Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 20-06-2016

1) y 2) en documento aparte

3)
a) Enunciar el teorema de Weierstrass (del máximo y del mínimo).
b) Determinar, si existen, el máximo y el mínimo absoluto de $f(x) = x(x-2)^6$ definida en $[1, 3]$.
c) Aplicando la definición de mínimo local, ¿se puede asegurar que la función $g(x) = x(x-1)^{10}$, alcanza en $x = 1$ un mínimo local? Razonar la respuesta.

(0.5p.+0.75p.+0.5p.).

Solución.
a) Si f es continua en $[a, b]$, entonces f alcanza el máximo y el mínimo absoluto en $[a, b]$, es decir, existen x_1, $x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$

$f(x_1)$ es el mínimo y $f(x_2)$ es el máximo

b) La función $f(x) = x(x-2)^6$ es continua y derivable en todo R por ser polinomica; por tanto, f es continua en $[1, 3]$ y alcanza el máximo y el mínimo absoluto en dicho intervalo. Tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en un punto crítico, es decir, en un punto frontera del intervalo o bien en un punto interior donde la derivada primera sea igual a cero.

$$f'(x) = (x-2)^6 + 6x(x-2)^5 = (x-2)^5(7x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ , \ x = 2/7 \notin (1, 3)$$

$$f(1) = 1 \quad , \quad f(3) = 3 \quad , \quad f(2) = 0$$

Por tanto,

$$\max_{x \in [1,3]} f(x) = f(3) = 3 \quad ; \quad \min_{x \in [1,3]} f(x) = f(2) = 0$$

El máximo es 3 (se alcanza en $x = 3$) ; el mínimo es 0 (se alcanza en $x = 2$) .

c) $g(x) = x(x-1)^{10}$, $g(1) = 0$. Si $x > 1$, $g(x) > 0$. Si $0 < x < 1$, $g(x) > 0$. Por tanto, g alcanza en $x = 1$ un mínimo local ya que existe un $\delta > 0$ tal que $g(x) \ge g(1) \quad \forall x \in (1-\delta, 1+\delta)$. La respuesta es afirmativa. Podríamos tomar $\delta = 1$.

4)
a) Enunciar el teorema de la sucesión intermedia.
b) Calcular el límite de la sucesión $\{a_n\} = \dfrac{n}{\sqrt{2n^4+1}} + \dfrac{n}{\sqrt{2n^4+2}} + \ldots + \dfrac{n}{\sqrt{2n^4+n}}$

(0.5p.+1p.)

Solución.
a) Supongamos que para todo n suficientemente grande $b_n \le a_n \le c_n$. Si $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \qquad (l \in R \quad \text{ó} \quad l = +\infty \quad \text{ó} \quad l = -\infty)$$

b) Para n suficientemente grande,

$$2n^4 + 1 < 2n^4 + 2 < \ldots < 2n^4 + n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2n^4+1} < \sqrt{2n^4+2} < \ldots < \sqrt{2n^4+n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2n^4+1}} > \frac{1}{\sqrt{2n^4+2}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{2n^4+n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{\sqrt{2n^4+1}} > \frac{n}{\sqrt{2n^4+2}} > \ldots > \frac{n}{\sqrt{2n^4+n}}$$

Por tanto, $$n\frac{n}{\sqrt{2n^4+n}} \leq a_n \leq n\frac{n1}{\sqrt{n^4+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{2n^4+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n^3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{2n^4+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n^4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aplicando el teorema de la sucesión intermedia resulta:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5)

a) Demostrar que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente si $r \in (-1,1)$ y obtener la suma de la serie ¿Para qué valor o valores de r es oscilante ? Justifíquese la respuesta.

b) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\,3^{\alpha.n}}{n^2+100}$ $(\alpha \in R)$, estudiar su carácter para valores de α menores que cero.

(0.75p.+0.75p.)

Solución.

a) La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente, si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente.

