Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 16-07-2020

Se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado (no trivial) no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario no se valorará. No se permite usar calculadora.

1)

a) Sean f y g dos funciones reales de una variable real tales que $Dom\, f=(0,+\infty)$ y $g(x)=\sqrt{x^2-16}$. Obtener el dominio de la función compuesta fog.

b) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange y usarlo para demostrar el siguiente resultado: si f es derivable en (a,b) y $f'(x)>0\ \ \forall x\in(a,b)$ entonces f es estrictamente creciente en dicho intervalo.

c) Sea $f(x)=\log(x^2)-(2/x)$. Determinar, por aplicación del cálculo diferencial, el número máximo de ceros reales de la función f ¿Cuántos ceros reales positivos tiene exactamente la función f?

(0.7p.+0.8p.+0.8p.)

Solución.

a)

$$\text{Dom } fog=\{x\in \text{Dom } g\ /\ g(x)\in \text{Dom } f\}$$

$$\text{Dom } f=(0,+\infty)$$

$$\text{Dom } g=\left\{x\in R\ /\ \sqrt{x^2-16}\in R\right\}=\left\{x\in R\ /\ x^2-16\geq 0\right\}=\left\{x\in R\ /\ x^2\geq 16\right\}=\left\{x\in R\ /\ |x|\geq 4\right\}=$$

$$=\{x\in R\ /\ x\geq 4\ \text{ ó }\ x\leq -4\}=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$$

Si $y\in \text{Im } g$ se verifica trivialmente que $y\geq 0$, es decir $\text{Im } g\subset[0,+\infty)$. Recíprocamente, si $y\geq 0$, existe algún $x\in \text{Dom } g$ tal que $\sqrt{x^2-16}=y$; serían $x=\sqrt{y^2+16}$, $x=-\sqrt{y^2+16}$

Por tanto, $\text{Im } g=[0,+\infty)$

Excepto el 0, todo punto perteneciente a la imagen de g también pertenece al dominio de f

$$g(x)=0\Leftrightarrow x=-4\,,\,x=4$$

$$\text{Dom } fog=\text{Dom } g-\{4,-4\}=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$$

b)

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

f es estrictamente creciente en (a,b) $\Leftrightarrow$: $\forall x_1,x_2\in(a,b)\ /\ x_1<x_2\ \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Sean $x_1,x_2\in(a,b)$ tales que $x_1<x_2$. Al ser f continua en $[x_1,x_2]$ y derivable en (x_1,x_2), el teorema del valor medio nos garantiza que existe, al menos, un punto $c\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ tal que

$$f\,'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$f\,'(c)>0$ y $x_2-x_1>0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0$, es decir, $f(x_1)<f(x_2)$

c)
La función $f(x)=\log\left(x^2\right)-(2/x)$ es derivable en su dominio, es decir, en $R-\{0\}$.

Si $x\neq 0$, $f\,'(x)=\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x+2}{x^2}$, $f\,'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$

En cada uno de los intervalos $(-\infty,-1),(-1,0)$ y $(0,+\infty)$ la ecuación $f(x)=0$ puede tener, a lo sumo, un cero real. Además, $x=-1$ no es cero de f . Así pues, el número máximo de ceros reales es tres.

En el intervalo $(0,+\infty)$ la función f es continua, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty-\infty=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-0=+\infty$. El teorema de Bolzano nos garantiza que en dicho intervalo la función f tiene, al menos, un cero. Así pues, la función f tiene exactamente un cero real positivo.

2) Sea f la función real definida en todo R de la forma siguiente:

$$f(x)=\begin{cases}4x-x^2-3 & \text{si} \quad x\leq 2\\ e^{2-x} & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

a) Utilizar las definiciones de derivadas laterales para estudiar, sin aplicar la regla de L'Hopital, la derivabilidad de f en $c=2$.
b) ¿Quiénes son, por definición, los puntos críticos de una función definida en un abierto? Determinar los puntos críticos de la función f dada y obtener los extremos relativos de f (incluidos los puntos del dominio donde se alcanzan).
c) ¿ Existe el máximo y/o el mínimo absoluto de f definida en todo R? ¿ se produce una inflexión en algún punto del dominio?. Justificar las respuestas.

