Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 1-06-2021

Se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado (no trivial) no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario no se valorará. No se permite usar calculadora.

1)
a) Enunciar una condición suficiente (no necesaria) para que una función f no tenga asíntotas verticales.

b) Sea $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x\sqrt{x+3}}$

Obtener, caso de que existan, las ecuaciones de las asíntotas verticales de f (por la izquierda y/o por la derecha), las asíntotas horizontales y las oblicuas (en el $+\infty$ y/o en el $-\infty$) . En ninguno de los casos se puede usar la regla de L'Hopital.

(0.4p.+1.3p.)

Solución.

a) Una condición suficiente (no necesaria) para que f no tengas asíntotas verticales es que f sea continua en R.

b) $Dom\, f=\{x\in R \,/\, x\neq 0 \text{ y } x+3>0\}=(-3,0)\cup(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x->-3^+}\frac{4-x^2}{x\sqrt{x+3}}=\frac{4-9}{-3\ 0^+}=\frac{-5}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x->0^+}\frac{4-x^2}{x\sqrt{x+3}}=\frac{4}{0^-\ \sqrt{3}}=\frac{4}{0^-}=-\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x->0^+}\frac{4-x^2}{x\sqrt{x+3}}=\frac{4}{0^+\ \sqrt{3}}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

La recta $x=-3$ es asíntota vertical de f por la derecha; la recta $x=0$ es asíntota vertical de f por la izquierda y por la derecha.

El dominio de f es un conjunto acotado inferiormente; por tanto, no tiene sentido hablar de asíntota horizontal en el $-\infty$, ni de asíntota oblicua en el $-\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x->+\infty}\frac{4-x^2}{x\sqrt{x+3}}=\frac{-\infty}{+\infty} \qquad ; \qquad \lim_{x->+\infty}\frac{4-x^2}{x\sqrt{x+3}}=\lim_{x->+\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-1}{\frac{\sqrt{x+3}}{x}}=\lim_{x->+\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-1}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

La función f no tiene asíntotas horizontales. Podría tener una asíntota oblicua $y=ax+b$, $a\neq 0$, en el $+\infty$.

$$a=\lim_{x->+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x->+\infty}\frac{4-x^2}{x^2\sqrt{x+3}}=\lim_{x->+\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-1}{\sqrt{x+3}}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

La función f no tiene asíntotas oblicuas.

Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

2)

a) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange. Interpretación geométrica.

b) Sea $f : D \subset R \to R$ una función real de variable real y sea $x_0 \in D$. Definir, con lenguaje matemático, cuando f alcanza un máximo local en el punto x_0 y cuando alcanza el máximo absoluto en x_0.

c) Sea $f(x) = \log(x^2) + \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$ Obtener, por aplicación del cálculo diferencial, el número máximo de ceros reales de f ¿Cuántos puntos críticos tiene la función f definida en el intervalo $[1/2, 2]$? ¿Existe el máximo absoluto M de $f(x)$, si $x \in [1/2, 2]$? Obténgase, en su caso. ($\log(2) \approx 0.7$)

(0.7p.+0.4p. +1.2p.)

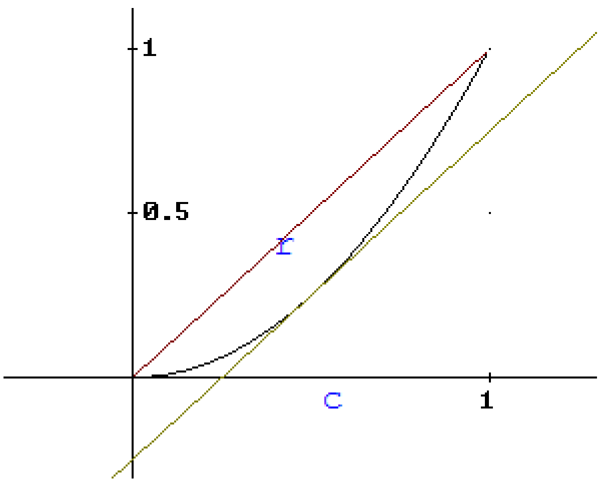
Solución.

a) Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica.

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta r que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Por tanto, el teorema del valor medio afirma que existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela a r.



b) La función $f : D \subset R \to R$ alcanza un máximo local (o relativo) en el punto $x_0 \in D \Leftrightarrow$:

$$\exists \delta > 0 \ / \ f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D.$$

La función $f : D \subset R \to R$ alcanza el máximo absoluto en el punto $x_0 \Leftrightarrow$: $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \mathrm{D}$

c) La función $f(x)=\log\left(x^2\right)+\left(2/x\right)$ es derivable en su dominio, es decir, en $R-\{0\}$.

$$\text{Si } x\neq 0 \qquad f\,'(x)=\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{2x-2}{x^2} \quad , \qquad f\,'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$$

En cada uno de los intervalos $(-\infty,0),(0,1)$ y $(1,+\infty)$ la función f es derivable y la derivada es distinta de cero. Por tanto, en cada uno de los tres intervalos anteriores la función f tiene, a lo sumo, un cero real. Además, $x=1$ no es cero de f. Así pues, el número máximo de ceros reales de f es tres.

