

# Partial Orders (偏序关系)

# Partial Orders (偏序关系)

- Ordering (排序) is a very important issue.
- There are so many useful techniques on “Ordering” .
- We often use binary relations to **order some** or **all** of the elements of sets. 用二元关系将集合的所有元素或者部分元素进行排序
- Examples: Lexicographic order(字典排列法), ordering real numbers, ordering students based on scores...
- Examples to introduce “partial order”

# Partial Orders (偏序)

**Definition:** Let  $R$  be a relation on  $A$ . Then  $R$  is a *partial order* iff  $R$  is

reflexive, antisymmetric and transitive

$(A, R)$  is called a partially ordered set or a poset.

集合 $A$ 上的同时满足自反、反对称和可传递性的二元关系称为偏序关系。

集合 $A$ 与相应的偏序关系一起称为偏序集, 记作 $(A, R)$

# Examples

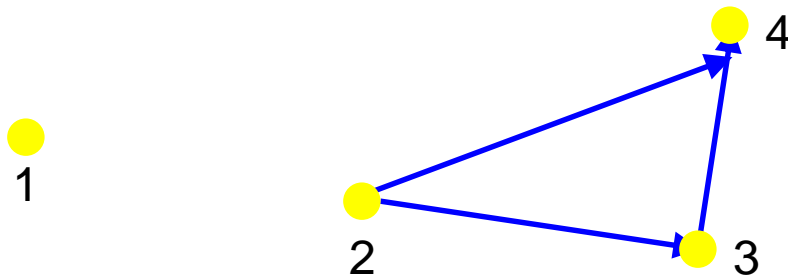
- **例1** 实数集 $\mathbb{R}$ 上的“ $\leq$ ”关系显然是一个偏序关系。
- **例2** The relation “ $\subseteq$ ” on the power set  $2^U$  of  $U$  is a partial order as well.

同学们能否观察出这两个例题里的不一样的地方？

- **例3** 设 $A=\{1,2,3,4,6,8,12\}$ ，定义 $A$ 上的整除关系：当且仅当 $a$ 整除 $b$ 时，有 $aRb$ 。  
容易证明  $R$ 是 $A$ 上的偏序关系。

# Examples

- 例题4： 下图表示的二元关系是偏序吗？



- 实数集 $\mathbb{R}$ 上的“ $<$ ”关系不是偏序关系。
- $2^U$ 上的真包含关系“ $\subset$ ”也不是偏序关系。

# 理解偏序

Understand why the relation “order” needs the three properties from real ordering examples.

如何理解为什么“序”关系需要以上三种性质？

# Partial Orders (偏序)

- **Partial orders** allow elements to “precede” one another but not necessarily, which means that it is not required that any two things be related under a partial order.
- Denotation:  $\leq$  （很多情况下偏序用这种符号表示）  
we use  $a \leq b$  to denote that  $(a,b) \in R$  in an arbitrary poset  $(A,R)$ .
- 偏序集下，一个元素可能“先于”另一个元素，但不是必须的，两个元素可以没有关系。

***That's the *partial* part of it!***

- For elements  $a$  and  $b$  in  $A$ , if  $a \leq b$  or  $b \leq a$ ,  
we call  $a$  and  $b$  are **comparable**（可比较的）
- if **neither  $a \leq b$  nor  $b \leq a$** , we call  $a$  and  $b$  are **incomparable**（不可比较）
- 注：这里的 $\leq$ 仅仅是个符号，并非实数集上的大小。

## 2 哈斯图 Hasse Diagram

### 偏序的一种特殊的图形表示方式

- 构造 Hasse diagram: (从关系的有向图出发构造Hasse图的方法)
- 1) 设计构造一个能表示  $\text{poset } (A, \leq)$  而且比较容易从中反映出内在的序的图形。我们让所有边由下朝上。
- 2) 去掉所有单边弧 Eliminate all loops
- 3) 去掉所有冗余的边，这些边本可以有传递性得到的，**凡是能从传递性得到的边都不再保留**。 Eliminate all arcs that are redundant because of transitivity
- 4) 去掉所有的箭头eliminate the arrows at the ends of arcs since everything points up. (由下朝上就代表着方向)



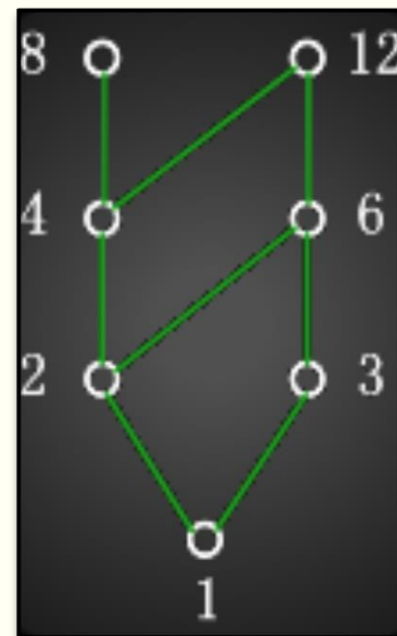
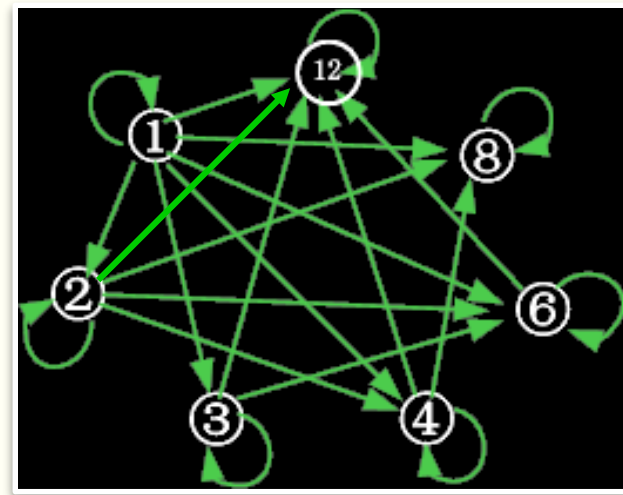
# 偏序关系的哈斯图 (Hasse diagrams) 续

