华中科技大学计算机与科学技术学院

2019~2020 第二学期

“ 离散数学（一）”考试试卷 (A 卷)

解答内容不得超过装订线

分　数	
评卷人	

一．填空题(每小题 3 分，共 18 分)

(1) 命题公式(p∧ (p∨q))→q 是___可满足_____公式。(填永真、永假或可满足)

(2) 谓词表达式∀x∃y (x+y = xy) (个体域为实数集)的真值是___假_____.

(3) 集合关系式 A−B=C 是 A⊆B∪C 的____充分（非必要）______条件。

(4) 全体整系数二次三元多项式构成的集合__是____可数集。(填是或不是)

(5) 无向图 G 有 n 个点 m 条边，其中 n > m. 则 G 至少有___n-m___个连通分支。

(6) 一颗满二叉树有 6 个树叶，则其它有____11__个顶点。

分　数	
评卷人	

二． 逻辑与图论解答题 （共 27 分）

(7) 求命题公式(p→q)→r 的主合取范式。(5 分)

解答：这道题目可以先列出真值表，然后从真值表直接写出主合取范式；也可以直接对该逻辑表达式进行等价变换，一步一步变化到范式，再到主合取范式。不需要特别技巧。

有同学看错题目，求出来的是主析取范式。当然可以从主西取范式，写出主合取范式. 主合取范式如下：

(¬p∨¬q∨r) ∧ (p∨¬q∨r) ∧ (p∨q∨r) $=M_6 \wedge M_2 \wedge M_0$

(8) 用谓词表达式将下列命题符号化：(5 分)

有人游览过中国每个省份的某些景点。

解答：用 M(x)表示 x 是人，P(y): y 是中国的省，V(z): z 是景点；

(以上三个谓词为特性谓词，起着指定个体域的作用)

B(y,z): z 是属于 y 的景点， T(x,z): x 游览过 z;

（这两个是二元谓词，说明个体之间的关系； 量词涉及 3 个 存在，全称， 存在）

上面的明天符号化公式表达如下：

$\exists x(M(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow \exists z(V(z) \wedge B(y,z) \wedge T(x,z))))$

第二种表示方法：将上面的两个二元谓词用一个 3 元谓词 F(x,y,z)，表示 x 游览过 y 的 z. 于是符号化公式表达为：$\exists x(M(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow \exists z(V(z) \wedge F(x,y,z))))$

(9) 判断下式是否成立，并说明理由。(5 分)

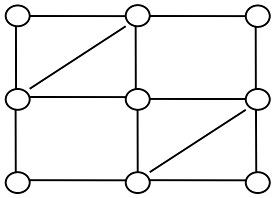
$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

解答：如果$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$成立，则有$\forall xP(x)$成立或者$\forall xQ(x)$成立，无论是哪个成立或者是两个都成立，都意味着$\forall x(P(x) \vee Q(x))$

成立； 但反之不成立。 反例如下：考虑个体与为全体整数，P(x)表示 x 是偶数，Q(x)表示 x 是奇数，那么在这个个体域下，$P(x) \vee Q(x)$表示 x 是偶数或者是奇数，总是真的，于是$\forall x(P(x) \vee Q(x))$为真。但显然$\forall xP(x)$、$\forall xQ(x)$都不成立，所以$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$为假。

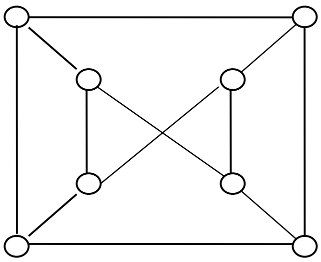
解答内容不得超过装订线

(10) 下图是否是欧拉图、哈密顿图，并说明理由。(6 分)

解答:（1）这个图显然不说欧拉图，因为有奇数度的结点存在;

（2）也不是哈密尔顿图，这个图存在哈密尔顿开路，但不存在哈密尔顿回路。实际上，如果我们从图中删除掉两条斜边的端点（共 4 个）以及相关联的边后，就剩下 5 个孤立点了，形成了 5 个联通分支。根据哈密尔顿图的一个必要条件，删除的结点集的基数应该不小于剩下来的图的连通分支数。所以肯定该图不说哈密尔顿图。

