

计算几何选讲

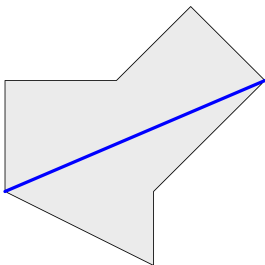
quality

中国女巫协会

2018 年 8 月 4 日

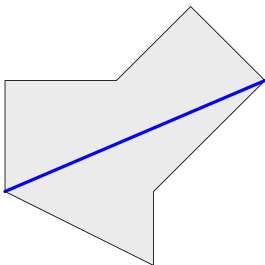
Airport Construction

- 给一个 n 个顶点的简单多边形，在简单多边形内部找一条最长的直线段，输出长度。



Airport Construction

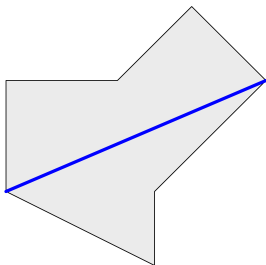
- 给一个 n 个顶点的简单多边形，在简单多边形内部找一条最长的直线段，输出长度。



- $3 \leq n \leq 200$ ，坐标是绝对值不超过 10^6 的整数。

Airport Construction

- 给一个 n 个顶点的简单多边形，在简单多边形内部找一条最长的直线段，输出长度。



- $3 \leq n \leq 200$ ，坐标是绝对值不超过 10^6 的整数。
- 2017 ACM-ICPC World Finals, Problem A

Solution

- 最优解一定经过两个端点，否则往两侧扰动总有一边更优。

Solution

- 最优解一定经过两个端点，否则往两侧扰动总有一边更优。
- 枚举两个端点连出一条直线，用多边形边界将直线打断。

Solution

- 最优解一定经过两个端点，否则往两侧扰动总有一边更优。
- 枚举两个端点连出一条直线，用多边形边界将直线打断。
- 对每条线段，取中点判断是否在多边形内。

Solution

- 最优解一定经过两个端点，否则往两侧扰动总有一边更优。
- 枚举两个端点连出一条直线，用多边形边界将直线打断。
- 对每条线段，取中点判断是否在多边形内。
- 合并相邻的都落在多边形内部的线段，更新答案。

Solution

- 你在说啥？



Cross product

- 对于 \mathbb{R}^3 内的两个向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 定义 \vec{a} 和 \vec{b} 的叉积是

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)\end{aligned}$$

Cross product

- 对于 \mathbb{R}^3 内的两个向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 定义 \vec{a} 和 \vec{b} 的叉积是

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)\end{aligned}$$

- 特别地, 当 $z_1 = z_2 = 0$ 时, $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, x_1 y_2 - y_1 x_2)$

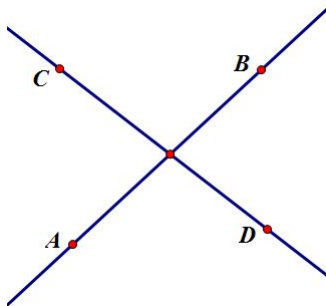
Cross product

- 二维问题中可以认为 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ 和 $\vec{b} = (x_2, y_2)$ 的叉积是

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

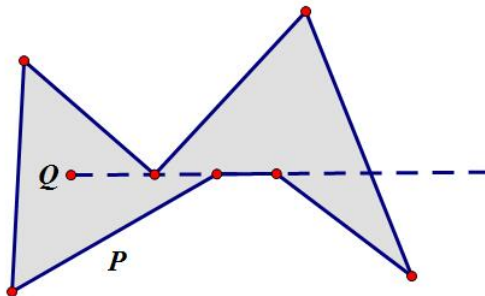
Line-line intersection

- 给定二维平面内四个点 A, B, C, D , 保证 $A \neq B$ 且 $C \neq D$, 判定直线 AB 与 CD 的位置关系, 如果相交则求出交点。