**例如** 前面例3中整除关系Hasse图如下：

有限集A上偏序关系“ $\leq$ ”的Hasse图有 $|A|$ 个结点。

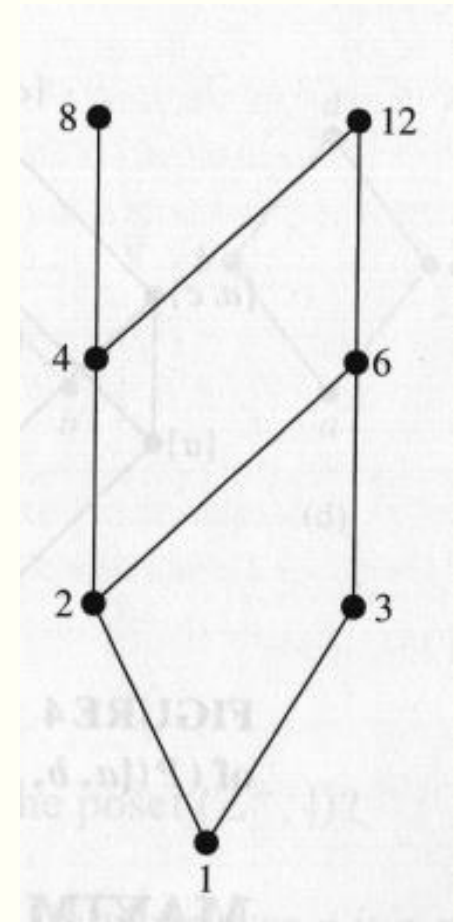
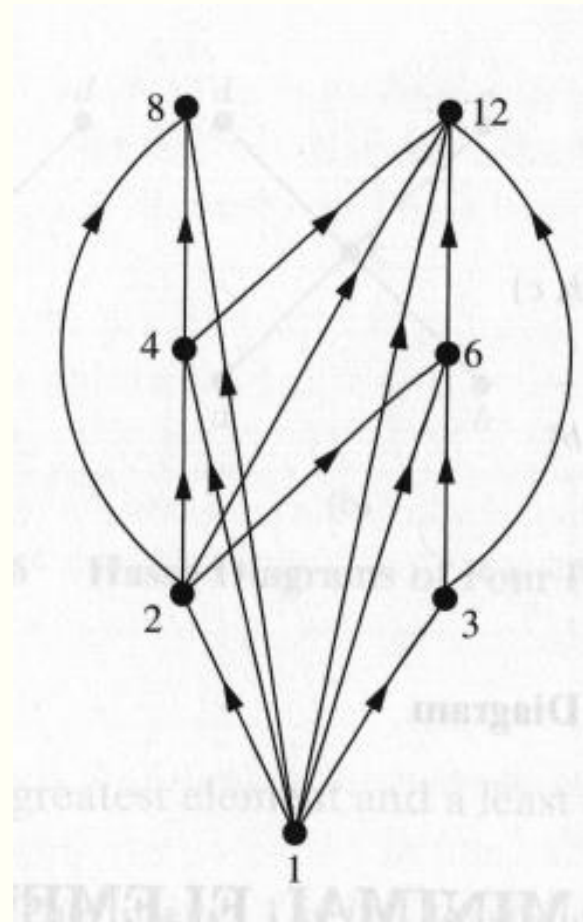
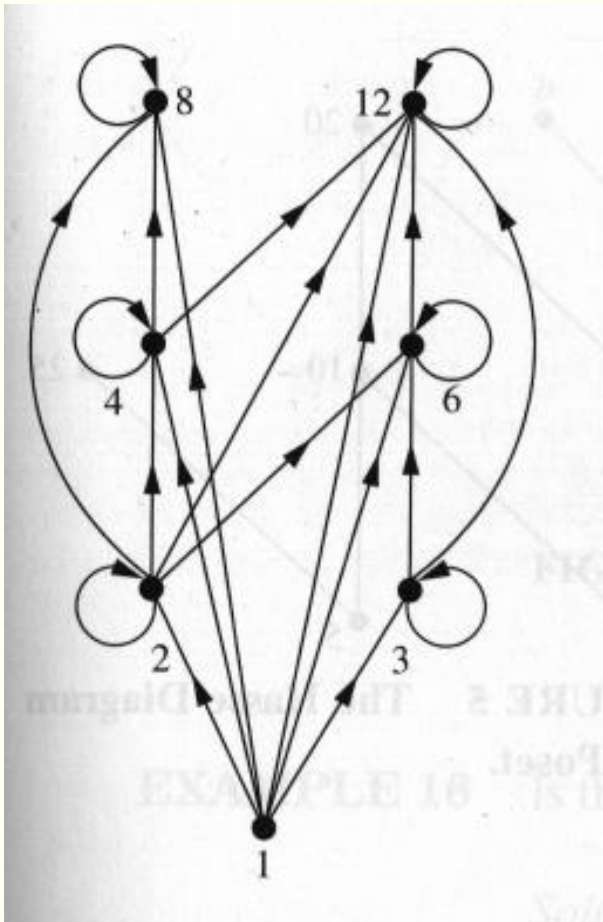
若元素 $a \neq b$ 且 $a \leq b$ 时，则结点a画在结点b的下方。

