Relations

- 关系引入…

- 利用数学的思想、方法对实际生活与应用中各式各样的关系进行分析研究，探讨如何建立数学模型、概念或者结构来表述关系；
- 研究“关系”的规律性的东西，寻找与关系相关的问题的解决工具和方法，最终在实际中加以应用

Focus on Relations

- 1. What is the definition of relation in mathematics? 数学上如何定义关系？
- 2. How to represent real relations using mathematical structure/concept? 如何用数学结构和概念表示关系？
- 3. What kind of properties of relation are there? 关系有哪些个有用的特征？
- 4. How to solve the problems in real applications using relation (or regarding relation)? 如何应用关系理论解决实际问题

Content of Relation 关系主要内容

- Content基本内容:
  - Basic Definitions 基本概念
  - Properties of Relations 关系性质特征
  - Representations of Relations 关系的表示
  - Closure of Relations 关系闭包
  - Compositing Relations关系复合运算
  - Equivalence Relations 等价关系
  - Partial Orders 序关系与格

- 先探讨数学上如何定义关系，如何表示关系

Definition of Relation 关系的定义

- 定义1： (二元关系) 假设A和B是两个集合，A与B的笛卡尔积 的一个子集合，叫做一个从A到B的二元关系。

- 定义2： (多元关系) 假设 有n个非空集合，它们的笛卡尔积 的一个子集合，叫做这n个集合间的一个n元关系

- 如何理解这数学里的为什么要这样定义“关系”？与实际中的“关系”怎么联系起来？

Introduction Examples to Relation

例1： 四支球队a、b、c及d队，他们之间进行了一些比赛，以下一张表格记录了他们之间的比赛结果--胜负关系： a胜b、b胜c、c胜a、d胜a、d胜b、d又胜了c。

为了简单起见，用(a，b)来表示a胜b，于是可以将所有胜负记录表示成{(a，b)，(b，c)，(c，a)，(d，a)，(d，b)，(d，c) }

这就是一张胜负关系表，该表清楚、准确地表现了这四个队 a、b、c、d之间的胜负关系，它就是这四个队之间的一个关系--比赛胜负关系。当我们用集合S表示四个队时，S={a，b，c，d}，那么胜负关系表{(a，b)，(b，c)，(c，a)，(d，a)，(d，b)，(d，c)，(d，b)}就是S与S的笛卡尔积 的一个子集。也就是说用这个子集合表示了这四个队之间的某轮比赛的胜负关系。

Introduction Examples to Relation

- 例2：一个电话号码簿，它里面记录了很多单位或个人的一些电话号码。不难理解，一个号码本就是一个集合。这个号码本，这个集合表示了人、单位跟一些电话号码之间的一种关系，它是一个实实在在的关系
- 如果我们用A表示所有有关的单位和人的集合，用B表示所有相关的电话号码的集合，我们简单地用(a，b)表示a的电话号码是b，其中a,b分别表示A中的一个元素(单位或者人)和B中的一个号码 。那么所有这些有关的序对(a，b)就构成电话号码本，就构成这个号码集合。
- 可以看出这个集合正好是A×B的的一个子集。当有人或有单位的号码发生了变化，这个号码本也相应地发生变化，变成了另外一个号码本，也就是另外一个集合，另外一个子集合，但仍然是A×B的一个子集，另外一个关系。

Introduction Examples to Relation

- 例3： (学生、课程、成绩之间的关系) 假设用集合A表示某大学计算机学院的所有学生，B集合表示计算机学院的所有课程，C集合表示不大于100的非负整数的集合。 那么学生张三的离散数学考试成绩是95分，就可以表示成(张同学，离散数学，95)。
- 将计算机学院所有学生所有课程的这样的记录放在一起，就是一张成绩表，也就是教务管理中的成绩库。 那么这个成绩库就是一个集合，这个集合表示的是计算机学院学生，课程和成绩三者之间的一个关系。而这个集合恰好是集合A、B、C的笛卡尔积 的一个子集。
- 以上三个例子都说明了同一个问题，无论是一个集合内部元素之间的关系，还是不同集合的元素之间的关系，还是多个集合元素之间的关系，都可以表示成相关集合的笛卡尔积的子集。把笛卡尔积的子集当成一个数学模型，那就可以用这个数学模型来表示关系，包括二元关系和多元关系