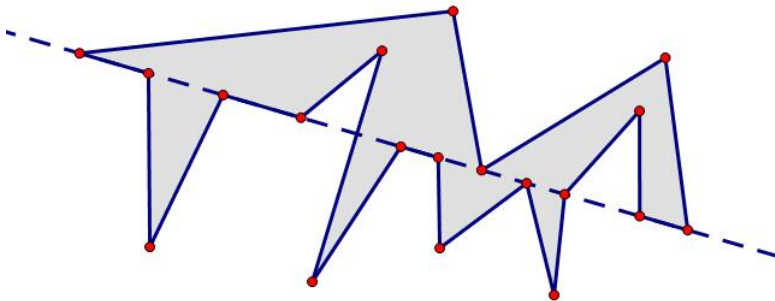
Point inside simple polygon

- 给定二维平面内一个简单多边形 P 和一点 Q ，判定点 Q 和简单多边形 P 的位置关系。



Solution

- 好像能做这个题了？



Castle

- 给 n 个互不相交的凸多边形，这些凸多边形都包含原点，接下来给出 m 个不在任意一个凸多边形边上的点，你需要求出所有内部包含给定点的有限区域的面积之和。

Castle

- 给 n 个互不相交的凸多边形，这些凸多边形都包含原点，接下来给出 m 个不在任意一个凸多边形边上的点，你需要求出所有内部包含给定点的有限区域的面积之和。
- $1 \leq n \leq 10^5$ ，凸多边形的顶点数之和 $\leq 10^5$ ， $0 \leq m \leq 10^5$ ，坐标是绝对值不超过 10^6 的整数。

Castle

- 给 n 个互不相交的凸多边形，这些凸多边形都包含原点，接下来给出 m 个不在任意一个凸多边形边上的点，你需要求出所有内部包含给定点的有限区域的面积之和。
- $1 \leq n \leq 10^5$ ，凸多边形的顶点数之和 $\leq 10^5$ ， $0 \leq m \leq 10^5$ ，坐标是绝对值不超过 10^6 的整数。
- 2008 Summer Petrozavodsk Camp, Petrozavodsk SU Wx Contest, Problem D

Solution

- 平面图点定位？



Solution

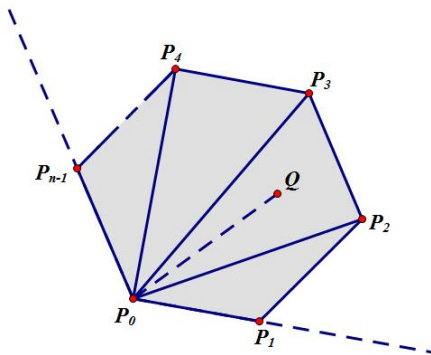
- 将凸多边形按照从里向外的顺序排序。

Solution

- 将凸多边形按照从里向外的顺序排序。
- 二分查询点所在层，检查是否在这个凸多边形内。

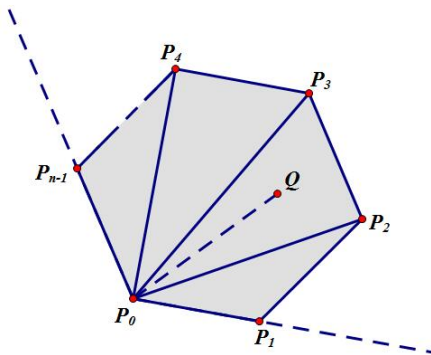
Point inside convex polygon

- 给定二维平面内一个凸多边形 P 和一点 Q ，判定点 Q 和凸多边形 P 的位置关系。



Point inside convex polygon

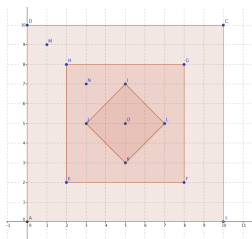
- 给定二维平面内一个凸多边形 P 和一点 Q ，判定点 Q 和凸多边形 P 的位置关系。



- Theodore Roosevelt, SGU 253

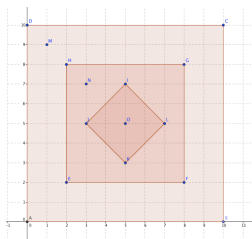
In A Maze

- 给 m 个互不相交的简单多边形，每个简单多边形顶点数 ≤ 30 ，接下来有 n 次查询，每次给出一个点，你需要回答这个点所在区域的面积，如果是无限域则输出 0。



