EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 25-05-2015

1) Sea $A = \{x \in R \ / \ x < 2 \ \text{ y } \ |x^2 - 9| \le 7\}$. Obtener, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de A.

(0.75p.)

2)

a) Sea $f : D \subset R \to R$ una función real de variable real, y $S \subset D$. Definir, con lenguaje matemático, cuando f está acotada en S.

b) Obtener, sin utilizar cálculo diferencial, el conjunto imagen de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, para los x pertenecientes a su dominio ¿ es f acotada en su dominio? Razónese la respuesta. (1p.)

3) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & \text{si } x < -2; \\ x+2, & \text{si } -2 \le x \le -1; \\ -sen(\pi . x/2), & \text{si } -1 < x < 1; \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \ge 1; \end{cases}$$

a) Realizar un esbozo de la gráfica de f.

b) Estudiar la continuidad de f en su dominio.

c) Estudiar la derivabilidad de f en su dominio. (2p.)

4)

a) Calcular las integrales definidas $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (aplicando, al menos una vez, la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

b) Obtener la derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt$ en el punto $x = 1$. (1.5p.)

5) Sea f una función continua en R y sea $a \in R$. ¿Cuándo se dice que la integral impropia $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente? Estudiar para que valores de α la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ es convergente. (1.25p.)

6)

a) Definir dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ ambas oscilantes de tal manera que la sucesión suma $\{a_n + b_n\}$ sea convergente. Análogamente, de tal manera que la sucesión suma sea divergente.

b) Usar el teorema de comparación en el límite para estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt[3]{n}}$

(2p.)

7) Sea $f(x, y) = \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + y}$

a) Obtener todos los límites direccionales de f, a través de rectas, en el punto $(0,0)$. Se ha de incluir la recta con pendiente infinita.

b) Deducir, si existe, el valor del límite doble de f en el punto $(0,0)$ ó justificar la no existencia del mismo.

(1.5p.)