Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 29-06-2021

Se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado (no trivial) no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario no se valorará. No se permite usar calculadora.

1)
a) Sea $f : D \subset R \to R$ una función. Para introducir el concepto de límite de f en un punto c, se requiere que este punto sea de acumulación del dominio D ¿qué significa ser punto de acumulación de D? ¿tiene límite la función $f(x) = \sqrt{x}$, si $c = 0$?
b) Razonar la certeza o falsedad de la afirmación siguiente: Si el dominio de la función f es todo R entonces f no tiene asíntotas verticales.
c) ¿qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = x^3$ si $x < 0$, $f(x) = sen(1/x)$ si $x > 0$, en $c = 0$?

(0.7p.+0.5p.+0.5p.)

Solución.

a) Que c sea punto de acumulación del dominio D significa que la función f está definida en las "proximidades" del punto c (por la izquierda y/o por la derecha), aunque no necesariamente en c.
Así, por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{x}$ está definida en las "proximidades" del punto $c = 0$, aunque no esté definida por la izquierda del punto.
¿tiene límite la función $f(x) = \sqrt{x}$, si $c = 0$? La respuesta es afirmativa.
Se verifica $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$. En este ejemplo, es equivalente hablar de límite que hablar de límite por la derecha.

b) La afirmación es falsa. Un contraejemplo es el siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad Dom\, f = R$$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ la recta $x = 0$ es asíntota vertical de f por la izquierda y por la dcha.

c)
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ sen(1/x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) \text{ no existe}$$

La discontinuidad es *esencial de segunda especie* en el punto $c = 0$. Uno de los límites laterales no existe (no es un número real, ni $+\infty$, ni $-\infty$).

2) Sea $f(x) = 5 - 2x - \dfrac{2}{3x^3}$, $x \in D = R - \{0\}$
a) Determinar, aplicando un corolario del teorema de Rolle, el número máximo de ceros reales de f ¿Cuántos ceros reales positivos tiene exactamente la función f?
b) ¿Cuáles son los puntos críticos de f definida en D? ¿cuáles son si consideramos f definida en $[1/2, 2]$?
c) ¿Existe el máximo y/o el mínimo absoluto de $f(x)$ si $x \in D$? ¿Existe el máximo y/o el mínimo absoluto de $f(x)$ si $x \in [1/2, 2]$? Determinarlos, en su caso, sin calcular la derivada segunda de f.

(0.9p.+0.4p.+0.8p.)

Solución.

a) La función $f(x) = 5 - 2x - \dfrac{2}{3x^3}$ es derivable en su dominio, es decir, en $R - \{0\}$.

Si $x \neq 0 \quad f\,'(x) = -2 - \dfrac{2}{3}(-3)x^{-4} = -2 + \dfrac{2}{x^4}$, $\quad f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = -1, x = 1$

En cada uno de los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 0), (0,1), (1, +\infty)$ la función f es derivable y la derivada es distinta de cero. Por tanto, en cada uno de los cuatro intervalos anteriores la función f tiene, a lo sumo, un cero real. Además, $x = -1$ y $x = 1$ no son ceros de f . Así pues, el número máximo de ceros reales de f es cuatro

f es continua en $(0, 1]$, $f(1) = 3 - 2/3 > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 5 - 0 - (+\infty) = -\infty$. El teorema de Bolzano (versión generalizada) nos garantiza que la función f tiene, al menos, un cero en el intervalo $(0, 1)$. Al ser un intervalo de monotonía, resulta que la función f tiene exactamente un cero en el intervalo $(0, 1)$.

f es continua en $[1, +\infty)$, $f(1) > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5 - (+\infty) - 0 = -\infty$. El teorema de Bolzano (versión generalizada) nos garantiza que la función f tiene, al menos, un cero en el intervalo $(1, +\infty)$. Al ser un intervalo de monotonía, resulta que la función f tiene exactamente un cero en el intervalo $(1, +\infty)$.

Hemos demostrado que la función f tiene exactamente dos ceros reales positivos.

b) Los puntos críticos de f definida en su dominio son los puntos donde la función derivada se anula, es decir, $x = -1$ y $x = 1$ Nótese que f es derivable en todos los puntos de su dominio $R - \{0\}$.

En el intervalo $[1/2, 2]$ la función f tiene tres puntos críticos: los dos puntos frontera del intervalo $(x = 1/2, x = 2)$ y el punto interior ($x = 1$) donde la función derivada se anula. Nótese que f es derivable en todos los puntos interiores al intervalo.

c)
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 5 - 0 - (+\infty) = -\infty \Rightarrow f$ no es acotada inferiormente en su dominio $\Rightarrow$ no existe el mínimo absoluto de $f(x)$, $x \in D$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 5 - 0 - (-\infty) = +\infty \Rightarrow f$ no es acotada superiormente en su dominio $\Rightarrow$ no existe el máximo absoluto de $f(x)$, $x \in D$.

La función f es continua en el intervalo cerrado $[1/2, 2]$. Así pues, el teorema de Weiestrass nos garantiza la existencia de $m = \min\limits_{x \in [1/2, 2]} f(x)$ y $M = \max\limits_{x \in [1/2, 2]} f(x)$

$$m = \min\{f(1/2), f(1), f(2)\} = \min\{-4/3,\ 7/3,\ 11/12\} = -4/3$$

$$M = \max\{f(1/2), f(1), f(2)\} = \max\{-4/3,\ 7/3,\ 11/12\} = 7/3$$

3)
a) Definir, con rigor, sucesión $\{a_n\}$ de números reales divergente. Poner un ejemplo de una sucesión divergente que no tenga límite y justificar que es divergente aplicando la definición.

b) Estudiar la monotonía y acotación de la sucesión $\{a_n\} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n}$ ¿es convergente?

