Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 22-06-2020

Se ha de contestar razonadamente. Cualquier resultado (no trivial) no visto en clase o en el material presentado en el Campus Virtual se ha de justificar; en caso contrario no se valorará. No se permite usar calculadora.

1) Sea f una función real de variable real definida en todo R

a) ¿ puede tener f alguna asíntota vertical?

b) Definir, con lenguaje matemático, cuando f es inyectiva e impar en R ¿Tiene inversa la función $f(x)=\sin(x)$ definida en R ?

(0.4p.+0.6p.)

Solución.

a) La respuesta es afirmativa. Así, por ejemplo, la función

$$f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \qquad \text{verifica} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \ \text{ y } \ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty ,$$

es decir, la recta $x=0$ es asíntota vertical de f por la izquierda y por la derecha.

b)

f es inyectiva en $R \Leftrightarrow$: $\forall x_1, x_2 \in R \,/\; f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

f es impar en $R \Leftrightarrow$: $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in R$

La función $f(x)=\sin(x)$ no es inyectiva en R; así, por ejemplo, $\sin(0)=\sin(\pi)=0$. Por tanto, no tiene inversa en R .

2) Supongamos que f es derivable en el intervalo abierto $(a\,,b)$ y que $f\,'(x)\neq 0 \quad \forall x\in (a\,,b)$ ¿Cuántas raíces reales puede tener la ecuación $f(x)=0$ en dicho intervalo? Determinar el número máximo de raíces reales de la ecuación $4-x-4/x^2=0$.

(0.3p.+0.7p.)

Solución.

Si f es derivable en $(a\,,b)$ y $f\,'(x)\neq 0 \;\; \forall x\in (a\,,b)$ entonces la ecuación $f(x)=0$ puede tener, a lo sumo, una raíz real en dicho intervalo, es decir, puede tener una o ninguna. Este resultado es consecuencia del teorema de Rolle.

La función $f(x)=4-x-4/x^2$ es derivable en su dominio, es decir, en $R-\{0\}$.

Si $x\neq 0$, $f\,'(x)=-1+8x/x^4=-1+8/x^3$, $\quad f\,'(x)=0 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2$

En cada uno de los intervalos $(-\infty\,,0),(0\,,2)$ y $(2\,,+\infty)$ la ecuación $f(x)=0$ puede tener, a lo sumo, una raíz real. Además, $x=2$ no es raíz de $f(x)=0$. Así pues, el número máximo de raíces reales es tres.

3) Sea f la función real definida en el intervalo cerrado $I=\left[-1\,,e^2\right]$ de la forma siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{si } x\in[-1\,,1] \\ \log(x)/x & \text{si } x\in\left(1\,,e^2\right] \end{cases} \qquad \log = \text{logaritmo neperiano}$$

a) Utilizar las definiciones de derivadas laterales para estudiar, sin aplicar la regla de L'Hopital, la derivabilidad de f en $x=1$ ¿ es $x=1$ un punto crítico de f en I ?

b) Obtener $f\,'(x)$ $\forall x \in \left(-1\,,e^{2}\right)$ donde f sea derivable y determinar los puntos críticos de f en I .

c) ¿Existe m = mínimo de $f(x)$, si $x \in I$? ¿Existe M = máximo de $f(x)$, si $x \in I$? obténganse, en su caso.

(1p.+0.7p.+0.7p.)

Solución.

a)

f es derivable por la izquierda en $x=1$ $\Leftrightarrow$: $\exists \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \in R$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2-(1+h)-(1-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1+h^2+2h-1-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(1+h)}{h} = 1$$

f es derivable por la derecha en $x=1$ $\Leftrightarrow$: $\exists \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \in R$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\log(1+h)}{1+h}-(1-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\log(1+h)}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h(1+h)} = 1$$

Sabemos que $\log(1+x) \approx x$ si $x \to 0$ (infinitésimos equivalentes) . Si $h \to 0^+$, $\log(1+h) \approx h$

Hemos obtenido que f es derivable tanto por la izquierda como por la derecha en $x=1$. Además, $f\,'\left(1^-\right) = f\,'\left(1^+\right) = 1$. Por tanto, f es derivable en $x=1$ y $f\,'(1) = 1$.

$x=1$ no es un punto crítico de f ya que f es derivable en dicho punto y $f\,'(1) \neq 0$

b) f es derivable en todo punto $x \in (-1\,,e^2)$

$$f\,'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \in (-1\,,1) \\ \dfrac{1-\log(x)}{x^2} & \text{si} \quad x \in \left(1\,,e^2\right) \end{cases} \qquad f\,'(1) = 1$$

Si $x \in (-1\,,1)$, $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$

Si $x \in (1\,,e^2)$, $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

Los puntos críticos de f en I son los puntos frontera del intervalo ($x=-1\,, x=e^2$) , los puntos interiores donde la derivada de f se anula ($x=1/2\,, x=e$) y los puntos interiores donde f no es derivable(no hay).

c) f es continua en $I = \left[-1\,,e^2\right]$. El teorema de Weierstrass nos garantiza la existencia tanto del máximo como del mínimo absoluto de la función $f(x)$ para los $x \in I$.

Tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en un punto crítico.

$$f(-1)=2 \;,\quad f(e^2) = 2/e^2 \quad,\quad f(1/2) = -1/4\,,\quad f(e) = 1/e$$

$$M = 2 = f(-1) \quad,\quad m = -1/4 = f(1/2)$$

4) Dada la sucesión $\{a_n\} = \dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \dfrac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \ldots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

Obtener, paso a paso, una sucesión mayorante y otra minorante de $\{a_n\}$ que nos permita obtener su límite.