In A Maze

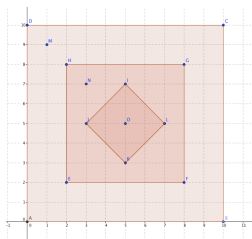
- 给 m 个互不相交的简单多边形，每个简单多边形顶点数 ≤ 30 ，接下来有 n 次查询，每次给出一个点，你需要回答这个点所在区域的面积，如果是无限域则输出 0。



- $1 \leq m \leq 5 \times 10^4$ ，简单多边形的顶点数之和 $\leq 2.5 \times 10^5$ ， $0 \leq n \leq 2 \times 10^5$ ，坐标是绝对值不超过 10^6 的整数。

In A Maze

- 给 m 个互不相交的简单多边形，每个简单多边形顶点数 ≤ 30 ，接下来有 n 次查询，每次给出一个点，你需要回答这个点所在区域的面积，如果是无限域则输出 0。



- $1 \leq m \leq 5 \times 10^4$ ，简单多边形的顶点数之和 $\leq 2.5 \times 10^5$ ， $0 \leq n \leq 2 \times 10^5$ ，坐标是绝对值不超过 10^6 的整数。
- 2014 ACM-ICPC Beijing Invitational Programming Contest, Problem I

Solution

- 平面图点定位!



物理实验

- 二维平面上有一条直线，直线上放置了一个激光发射器，会向导轨两侧沿导轨垂直方向发射宽度为 L 的激光束。平面上还有 n 条线段，并且线段和线段、线段和直线之间都没有公共点，线段和直线的夹角不超过 85° ，激光束不能穿透线段，你要求出激光束能照射到的线段长度之和的最大值。

物理实验

- 二维平面上有一条直线，直线上放置了一个激光发射器，会向导轨两侧沿导轨垂直方向发射宽度为 L 的激光束。平面上还有 n 条线段，并且线段和线段、线段和直线之间都没有公共点，线段和直线的夹角不超过 85° ，激光束不能穿透线段，你需要求出激光束能照射到的线段长度之和的最大值。
- 多组数据 $T \leq 100$ ， $1 \leq n \leq 10^4$ ， $1 \leq L \leq 2 \times 10^9$ ，坐标是绝对值不超过 10^9 的整数。

物理实验

- 二维平面上有一条直线，直线上放置了一个激光发射器，会向导轨两侧沿导轨垂直方向发射宽度为 L 的激光束。平面上还有 n 条线段，并且线段和线段、线段和直线之间都没有公共点，线段和直线的夹角不超过 85° ，激光束不能穿透线段，你需要求出激光束能照射到的线段长度之和的最大值。
- 多组数据 $T \leq 100$, $1 \leq n \leq 10^4$, $1 \leq L \leq 2 \times 10^9$, 坐标是绝对值不超过 10^9 的整数。
- 2018 SDOI Round 2 Day 1, Task 1

Solution

- 直线被线段端点在直线上的投影分成 $O(n)$ 个区间。

Solution

- 直线被线段端点在直线上的投影分成 $O(n)$ 个区间。
- 扫描线求出每个区间两侧距离直线最近的线段，计算在每个区间内覆盖单位长度的收益。

Solution

- 直线被线段端点在直线上的投影分成 $O(n)$ 个区间。
- 扫描线求出每个区间两侧距离直线最近的线段，计算在每个区间内覆盖单位长度的收益。
- 最优解选取的区间一定会卡在某个区间的端点上，否则往两侧扰动总有一边更优。

