Predicates and Quantifiers

Section 1.4

谓词逻辑

1 谓词逻辑的基本概念

2 谓词逻辑公式及解释

3 谓词等值演算

4 谓词逻辑推理理论

谓词逻辑三个基本术语

个体词、谓词、量词

任务目的要求

1. 理解 个体词，谓词，个体域，命题函数 等概念
2. 理解全称量词、存在量词的意义
3. 理解量词辖域（作用域）、自由变元、约束变量的意义
4. 理解量词的绑定的意义
5. 学会谓词逻辑符号化，将用谓词逻辑符号表述实际中的某些逻辑语句；
6. 理解谓词公式（谓词逻辑表达式）、公式的解释域赋值
7. 谓词公式的等值（等价）、蕴含
8. 嵌套量词的使用及其有关注意事项

Propositional Logic Not Enough

- We know:
  "All men need air."
  "I am a man."
- Does it follow that "I need air too?"
- 解：　p: All men need air; q: I am man; r: I need air too.
- 问题：如果不是从语意上分析，能由p,q推导出r吗, 也即：$(p \wedge q) \Rightarrow r$ ？ No！

- It can't be represented in propositional logic. Need a more powerful logic language that talks about：
  objects, their **properties**, and their **relations**.

- Later we will know how $(p \wedge q) \Rightarrow r$ works.

存在的问题和研究的内容

又例如：李四是大学生,张三也是大学生.

这是两个存在共同特性的原子命题. 然而, 在命题逻辑里只能用两个原子命题表示, 用符号表示后看不出任何联系.

为了更深刻、更全面地研究命题及其之间的一些内在关系，需要对原子命题的成分、结构及其共同特性等进行进一步的剖析，用更加精准的、全面的逻辑语言来表达。这就是谓词逻辑所要研究的内容。

Predicate Logic 谓词逻辑

Predicate logic is an extension of propositional logic, predicate logic can be used to express the meaning of a wide range of statements in mathematics and computer science in ways that permit us to reason and explore relationships between objects.

谓词逻辑：是命题逻辑的延伸，它可以更广泛、更清楚地、更准确地表达客观事物的属性以及彼此间的关系。

***predicate* logic** distinguishes the *subject* of a sentence from its *predicate*.

谓词逻辑将陈述句分成主体（主语、个体）和谓词两个部分

– Remember some language grammar terms?

Subjects 个体 and Predicates 谓词

To analyze the grammar structure of some statements，

divide simple propositions as **Subject + Predicate**

将简单命题的结构分解成 个体+谓词

For example, in the sentence “The dog is sleeping”:

- The phrase “the dog” denotes the *subject* - the *object* or *entity* that the sentence is about.
- The phrase “is sleeping” denotes the *predicate*- a property that is true **of** the subject.

In predicate logic, a *predicate* is modeled as a *function* $P(\cdot)$ from objects to propositions.

$P(x)$ = “x is sleeping” (where x is any object).

Basic Concepts of Predicate Logic

Understanding:

个体（**客体subject**）**：**命题中涉及到的对象。可以是具体的，也可以是抽象的。（陈述句中通常以主语或者宾语出现）

谓词 predicate: 简单命题中，表示一个个体的性质、属性及特征状态、某种行为、或多个个体间的关系的词。通常表现为句子的谓语

个体域（**论域 domain**）**：**所有涉及到的个体所构成的非空集合（可以理解为个体变量的取值范围）。

全总个体域（无限论域 universal domain）：包含宇宙中一切事物的个体域。

More About Predicates

Convention约定:

-Lowercase variables x, y, z... denote objects/entities; uppercase -variables P, Q, R… denote propositional functions (predicates).

通常用小写字母表示个体，大写字母表示谓词（不是绝对的）

proposition $P(x)$：The *result of applying* a predicate P to an object x

But the predicate P **itself** (*e.g.* P=“is sleeping”) is **not** a proposition (not a complete sentence).

– *E.g.* if $P(x)$ = “x is a prime number”,
  $P(3)$ is the *proposition* “3 is a prime number.”