若 $a \leq b$ ，且在集A中不存在任何其它元素 $c$ ，使得 $a \leq c, c \leq b$ ，则一条有向边由 $a$ 指向 $b$ 。



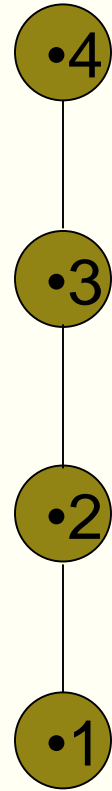
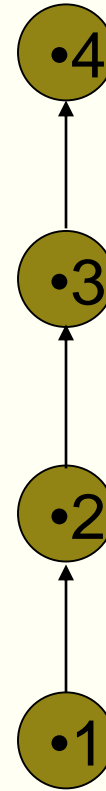
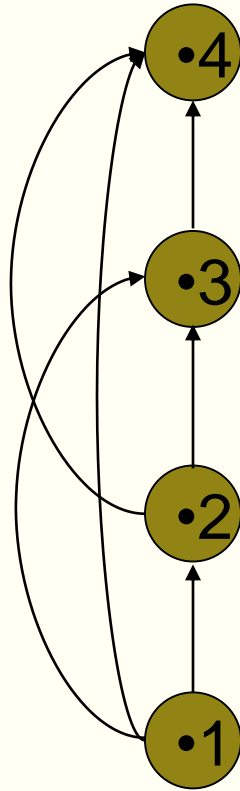
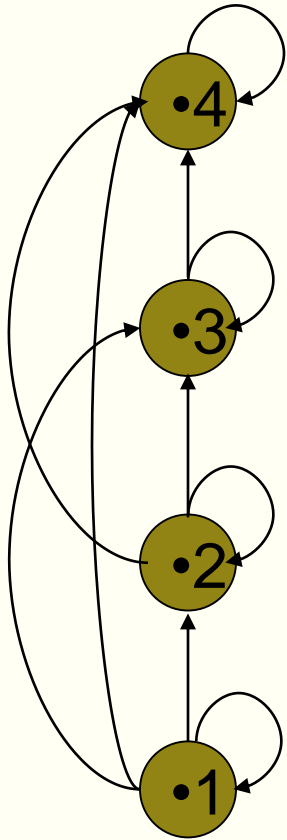
# Hasse Diagram

- For the poset  $(\{1,2,3,4,6,8,12\}, |)$



# Example Hasse diagram

- “ $\leq$ ” on  $\{1, 2, 3, 4\}$



例4 设  $U = \{a, b, c\}$ ，则 “ $\subseteq$ ” 关系是  $2^U$  上的偏序关系，  
偏序关系 “ $\subseteq$ ” 的Hasse图如下：

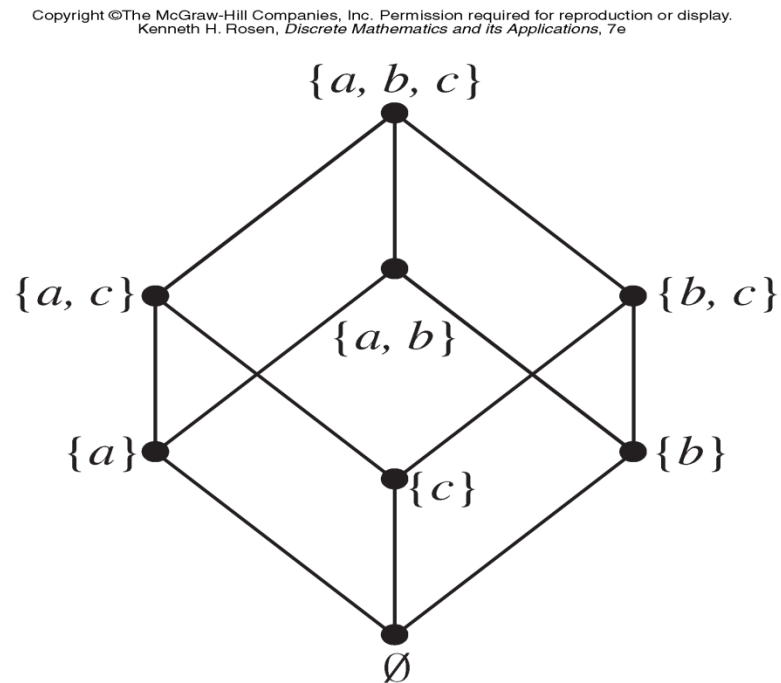
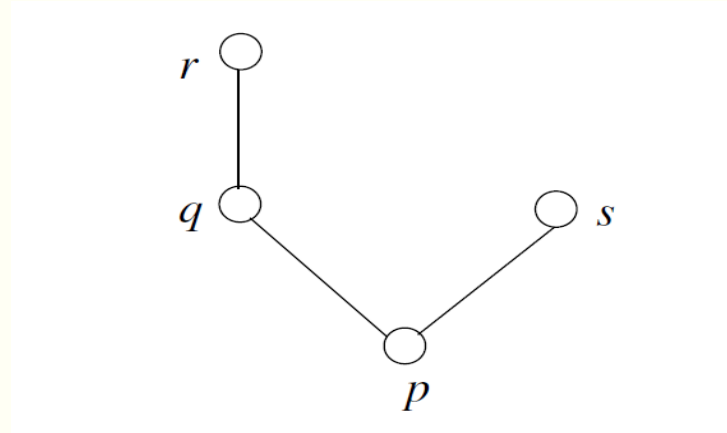


FIGURE 4 The Hasse Diagram of  $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$ .

# Hasse Diagram



- 想想： 能根据这个HASSE 图还原出偏序关系吗？

# Partial Orders—Total Order(全序)

- Definition: if any two objects  $x$  and  $y$  are always related in a poset, *either  $x \leq y$  or  $y \leq x$* , it is called a **total order** or **linear order** or **simple order**. In this case the poset  $(A, \leq)$  is called a **chain(链)** as well

(任意的两个元素都是可比较的，称为全序)

- *Your examples please...*
- *Understanding “**Partial**” ...*
- *The key word “**Partial**” is used to describe partial orderings because pairs of elements may be **incomparable**, not always **comparable**. Otherwise, it is called **total order***

## 最大、最小元（Greatest element & least element）

- 定义（最小元） 一个偏序集  $(A, \leq)$ ,  $S$  为  $A$  的非空子集。如果  $S$  中存在一个元素  $a$  使得  $\forall b \in S, \text{ 有 } a \leq b$ 。则称  $a$  为  $S$  的最小元。

问题： 最小元是否一定存在？ 唯一吗？ 为什么？

- 举例说明...

