

EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 24-05-2016

1) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen}(x), & \text{si } x \in (-\infty, -\pi/2); \\ 1, & \text{si } x \in [-\pi/2, 0]; \\ e^x, & \text{si } x \in (0, 1); \\ x^2, & \text{si } x \in [1, +\infty), \end{cases}$$

- a) Estudiar la continuidad de f en su dominio.
- b) Estudiar la derivabilidad de f en su dominio y escribir la función derivada f' en los puntos donde exista
- c) Representar gráficamente la función f (realizar un esbozo).

(2p.)

2)

- a) Calcular las integrales definidas $\int_0^1 (2x-1)^{100} dx$ e $\int_{-a}^a x\sqrt{x^2+a^2} dx$ (aplicando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

$$\text{b) Calcular el límite siguiente: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{y}) dy}{x^3}$$

(1.75p.)

3)

- a) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange y dar su interpretación geométrica.
- b) Sea $f \in C^n(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Enunciar el criterio de la derivada enésima para la determinación de extremos relativos de f .

- c) Demostrar que $x=0$ es un punto crítico de $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \cos(x)$ ¿Es $f(0) = 2$ un máximo relativo de f ? ¿Es $f(0) = 2$ un mínimo relativo de f ? Razonar las respuestas.

(2p.)

4)

- a) Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que $\{a_n\}$ es convergente a 0 y $\{b_n\}$ es acotada. Demostrar que la sucesión producto $\{a_n \cdot b_n\}$ es convergente a cero.

Sugerencia: acotar $|a_n \cdot b_n|$ y usar el teorema de la sucesión intermedia

- b) Estudiar si la sucesión $\{a_n\} = \frac{3n+5}{\sqrt[3]{4n^3+7n-1}} + \frac{n^2}{2n^3+1} \cdot \operatorname{sen}(n)$ es convergente, divergente u

oscilante y obtener su límite, caso de que exista.

(1.25p.)

5) Definir serie de números reales y estudiar el carácter de las series siguientes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n+2)}$$

(1.75p.)

$$\text{6) Sea } f(x, y) = \frac{x - y^4}{x^3 - y^4}$$

Obtener todos los límites direccionales de f , a través de rectas, en el punto $(1, 1)$. Deducir, si existe, el valor del límite doble de f en el punto $(1, 1)$ ó justificar la no existencia del mismo.

(1.25p.)