抽象关系的具体解释

- 例4: 设集合A={a，b，c，d}，S={(a，b)，(c，d)}，根据定义1，S显然是A集合到A集合自身的一个二元关系。这个关系看似是抽象的，但当给a、b、c、d赋予具体的含义，
- 如: abcd分别表示成张三、李四、王五和老六四个人，而(x，y)表示为x与y是朋友，那么二元关系S就表示成四个人之间具有的一个朋友关系。 其中，张三跟李四是朋友，王五跟老六也是朋友，但其他人之间都不是朋友。即便是空集，即空关系，在这里可以理解为集合A的人之间没有人有朋友关系。
- 如果: 根据不同的情况，也可以给出另外的含义和解释。 比如说a=5、b=10、c=3、d=9，那么上面的关系S可以解释为集合A={5，10，3，9}中元素间的整除关系。
- 这个例子说明，一些集合的笛卡尔积的任何一个子集，也即任一个抽象的关系，当给出一些具体的解释后，对应为实际的关系。

Conclusion结论

- Question: 如何用数学的工具或者结构表示实际中的关系？

- We can use the **subset of the Cartesian product of sets** as a mathematical structure to represent real relations in real applications.
- 用笛卡尔集合的子集来表示关系

Relations

Definition. A binary relation R （A到B的二元关系） from set A to set B is a subset of $A \times B$. That is $R \subseteq A \times B$. A binary relation on set A （A上的二元关系） is a subset of $A \times A$.

If $(a,b) \in R$ *we say a is related to b in R, sometime it is noted as aRb.*

用 subset of Cartesian product of sets （笛卡尔集的子集）, which is a kind of mathematical structure, to represent a real relation.

More Examples

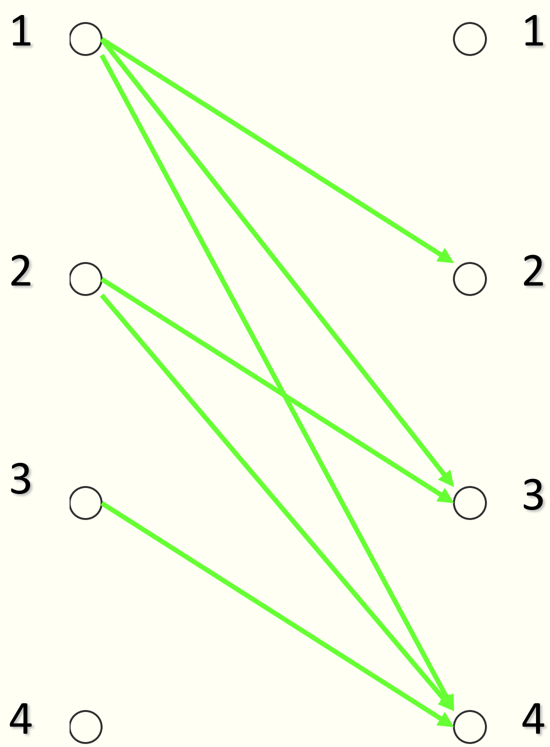
Example: R $=\{(a, b) \mid a, b \in Z^+; a - b \geq 10\}$
$= \{(11, 1), (12, 1), (12, 2), (13, 1), (13, 2), (13, 3), \ldots\}$

Example: R $=\{(a, b) \mid a, b \in Z^+;$ a, b are relatively prime$\}$
$= \{(27, 2), (12, 5), (42, 5), (42, 19), \ldots\}$

Relations on a Set

Example: Let A = {1, 2, 3, 4}. Which ordered pairs are in the relation R = {(a, b) | a < b} ?

Solution: R = { (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)}



R	1	2	3	4
1		x	x	x
2			x	x
3				x
4				

N-ary Relations 多元关系

定义2： (多元关系) Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be sets. An **n-ary relation** on these sets is a subset of $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

The sets $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are called the **domains** of the relation, and n is called its **degree**(阶).

If $A= A_1 = A_2 = \ldots, = A_n$, 称之为A上的n元关系。

Example:

Let $R = \{(a, b, c) \mid a = 2b \wedge b = 2c$ with $a, b, c \in Z\}$

What is the degree of R?

The degree of R is 3, so its elements are triples.

Is (2, 4, 8) in R? No.

Is (4, 2, 1) in R? Yes.