(0.7p.+0.8p.+0.6p.)

Solución.
a)

f es derivable por la izquierda en $c=2 \Leftrightarrow: \exists \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4(2+h)-(2+h)^2-3-(8-4-3)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-h)=0=f\,'\left(2^-\right)$$

f es derivable por la derecha en $c=2 \Leftrightarrow: \exists \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{2-(2+h)}-(8-4-3)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-h}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h}=-1=f\,'\left(2^+\right)$$

Sabemos que $e^x-1\approx x$ si $x\to 0$ (infinitésimos equivalentes) . Si $h\to 0^+$, $e^{-h}-1\approx -h$

Hemos obtenido que f es derivable tanto por la izquierda como por la derecha en $c=2$ (por tanto, es continua en $c=2$). Sin embargo, f no es derivable en $c=2$ ya que $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.

b)
Los puntos críticos de una función definida en un abierto son los puntos del abierto donde la derivada de la función se anula o bien donde la función no es derivable.

Si $x<2$, $f(x)$ es derivable por ser una función polinomica. Si $x>2$, $f(x)$ es derivable por ser composición de la función exponencial y una polinomica. Por tanto, $f(x)$ es derivable en todo R, a excepción de $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases} 4-2x & \text{si} \quad x<2 \\ -e^{2-x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

La función derivada nunca se anula. Así pues, el único punto crítico de $f(x)$ es $x=2$ donde la función no es derivable.

$x<2 \Leftrightarrow 2x<4 \Leftrightarrow 4-2x>0$ $\quad$ f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 2)$
$-e^{2-x}<0$ $\quad$ f es estrictamente decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$

$x=2$ es un punto crítico de $f(x)$ donde la función es continua y "pasa" de creciente a decreciente. El criterio de la derivada primera nos garantiza que la función alcanza un máximo relativo en $x=2$. El valor del máximo relativo es $f(2)=1$ y es el único extremo relativo.

c)
El máximo relativo $f(2)=1$ es también el máximo absoluto de la función ya que los únicos intervalos de monotonía son $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$.

No existe el mínimo absoluto de f. Nótese que f no es acotada inferiormente ya que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^2+4x-3 = -\infty$$

Para comprobar si se produce una inflexión en algún punto del dominio, estudiamos la derivada segunda de la función

$$f''(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x<2 \\ e^{2-x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Si $x<2$, $f''(x)<0$ $\quad$ f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 2)$
Si $x>2$, $f''(x)>0$ $\quad$ f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, 2)$

Por tanto, en $x=2$ se produce una inflexión.

3) Calcular, mediante el método de exhaución, el área(A) del recinto plano limitado por la curva $y = x^3$, el eje de abscisas, y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.
Se sabe que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = n^2(n+1)^2/4$ (1.2p.)

Solución.

El método consiste en aproximar sucesivamente la superficie cuya área se quiere calcular mediante rectángulos. Para ello, dividimos el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos de amplitud $(1-0)/n = 1/n$. Los n subintervalos son:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right]$$

Sobre cada uno de estos subintervalos construimos dos rectángulos, uno de altura igual a la ordenada del extremo izquierdo del subintervalo y otro de altura igual a la ordenada del extremo derecho. De esta forma, se calcula la suma (SI) de las áreas de los rectángulos inferiores y la suma (SS) de las áreas de los rectángulos superiores. Se verifica $SI < A < SS$

$$SI = \frac{1}{n}.0^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n}\frac{1}{n^3}\left[1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3\right] = \frac{1}{n^4}\left[\frac{(n-1)^2 n^2}{4}\right]$$

$$SS = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + .. + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3 = \frac{1}{n}\frac{1}{n^3}\left[1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 + n^3\right] = \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} SI = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2/n + 1/n^2}{4} = \frac{1}{4} \leq A$$

$$\lim_{n\to\infty} SS = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2/n + 1/n^2}{4} = \frac{1}{4} \geq A$$

$$A = \frac{1}{4}$$

4) Siendo f una función continua en $[a, b)$ tal que $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ ó $-\infty$, definir $\int_a^b f(x)dx$

¿es convergente la integral anterior si $f(x) = 1/(x-1)^2$, $a = 0$, $b = 1$?

(0.7p.)