(11) 判断下图是否为平面图，并说明理由。(6 分)。

解答：不是平面图；从该图中删除一条竖着的边后，在做同胚变换，去掉度为 2 的结点，然后就可以变化到 $K_{3,3}$

这说明原图存在与 $K_{3,3}$ 同胚的子图。

分　数	
评卷人	

三．集合函数关系求解题（共 25 分）

(12) 学校每年都举行秋季田径运动会。用 A 表示 2019 年秋季所有华中科技大学的在校学生的集合，B 华中科技大学 2019 年秋季运动会的所有运动项目的集合，每个人报名的项目不能多于 3 个. 已知|B|>10，每个项目都有学生报名，并且正常进行了比赛。定义一个从 A 到 B 的幂集 P(B) 的对应关系 f，将 A 中的每一个人对应到其所报名的项目的集合。（9 分）

(a) 那么 f 是否是 A 到 P(B)的一个函数？为什么？如果是函数，那么 f 是不是单射，是不是满射，是不是双射？ 为什么？

解答：因为没一个 A 中的元素（也即任一个学生）报的项目的集合是确定的，一定是 B 的一个子集，也即 P(B)的一个元素，一个确定的元素。 如果某人没有报任何项目，那么对应与空集。 所有这个对应关系 f 是 A 到 P(B)的一个函数。F 不是满射，因为有不同的学生报的项目集合恰好一样。必然说很多人都没有报任何项目，他们对应的函数值都是空集，所以不是单射； 当然，f 也一定不是满射，因为每个人最多报 3 个项目，没有人能够报所有的项目，这就明显意味着 B 是没有原像的。 既不是单射，也不是满射，当然就不可能是双射了。

(b) 对于 B 的任一个子集 C，它在 f 下的原像 $f^{-1}(C)$是 A 中所有那些报的项目的集合**恰好（恰好这个词在这里很关键）**等于 C 的人的集合 ；$f^{-1}(\phi)$= 所有没有报任何项目的学生的集合______.

(c) 假设 $A=\{a_1,a_2, \ldots a_n\}$，那么$\{a_1\},\{a_2\}, \ldots\{a_n\}$ 是否是 A 的一个分划？____是____ (是或者不是)； $f(a_1)\cup f(a_2)\cup \ldots\cup f(a_n)$ =__B__.

(13) T 是实数集 R 上的关系：aTb 当且仅当 $|a| \le b$.（8 分）

请问，T 具有自反性、对称性、反对称性和传递性中哪些性质，并说明理由。

解答：显然，T 不满足自反性，因为(1, -1)就不满足 $|1| \le -1$，所以(1, -1)不属于 T；但是(-1, 1)满足上面这个不等式，说明（-1,1）属于 T，而(1, -1)不属于 T，于是得到 T 不满足对称性；反对称性成立，因为如果有 $|a| \le b$ 且 $|b| \le a$，则 a,b 都非负，在这里只能相等。

对任意的 3 个实数 a,b,c，如果由 $|a| \le b$，$|b| \le c$，说明 b,c 都非负，那么一定有 $|a| \le c$．于是 T 满足可传递性

(14) 下面 0-1 阵表示的集合 A={a, b, c}上的二元关系：（8 分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

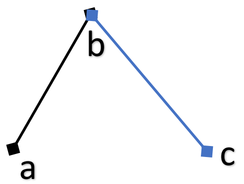
写出该二元关系；判断它是否为偏序，是否为全序，并说明理由；如果是偏序，请画出相应的 Hasse 图。

解答：记该关系矩阵为 M，M 代表的二元关系是 R={(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (c,b)}

这个关系显然是自反的，也是反对称的；

计算 M^2（布尔积）结果=M，说明 $R^2 \subseteq R$，这说明 R 是可传递的。于是 R 是一个偏序关系；R 不是全序，因为元素 a 与元素 c 是不可比较的。

R 的 Hasse 图如下：



分 数	

评卷人	

四. 证明(每题 10 分, 共 30 分)

(15)形式证明: $P\to(Q\to R)$是前提$\neg R\to(\neg P\vee S)$, $Q\to\neg S$ 的结论。

证明:

(1) $\neg R\to(\neg P\vee S)$　　　前提

(2) $R\vee\neg P\vee S$　　　等价变换

(3) $\neg P\vee R\vee S$　　　交换律

(4) $P\to(R\vee S)$　　　等价变换

(5) P　　　附加前提

(6) $R\vee S$　　　(4), (5)

(7) $Q\to\neg S$　　　已知前提

(8) $\neg Q\vee\neg S$　　　等价变换

(9) $\neg Q\vee R$　　　(7),(8) 消解

(10) $Q\to R$　　　等价变换

(11) $P\to(Q\to R)$　　　（5）,(10）

证毕。

注解: 如果这里的第(9)步骤的消解不知道, 也可以从（8）开始改写如下:

（8） $S\to\neg Q$　　　(7) 逆否

(9) $\neg R\to S$　　　（6）等价变换

(10) $\neg R\to\neg Q$　　　(8), (9)

(11) $Q\to R$　　　(10) 逆否

（12） P→(Q→R)   （5）,(11）

证法二:（这里给出另外一个附加前提，整个证明很顺畅，类似于反正法）

(1) ¬ (Q→R)   附加前提 （目标是去得到¬P）

(2) ¬ (¬Q∨R)   等价变换

(3) Q∧¬R   Demorgan 定律

(4) Q   (3)

(5) ¬R   (3)

(6) Q→¬S   已知前提

(7) ¬S   (4), (6)

(8) ¬R→(¬P∨S)   前提

(9) ¬P∨S   (5), （8）

(10)¬P   （7）， （9）

(11)P→(Q→R)   （1），（10）

(16) M 是全体二阶实对称方阵构成的集合，R 是其上的关系：

ARB 当且仅当存在实可逆矩阵 P 使 $P^TAP=B$. (其中 P^T 为 P 的转置)

(a) 证明：R 是 M 上的等价关系；

(b) 写出$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$所在的等价类；

(c) 写出 R 的全部等价类。

解答:

(a) 分别证明 R 是 M 上的自反、对称的和可传递的二元关系。

对于 M 中的任意一个元素（矩阵）A，用 I 表示二阶单位矩阵，显然 I 是可逆的，而且 $I^TAI=A$， 说明 A 与 A 具有关系 R，也即 R 是自反的；

假设 ARB，那么根据 R 的定义知，存在可逆矩阵 P 使得 $P^TAP=B$；因为 P 为可逆矩阵，

那么 P 的逆矩阵 P^{-1} 也是可逆的，而且可以得到 A=（P^{-1}）$^{T}BP^{-1}$ ，所以 BRA， 说明 R 是对称的二元关系；再假设 A、B、C 为二阶实矩阵，而且 ARB,BRC， 那么存在可逆矩阵 P,Q 使得 $P^{T}AP=B$， $Q^{T}BQ=C$。 于是有 Q^{T}（$P^{T}AP$）Q=C， 也即$(PQ)^{T}A(PQ) = C$， 因为 P、Q 均为可逆矩阵，所以 PQ 也为可逆矩阵。由 R 的定义可知，ARC，所以 R 是可传递的。 综上 3 条性质，得到 R 是等价关系；

(b) $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$所在的等价类就是所有与矩阵$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$具有关系 R 的二阶实矩阵，等价定义我们知道写出$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$所在的等价类={$P^{T}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}P|P$ 为二阶实可逆矩阵}

(c ）在合同变换意义下，二阶实方阵的标准型有如下 6 个：$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix}$， $C=\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}$， $D=\begin{bmatrix}-1 & \\ & -1\end{bmatrix}$， $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$，$F=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

每一个就是一个等价类的代表元。 一共 6 个等价类：

{$P^{T}AP|P$ 为二阶实可逆矩阵}，{$P^{T}BP|P$ 为二阶实可逆矩阵}

，{$P^{T}CP|P$ 为二阶实可逆矩阵} ，{$P^{T}DP|P$ 为二阶实可逆矩阵}

，{$P^{T}EP|P$ 为二阶实可逆矩阵}，{$P^{T}FP|P$ 为二阶实可逆矩阵}

(17)简单图 G 的结点数 $n \geqslant 5$，证明：G 或其补图$\overline{G}$中必包含有简单回路。

证明：反正法。假设图 G 中不包含简单回路，由于 G 是简单图，那么 G 必然是树或者是树林。当 G 连通时是树，其边的数是结点数 n-1; G 不连通时，其每一个连通分支都是树，此时 G 是树林，其结点数是 n-t（t 为其连通分支数），由于 t 必然是正整数，所以 $n-t < n-1$。于是无论如何 G 的边数 $\leqslant n-1$.

同理，如果补图$\overline{G}$也不包含简单回路，那么其边数也是小于等于 n-1.

这样，如果假设 G 与其补图都不包含简单回路，那么两个图的总边数 $\leqslant 2(n-1)$.

然而，G 与其补图合起来是 n 个结点的完全图，边的数目是 $n(n-1)/2$. 当 $n \geqslant 5$ 时，$n(n-1)/2 \geqslant 2(n-1)$，矛盾。这个矛盾说明 G 或其补图$\overline{G}$中至少有一个包含有简单回路(完全由可能都包含简单回路)。