(1.2p.)

Solución.

Para un n suficientemente grande se verifica:

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} > \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} \qquad \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n^4+2}} > \frac{2}{\sqrt{n^4+n}} \qquad \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} < \frac{2}{\sqrt{n^4+1}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{n-1}{\sqrt{n^4+n-1}} > \frac{n-1}{\sqrt{n^4+n}} \qquad \frac{n-1}{\sqrt{n^4+n-1}} < \frac{n-1}{\sqrt{n^4+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \qquad \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$

Por tanto,

$$a_n > \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+n}} + \ldots + \frac{n-1}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} = \frac{1+2+\ldots+n-1+n}{\sqrt{n^4+n}} = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+n}}$$

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+1}} + \ldots + \frac{n-1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{1+2+\ldots+n-1+n}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^4+1}}$$

Sucesión minorante: $\left\{\dfrac{n^2+n}{2\sqrt{n^4+n}}\right\}$; Sucesión mayorante: $\left\{\dfrac{n^2+n}{2\sqrt{n^4+1}}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2\sqrt{n^4+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}}} = \frac{1+0}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2\sqrt{n^4+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}} = \frac{1+0}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Aplicando el teorema de la sucesión intermedia resulta $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\} = \dfrac{1}{2}$

5) Estudiar el carácter de las series numéricas siguientes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n} \qquad ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

(0.6p.+0.6p.)

Solución.

a)

Para estudiar el carácter de la serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$ aplicamos el criterio de comparación con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente a $+\infty$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \log(n) = +\infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. Por tanto, la serie dada también es divergente(a $+\infty$).

Para estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, tenemos en cuenta que el carácter de una serie nos lo da el carácter de la sucesión de sumas parciales de dicha serie.

$$s_1 = a_1 = (-1)^2 = 1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = 1 + (-1)^3 = 0$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + (-1)^4 = 1$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + (-1)^5 = 0$$

En general, $s_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

La sucesión $\{s_n\}$ es oscilante. Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ es oscilante.

6) Sea $f(x) = \begin{cases} sen\,(x/2) & \text{si } x \le 0 \\ x^2/\left(x^2+4x+4\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Obtener una función $F(x)$ que sea una primitiva de $f(x)$ en R y calcular la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, 2]$ sin utilizar $F(0)$.

(1.7p.)

Solución.

Si $x \neq 0$ la función $f(x)$ es continua. Se comprueba fácilmente que es continua en todo R ya que los límites laterales de $f(x)$ en $x = 0$ son iguales a $f(0) = 0$.
Por tanto, la función $f(x)$ tiene primitiva en R. Para obtener una primitiva de $f(x)$ en R, vamos a calcular las integrales indefinidas (conjunto de primitivas) de las funciones $sen(x/2)$ y $x^2/(x^2+4x+4)$.

$$\int sen(x/2)dx = -2\cos(x/2) + C$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+4}dx = \int\left(1-\frac{4x+4}{x^2+4x+4}\right)dx = x - 4\int\frac{x+1}{(x+2)^2}dx$$

$$\frac{x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \quad ; \; x+1 = A(x+2)+B \,; \; A=1 \quad , \quad 2A+B=1 \;; \; A=1,\; B=-1$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+4}dx = x - 4\int\frac{1}{x+2}dx + 4\int\frac{1}{(x+2)^2}dx = x - 4\log|x+2| - \frac{4}{x+2} + K$$

Si elegimos adecuadamente las constantes C y K , resulta que la función siguiente

$$F(x) = \begin{cases} -2\cos(x/2)/\pi + C, & x \le 0 \\ x - 4\log|x+2| - \dfrac{4}{x+2} + K, & x > 0 \end{cases}$$

sería una primitiva de $f(x)$ en R. Para ello, la función $F(x)$ habría de ser continua en $x = 0$

$F(x)$ es continua en $x = 0 \iff -2 + C = -4\log(2) - 2 + K \Leftrightarrow C = -4\log(2) + K$.

Si elegimos $C = 0$ resulta $K = 4\log(2)$

$$F(x) = \begin{cases} -2\cos(x/2), & x \le 0 \\ x - 4\log|x+2| - \dfrac{4}{x+2} + 4\log(2), & x > 0 \end{cases}$$ es una primitiva de $f(x)$ en R

Aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, 2]$

$$\int_{-\pi}^{2} f(x)dx = F(2) - F(-\pi) = 2 - 4\log(4) - 1 + 4\log(2) + 2\cos(-\pi/2) = 1 - 4\log(2)$$

7) Obtener el área de la región del plano delimitada por la curva $y = (x-1)e^x$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

(1.5p.)

Solución.

En $[0, 2]$, $(x-1)e^x \ge 0$ si $x \in [1, 2]$ y $(x-1)e^x \le 0$ si $x \in [0, 1]$

$$A = \int_0^2 \left| (x-1)e^x \right| dx = \int_1^2 (x-1)e^x dx - \int_0^1 (x-1)e^x dx$$

Método de integración por partes, $\int (x-1)e^x dx = e^x(x-1) - \int e^x dx = e^x(x-1) - e^x = e^x(x-2) + C$

$$A = e^x(x-2)]_1^2 - e^x(x-2)]_0^1 = e - (-e+2) = 2e - 2$$