La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es oscilante, si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es oscilante.

$$s_n = r + r^2 + \ldots + r^n \quad ; \quad r.s_n = r^2 + r^3 + \ldots + r^n + r^{n+1}$$

$(1-r)s_n = r - r^{n+1}$. Así pues, si $r \neq 1$, $$s_n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$$

Si $r \in (-1,1)$, entonces $r^{n+1} \to 0$ y por tanto $s_n \to \frac{r}{1-r} =$ suma de la serie

Si $r = -1$, $s_n = (-1) + 1 + (-1) + \ldots + (-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ impar} \end{cases}$ oscilante

Nota.

Para los restantes valores de r la serie es divergente. Si $r \geq 1$ es divergente a $+\infty$. Si $r < -1$, es divergente sin límite.

b) Si $\alpha < 0$ entonces $3^{\alpha} \in (0,1)$; por tanto, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\alpha.n} = \sum_{n=1}^{\infty} (3^{\alpha})^n$ es convergente.

Para estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\,3^{\alpha.n}}{n^2+100}$, con $\alpha < 0$, aplicamos el criterio de comparación en el límite con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\alpha.n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n^2+1)3^{\alpha.n}}{n^2+100}}{3^{\alpha.n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+100} = 1$$; al ser el límite distinto de cero y de infinito resulta que

las dos series tienen el mismo carácter. En definitiva, la serie a estudiar es convergente para $\alpha < 0$.

6) Sea $f(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{y-1}$, $y \neq 1$

a) Obtener todos los límites direccionales de f, a través de rectas, en el punto $(0,1)$.

c) Usar coordenadas polares para deducir, si existe, el valor del límite doble de f en el punto $(0,1)$ ó justificar la no existencia del mismo.

(0.6p.+0.9p.)

Solución.

a) Las infinitas rectas pasando por el punto $(0,1)$ tienen por ecuación $y = mx+1$, con $m \in R$, a las que hay que añadir la recta (vertical) $x = 0$. En este ejemplo, tenemos que excluir la recta $y = 1$; por tanto, $m \neq 0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ y=mx+1,\, m\neq 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx+1) = \lim_{\substack{x\to 0\\ m\neq 0}} \frac{x^2+(mx+1)^2-1}{mx+1-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ m\neq 0}} \frac{x^2+m^2x^2+2mx}{mx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+m^2x+2m}{m} = \frac{2m}{m} = 2$$ por ser $m \neq 0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 1} f(0,y) = \lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{y-1} = \lim_{y\to 1} (y+1) = 2$$

Así pues, todos los límites direccionales de f, a través de rectas, en el punto $(0,1)$ son iguales a dos. Resulta, por tanto, que el valor del límite doble de f en el punto $(0,1)$, si existe, es igual a dos. Pero puede ocurrir que dicho límite doble no exista.

b) Si $(x,y) \neq (0,1)$, las ecuaciones que nos permiten pasar de las coordenadas rectangulares x, y a las coordenadas polares r, α son:

$$x = r\cos(\alpha),\quad y = r\,sen(\alpha)+1 \ \ / \ \ r > 0,\ \ \alpha \in [0, 2\pi)$$

Además, en este ejemplo, $\alpha \neq 0\,,\pi$

$$f(x,y)-L=f\big(r\cos(\alpha)\,,rsen(\alpha)+1\big)-2=\frac{r^2\cos^2(\alpha)+\big(r\,sen(\alpha)+1\big)^2-1}{r\,sen(\alpha)+1-1}-2=$$

$$=\frac{r^2+2\,r\,sen(\alpha)}{r\,sen(\alpha)}-2=\frac{r^2}{r\,sen(\alpha)}=\frac{r}{sen(\alpha)}=h(r)g(\alpha)\ /\ \ h(r)=r\,,\quad g(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)}$$

$\lim_{r\to 0} h(r)=0\,,\quad g(\alpha)$ no es acotada ya que $\lim_{\alpha\to\pi}\left|g(\alpha)\right|=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Por tanto, no existe el límite doble de f en el punto $(0\,,1)$