- 定义（良序）： 如果一个偏序集合的任一非空子集均有最小元，则称之为良序集

- Examples...

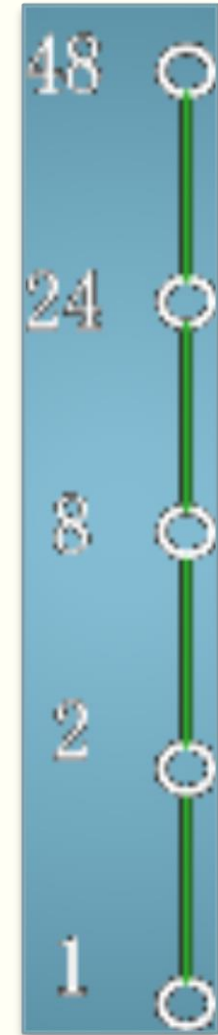
- 鼓励学生自己定义最大元...

- 例如 实数集 $\mathbf{R}$ 上的数之间的小于或等于关系“ $\leq$ ”就是 $\mathbf{R}$ 上的一个全序，

- 正整数集 $\mathbf{N}$ 上的小于或等于关系“ $\leq$ ”也是 $\mathbf{N}$ 上的一个全序。

- $\mathbf{N}$ 上的整除关系就仅是一个偏序而不是全序。

- 例5 设 $A = \{1, 2, 8, 24, 48\}$ ，则 $A$ 上的整除关系是 $A$ 上的偏序，并且也是一个全序。  
是否是良序？





•问题：  $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$  是一个全序，容易得到其最大元和最小元。那么  $(\{1,2,3,4,5\}, \geq)$  如何？

•问题：全序与良序有什么关系？

•良序集合一定是全序，反之不真。 但有限全序一定是良序！  
为什么？ 请同学们自己课堂内动手证明上面的结论！

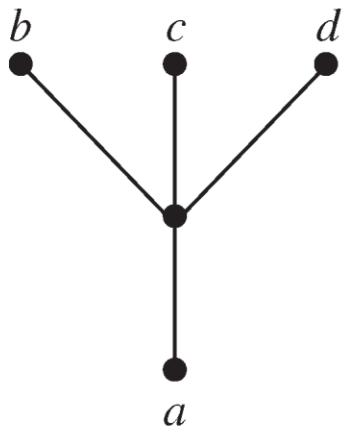
# 字典顺序举例

- 想象字典是如何排序的？是全序还是良序？
- 计算机系统中的字符串排序比较

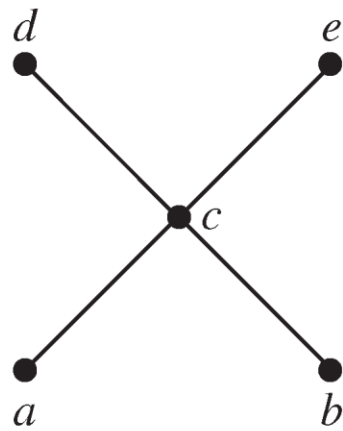
# 极大元、极小元

## (maximal element & minimal element)

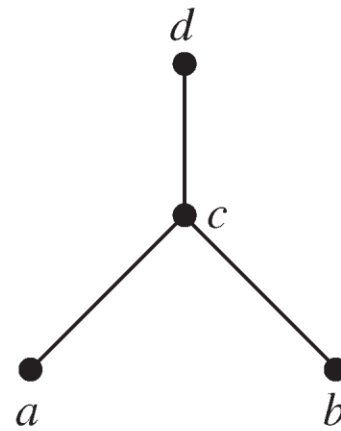
- **定义 (极小元)** 一个偏序集  $(A, \leq)$ . 如果  $a \in A$ . 如果  $A$  中不存在任何元素  $x$  使得  $x \leq a$ . 则称  $a$  为  $A$  的极小元。
- **注:** 笼统地说没有更小的就称为极小, 没有更大的就称为极大
- **问题:**  $A$  存在极小元吗? 唯一吗? 为什么?
- 举例说明...
- 学生自己定义极大元...
- **问题:** 极大极小元与最大最小元的关系如何?



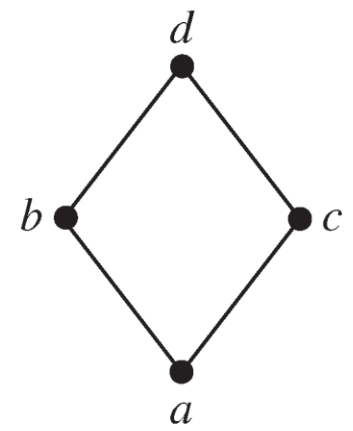
(a)



(b)



(c)



(d)