More Examples：

Aaron is a student

3 is a prime。

2 **can divide** 6。

2 **plus** 3 equal to 5。

Mike gave Mary the grade A

Please find out the subjects and predicates in the statements above

对比分析上面例子中的谓词，那些个描述单个个体的性质的谓词称为一元谓词 unitary predicate；涉及两个个体之间关系的，称为二元谓词 binary predicate；依次类推，三元谓词，还有多元谓词n-ary predicate。

Solutions:

F(x): x is a student, F(Arran)

D(x, y): x divides y, D(2, 6)

M(x, y, z): x+y = z, M(2, 3, 5)

G(x, y, z): x give y the grade z, G(Mike, Mary, A)

例：将下列语句符号化为谓词逻辑中的命题或命题函数。

（1）小王是二年级大学生。

（2）小王是李老师的学生。

（3）如果$x \le y$且$y \le x$，则$x=y$。

解

（1）令F（x）：x是大学生；$G(x)$：x是二年级的；a：小王。则原句符号化为：

$$F(a) \wedge G(a)$$

（2）令F（x，y）：x是y的学生；

a：小王；b：李老师。

则原句符号形式化为：

$$F（a，b）$$

（3）令F（x，y）：$x \le y$；E（x，y）：$x=y$

式化为：

$$(F(x, y) \wedge F(y, x)) \rightarrow E(x,y)$$

谓词符号的扩充*

当然，谓词符号也不限于单个字母。

例如：可以用Lady(x)表示x是一个女人，这里的谓词符号就是Lady。

比如说Lady(Gaga)为真，但Lady(姚明)为假。

单个谓词符号简洁、书写方便，但单词或者词组型的谓词，类似于计算机语言里的变量符，有着更多的选择和更好的可读性。

Propositional Functions 命题函数

Propositional function命题函数：由谓词符和个体变元符组成的表达式称为**命题函数**

Propositional functions become propositions (and have truth values) when their variables are each replaced by a value from the *domain* (or *bound* by a quantifier, as we will see later).

命题函数一般还不是命题。要成为命题，需要对其中的个体变量赋予具体的个体，或者用量词加以限定；

The statement $P(x)$ is said to be the value of the propositional function P at x.

Examples of Propositional Functions

For example, let $P(x)$ denote "$x > 0$" and the domain be the integers.

Then: P(-3) is false.; P(0) is false; P(3) is true.

通常用字母U来表示个体域

Example: Let "$x + y = z$" be denoted by $R(x, y, z)$ and U (for all three variables) be the integers. Find these truth values:

R(2,-1,5) **Solution: F**

R(3,4,7) **Solution: T**

R(x, 3, z) **Solution: Not a Proposition**

Compound Expressions 复合表达式

Connectives (逻辑联结词) from propositional logic carry over to predicate logic.

可以将命题，命题函数等用逻辑连接词连接起来形成复合谓词逻辑表达式

Examples: If $P(x)$ denotes "$x > 0$," find these truth values:

$P(3) \vee P(-1)$ **Solution**: T

$P(3) \rightarrow P(-1)$ **Solution**: F

$P(3) \wedge P(y)$ （真值不确定）

When used with quantifiers 量词(to be introduced next), these expressions (propositional functions) become propositions.

Quantifiers量词

上面的几个例子里，一些是命题，一些因为含有变量还所以只是命题函数，不能确定其真值。但如果将个体*x*、*y*限制在实数范围内，有些就是真命题了。这个问题涉及到了个体取值范围--**个体域**（或者说**论域**）。

在一些命题中，往往会有一些表示个体范围的数量关系的词语，诸如“所有的”、“有一些”等等，用来表示论域中的全体或部分个体，在谓词逻辑中，用量词（Quantifier）把它们形式化。

Quantifiers 量词

We need *quantifiers* to express the meaning of words in natural language including *all* and *some*

Quantifier 量词：在命题里用来表示和刻画个体数量的词。

如：“All men are Mortal”；-- “Some integers are not prime.”

The two most important quantifiers are:

- *Universal Quantifier: “for all”* $\forall$
- *Existential Quantifier*, “There exists” symbol: $\exists$

Universal Quantifier 全称量词 “$\forall$"

$\forall x\, P(x)$ is read as “For all x *(in the domain)*, P(x)” or “For every x, P(x)” (如所有的“、”任意的“、”每一个“等等）

$\forall x\, P(x)$ asserts $P(x)$ is true for every x **in the *domain***.

Examples:

1) If $P(x)$ denotes “$x > 0$” and U is the integers, then $\forall x\, P(x)$ is false.
2) If $P(x)$ denotes “$x > 0$” and U is the positive integers, then $\forall x\, P(x)$ is true.
3) If $P(x)$ denotes “x is even” and U is the integers, then $\forall\, x\, P(x)$ is false.
4) If the domain = $\{a_1,a_2,\ldots a_n,\ldots\}$, understanding:

$$\forall x P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n) \cdots$$

Existential Quantifier 存在量词∃

$\exists x\, P(x)$ is read as "For some x, P(x)", or as "There is an x such that P(x)," or "For at least one x, P(x)." ("存在着一些"、"至少有一个"、"有"等等)

$\exists x\, P(x)$ asserts $P(x)$ is true for <u>some</u> x in the *domain*.