Examples of n-ary Relation

Example. Relation as a table.

student	course	time	room
Eve	physic	1CD	122
Frank	physic	2GH	122
Garey	painting	1CD	122
Holms	compiler	1CD	105

- 这个例子也是关系型数据库里的表
- 这几个例子的关系，实际上也是相关集合的笛卡尔积的子集

Note

多元关系是关系型数据库的基础。关系型数据库中每一个表的记录集都一个多元关系

更多地关注二元关系 But we usually confine our study within binary relations unless some extra descriptions provided.

Please remember:

a relation is a set, a subset of the Cartesian product of sets! 一个关系，在数学上就是一个集合，一个笛卡尔集合的子集！

在关系型数据库里就是一个记录集。

Some Special Relations一些特殊关系

- Assume A is a non-empty set 非空集合
- Example 1: R is empty subset of AxA

  Empty Relation空关系

- Example 2: R= { (x,y)|x,y $\in A$ }
- Universal Relation普遍关系

- Example 3: R = {(a,a)|a $\in$ A}
- Identity Relation恒等关系

关系定义域与值域

Let $R \subseteq S \times T$ be a binary relation on S and T.

The **domain 定义域 of R** is the set $Dom(R) = \{s \in S \mid \exists t \in T \text{ where } (s\ R\ t)\}$.

The **image of R 值域** is the set $Im(R) = \{t \in T \mid \exists s \in S \text{ where } (s\ R\ t)\}$.

The **co-domain** (or the range) of R is the set $coDom(R) = T$.

请同学们对比函数的相关概念…

Functions as Relations函数也是关系

Function $f:A\rightarrow B$ is a relation between A and B, a special relation!

为什么？怎么理解？

$\{(a,f(a)) \mid a \in A\}$?

Counting Relations关系计数

How many different relations can we define on a set A with n elements?

A relation on a set A is a subset of $A \times A$.

How many elements are in $A \times A$?

There are n^2 elements in $A \times A$, so how many subsets (relations on A) does $A \times A$ have?

The number of subsets that we can form out of a set with m elements is 2^m. Therefore, 2^{n^2} subsets can be formed out of $A \times A$.

Answer: We can define 2^{n^2} different relations on A.

关系性质

- 二元关系的一些特性：对客观存在的各种各样的关系的一些特性的总结和抽象

- 关注具有这些特性的特殊的二元关系

二元关系的一些特性--自反性

Definition. A relation R on the set A is **reflexive** if and only if $(a, a) \in R$, for every element $a \in A$. 自反性

Example. Let A be the set of all integers. Let $R = \{(a, b) | a \geq b\}$. Then R is *reflexive or not?*

Example. Let A be the set of all positive integers. Let $R = \{(a, b) | a|b\}$. Then R is reflexive??.

Example. Let $A = 2^N$ (or $P(N)$). Let $R = \{(a, b) | a \subseteq b\}$. Then R is reflexive??.

Example. Let A be the set of all integers. Let $R = \{(a, b) | a=-b\}$. Then R is not reflexive.

More examples please… 请同学们自己举一些例子

Reflexive自反性

Are the following relations on {1, 2, 3, 4} reflexive?

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)}

No.

R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)}

Yes

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

No.

Special Properties -- irreflexive反自反

Definition: A relation on a set A is called **irreflexive** if $(a, a) \notin R$ for every element $a \in A$.(反自反)

(Equivalently, a relation is *irreflexive if there is no x such that x is* related to itself in the relation. 不存在与自身有关系的元素，这样的关系才是反自反的）

Example：

> and < are irreflexive.

人的集合上的父子关系如何？

Special Properties –symmetric对称性

Definitions:

A relation R on a set A is called **symmetric对称性** if (b, a)∈R whenever (a, b)∈R for all a, b∈A.

(只要有aRb就一定有bRa)

A relation R on a set A is called **antisymmetric** if a = b whenever (a, b)∈R and (b, a)∈R.反对称

(无论是什么元素a,b, 如果aRb与bRa同时成立，那就只能是a=b)

思考：同学、同乡、同龄、臭味相投、相似等关系

Properties –symmetric-examples

Are the following relations on {1, 2, 3, 4} symmetric, antisymmetric (对称，反对称?）

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)}	symmetric
R = {(1, 1)}	sym. and antisym.
R = {(1, 3), (3, 2), (2, 1)}	antisym
R = {(4, 4), (3, 3), (1, 4)}	antisym.