Solution

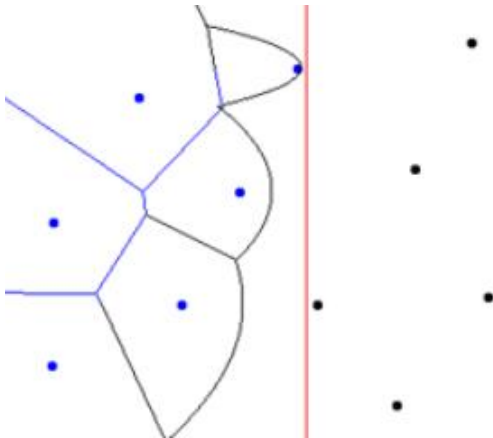
- 直线被线段端点在直线上的投影分成 $O(n)$ 个区间。
- 扫描线求出每个区间两侧距离直线最近的线段，计算在每个区间内覆盖单位长度的收益。
- 最优解选取的区间一定会卡在某个区间的端点上，否则往两侧扰动总有一边更优。
- 双指针枚举选取的区间，计算此时的收益更新答案即可。

Solution

- 你又在说啥？



Sweep line algorithm



Walk Around The Campsite

- 给一个 n 个点的简单多边形，每个点具有一个权值 V_i ，一个人从 0 号点出发，每次可以从 i 出发沿着多边形的边走到 $i+1$ ，或者沿着一条除了端点外不经过多边形内部（含边界）的线段走到 $j(> i+1)$ ，或者停留在当前点，总收益是走过的点的权值之和减去走过的路径的长度，求最大收益。

Walk Around The Campsite

- 给一个 n 个点的简单多边形，每个点具有一个权值 V_i ，一个人从 0 号点出发，每次可以从 i 出发沿着多边形的边走到 $i+1$ ，或者沿着一条除了端点外不经过多边形内部（含边界）的线段走到 $j(> i+1)$ ，或者停留在当前点，总收益是走过的点的权值之和减去走过的路径的长度，求最大收益。
- 多组数据 $T \leq 10$ ， $1 \leq n \leq 10^3$ ， $0 \leq V_i \leq 10^5$ ，坐标是绝对值不超过 10^5 的四位小数。

Walk Around The Campsite

- 给一个 n 个点的简单多边形，每个点具有一个权值 V_i ，一个人从 0 号点出发，每次可以从 i 出发沿着多边形的边走到 $i+1$ ，或者沿着一条除了端点外不经过多边形内部（含边界）的线段走到 $j(> i+1)$ ，或者停留在当前点，总收益是走过的点的权值之和减去走过的路径的长度，求最大收益。
- 多组数据 $T \leq 10$ ， $1 \leq n \leq 10^3$ ， $0 \leq V_i \leq 10^5$ ，坐标是绝对值不超过 10^5 的四位小数。
- 2015 China Collegiate Programming Contest, Problem J

Solution

- 预处理出所有可能的走法，之后就是一个简单的动态规划。

Solution

- 预处理出所有可能的走法，之后就是一个简单的动态规划。
- 枚举一个点 u ，扫描线求出所有 u 能看到的点 v 。

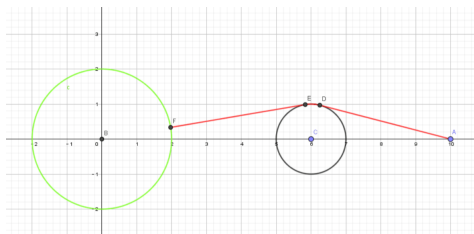
中场休息

- 断线重连时间。



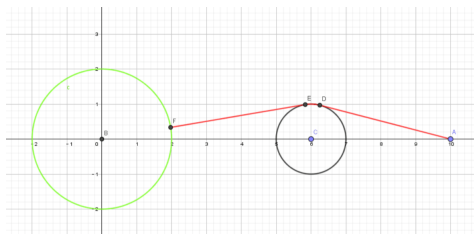
Getting Lost

- 平面上有 n 个互不相交的障碍圆以及一个以原点为圆心的圆形安全区，一个人从不在任意一个障碍圆内的起点出发走到圆形安全区内，要求全程不能走到障碍圆内部，并且终点与原点的连线也不能经过障碍圆内部，求最短路程。



