Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 20-06-2019

Se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado (no trivial) no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario no se valorará. No se permite usar calculadora.

1)
a) Como corolario del teorema de Rolle, demostrar el siguiente resultado: si f es derivable en $(a\,,b)$ y $f\,'(x)\neq 0\ \ \forall x\in(a\,,b)$, se verifica que en dicho intervalo la ecuación $f(x)=0$ tiene, a lo sumo, una raíz.

b) Sea $f(x)=x^5-5x-99$. Usar el resultado anterior para determinar el número máximo de raíces reales de la ecuación $f(x)=0$.

(0.6p.+0.65p.)

Solución.
a)
Sea f derivable en $(a\,,b)$ y supongamos que existieran en dicho intervalo dos raíces(al menos) de la ecuación $f(x)=0$, denotadas por α y β con $\alpha<\beta$. En este caso, f sería continua en $[\alpha\,,\beta]$, derivable en $(\alpha\,,\beta)$ y $f(\alpha)=f(\beta)=0$; por el teorema de Rolle, existiría un punto $c\in(\alpha\,,\beta)\subset(a\,,b)$ tal que $f\,'(c)=0$, lo que contradice la hipótesis $f\,'(x)\neq 0\ \ \forall x\in(a\,,b)$.

b)
La función $f(x)=x^5-5x-99$ es continua y derivable en R, por ser una función polinomica.

$$f\,'(x)=5x^4-5\ \ ;\qquad f\,'(x)=0\Leftrightarrow x^4=1\Leftrightarrow x=1\ \text{ó}\ x=-1$$

Los intervalos de monotonía de f son $(-\infty\,,-1),(-1\,,1)$ y $(1\,,+\infty)$. Así pues, la ecuación $f(x)=0$ tiene, a lo sumo, tres raíces reales (una en cada intervalo de monotonía).

2) Sea $f(x)=(x-1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ si $x\neq 1$ y $f(1)=0$

a) Obtener, si existen y sin aplicar la regla de L'Hôpital, las ecuaciones de las asíntotas verticales de f (por la izquierda y/o por la derecha) y las horizontales (en el $-\infty$ y/o en el $+\infty$).

b) ¿Es f derivable por la izquierda en $x=1$? Determinar, con justificación, los puntos críticos de f.

c) ¿Alcanza f un extremo local en $x=1$?

(1p.+1p.+0.5p.)

Solución.
a)
Si $x\neq 1$ la función $f(x)$ es continua por ser producto de dos funciones continuas. La única recta que podría ser asíntota vertical de f es la recta $x=1$. Veámoslo.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.\exp(-\infty)=0.0=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.\exp(\infty)=0.\infty \qquad \text{indeterminación}$$

Sea $t=\dfrac{1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\exp(t)}{t}=+\infty$

ya que $\exp(t)$ es un infinito de orden superior a t si $t\to+\infty$

Así pues, la recta $x=1$ es asíntota vertical de f por la derecha y no lo es por la izquierda.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=-\infty.\exp(0)=-\infty.1=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=+\infty.\exp(0)=+\infty.1=+\infty$$

Ninguno de los dos límites anteriores es un nº real. Por tanto, la función f no tiene asíntotas horizontales.

b)
La función f es continua por la izquierda en $x=1$. Veamos si es derivable por la izquierda en $x=1$.

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{h.\exp\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}=\lim_{h\to0^-}\exp\left(\frac{1}{h}\right)=\exp(-\infty)=0$$

f es derivable por la izquierda en $x=1$ y $f'(1^-)=0$

La función f no es continua por la derecha en $x=1$. Por tanto, no es derivable por la derecha en $x=1$.

Los puntos críticos de f serán los x reales donde $f'(x)=0$ ó donde no exista $f'(x)$.

Si $x\neq1$, $f'(x)=\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)-(x-1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)\dfrac{1}{(x-1)^2}=\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)\left[1-\dfrac{1}{x-1}\right]=0\Leftrightarrow x=2$

El único punto x donde $f'(x)=0$ es $x=2$ y el único punto x donde no existe $f'(x)$ es $x=1$.

c)
En $x=1$ la función f no es continua. Por tanto, no podemos aplicar el criterio de la derivada primera para determinar si f alcanza un extremo local en dicho punto.
Veamos, aplicando la definición, si f alcanza un extremo local en $x=1$.

Si $x<1$, $f(x)=(x-1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)<0$; $f(1)=0$; Si $x>1$, $f(x)=(x-1)\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)>0$

No existe $r>0$ tal que $f(x)>f(1)$ $\forall x\in(1-r,1+r)$; así pues, f NO alcanza un mínimo local en $x=1$.
No existe $r>0$ tal que $f(x)<f(1)$ $\forall x\in(1-r,1+r)$; así pues, f NO alcanza un máximo local en $x=1$.

3)
a) Definir, con rigor, cuando una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es divergente.
b) Sea $\{a_n\}=(-1)^n+\dfrac{n}{n+1}$. Obtener una sucesión mayorante de $|a_n|$ que sea convergente y utilizarla para justificar que la sucesión $\{a_n\}$ no es divergente ¿es convergente? ¿es oscilante?

