EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 16-07-2020

Se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado (no trivial) no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario no se valorará. No se permite usar calculadora.

1)

a) Sean f y g dos funciones reales de una variable real tales que $Dom\, f = (0, +\infty)$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$. Obtener el dominio de la función compuesta fog.

b) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange y usarlo para demostrar el siguiente resultado: si f es derivable en (a, b) y $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente creciente en dicho intervalo.

c) Sea $f(x) = \log(x^2) - (2/x)$. Determinar, por aplicación del cálculo diferencial, el número máximo de ceros reales de la función f ¿Cuántos ceros reales positivos tiene exactamente la función f?

(0.7p.+0.8p.+0.8p.)

2) Sea f la función real definida en todo R de la forma siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 3 & \text{si} \quad x \le 2 \\ e^{2-x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Utilizar las definiciones de derivadas laterales para estudiar, sin aplicar la regla de L'Hopital, la derivabilidad de f en $c = 2$.

b) ¿Quiénes son, por definición, los puntos críticos de una función definida en un abierto? Determinar los puntos críticos de la función f dada y obtener los extremos relativos de f (incluidos los puntos del dominio donde se alcanzan).

c) ¿ Existe el máximo y/o el mínimo absoluto de f definida en todo R? ¿ se produce una inflexión en algún punto del dominio?. Justificar las respuestas.

(0.7p.+0.8p.+0.6p.)

3) Calcular, mediante el método de exhaución, el área(A) del recinto plano limitado por la curva $y = x^3$, el eje de abscisas, y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Se sabe que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = n^2(n+1)^2/4$ (1.2p.)

4) Siendo f una función continua en $[a, b)$ tal que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ ó $-\infty$, definir $\int_a^b f(x)dx$

¿es convergente la integral anterior si $f(x) = 1/(x-1)^2$, $a = 0$, $b = 1$?

(0.7p.)

5) Calcular el área determinada por la curva $y = \dfrac{x-4}{x+\sqrt{x}}$, las rectas $x = 1$, $x = 9$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

(1.5p.)

6)

a) Obtener la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ de la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ si $r \ne 1$ y si $r = 1$ ¿pará que valores de r es convergente dicha serie? ¿para qué valores de r es divergente a $+\infty$? Justificar las respuestas.

b) Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)\,2^{-n}}{n^2+2}$

c) Obtener la sucesión de sumas parciales y la suma de la serie telescópica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

(0.8p.+0.6p.+0.8p.)