(0.5p.+1p.)

Solución.

a) Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es *divergente* $\Leftrightarrow$: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

La sucesión $\{a_n\} = (-1)^n n = \{-1, 2, -3, 4, -5, ...\}$ es divergente. Nótese que $|a_n| = n \to +\infty$

No tiene límite, ya que la subsucesión de los n pares tiene límite $+\infty$ y la de los n impares tiene límite $-\infty$

b) $a_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > a_1$ $\qquad a_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} > a_2$

$\{a_n\}$ es estrictamente creciente $\Leftrightarrow$: $a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} ... + \frac{1}{2n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1-2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \ \forall n$$

La sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente creciente. Por tanto, $a_1 = \frac{1}{2}$ es una cota inferior de dicha sucesión; además, es la mayor de las cotas inferiores, es decir, es el ínfimo y el mínimo del conjunto formado por los elementos de la sucesión.

$$n+1 < n+2 < ... < n+n \Rightarrow \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > ... > \frac{1}{n+n} \qquad \text{para } n \text{ suficientemente grande}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \\ \quad " \\ \frac{1}{n+n} < \frac{1}{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

La sucesión $\{a_n\}$ verifica $a_n < 1 \quad \forall n$. Por tanto, es una sucesión acotada superiormente. Nótese que la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ es una sucesión mayorante de $\{a_n\}$.

Por ser creciente y acotada superiormente resulta que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente.

4)

a) Si $|r| < 1$, demostrar que la serie geométrica de razón r es convergente y la suma es $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$

b) Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)$

(0.7p.+0.8p.)

Solución.

a)

$$s_n = r + r^2 + \ldots + r^n \qquad , \qquad r.s_n = r^2 + r^3 + \ldots + r^{n+1}$$

$(1-r)s_n = r - r^{n+1}$. Así pues, si $r \neq 1$, $\quad s_n = \dfrac{r - r^{n+1}}{1-r}$

Si $|r| < 1$, entonces $r^{n+1} \to 0$ y por tanto $\quad s_n \to \dfrac{r}{1-r}$

b) Para estudiar el carácter de la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)$ aplicamos el criterio de comparación con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ que es convergente.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right) = \lim_{n\to\infty} n^2\,\frac{\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(n^4+1-n^4\right)}{\sqrt{n^4+1}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+1} = \frac{1}{2}$$

Ambas series tienen el mismo carácter, es decir la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)$ es convergente

5)

a) Enunciar la regla de Barrow. Si escribimos $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = -1-1 = -2$

¿por qué no es aceptable el resultado obtenido? ¿dónde está el error?

b) Obtener, si existe, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} sen\sqrt{t}\,dt}{x^3}$

(0.8p.+0.7p.)

Solución.

a) Si f es continua en $[a,b]$ y G es una función continua en $[a,b]$ y primitiva de f en (a,b) entonces: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

El resultado no es aceptable ya que la integral de una función positiva en un intervalo $[a,b]$ siendo $a<b$ no puede dar como resultado un número negativo. El error se ha cometido por aplicar la regla de Barrow a la función $f(x) = 1/x^2$ que no es continua en el intervalo $[-1,1]$ ya que presenta una discontinuidad (esencial) en 0.

b) El límite es de la forma $0/0$. Para resolver esta indeterminación aplicamos la regla de L'Hopital. Para obtener la derivada de la función del numerador utilizamos la regla de la cadena y el primer teorema fundamental del cálculo integral.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} sen\sqrt{t}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2xsen\sqrt{x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen|x|}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2sen|x|}{3x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2sen(x)}{3x}=-\frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{2sen|x|}{3x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2sen(x)}{3x}=\frac{2}{3}$$

Los límites laterales son distintos. Así pues, el límite no existe.

6)
a) Resolver la siguiente integral, relacionada con la función Gamma, mediante un cambio de variable.

$$\int_0^1 \log^6(x)\,dx$$

b) Obtener el área de la región del plano delimitada por la curva $y=xe^{-x}$, las rectas $x=-1$, $x=1$ y el eje de abscisas.

(0.7p.+1p.)

Solución.

a) $\log(x)=-t \Leftrightarrow x=g(t)=e^{-t}$; g es inyectiva $\quad g'(t)=-e^{-t}$

$x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to+\infty$, $\quad x=1\Leftrightarrow t=0$

$$\int_0^1 \log^6(x)\,dx=-\int_{+\infty}^0 (-t)^6 e^{-t}dt=\int_0^{+\infty} t^6 e^{-t}dt=\Gamma(7)=6!=720$$

b)

$$A=\int_{-1}^1 \left|xe^{-x}\right|dx=\int_0^1 xe^{-x}dx-\int_{-1}^0 xe^{-x}dx$$

El método de integración por partes nos permite obtener una primitiva de la función xe^{-x}

$$u=x \Rightarrow du=dx\ , \qquad dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x}$$

Una primitiva es $uv-\int v\,du=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$

$$A=-2e^{-1}+1-(-1)=2-\frac{2}{e}$$