(0.25p.+1p.)

Solución.

a)

$\{a_n\}$ es *divergente* $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$, es decir, si la sucesión de sus valores absolutos tiende a $+\infty$.

b)

$$|a_n| = \left|(-1)^n + \frac{n}{n+1}\right| \le \left|(-1)^n\right| + \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1 + \frac{n}{n+1}$$

La sucesión $\left\{1+\dfrac{n}{n+1}\right\}$ es convergente a 2 y es mayorante de $|a_n|$. Por tanto, la sucesión $\{a_n\}$ no es divergente ya que la sucesión mayorante obtenida no tiene límite $+\infty$.

$\{a_n\}$ no es convergente ya que la subsucesión de los n pares $\left\{1+\dfrac{2m}{2m+1}\right\}$ tiene límite 2, mientras que la de los n impares $\left\{-1+\dfrac{2m-1}{2m}\right\}$ tiene límite 0.

La sucesión $\{a_n\}$ es, por tanto, oscilante.

4)

a) De la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se conoce que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ viene dada por $S_n = \dfrac{3n+2}{n+4}$ $\forall n\in N$. Obtener a_1 y el término general a_n $\forall n \ge 2$ ¿es convergente esta serie?

b) Estudiar el carácter de las dos series numéricas siguientes:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$$

(0.75p.+1.25p.)

Solución.

a)

$$a_1 = S_1 = \frac{5}{5} = 1$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3n+2}{n+4} - \frac{3n-1}{n+3} = \frac{10}{(n+4)(n+3)} \quad , \quad \forall n \ge 2$$

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente a 3 ya que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+2}{n+4} = 3$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \forall a\in R \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} \ne 0$$

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$ no verifica la condición necesaria de convergencia. Es divergente a $+\infty$ por tratarse de una serie de términos no negativos $\forall n \ge 2$.

Para estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$ la comparamos con la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ que es convergente ya que la razón $1/3\in(-1,1)$. Ambas son de términos positivos.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n\,3^n)}{1/3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

En base al criterio de comparación concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$ es convergente

5) Sea $f(x)=\begin{cases} sen(\pi x) & \text{si } x\le 0\\ \log(x^2+1) & \text{si } x>0\end{cases}$

Obtener una función $F(x)$ que sea una primitiva de $f(x)$ en R y calcular la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-1,1]$ sin utilizar $F(0)$.

(1.5p.)

Solución.

Si $x\ne 0$ la función $f(x)$ es continua. Se comprueba fácilmente que es continua en todo R ya que los límites laterales de $f(x)$ en $x=0$ son iguales a $f(0)=0$.

Por tanto, la función $f(x)$ tiene primitiva en R. Para obtener una primitiva de $f(x)$ en R, vamos a calcular las integrales indefinidas (conjunto de primitivas) de las funciones $sen(\pi x)$ y $\log(x^2+1)$.

$$\int sen(\pi x)dx=-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)+C$$

$$\int\log(x^2+1)dx=x.\log(x^2+1)-\int\frac{2x^2}{x^2+1}dx=x.\log(x^2+1)-\int\left(2-\frac{2}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=x.\log(x^2+1)-2x+2arctg(x)+K$$

Si elegimos adecuadamente las constantes C y K, resulta que la función siguiente

$$F(x)=\begin{cases}-\cos(\pi x)/\pi+C, & x\le 0\\ x.\log(x^2+1)-2x+2arctg(x)+K, & x>0\end{cases}$$

sería una primitiva de $f(x)$ en R. Para ello, la función $F(x)$ habría de ser continua en $x=0$

$F(x)$ es continua en $x=0 \iff -1/\pi+C=K \iff C=K+1/\pi$. Si elegimos $K=0$ resulta $C=1/\pi$

$$F(x)=\begin{cases}-\cos(\pi x)/\pi+1/\pi, & x\le 0\\ x.\log(x^2+1)-2x+2arctg(x), & x>0\end{cases}$$ es una primitiva de $f(x)$ en R

Aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=F(1)-F(-1)=\log(2)-2+2arctg(1)-\left(-\cos(-\pi)/\pi+1/\pi\right)=\log(2)-2+\pi/2-2/\pi$$

6) Calcular el área determinada por la curva $y=\dfrac{x-1}{1+\sqrt{x}}$, las rectas $x=0$, $x=4$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

(1.5p.)

Solución.

Sea $f(x)=\dfrac{x-1}{1+\sqrt{x}}$. Si $x\in[0,1]\Rightarrow f(x)\le 0$. Si $x\in[1,4]\Rightarrow f(x)\ge 0$

$$A=\int_0^4 |f(x)|\,dx=-\int_0^1 \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx+\int_1^4 \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx=-\int_0^1 \frac{t^2-1}{1+t}\,2t\,dt+\int_1^2 \frac{t^2-1}{1+t}\,2t\,dt$$

Se ha realizado el cambio de variable $x=t^2$ con $t\in[0,1]$ y $t\in[1,2]$.

$$A=-2\int_0^1 (t-1)\,t\,dt+2\int_1^2 (t-1)\,t\,dt=-2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right]_0^1+2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right]_1^2=-2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}$$

$$A=2\,u^2$$