Examples:

1. If $P(x)$ denotes "$x > 0$" and U is the integers, then $\exists x\, P(x)$ is true. It is also true if U is the positive integers.
2. If $P(x)$ denotes "$x < 0$" and U is the positive integers, then $\exists x\, P(x)$ is false.
3. If $P(x)$ denotes "x is even" and U is the integers, then $\exists x\, P(x)$ is true.
4. If the domain = $\{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$, understanding:

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n) \cdots$$

Uniqueness Quantifier存在唯一量词 (*optional*)

$\exists! x\, P(x)$ means that $P(x)$ is true for <u>one and only one</u> x in the universe of discourse.

This is commonly expressed in natural language in the following equivalent ways:

- "There is a unique x such that $P(x)$."
- "There is one and only one x such that $P(x)$"

Examples:

1. If $P(x)$ denotes "$x + 1 = 0$" and U is the integers, then $\exists! x\, P(x)$ is true.
2. But if $P(x)$ denotes "$x > 0$," then $\exists! x\, P(x)$ is false.

The uniqueness quantifier is not really needed as the restriction that there is a unique x such that $P(x)$ can be expressed as:

$$\exists x\, (P(x) \land \forall y\, (P(y) \rightarrow y = x))$$

Understanding Quantifiers

When the domain of discourse is finite 有限论域, we can think of quantification as looping through the elements of the domain.

To evaluate **$\forall x\ P(x)$** loop through all x in the domain = $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$,.

$$\forall x\ P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \land P(a_2) \land \ldots \land P(a_n)$$

- If at every step P(x) is true, then $\forall x\ P(x)$ is true.
- If at a step P(x) is false, then $\forall x\ P(x)$ is false and the loop terminates.

Understanding Quantifiers 理解量词

To evaluate $\exists x\, P(x)$ loop through all x in the domain = $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$,.

$$\exists x\, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$$

– If at some step, $P(x)$ is true, then $\exists x\, P(x)$ is true and the loop terminates.

– If the loop ends without finding an x for which $P(x)$ is true, then $\exists x\, P(x)$ is false.

Even if the domains are infinite, we can still think of the quantifiers this fashion, but the loops will not terminate in some cases.

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n) \cdots$$

有限个体域下的量词对应于析取、合取

Example：If U ={1,2,3}:

$$\forall x P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$$

$$\exists x P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3)$$

Properties of Quantifiers

The truth value of $\exists x\, P(x)$ and $\forall x\, P(x)$ depend on both the propositional function $P(x)$ and on the domain U.

Examples:

1. If U is the positive integers and $P(x)$ is the statement "$x < 2$", then $\exists x\, P(x)$ is true, but $\forall x\, P(x)$ is false.
2. If U is the negative integers and $P(x)$ is the statement "$x < 2$", then both $\exists x\, P(x)$ and $\forall x\, P(x)$ are true.
3. If U consists of 3, 4, and 5, and $P(x)$ is the statement "$x > 2$", then both $\exists x\, P(x)$ and $\forall x\, P(x)$ are true. But if $P(x)$ is the statement "$x < 2$", then both $\exists x\, P(x)$ and $\forall x\, P(x)$ are false.

Precedence of Quantifiers量词优先级

The quantifiers $\forall$ and $\exists$ have higher precedence than all the logical operators. 量词优先级高于逻辑运算

For example, $\forall x\, P(x) \vee Q(x)$ means $(\forall x\, P(x)) \vee Q(x)$)

$\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$ means something different.

Unfortunately, some people write $\forall x\, P(x) \vee Q(x)$ when they mean $\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$.

一阶逻辑、二阶逻辑*

这里的量词仅用于限定个体变量，这种谓词逻辑也称为一阶逻辑；

例如： $\forall xP(x)$

如果引入量词限制作用于谓词，那么相应的谓词逻辑会称为二阶逻辑*

例如： $\exists F(F(x))$

通常这里所说的谓词逻辑是指一阶逻辑；

高阶逻辑亦称“广义谓词逻辑”、“高阶谓词逻辑”。

谓词逻辑的一阶逻辑和高阶逻辑之分: 在一阶逻辑中，量词只能用于个体变元，取消这一限制条件，允许量词也可用于命题变元和谓词变元，由此构造起来的谓词逻辑就是高阶逻辑。