**FIGURE 6** Hasse Diagrams of Four Posets.

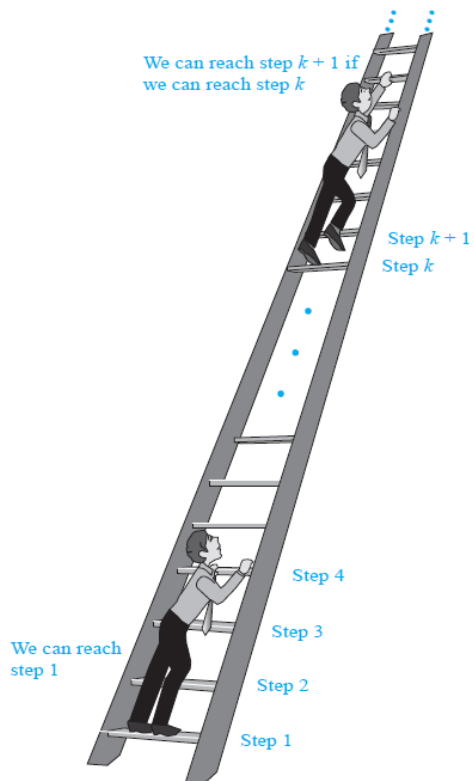
上界、下界、最大下界、最小上界等概念  
格的概念等等

引导学生进一步自学代数运算、格论基础知识

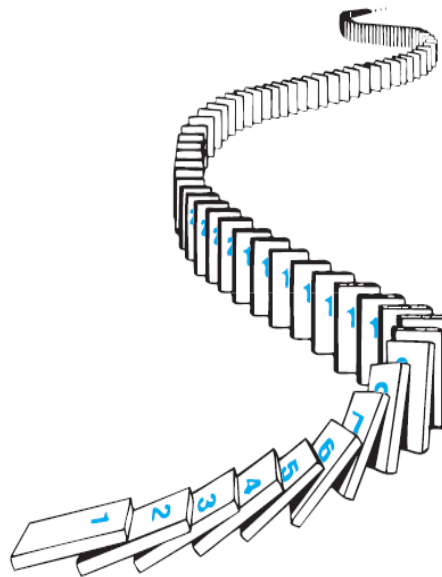
# 良序定理与数学归纳法

- **良序定理Well-ordering Theorem**: 任何非空集合 $S$ , 存在 $S$ 上的二元关系 $R$ , 使得 $\langle S, R \rangle$ 是良序集。它意味着: 任何集合都可以良序化。
- **非负整数集合的良序性  $(\mathbb{N}, \leq)$** : 每个非空的非负整数集都有最小元
- **非负整数集合的良序性是数学归纳法正确性的依据!**

# Climb an Infinite Ladder and Doninoes



**FIGURE 1** Climbing an Infinite Ladder.



**FIGURE 2** Illustrating How Mathematical Induction Works Using Dominoes.

# 引言—归纳发现规律

- 前 $n$ 个正奇数之和的公式是什么？
- 对 $n=1,2,3,4,5$ 来说，前 $n$ 个正奇数之和为：
  - $1=1$ ， $1+3=4$ ， $1+3+5=9$ ，
  - $1+3+5+7=16$ ， $1+3+5+7+9=25$
- 猜测前 $n$ 个正奇数之和是 $n^2$
- 假如这个猜测是正确的，就需要一种方法来证明



# 证明归纳发现的断言

- 数学归纳法：是证明这种类型的断言的极为重要的证明技术
  - 如何使用数学归纳法
  - 为什么它是有效的证明技术
- 注意：
  - 数学归纳法只能证明通过其它方式获得的结果
  - 但它本身不是发现公式或公理的工具

# 整数集的良好序性

- 数学归纳法的有效性来源于如下关于整数集的基本公理：  
    **良序性**: 每个非空的非负整数集都有最小元
- 例：用良序性证明除法算法（**同学们课后自己试试**）。
  - 若 $a$ 是整数而且 $d$ 是正整数，则存在唯一的整数 $q$ 和 $r$ ，满足 $0 \leq r < d$ 和 $a = dq + r$

- 注意：
  - 数学归纳法的假设，并非假定对所有正整数来说  $P(n)$  为真，
  - 只是证明了：若假定  $P(n)$  为真，则  $P(n+1)$  也为真
  - 因此，数学归纳法不属于循环论证

# 为什么数学归纳法是有用的？

- 假定知道 $P(1)$ 为真，而且对所有正整数 $n$ 来说 $P(n) \rightarrow P(n+1)$ 为真
- 为了证明对所有正整数来说 $P(n)$ 为真，假定至少存在一个使 $P(n)$ 为假的正整数
- 那么使 $P(n)$ 为假的所有正整数的集合 $S$ 非空
- 根据良序性， $S$ 有一个最小元，把它表示为 $k$
- 可以知道 $k$ 不是1，因为 $P(1)$ 为真
- 因为 $k$ 是正的，并且大于1，所以 $k-1$ 是一个正整数
- 因为 $k-1$ 小于 $k$ ，所以它不属于 $S$
- 所以 $P(k-1)$ 必然为真
- 因为 $P(k-1) \rightarrow P(k)$ 为真，所以 $P(k)$ 为真
- 这与对 $k$ 的选择相矛盾

# 数学归纳法的第二原理

( strong induction 强数学归纳法)

- To prove that  $P(n)$  is true for all positive integers  $n$ , where  $P(n)$  is a propositional function, complete two steps:
  - *Basis Step*: Verify that the proposition  $P(1)$  is true.
  - *Inductive Step*: Show the conditional statement  $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k + 1)$  holds for all positive integers  $k$ .
- 假定对  $k=1,2,\dots,n$  来说  $P(k)$  为真，证明在这个假定的基础之上  $P(n+1)$  也必然为真（或者称为：第二数学归纳法）
- 证明对所有正整数  $n$  来说  $P(n)$  为真的两个步骤：
  - 基础步骤：证明  $P(1)$  为真
  - 归纳步骤：证明对每个正整数  $n$  来说， $[P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$  为真

- 例如：
- 证明：若 $n$ 是大于1的整数，则 $n$ 可以写成素数之积
  - 解：设 $P(n)$ ： $n$ 可以写成素数之积
  - 基础步骤： $P(2)$ 为真，因为 $P(2)$ 可以写成一个素数之积，即它自身
  - 归纳步骤：假定对所有满足 $k \leq n$ 的正整数 $k$ 来说 $P(k)$ 为真，要完成归纳步骤就必须证明在这个假定下 $P(n+1)$ 为真

- 注意：
  - 为了证明对 $n=k, k+1, \dots$ 来说 $P(n)$ 为真，其中 $k$ 是整数
  - 首先证明 $P(k), P(k+1), \dots, P(r)$ 都为真（基础步骤）
  - 然后证明对每个整数 $n \geq r$ 来说  
 $[P(k) \wedge P(k+1) \wedge \dots \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$ 为真（归纳步骤）