Getting Lost

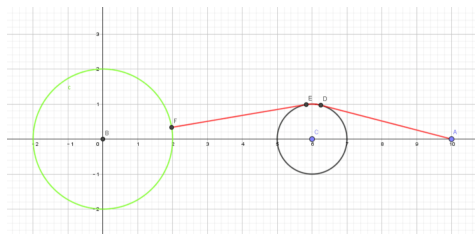
- 平面上有 n 个互不相交的障碍圆以及一个以原点为圆心的圆形安全区，一个人从不在任意一个障碍圆内的起点出发走到圆形安全区内，要求全程不能走到障碍圆内部，并且终点与原点的连线也不能经过障碍圆内部，求最短路程。



- 多组数据 $T \leq 60$, $0 \leq n \leq 2$, 坐标是绝对值不超过 10^4 的整数。

Getting Lost

- 平面上有 n 个互不相交的障碍圆以及一个以原点为圆心的圆形安全区，一个人从不在任意一个障碍圆内的起点出发走到圆形安全区内，要求全程不能走到障碍圆内部，并且终点与原点的连线也不能经过障碍圆内部，求最短路程。



- 多组数据 $T \leq 60$, $0 \leq n \leq 2$, 坐标是绝对值不超过 10^4 的整数。
- 2017 China Collegiate Programming Contest, Qinhuangdao Site, Problem F

Solution

- 抠关键点建图跑最短路。

Solution

- 抠关键点建图跑最短路。
- 做完了？



Solution

- 怎么抠关键点？

Solution

- 怎么抠关键点？
- 考虑每个几何对象。

Solution

- 怎么抠关键点？
- 考虑每个几何对象。
- 是点、直线（射线、线段）还是圆（弧）？

Solution

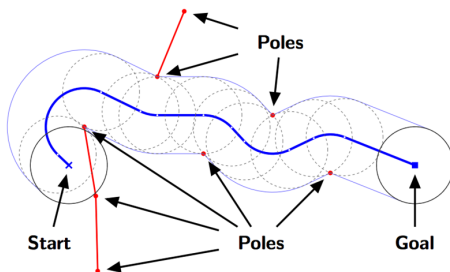
- 怎么抠关键点？
- 考虑每个几何对象。
- 是点、直线（射线、线段）还是圆（弧）？
- 是目标还是障碍？

Solution

- 怎么抠关键点？
- 考虑每个几何对象。
- 是点、直线（射线、线段）还是圆（弧）？
- 是目标还是障碍？
- 两两讨论这些对象之间的走法就可以抠出关键点。

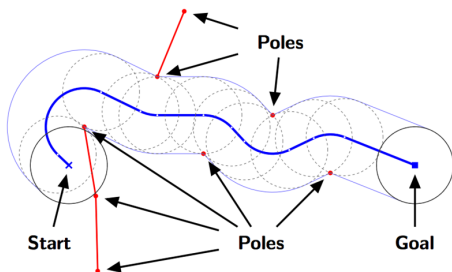
Cornering at Poles

- 平面上有 n 个障碍点，一个圆从起点出发移动到终点，要求任意一个障碍点全程不能出现在圆内部，求最短路程。



Cornering at Poles

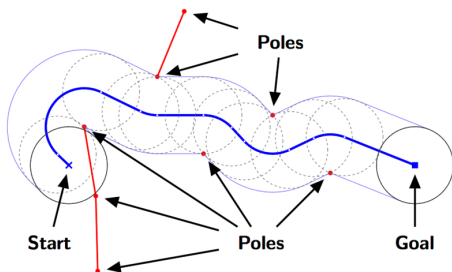
- 平面上有 n 个障碍点，一个圆从起点出发移动到终点，要求任意一个障碍点全程不能出现在圆内部，求最短路程。



- $1 \leq n \leq 8$, 坐标是绝对值不超过 10^3 的整数。

Cornering at Poles

- 平面上有 n 个障碍点，一个圆从起点出发移动到终点，要求任意一个障碍点全程不能出现在圆内部，求最短路程。



- $1 \leq n \leq 8$ ，坐标是绝对值不超过 10^3 的整数。
- 2014 ACM-ICPC Asia Tokyo Regional Contest, Problem H

Solution

- 考虑圆心的轨迹，相当于圆心不能经过一些障碍圆内部。

Solution

- 考虑圆心的轨迹，相当于圆心不能经过一些障碍圆内部。
- 抠关键点建图跑最短路。



Thank you!