2 Compound Predicate Expression谓词公式

前面的谓词逻辑中符号化得到的命题和命题函数，复合命题函数等都是谓词逻辑公式(简称谓词公式)。至此，在谓词逻辑公式中，我们已涉及到以下这些变量和常量符号：

(1)个体变量符号：用小写的英文字母x，y，z（或加下标）...等表示。

(2)个体常量符号：用小写的英文字母a，b，c（或加下标）...等表示。

(3)数学运算符号(不一定是逻辑运算符)：用小写的英文字母f，g，h（或加下标）...等表示。

(4)谓词符号：用大写的英文字母F，G，H（或加下标）...等表示。

(5)量词符号：$\forall$ $\exists$

(6)逻辑联结词（逻辑运算符）：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$

(7)分组圆括号。

命题函数也称为谓词公式，是简单的谓词表达式；

用逻辑运算符将命题函数复合而成的有意义的复合谓词逻辑表达式称为复合谓词公式，也简称谓词公式。

The Scope of Quantifier 量词的辖域（作用域）

在谓词公式（谓词表达式）中，形如 $\forall xA(x)$或$\exists xA(x)$的部分叫做公式的约束部分(bound part)，其中x称为相应量词的约束变元（bound variable），公式A(x)称为量词的辖域（或者叫作用域scope）。

在辖域中，个体变元x的一切出现称为x在公式中的约束出现，且称x为约束变元（受量词的约束，**教材中叫绑定**），在公式中除约束变元以外的不受量词影响的个体变元称自由出现，且称x为自由变元(free variable)。

$\forall xP(x)$ asserts $P(x)$ is true for every x in the *domain*.

$\exists xP(x)$ asserts $P(x)$ is true for some x in the *domain*.

The quantifiers are said to bind the variable x in these expressions. Or x is bound by the quantifiers.

More to Know About Binding

$\forall x\, P(x)$ - x is not a free variable.

$\big(\forall x\, P(x)\big) \wedge Q(x)$ - The variable x is outside of the *scope* of the $\forall x$ quantifier, and is therefore free. Not a proposition!

$\big(\forall x\, P(x)\big) \wedge \big(\exists x\, Q(x)\big)$ – This is legal, because there are 2 <u>different</u> x's! Both are bound variables.

【Example】find out the scope of all quantifiers, and analyze bound variables and frees. 考察下列谓词公式中每个量词的辖域及每个变元的出现是约束的或自由的。

（1） $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y\, H(x,y))$

（2） $\forall x\, (F\, (x) \rightarrow G\, (x)) \vee \forall x\, (F\, (x) \rightarrow H\, (x))$

（3） $\exists x\, F(x) \wedge G(x)$

闭 式 closed expression

闭式：没有自由变元的谓词公式称为闭式。

举例说明 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$是闭式

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x,y))\wedge H(x,y)$不是闭式

事实上，仅就个体变元而言，自由变元才是真正的变元，而**约束变元只在表面上是变元，实际上并不是真正意义上的变元**。

换言之，含有自由变元的公式在对谓词变量进行具体解释说明后仍是命题函数，还需对个体变量赋值方成命题，而不含自由变元的闭式一旦对谓词符号进行了具体解释，且指定了所有个体变量的个体域后就成了命题，不需要对约束变量赋值。

为什么？自己体会一下

谓词公式的解释与赋值

问题：$\forall xF(x) \rightarrow G(x)$ 的真值如何？

定义 对公式的一种**解释与赋值**由以下5个部分组成：

(1)为每个谓词符指定一个具体谓词（解释）。

(2) 为个体域指定一个非空集合D（指定论域）

(3) 为每个自由个体变量指定一个个体(赋值)。

(4)为每个出现的n元数学运算符指定D上的一个具体的n元运算（解释）。

(5) 为公式中可能出现的命题变量进行真值赋值

注：谓词公式在解释和赋值之前，通常还不是命题！

分别考察公式：$\forall x \exists y L(x, y)$和

$\forall x(E(f(x, a), x) \wedge L(g(x, a), a))$

在解释和赋值前，这个公式是真是假？代表什么具体意思？未知！

只有解释了谓词L、E，以及f、g，并且给a赋值，给出两个个体相应的个体域（论域）后才能回答

实际含义：所谓的解释与赋值实际上是对公式（表达式）中的未确定的部分进行解释、赋值等确定的行为。

解释与赋值举例：求下列公式在解释I下的真值

（1） $\forall x \exists y L(x, y)$

解释I: L(x,y) 为x＜y； 个体域为所有自然数

解 (1)式中没有自由变元，是闭式，在解释I下的意义是：对于每一个自然数x，均存在着自然数y，使得$x<y$。显然这是一个真命题。

注：这里的解释做了两件事：解释谓词的意义；指定个体域

如果换一种解释就未必是真命题了

解释与赋值举例 2。

2） $\forall x(E(f(x, a), x) \wedge L(g(x, a), a))$

解：式中没有自由变元，是闭式，如果将其解释为意义：对于每一个自然数x，$x+0=x$并且x 0＜0。0＜0不真，所以这是一个假命题。

（其中：f,g为实数的运算，E，L分别为谓词）

（3） $\forall y(E(x, y) \vee L(x, y))$

解：式中x是自由变元，不是闭式，如果解释成意义：对于每一个自然数y，$x=y$或者$x<y$。因为x取0时，原式为真；x取1时，原式为假，所以这是命题函数，而非命题。（解释谓词；自由变量赋值）