# 注

- 后面学习树的知识，证明树的边数=结点数-1的定理时，也会用第二数学归纳法。



# 一般化的良序归纳原理

**良序归纳原理** The principle of Well-Ordered induction : Suppose That  $(S, <)$  is a well-ordered set. Then  $P(x)$  is true for all  $x \in S$ , if  
*Inductive step: For every  $y \in S$ , if  $P(x)$  is true for all  $x \in S$  with  $x < y$ , then  $P(y)$  is true.*

•Note: strong Induction is sometimes called the *second principle of mathematical induction* or *complete induction* somewhere. 第二数学归纳法 就是良序归纳原理在整数集合上的结论

# 作业

- 5.6 T7 (a), T11, T25, T33, T39

- 以下是一些练习和例子, 同学们自己看看做做

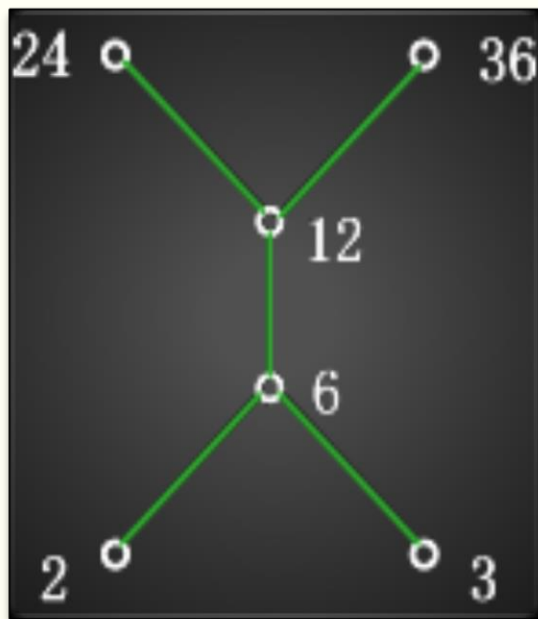
# 偏序集练习

- 1. 对下述论断判断正确与否，在相应括号中键入“Y”或“N”。

- (1) 设 $A=\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$ ， $A$ 上的整除关系是一偏序关系，用“ $\leq$ ”表示。

- (a) 该偏序关系的次序图是

( •Y )



- (b) “ $\leq$ ” =  $\{(2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6), (6, 12), (12, 12), (12, 24), (24, 24), (36, 36)\}$

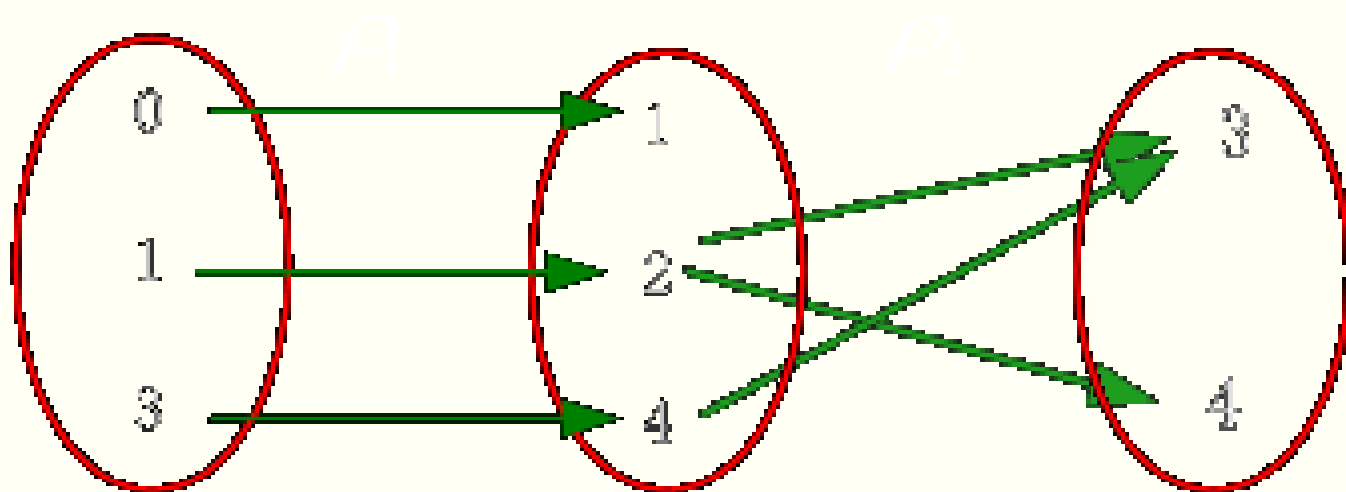
( •N )

- (2) 集合 $A=\{3, 9, 27, 54\}$ 上的整除关系是 $A$ 上的全序

( •Y )

# • 例 题

- 1. 给定  $R_1 = \{ (0,1), (1,2), (3,4) \}$ ,  $R_1 \circ R_2 = \{ (1,3), (1,4), (3,3) \}$ , 求一个基数最小的关系, 使满足  $R_2$  的条件. 一般地说, 若给定  $R_1$  和  $R_1 \circ R_2$ ,  $R_2$  能被唯一地确定吗? 基数最小的  $R_2$  能被唯一确定吗?