Solución.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{x-1}\Big]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = +\infty \qquad \text{No es convergente}$$

5) Calcular el área determinada por la curva $y=\dfrac{x-4}{x+\sqrt{x}}$, las rectas $x=1$, $x=9$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

(1.5p.)

Solución.

En $[1,9]$, $\dfrac{x-4}{x+\sqrt{x}}\le 0$ si $x\in[1,4]$ y $\dfrac{x-4}{x+\sqrt{x}}\ge 0$ si $x\in[4,9]$

$$A=\int_1^9\left|\frac{x-4}{x+\sqrt{x}}\right|dx=\int_4^9\frac{x-4}{x+\sqrt{x}}dx-\int_1^4\frac{x-4}{x+\sqrt{x}}dx$$

Para resolver la integral $\int_4^9\frac{x-4}{x+\sqrt{x}}dx$ realizamos el cambio de variable $x=t^2$, $t\in[2,3]$

Para resolver la integral $\int_1^4\frac{x-4}{x+\sqrt{x}}dx$ realizamos el cambio de variable $x=t^2$, $t\in[1,2]$

$$A=\int_2^3\frac{t^2-4}{t^2+t}2t\,dt-\int_1^2\frac{t^2-4}{t^2+t}2t\,dt=2\int_2^3\frac{t^2-4}{t+1}dt-2\int_1^2\frac{t^2-4}{t+1}dt$$

$$\int_2^3\frac{t^2-4}{t+1}dt=\int_2^3\left(t-1-\frac{3}{t+1}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}-t-3\log\left(|t+1|\right)\right]_2^3=\frac{9}{2}-3-3\log(4)-2+2+3\log(3)$$

$$\int_1^2\frac{t^2-4}{t+1}dt=\int_1^2\left(t-1-\frac{3}{t+1}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}-t-3\log\left(|t+1|\right)\right]_1^2=2-2-3\log(3)-1/2+1+3\log(2)$$

$$A=9-6-6\log(4)+6\log(3)+6\log(3)+1-2-6\log(2)=2-18\log(2)+12\log(3)$$

6)

a) Obtener la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ de la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$ si $r\neq 1$ y si $r=1$ ¿pará que valores de r es convergente dicha serie? ¿para qué valores de r es divergente a $+\infty$? Justificar las respuestas.

b) Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+3)\,2^{-n}}{n^2+2}$

c) Obtener la sucesión de sumas parciales y la suma de la serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

(0.8p.+0.6p.+0.8p.)

Solución.

a)

$$s_n = r + r^2 + ... + r^n \quad \Rightarrow \quad r.s_n = r^2 + r^3 + ... + r^n + r^{n+1}$$

$(1-r)s_n = r + r^2 + ... + r^n - r^2 - ... - r^n - r^{n+1} = r - r^{n+1}$. Así pues, si $r \neq 1$, $s_n = \dfrac{r - r^{n+1}}{1-r}$

Si $r = 1$, $s_n = n \to +\infty$ divergente a $+\infty$

Si $r \in (-1,1)$, entonces $r^{n+1} \to 0$ y por tanto $s_n \to \dfrac{r}{1-r}$ convergente

Si $r > 1$, entonces $r^{n+1} \to +\infty$ y por tanto $s_n \to \dfrac{-\infty}{1-r} = +\infty$ divergente a $+\infty$

b) Aplicamos el criterio de comparación con la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ que es convergente ya que $1/2 \in (-1,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+3)2^{-n}}{n^2+2}}{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n + 3/n^2}{1 + 2/n^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+3)\,2^{-n}}{n^2+2}$ también es convergente.

c)

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3} \Leftrightarrow (2A+2B)n + 3A + B = 1 \Leftrightarrow A + B = 0\,,\ 3A + B = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 1/2\,, \quad B = -1/2$$

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1/2}{2n+1} - \frac{1/2}{2n+3} = b_n - b_{n+1} \quad \text{siendo} \quad b_n = \frac{1/2}{2n+1}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + b_3 - b_4 + ... + b_{n-1} - b_n + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$$

$$s_n = b_1 - b_{n+1} = \frac{1}{6} - \frac{1/2}{2n+3} \quad \text{sucesión de sumas parciales}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6} \qquad \text{suma de la serie}$$