谓词逻辑公式的分类

永真式（逻辑有效式）： 无论对谓词公式的谓词及个体域做何种解释和赋值，以及给自由个体变量做任何赋值下均为真的谓词公式；

永假式（矛盾式unsatisfiable ）：在任何一组解释和赋值下均为假的谓词公式；

可满足式 (*satisfiable*) ：至少有一种解释和一种赋值使其为真的谓词公式。

可能式怎么定义？

判定一个谓词公式*A*不是永真式，只需找到一种解释和赋值，使公式*A*在相应的解释和赋值下为假；

判定一个公式*A*不是永假式，只需找到一种解释和赋值，使*A*真；

要判定一个公式*A*是可满足式，只需找到一个解释和赋值，使A在这种解释和赋值下为真。

使得公式为真的解释和赋值称为公式的解(solutions)

注意：实际应用中（如人工智能应用），寻找公式的解是很有意义的，但同时也是个难题。

【例】讨论下列公式的类型：

（1）$\forall xF(x)\to\exists xF(x)$

解 （1）公式$\forall xF(x)\to\exists xF(x)$ 在任何解释下的含义是：如果个体域D中的每个元素x均有性质F，则D中的某些元素x必有性质F。前件 $\forall xF$（x）为真时，后件 $\exists xF(x)$永远为真，所以公式

$\forall xF(x)\to\exists xF(x)$ 是永真式。

（2）公式$\forall x \neg G(x) \wedge \exists x G(x)$

在任何解释下的含义是：个体域D中的每个元素x均不具有性质G，且D中的某些元素x具有性质G。这是两个互相矛盾的命题，不可能同时成立，所以公式

$$\forall x \neg G(x) \wedge \exists x G(x) \text{ 是永假式。}$$

（3）公式 $\forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \forall y \exists x F(x, y)$

既不是永真式，也不是永假式。由于这是闭式，故无需考虑赋值，只要给出一个使其成真的解释和一个使其成假的解释即可。

解释1：个体域为自然数集合；F(x,y): $x=y^2$

这个解释下公式的真值是?

解释2：个体域为自然数集合；F(x,y): $y=x^2$

这个解释下公式的真值又是?

谓词逻辑符号化问题

Translating from Natural Language to Logic

谓词逻辑适合于表示事物的状态、属性、概念等事实性知识，也可以用来表示事物间具有确定因果关系的规则性知识。是人工智能中知识表示的一部分。

谓词逻辑符号化是谓词逻辑应用的基础；

谓词逻辑符号化问题的基本步骤

1. 分析逻辑表述涉及到一些什么样的个体；
2. 分析逻辑语句中的成分结构，抽出谓词；
3. 分析每个个体变量的取值范围（个体域）；
4. 分析是否需要用相应的量词对个体变量进行限定；
5. 再分析每个最基本的陈述（也即原子命题、简单命题函数）之间的逻辑关系，确定合适的逻辑运算符。

注：每年的考试，这个部分都不理想

Translating from Natural Language to Logic
谓词逻辑符号化

Example 1: Translate the following sentence into predicate logic 符号化下面句子: "Every student in this class has taken a course in Java."

Solution: 分别采用特定个体域与全总个体域

Solution 1: If *U* is all students in this class, define a propositional function 命题函数 J(x) denoting "x has taken a course in Java" and translate as $\forall x\, J(x)$.

Solution 2: But if *U* is all people, also define a propositional function S(x) denoting "x is a student in this class" and translate as $\forall x\, (S(x) \rightarrow J(x))$.

Is $\forall x\, (S(x) \land J(x))$ is correct? What does it mean?

Translating from English to Logic

Example 2: Translate the following sentence into predicate logic:

"Some student in this class has taken a course in Java."

Solution: First decide on the domain *U*.

Solution 1: If *U* is all students in this class, translate as

$$\exists x\, J(x)$$

Solution 2: But if *U* is all people, then translate as $\exists x\, (S(x) \land J(x))$

Is $\exists x\, (S(x) \rightarrow J(x))$ is orrect? What does it mean?

