叶变换

- $C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \quad (n=0,\pm1,\pm2\cdots)$

C_n 是离散频谱. $|C_n|$ 离散振幅谱. $\arg C_n$ 离散相位谱.

- 傅里叶变换. $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$.

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

振幅谱 $|F(\omega)|\sim\omega$. 相位谱 $\arg F(\omega)\sim\omega$

- 单位冲激函数 将离散频谱以连续频谱的方式表现出来.

$t\neq 0$ 时. $\delta(t)=0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$

- $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$; $\delta(t)=\delta(-t)$; $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$
- 单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$
- δ 函数的傅里叶变换

$\mathscr{F}[\delta(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t}\Big|_{t=0}=1$

$\mathscr{F}^{-1}[1]=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}d\omega=\delta(t) \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)$

- $\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega) \quad \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega_0-\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

- 傅里叶变换的一些性质.

线性性质. 先组合再变换 $\Leftrightarrow$ 先再换再组合

位移性质 设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$ ，有 $\mathscr{F}[f(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}F(\omega)$. $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{j\omega_0 t}f(t)$

相似性质 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$. $\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

微分性质 若 $\lim_{|t|\to+\infty}f(t)=0$ ，则 $\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega\mathscr{F}[f(t)]$, $\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n\mathscr{F}[f(t)]$

$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=-j\mathscr{F}[tf(t)]$, $\frac{d^n}{d\omega^n}[F(\omega)]=(-j)^n\mathscr{F}[t^n f(t)]$

积分性质 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)dt$ $\lim_{t\to+\infty}g(t)=0$ ，则 $\mathscr{F}[g(t)]=\frac{1}{j\omega}\mathscr{F}[f(t)]$

帕塞瓦尔等式 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$ ，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega$

· 卷积 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$，是t的函数.

· 卷积定理 $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$ $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$，则有：

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \qquad \mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

利用卷积定理可以简化卷积的计算. $f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)]$

和简化傅立叶变换的计算 $\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

拉普拉斯变换

· $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$，$f(t)$是实值函数. s是复参数，$F(s)$是s的函数.

· $\mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) u(t) e^{-\beta t} e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[f(t) u(t) e^{-\beta t}]$

· 拉普拉斯变换的一些性质

线性性质、先变换再组合 ⇔ 先组合再变换

相似性质 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ 则 $a>0$ 有 $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$

微分性质 设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，则 $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) \cdots f^{(n-1)}(0)$$

设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，则 $F'(s) = -\mathcal{L}[t f(t)]$，$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)]$

积分性质 设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，则 $\mathcal{L}[\int_0^t f(t) dt] = \frac{F(s)}{s}$，$\mathcal{L}[\int_0^t dt \int_0^t dt \cdots \int_0^t f(t) dt] = \frac{F(s)}{s^n}$

设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，则 $\int_s^{\infty} F(s) ds = \mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]$ $\int_s^{\infty} ds \int_s^{\infty} ds \cdots \int_s^{\infty} F(s) ds = \mathcal{L}[\frac{f(t)}{t^n}]$

延迟性质 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，则 $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s)$ $\mathcal{L}[e^{-s\tau} F(s)] = f(t-\tau) u(t-\tau)$

位移性质. $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，则 $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

· 卷积定理 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$，则

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

· 拉氏逆变换. 反演积分 $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta - j\infty}^{\beta + j\infty} F(s) e^{st} dt \quad (t>0)$

· 用留数计算反演积分

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s) e^{st}, s_k] \quad (t>0)$$

· 求解常微分方程 ①左右两边拉氏变换 ②求 $F(s)$ ③拉氏逆变换 ④代入初值

· $\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}$ $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ $\mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}}$