Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 25-05-2015

1) Sea $A = \{x \in R \,/\; x < 2 \;\text{ y }\; |x^2 - 9| \le 7\}$. Obtener, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de A .

(0.75p.)

Solución.

$$|x^2 - 9| \le 7 \Leftrightarrow -7 \le x^2 - 9 \le 7 \Leftrightarrow 2 \le x^2 \le 16 \Leftrightarrow \sqrt{2} \le |x| \le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \le x \le 4 \quad \text{ó} \quad -4 \le x \le -\sqrt{2}$$

$$A = \{x \in R \,/\; -4 \le x \le -\sqrt{2} \;\text{ ó }\; \sqrt{2} \le x < 2\} = [-4, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2)$$

$Sup\ A = 2$; no existe $Max\ A$ ya que el supremo no pertenece al conjunto

$Inf\ A = -4 = Min\ A$

2)

a) Sea $f : D \subset R \to R$ una función real de variable real, y $S \subset D$. Definir, con lenguaje matemático, cuando f está acotada en S .

b) Obtener, sin utilizar cálculo diferencial, el conjunto imagen de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, para los x pertenecientes a su dominio ¿ es f acotada en su dominio? Razónese la respuesta. (1p.)

Solución.

a) f está acotada en S $\Leftrightarrow$: $\exists M, m \in R \,/\, m \le f(x) \le M \quad \forall x \in S$, es decir, si el conjunto imagen es un conjunto acotado superiormente e inferiormente.

De otra manera, f está acotada en $S \Leftrightarrow \exists K \in R^+ \;/\; |f(x)| \le K \quad \forall x \in S$

b)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \qquad Dom\ f = R$$

Si $x \in R \Rightarrow x^2 \in [0, +\infty) \Rightarrow x^2 + 1 \in [1, +\infty] \Rightarrow \dfrac{2}{x^2 + 1} \in (0, 2] \Rightarrow -\dfrac{2}{x^2 + 1} \in [-2, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{2}{x^2 + 1} + 1 \in [-1, 1)$$

$\operatorname{Im} f = [-1, 1)$; f es acotada en su dominio ya que $[-1, 1)$ es un conjunto acotado.

3) y 4) en documento aparte.

5) Sea f una función continua en R y sea $a \in R$. ¿Cuándo se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente? Estudiar para que valores de α la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ es convergente. (1.25p.)

Solución.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es convergente} \Leftrightarrow: \quad \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ existe y es finito.}$$

Si $\alpha = 1$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} [\log(b) - \log(1)] = \lim_{b\to+\infty} \log(b) = +\infty$$

Si $\alpha \neq 1$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right) = (*)$$

$\lim_{b\to+\infty} b^{1-\alpha} = +\infty$ si $1-\alpha > 0$, es decir, si $\alpha < 1$

$\lim_{b\to+\infty} b^{1-\alpha} = 0$ si $1-\alpha < 0$, es decir, si $\alpha > 1$

$(*) = +\infty$ si $\alpha < 1$; $(*) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ si $\alpha > 1$

Por tanto, la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ es convergente si $\alpha > 1$ (divergente si $\alpha \leq 1$).

6)
a) Definir dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ ambas oscilantes de tal manera que la sucesión suma $\{a_n + b_n\}$ sea convergente. Análogamente, de tal manera que la sucesión suma sea divergente.

b) Usar el teorema de comparación en el límite para estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n}}$

(2p.)

Solución.

a)

$\{a_n\} = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, ...\}$ oscilante ; $\{b_n\} = (-1)^{n+1} = \{1, -1, 1, -1, ...\}$ oscilante

$\{a_n + b_n\} = \{0, 0, 0, 0, ...\}$ convergente a 0.

$\{a_n\} = \{1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, ...\}$ oscilante ; $\{b_n\} = \{0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, ...\}$ oscilante

$\{a_n + b_n\} = \{1, 2, 3, 4, ...\} = \{n\}$ divergente a $+\infty$

b) Usamos el teorema de comparación en el límite con la serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ que es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \le 1$. Ambas series son de términos positivos.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n}}}{\dfrac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}n^{1/2}}{n.n^{1/3}+n^{1/3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha+1/2}}{n^{4/3}+n^{1/3}} = 1 \quad \text{si} \quad \alpha+1/2 = 4/3, \text{ es decir, si } \alpha = 5/6$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/6}}$ es divergente ya que $5/6 < 1$; el límite anterior, para $\alpha = 5/6$, es distinto de cero y de infinito; por tanto, la serie a estudiar tiene el mismo carácter que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/6}}$, es decir, es divergente.

7) Sea $f(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2+y}$

a) Obtener todos los límites direccionales de f, a través de rectas, en el punto $(0,0)$. Se ha de incluir la recta con pendiente infinita.

b) Deducir, si existe, el valor del límite doble de f en el punto $(0,0)$ ó justificar la no existencia del mismo.

(1.5p.)

Solución.

Cualquier recta que pasa por el punto $(0,0)$ es de la forma $y = mx$ $(m \in R)$ ó $x = 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{2mx}{x^2+m^2x^2+mx} = \lim_{x\to 0}\frac{2m}{x+m^2x+m} = 2 \quad \text{si} \quad m \ne 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0+0} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{2y}{y^2+y} = \lim_{y\to 0}\frac{2y}{y+1} = 2$$

Los límites direccionales, a través de rectas, no son todos iguales. Por tanto, no existe el límite doble de f en el punto $(0,0)$.