Using universal domain
全总个体域（无限论域）的使用说明

在谓词逻辑符号化过程中，可以指定个体域，同一个命题函数在不同的个体域中可能有不同的真值。

为统一起见，后面的讨论中，除特殊说明外，均使用**全总个体域**。而对个体变化的真正取值范围，在表达命题函数时,用**特性谓词**对个体变量的取值范围加以限制。

尤其是问题涉及到多个谓词和多个不同的个体变量时，全总个体域的使用更普遍。否则为每个个体变量指定一个特殊的个体域，不是一个好的选择。

例3 在全总个体域中形式化下列命题：

(1) 任意的偶数均能被2整除。

(2) 我们班有人吸烟。

解（1）引入特性谓词$E(x)$：x是偶数。

“任意的偶数均能被2整除”的涵义是：全总个体域中有子集--偶数集，该子集中的每个元素均具有一种性质，不论什么个体，只要其属于这个子集，就必然具有这种性质。

用D(x)表示x是能被2整除，特性谓词就作为蕴含式的前件加入。这样原句可形式化为：

$$\forall x(E(x)\rightarrow D(x))$$

（2）引入特性谓词$C(x)$：x是我们班的人。用S(x)表示x吸烟

“我们班有人吸烟”的涵义可以这样理解：在宇宙间的万物（全总个体域）中，有一个子集--我们班，还有另一个子集--吸烟的人。强调的是既在我们班，又吸烟的的人，所以是两个子集的交集。特性谓词用合取项加入。则原句可形式化为：

$$\exists x（C（x）\land S（x））$$

指定个体域与全总个体域的表达区别

任意的偶数均能被2整除：
指定个体域为“所有偶数”：$\forall xD(x)$
全总个体域下：$\forall x(E(x)\rightarrow D(x))$

我们班有人抽烟：
指定个体域“我们班的所有人”：$\exists x\, S(x)$
全总个体域下：$\exists x(C(x)\wedge S(x))$

体会一下 $\exists x(C(x)\rightarrow S(x))$ 的区别

【例4】将下列命题形式化为谓词逻辑中的命题：

（1）没有不犯错误的人。

（2）人总是要犯错误的。

解 设$M(x)$：x是人，$F(x)$：x会犯错误。则原句形式化为：

（1）$\neg\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$

（2）$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

特别注意和理解:一般情况下，

对全称量词，特性谓词作蕴含式的前件；

对存在量词，特性谓词常作合取项。

【例5】将下列命题形式化为谓词逻辑中的命题：

（1）所有的病人都相信医生。

解 设P(x)：x是病人，D（x）：x是医生，T（x，y）：x相信y。

（1）命题的意思是：对于每一个x，如果x是病人，那么对于每一个y，只要y是医生，x就相信y。

因此，本命题符号化为：

$$\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(D(y) \rightarrow T(x, y)))$$ 或

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge D(y)) \rightarrow T(x, y))$$

（2）有的病人相信所有的医生。

命题的意思是：存在着这样的x，x是病人且对于每一个y，只要y是医生，x就相信y。因此，本命题符号化为：

$$\exists x（P（x）\wedge \forall y（D（y）\rightarrow T（x, y）））)$$

（3）有的病人不相信某些医生。

命题的意思是：存在着这样的x和y，x是病人，y是医生，x不相信y。

设P（x）：x是病人，D（x）：x是医生，

T（x，y）：x相信y。

因此，命题符号化为：

$$\exists x \exists y (P(x) \wedge D(y) \wedge \neg T(x, y))$$

（4）所有的病人都相信某些医生。

命题的意思是：对于每个x，如果x是病人，就存在着医生y，使得x相信y。因此，命题符号化为：

$$\forall x（P（x）\rightarrow \exists y（D（y）\wedge T（x，y）））)$$

补充例题：（1）是学生就得参加考试。

（2）不劳动者不得食。

（3）有些花很香，但并非所有的花都香。

解（1）设$F(x)$:x是学生,$G(x)$:x必须参加考试.

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

（2） 设$F(x)$:x是劳动者，$G(x)$:x得到食物。

$$\forall x(\neg F(x)\rightarrow \neg G(x))$$

或者： $\forall x(G(x)\rightarrow F(x))$ ？

（3）设$F(x)$:x是花，$G(x)$:x很香

$$\exists x(F(x)\wedge G(x))\wedge\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

约束论域量词*

在数学的表达中，尤其是在微积分里，经常会用一下简易的表示方法来表示一些实际上是谓词逻辑的命题。

例1：$\forall x< 0\ (x^2>0)$. 这个表达的实际上是 对任意的负数，其平方都大于0.

但是在逻辑里最好还是用现在的表达方式：

$\forall x\,(x< 0 \rightarrow x^2>0)$.

例2：$\exists x> 0\ (x^2=2\ )$ 表示的是存在这样的正实数，其平方等于2.

$\exists\, x\,(x> 0 \wedge x^2=2)$.