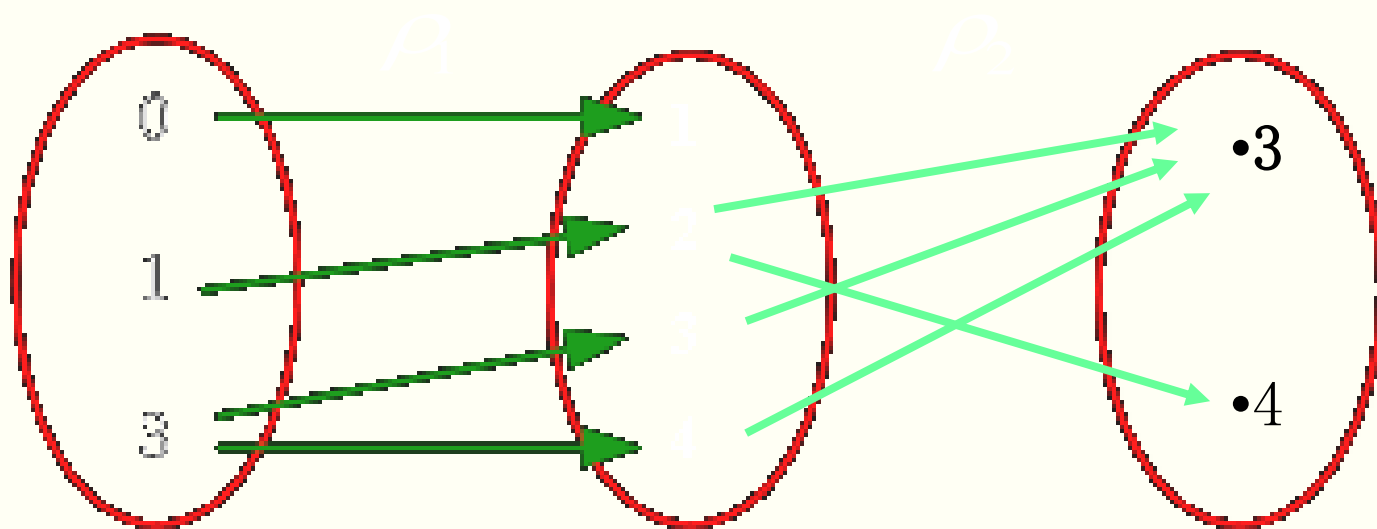
- 解 满足上述条件的最小基数的关系

- $R_2 = \{ (2, 3), (2, 4), (4, 3) \}$

- 一般说, 给定  $R_1$  和  $R_1 \circ R_2$ , 不能唯一的确定  $R_2$ . 例如  $R_2 = \{ (2,3), (2,4), (4,3), (0,0), (3,3) \}$  也可以.

- 给定 $R_1$ 和 $R_1 \circ R_2$ ，也不能唯一的确定出最小基数的 $R_2$ 。

• 例如  $R_1 = \{ (0, 1), (1, 2), (3, 3), (3, 4) \}$  ,  
 $R_1 \circ R_2 = \{ (1, 3), (1, 4), (3, 3) \}$  ,



- 则 $R_2 = \{ (2, 3), (2, 4), (4, 3) \}$  或
- $R_2 = \{ (2, 3), (2, 4), (3, 3) \}$  都可以。

•2. 下列关系哪一个是自反的、对称的、反对称的或可传递的？

- (1) 当且仅当  $n_1 n_2 < 8$  ( $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ) 时, 有  $n_1 R n_2$
- (2) 当且仅当  $r_1 \leq |r_2|$  ( $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ) 时, 有  $r_1 R r_2$

• 解 (1) R不是自反的, 如  $4 \in \mathbb{N}$ , 但  $4 \cdot 4 = 16 > 8$ 。

• R是对称的, 因为 对于任意的  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  
若有  $n_1 n_2 < 8$ , 则  $n_2 n_1 = n_1 n_2 < 8$ 。

• R不是反对称的, 例,  $2 \cdot 3 < 8$ ,  $3 \cdot 2 < 8$ , 但  $3 \neq 2$ 。

• R不是可传递的, 例如,  $3 \cdot 2 < 8$ ,  $2 \cdot 3 < 8$ , 但  $3 \cdot 3 = 9 > 8$ 。

• (2) R是自反的, 因为对任意的  $r \in \mathbb{R}$ , 有  $r \leq |r|$ 。

• R不是对称的, 如  $-1 \leq |3|$ , 但  $3 > |-1|$ 。

• R不是反对称的, 如  $-3 \leq |2|$ ,  $2 \leq |-3|$ , 但  $-3 \neq 2$ 。

• R不是可传递的,  $100 \leq |-101|$ ,  $-101 \leq |2|$ , 但  $100 > |2|$

3 设 $R_1$ 和 $R_2$ 是集合 $A$ 上的任意两个关系, 判断下列

- 命题是否正确, 并说明理由.
- (1) 若 $R_1$ 和 $R_2$ 是自反的, 则 $R_1 \cap R_2$ 也是自反的;
- (2) 若 $R_1$ 和 $R_2$ 是非自反的, 则 $R_1 \cap R_2$ 也是非自反的;

- 解 (1) 正确。
  - 因为对任意的 $a \in A$ , 有 $aR_1a$ ,
  - 又对任意的 $a \in A$ , 有 $aR_2a$ .
  - 所以对任意的 $a \in A$ , 有  $a(R_1 \cap R_2)a$ ,
  - 因此 $R_1 \cap R_2$ 也是自反的。

- (2) 否。 例如, 设集合 $A = \{a, b\}$ 。
  - $R_1 = \{(a, b), (b, a)\}$ ,  $R_2 = \{(a, b), (b, a)\}$
  - 显然 $R_1$ 和 $R_2$ 都是非自反的, 但 $R_1 \cap R_2$ 自反。



- (3) 若 $R_1$ 和 $R_2$ 是对称的, 则 $R_1 \cap R_2$ 也是对称的;
- (4) 若 $R_1$ 和 $R_2$ 是反对称的, 则 $R_1 \cap R_2$ 也是反对称的;
- (5) 若 $R_1$ 和 $R_2$ 是可传递的, 则 $R_1 \cap R_2$ 也是可传递的;

• 解 (3) 否. 例如, 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ,

- $R_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ,  $R_2 = \{(1, 3), (3, 1)\}$ ,
- 显然  $R_1$ 和 $R_2$ 都是对称的,