En el intervalo $[1/2,2]$ la función f tiene tres puntos críticos: los dos puntos frontera del intervalo $(x=1/2, x=2)$ y el punto interior $(x=1)$ donde la función derivada se anula. Nótese que f es derivable en todos los puntos interiores al intervalo.

La función f es continua en el intervalo cerrado $[1/2,2]$. Así pues, el teorema de Weiestrass nos garantiza la existencia de $M=\max\limits_{x\in[1/2,2]} f(x)$

$$M=\max\left\{f(1/2),\, f(1),\, f(2)\right\}=\max\left\{\log(1/4)+4,\, 2,\, \log(4)+1\right\}=$$

$$=\max\left\{4-2\log(2),\, 2,\, 2\log(2)+1\right\}=4-2\log(2)\approx 2.6$$

3) Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales tal que $a_n=(-1)^n\sqrt[n]{b_n}$, siendo $b_n=\dfrac{n^2+1}{(n+1)!}$. Estudiar si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, divergente u oscilante.

(1p.)

Solución.

Vamos a usar el resultado siguiente: si $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=l$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=l$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{(n+2)!}\,\frac{(n+1)!}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{(n+2)(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^3+2n^2+n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}=\frac{0}{1}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=0$$

La sucesión $\{a_n\}$ es producto de una sucesión acotada por otra que es convergente a 0. Nótese que la sucesión $\left\{(-1)^n\right\}$ es acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1

Así pues, la sucesión $\{a_n\}$ es convergente a 0.

4)

a) Demostrar que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tal que $a_n \geq 0 \quad \forall n$, es convergente o bien divergente a $+\infty$

b) Estudiar el carácter de las series siguientes: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{(n+2)\sqrt[3]{n}}$

(0.4p.+1p.)

Solución.

a) El carácter de una serie nos lo da el carácter de la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

$$s_1 = a_1 \;\; ; \;\; s_2 = a_1 + a_2 \geq a_1 = s_1 \;\; ; \;\; s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq a_1 + a_2 = s_2 \;\; ; \; \ldots$$

La sucesión $\{s_n\}$ es monótona creciente; por tanto, es convergente (caso de ser acotada) o bien divergente a $+\infty$ (caso de no ser acotada).

b) Para estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ usaremos el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

La serie es convergente

Para estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{(n+2)\sqrt[3]{n}}$ usaremos el teorema de comparación en el límite con la serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ que es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$. Ambas series son de términos positivos.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[4]{n}}{(n+2)\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha n^{1/4}}{n.n^{1/3} + 2n^{1/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha+1/4}}{n^{4/3} + 2n^{1/3}} = 1 \quad \text{si} \quad \alpha + 1/4 = 4/3, \text{ es decir, si } \alpha = 13/12$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/12}}$ es convergente ya que $13/12 > 1$; el límite anterior, para $\alpha = 13/12$, es distinto de cero y de infinito; por tanto, la serie a estudiar tiene el mismo carácter que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/12}}$, es decir, es convergente.

5)
a) Enunciar el segundo teorema fundamental del cálculo integral (regla de Barrow). Si la función $f(x)=e^{x^2}$ es continua en cualquier intervalo $[a\,,b]$ ¿por qué no es posible resolver la integral $\int_a^b e^{x^2}\,dx$ usando dicha regla?

b) Sea $f(x)=\begin{cases} x\,sen\,(x/2) & \text{si } x\le 0 \\ sen^3(x) & \text{si } x>0 \end{cases}$

Obtener, si es posible, una función $F(x)$ que sea una primitiva de $f(x)$ en R y usarla para obtener la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-\pi\,,2\pi]$, usando la regla de Barrow una sola vez.

(0.6p.+1.5p.)