课外作业

离散数学及其应用 教材第8版：1.4节

7. (a), (d)   17 . (c), (d)

23. (a), (c), (e) ； 25. (f)；

39 (c)， 45, 63 (a), (b)

Equivalences in Predicate Logic

谓词逻辑等价

Equivalences in Predicate Logic 谓词逻辑等价

$A \equiv B$当且仅当在任何解释和赋值下，A与B有相同的真值。

也即，无论谓词如何指定，个体域怎么规定，自由变量如何赋值，命题变量如何赋值（如果公式含有命题变量的话）

即在任何情况下，

A为真当且仅当B为真($A \equiv 1$ 当且仅当 $B \equiv 1$) **，**

或者，A为假当且仅当B为假 ($A \equiv 0$ 当且仅当 $B \equiv 0$)

当然也可以是直接判断A↔B是否为永真式

Example: $\forall x \neg\neg S(x) \equiv \forall x\, S(x)$

如果要说明两个公式不等值，只需找到一个解释和赋值，使得两个公式在这组解释和赋值下，一个为真，另一个为假。

【例】 判断公式 $\forall x \exists y F(x,y)$与公式 $\exists y \forall x F(x,y)$是否等值。

解：直接观察是不等值的。由于两个公式均是闭式，所以只需给出一个解释，一个为真，另一个为假。

取解释I：D为所有鞋子的集合，$F(x,y)$：x与y能配成一双。

则在I下，$\forall x \exists y F(x,y)$ 表示“每一只鞋子均有另一只鞋子能与其配成一双”是真命题，而公式$\exists y \forall x F(x,y)$ 表示“有这样的鞋子能与任何一只鞋子配成一双”是假命题。

因此，两个公式 $\forall x \exists y F(x,y)$与 $\exists y \forall x F(x,y)$不等值。

这个例子也告诉了我们: 不同量词嵌套时，顺序不能随意交换！

De Morgan's Laws for Quantifiers 量词转换律

- The rules for negating quantifiers are:

TABLE 2 De Morgan's Laws for Quantifiers.

Negation	*Equivalent Statement*	*When Is Negation True?*	*When False?*
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	For every x, $P(x)$ is false.	There is an x for which $P(x)$ is true.
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is false.	$P(x)$ is true for every x.

- The reasoning in the table shows that:
- $\neg\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$　　　（1）
- $\neg\exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$　　　（2）
- 怎么理解其正确性？
- 思考问题：当个体域有限时，这里的De Morgan定律跟命题逻辑中的DeMorgan定律有何联系？

量词转换律（De Morgan定律）

- 举例： $\neg\forall x\exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists x\neg\exists y A(x,y)$

  $\Leftrightarrow \exists x\forall y\,\neg A(x,y)$

量词辖域扩缩律

A（x）是任一谓词公式，B是任一不含x的谓词公式）

- $\forall xA(x) \wedge B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B)$ （1）
- $\forall xA(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee B)$ （2）
- $\exists xA(x) \wedge B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge B)$ （3）
- $\exists xA(x) \vee B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B)$ （4）

- 证明 $\forall xA$（x）$\wedge B \Leftrightarrow \forall x$（$A$（$x$）$\wedge B$）
- （1）在任何解释和赋值，x的个体域U下，
- $\forall xA(x) \wedge B$=1 当且仅当 $\forall xA(x)$=1且B=1
- 当且仅当 对于个体域U中的每一个元素c，$A(c)$=1 且 B=1
- 当且仅当 对于个体域U中的每一个元素c，$A(c) \wedge B$=1
- 当且仅当 $\forall x$（$A(x) \wedge B$）=1

- $\forall xA(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee B)$ （2）
- 在任何解释和赋值，x的个体域U下，
- $\forall xA(x) \vee B=0$
- 当且仅当 $\forall xA(x)=0$ 且 $B=0$
- 当且仅当 存在U中的元素c，使得$A(c)=0$ 且 $B=0$
- 当且仅当 存在U中的元素c，使得$A(c) \vee B=0$
- 当且仅当 $\forall x(A(x) \vee B)=0$

- 思考：$\forall xA(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B)$是否正确？

量词分配律 *A*（*x*）、*B*（*x*）是任意谓词公式

$$(1)\quad \forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge \forall xB(x)$$

$$(2)\quad \exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow \exists xA(x)\vee \exists xB(x)$$

思考：在上面的两个等价式中，如果将存在量词换成全称量词，或者将全称量词换成存在量词，会怎么样?

请同学们试试，看能有什么结论？…

- Is this a valid equivalence?