• 但 $R_1 \cap R_2 = \{(2, 3)\}$  不是对称的。

- (4) 否. 例如设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $R_1 = \{(1, 2), (3, 3)\}$ ,
- $R_2 = \{(2, 3), (3, 1)\}$  显然 $R_1$ 和 $R_2$ 都是反对称的,

• 但 $R_1 \cap R_2 = \{(1, 3), (3, 1)\}$  不是反对称的。

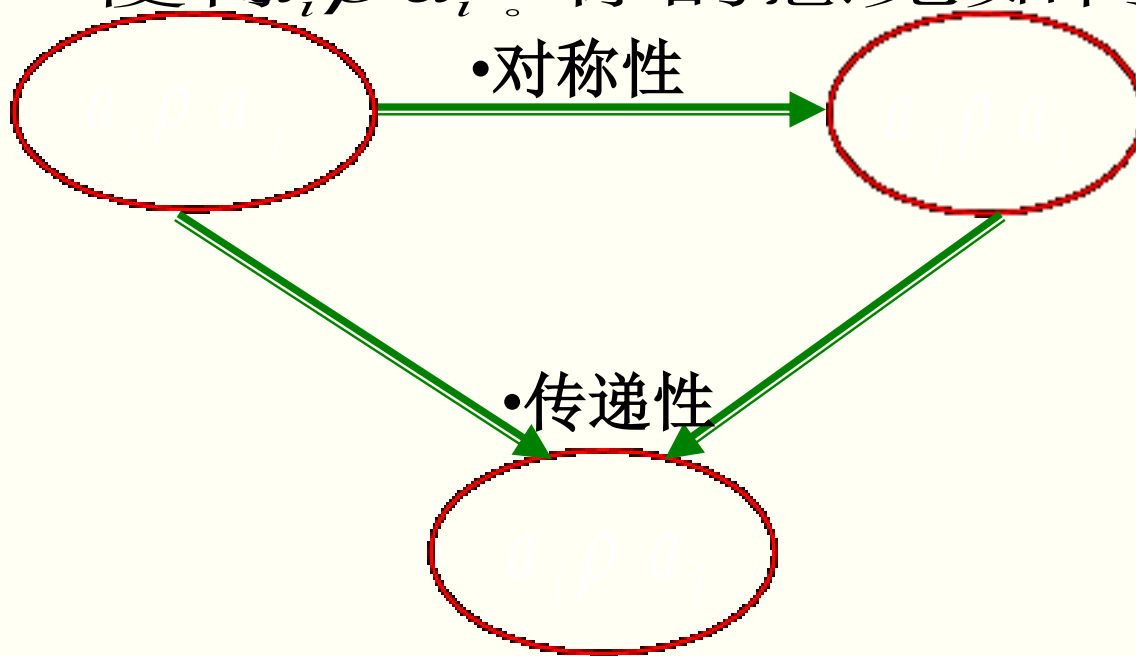
- (5) 否. 例如设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ ,
- $R_2 = \{(2, 3), (3, 1), (2, 1)\}$ ,
- 显然 $R_1$ 和 $R_2$ 都可传递的.

• 但 $R_1 \cap R_2 = \{(1, 3), (2, 1), (1, 1)\}$  不是可传递的。

- 4 . 有人说, 集合A上的关系  $\rho$ , 如果是对称的且可传递, 则它也是自反的。其理由是, 从

$$a_i \rho a_j,$$

由对称性  $a_j \rho a_i$ , 再由可传递性  
 便得  $a_i \rho a_i$ 。你的意见如何?



•错!

•例 设  $A = \{1, 2, 3\}$

• $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$

- 5. 设 $R_1$ 是集合 $A$ 上的一个关系,  $R_2 = \{ (a, b) \mid \text{存在 } c, \text{使 } (a, c) \in R_1 \text{ 且 } (c, b) \in R_1 \}$ , 试证明:
  - 若  $R_1$ 是一个等价关系, 则 $R_2$ 也是一个等价关系。

•证明 因为 $R_1$ 是自反的, 所以对于任意的  $a \in A$ , 有  $(a, a) \in R_1$ , 由  $(a, a) \in R_1, (a, a) \in R_1$   
•因此有  $(a, a) \in R_2$ ,  $R_2$  是自反的。

- 对于任意的 $a, b \in A$ , 若  $(a, b) \in R_2$ ,
  - 则必有元素 $c \in A$ , 使得  $(a, c) \in R_1$ , 且  $(c, b) \in R_1$ ,
  - 由 $R_1$ 的对称性, 又有  $(b, c) \in R_1$ , 且  $(c, a) \in R_1$ ,
  - 因而有  $(b, a) \in R_2$ , 故 $R_2$  是对称的。

- 对于任意的  $a, b, c \in A$  , 若  $(a, b) \in R_2, (b, c) \in R_2$ ,
- 则必有元素  $d, e \in A$  , 使得
- $(a, d) \in R_1 \quad (d, b) \in R_1 \quad (b, e) \in R_1 \quad (e, c) \in R_1$
- 由  $R_1$  的可传递性, 又有  $(a, b) \in R_1, (b, c) \in R_1$ ,
- 于是有  $(a, c) \in R_2$ , 故  $R_2$  是可传递的。
- 由上证得  $R_2$  是一个等价关系。

• 证法  
二

- 设  $(a, b) \in R_1$ ,
- 由  $R_1$  的自反性, 又有  $(a, a) \in R_1$ ,
- 由  $(a, a) \in R_1, (a, b) \in R_1$ ,
- 于是有  $(a, b) \in R_2$  , 因此  $R_1 \subseteq R_2$  。
- 反之, 设  $(a, b) \in R_2$  ,
- 则必存在  $c \in A$ , 使得  $(a, c) \in R_1, (c, b) \in R_1$ ,
- 而由  $R_1$  的可传递性, 又有  $(a, b) \in R_1$ , 因此  $R_2 \subseteq R_1$  。
- 由上可知  $R_2 = R_1$  , 因此  $R_2$  是等价关系。