Solución.

a) Si f es continua en $[a\,,b]$ y G es una función continua en $[a\,,b]$ y primitiva de f en $(a\,,b)$ entonces: $\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$

Existen funciones continuas cuyas primitivas no se pueden expresar mediante funciones elementales. Así, por ejemplo, $f(x)=e^{x^2}$. En estos casos, la regla de Barrow no tiene utilidad y se hace necesaria la utilización de métodos numéricos.

b) Si $x>0$ la función $f(x)=sen^3(x)$ es continua. Si $x<0$ la función $f(x)=x\,sen(x/2)$ también es continua, por ser producto y composición de funciones continuas.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x\,sen(x/2)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} sen^3(x)=0 \qquad f(0)=0$$

f es continua en todo R; por tanto, la función $f(x)$ tiene primitiva en R. Para obtener una primitiva de $f(x)$ en R, vamos a calcular las integrales indefinidas (conjunto de primitivas) de las funciones $x\,sen(x/2)$ y $sen^3(x)$.

$\int u\,dv = uv-\int v\,du$ método de integración por partes

Sea $u=x$ y $dv=sen\,(x/2)\,dx$, es decir, $du=dx$ y $v=-2\cos(x/2)$

$$\int x\,sen\,(x/2)\,dx=-2x\cos(x/2)+2\int\cos(x/2)\,dx=-2x\cos(x/2)+4sen\,(x/2)+C$$

$$\int sen^3(x)\,dx=\int sen(x)\,sen^2(x)\,dx=\int sen(x)\left(1-\cos^2(x)\right)dx=\int sen(x)\,dx-\int\cos^2(x)\,sen(x)\,dx=$$

$$=-\cos(x)+\frac{\cos^3(x)}{3}+K$$

Si elegimos adecuadamente las constantes C y K, resulta que la función siguiente

$$F(x)=\begin{cases}-2x\cos(x/2)+4sen(x/2)+C, & x\leq 0\\ -\cos(x)+\cos^3(x)/3+K, & x>0\end{cases}$$

sería una primitiva de $f(x)$ en R. Para ello, la función $F(x)$ habría de ser continua en $x=0$

$F(x)$ es continua en $x=0 \iff C=-2/3+K$. Si elegimos $C=0$ resulta $K=2/3$

$$F(x)=\begin{cases}-2x\cos(x/2)+4sen(x/2), & x\leq 0\\ -\cos(x)+\cos^3(x)/3+2/3, & x>0\end{cases}$$ es una primitiva de $f(x)$ en R

Aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$

$$\int_{-\pi}^{2\pi} f(x)\,dx = F(2\pi)-F(-\pi) = -\cos(2\pi)+\cos^3(2\pi)/3+2/3-\left(2\pi\cos(-\pi/2)+4sen(-\pi/2)\right)=$$

$$=-1+1/3+2/3-0+4=4$$

6) Calcular el área determinada por la curva $y=\dfrac{4-x}{x+\sqrt{x}}$, las rectas $x=1$, $x=9$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

(1.5p.)

Solución.

En $[1,9]$, $\dfrac{4-x}{x+\sqrt{x}}\geq 0$ si $x\in[1,4]$ y $\dfrac{4-x}{x+\sqrt{x}}\leq 0$ si $x\in[4,9]$

$$A=\int_1^9\left|\frac{4-x}{x+\sqrt{x}}\right|dx=\int_1^4\frac{4-x}{x+\sqrt{x}}\,dx-\int_4^9\frac{4-x}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

Para resolver la integral $\displaystyle\int_1^4\frac{4-x}{x+\sqrt{x}}\,dx$ realizamos el cambio de variable $x=t^2$, $t\in[1,2]$

Para resolver la integral $\displaystyle\int_4^9\frac{4-x}{x+\sqrt{x}}\,dx$ realizamos el cambio de variable $x=t^2$, $t\in[2,3]$

$$A=\int_{1}^{2}\frac{4-t^{2}}{t^{2}+t}\,2t\,dt\;-\;\int_{2}^{3}\frac{4-t^{2}}{t^{2}+t}\,2t\,dt=2\int_{1}^{2}\frac{4-t^{2}}{t+1}\,dt-2\int_{2}^{3}\frac{4-t^{2}}{t+1}\,dt$$

$$\int_{1}^{2}\frac{4-t^{2}}{t+1}\,dt=\int_{1}^{2}\left(-t+1+\frac{3}{t+1}\right)dt=\left[-\frac{t^{2}}{2}+t+3\log\left(\left|t+1\right|\right)\right]_{1}^{2}=-2+2+3\log(3)+1/2-1-3\log(2)$$

$$\int_{2}^{3}\frac{4-t^{2}}{t+1}\,dt=\int_{2}^{3}\left(-t+1+\frac{3}{t+1}\right)dt=\left[-\frac{t^{2}}{2}+t+3\log\left(\left|t+1\right|\right)\right]_{2}^{3}=-\frac{9}{2}+3+3\log(4)+2-2-3\log(3)$$

$$A=6\log(3)+1-2-6\log(2)+9-6-6\log(4)+6\log(3)=2-18\log(2)+12\log(3)$$