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

- **Solution**: No! The left and the right side may have different truth values. Pick "x is a fish" for P(x) and "x has scales鱼鳞" for Q(x) with the domain of discourse being all animals. Then the left side is false, because there are some fish that do not have scales. But the right side is true since not all animals are fish.

Nested Quantifiers

两个量词嵌套的量化表示和理解

Quantifications of Two Variables

Statement	When True?	When False
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$	*P*(*x*,*y*) is true for every pair *x*,*y* *in the domain*.	There is a pair *x*, *y* for which *P*(*x*,*y*) is false.
$\forall x \exists y P(x,y)$	For every *x* there is a *y* for which *P*(*x*,*y*) is true.	There is an x such that *P*(*x*,*y*) is false for every *y*.
$\exists x \forall y P(x,y)$	There is an *x* for which *P*(*x*,*y*) is true for every *y*.	For every *x* there is a y for which *P*(x,y) is false.
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists y \exists x P(x,y)$	There is a pair *x*, *y* for which *P*(*x*,*y*) is true.	*P*(x,y) is false for every pair *x*,*y*

注意：存在嵌套量词的公式中量词的顺序不能随意交换

Quantifier Exercise

- If $R(x,y)$="x relies upon y," express the following in unambiguous language:
- $\forall x(\exists y\, R(x,y))=$ **Everyone has *someone* to rely on.**
- $\exists y(\forall x\, R(x,y))=$ **There's a poor overburdened soul whom *everyone* relies upon (including himself)!**
- $\exists x(\forall y\, R(x,y))=$ **There's some needy person who relies upon *everybody* (including himself).**
- $\forall y(\exists x\, R(x,y))=$ **Everyone has *someone* who relies upon them.**
- $\forall x(\forall y\, R(x,y))=$ ***Everyone* relies upon *everybody*, (including themselves)!**

Some Questions about Quantifiers

- Can you switch the order of quantifiers?
  - Is this a valid equivalence? $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$

    Solution: Yes! The left and the right side will always have the same truth value.

  - Is this a valid equivalence? $\forall x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \forall x P(x, y)$

    Solution: **No!** The left and the right side may have different truth values for some propositional functions for *P*. Try "x + y = 0" for *P(x,y)* with *U* being the integers. The order in which the values of *x* and *y* are picked does matter.

课外作业

- 第8版教材 1.5节
- T3(b), T9 (d), T31(b), T49(a)

变量名的重名问题* (自己看）

由上面这些例题可见，在同一个谓词逻辑公式中，某个个体变元（符号）的出现可以既是约束的，又是自由的，如（3）中的x。另外，同一个变元（符）即使都是约束的，也可能是受不同的量词约束，如（2）中的x。

为了避免混淆，可对约束变元进行换名，使得一个变元（符）在一个公式中只以一种形式出现。

- **换名规则**（换名目的在于避免混淆，增强可读性）
- （1）将量词的作用范围或者说其辖域中所有同符号的变元用一个新的变元符代替。
- （2）新的变元符是原公式中所没有出现的。
- （3）用（1）、（2）得到的新公式与原公式等值。

- 【例】对公式进行换名
- $\forall x(F(x) \to G(x, y)) \wedge H(x, y)$
- 换名，下面的几种做法中哪个是正确的？
- （1）$\forall z(F(z) \to G(z, y)) \wedge H(x, y)$
- （2）$\forall y(F(y) \to G(y, y)) \wedge H(x, y)$
- （3）$\forall z(F(z) \to G(x, y)) \wedge H(x, y)$

- 解 只有（1）是正确的。（2）的换名违反了规则（2），使得G（x，y）中的y的出现改变了性质。（3）的换名违反了规则（1），使得G（x，y）中的x的出现改变了性质。

- 对公式中自由出现的变元也可换符号，称为代替同样需要遵守下面的规则：
- **代替规则** （其实也是换名）
- （1）将公式中所有同符号的自由变元符用新的变元符替换。
- （2）新的变元符是原公式中所没有出现的。
- （3）用（1）、（2）得到的新公式与原公式等值。

- 【例】 对公式
- $\forall x(F(x)\to G(x,y))\wedge H(x,y)$
- 做替换，下面的几种做法中哪个是正确的?
- (1) $\forall xF(x)\to G(x,y))\wedge H(z,y)$
- (2) $\forall x(F(x)\to G(x,z))\wedge H(u,y)$
- (3) $\forall z(F(z)\to G(x,y))\wedge H(y,y)$

【例】 设个体域为$\{a, b, c\}$，消去下列公式中的量词。

- （1） $\forall xF(x) \wedge \exists yG(y)$
- （2） $\forall x \exists y(F(x) \wedge G(y))$
- （3） $\forall x \exists y(F(x, y) \rightarrow G(y))$

- 请同学们自己课后完成这道例题