Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 20-06-2018

1) Sea $A=\{x\in(-\infty,0)\,/\,|x^2-9|<7\}$. Obtener, si existen, $\sup A$ e $\inf A$, sin alargar el proceso de manera innecesaria.

(0.8p.)

Solución.

$$|x^2-9|<7 \Leftrightarrow 2<x^2<16 \Leftrightarrow \sqrt{2}<|x|<4 \Leftrightarrow x\in\left(-4,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},4\right)$$

$$A=\{x\in(-\infty,0)\,/\,|x^2-9|<7\}=\left(-4,-\sqrt{2}\right)$$

$$\sup A=-\sqrt{2} \quad ; \quad \inf A=-4$$

2) Sea f la función real definida en el intervalo cerrado $I=[-1,2]$ de la forma siguiente:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad x\in[-1,1]\\ sen(\pi x) & \text{si} \quad x\in(1,2]\end{cases}$$

a) Usar las definiciones de derivadas laterales para responder a las siguientes preguntas ¿Es f derivable por la izquierda en $x=1$? ¿Es f derivable por la derecha en $x=1$?

b) Obtener $f'(x)$, $\forall x\in(-1,2)$ donde f sea derivable y determinar todos los puntos críticos de f en I.

c) ¿Existe m = mínimo de $f(x)$, si $x\in I$? ¿Existe M = máximo de $f(x)$, si $x\in I$? Razónense las respuestas y obténganse, en su caso.

(0.8p.+0.8p.+0.8p.)

Solución.

a) f es derivable por la izquierda en $x=1$ $\Leftrightarrow$: $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ existe y es finito

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{1-(1+h)^2}-\sqrt{1-1}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{-h^2-2h}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2h-2}{2\sqrt{-h^2-2h}}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

f no es derivable por la izquierda en $x=1$

f es derivable por la derecha en $x=1$ $\Leftrightarrow$: $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ existe y es finito

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{sen(\pi+\pi h)-\sqrt{1-1}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\pi\cos(\pi+\pi h)=\pi\cos(\pi)=-\pi$$

f es derivable por la derecha en $x=1$

b)

$$f'(x)=\begin{cases}-x/\sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad x\in(-1,1)\\ \pi\cos(\pi x) & \text{si} \quad x\in(1,2)\end{cases}$$

Si $x\in(-1,1)$, $\quad -x/\sqrt{1-x^2}=0 \Leftrightarrow x=0$

Si $x\in(1,2)$, $\quad \pi\cos(\pi x)=0 \Leftrightarrow \cos(\pi x)=0 \Leftrightarrow x=3/2$

Los puntos críticos de f en I son: $x=-1$, $x=2$ (puntos frontera del intervalo cerrado I), $x=1$ (punto interior del intervalo donde la función no es derivable), $x=0$, $x=3/2$ (puntos interiores donde la derivada se anula).

c) f es continua en $x=1$ $\Leftrightarrow$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} sen(\pi x)=sen(\pi)=0$$

$$f(1)=\sqrt{1-1}=0$$

f es continua en $x=1$ y también lo es en los restantes puntos del intervalo I . Por ser f continua en el intervalo cerrado I , el teorema de Weierstrass nos garantiza que existe m = mínimo de $f(x)$ y existe M = máximo de $f(x)$, si $x\in I$ .Para obtener m y M , evaluamos la función en todos los puntos críticos.

$$f(-1)=f(1)=0\,,\ f(0)=1\,, f(3/2)=sen\,(3\pi/2)=-1\,,\ f(2)=sen\,(2\pi)=0$$

$$m=-1 \quad , \quad M=1$$

3)
a) Enunciar el teorema de Rolle. Aplicarlo para demostrar el siguiente resultado: si f es derivable en R y $f'(x)\neq 0 \ \forall x\in R$, entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene, a lo sumo, una raíz real.
b) Sean f y g dos funciones integrables en un intervalo $[a\,,b]$. Enunciar la propiedad de monotonía de la integral y usar tal propiedad para demostrar que $\int_0^1 e^{x^2}dx>1$.
c) Sea $f(x)=-1+\int_0^x e^{t^2}dt$. Demostrar que la ecuación $f(x)=0$ tiene una única raíz real y un intervalo que la contiene es $(0\,,1)$.

(0.7p.+0.6p.+0.7p.)

Solución.
a) Si f es continua en $[a\,,b]$, derivable en $(a\,,b)$ y $f(a)=f(b)$, se verifica que existe, al menos, un punto $c\in(a\,,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Sea f derivable en R / $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in R$ y supongamos que la ecuación $f(x)=0$ tuviese, al menos, dos raíces reales x_1 y x_2 con $x_1<x_2$. f es continua en $[x_1\,,x_2]$, derivable en $(x_1\,,x_2)$ y $f(x_1)=f(x_2)=0$; aplicando Rolle existiría un punto $c\in(x_1\,,x_2)$ tal que $f'(c)=0$, lo que contradice la hipótesis inicial.

b) Si f y g son integrables en $[a\,,b]$ y $f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$

$$\text{Si } x\in[0\,,1] \Rightarrow x^2\in[0\,,1] \Rightarrow e^{x^2}\in[1\,,e]$$

$$e^{x^2}\ge 1 \quad \forall x\in[0\,,1] \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx>\int_0^1 dx=1$$

c) $f(x)=-1+\int_0^x e^{t^2}\,dt$ es derivable en R y $f'(x)=e^{x^2}\neq 0 \quad \forall x\in R$. Por tanto, la ecuación $f(x)=0$ tiene, a lo sumo, una raíz real.

f es continua en $[0,1]$, $f(0)=-1<0$, $f(1)=\int_0^1 e^{t^2}\,dt-1>0$. El teorema de Bolzano nos garantiza que en el intervalo $(0,1)$ la ecuación $f(x)=0$ tiene, al menos, una raíz real.

Así pues, la ecuación $f(x)=0$ tiene una y sólo una raíz real y un intervalo que la contiene es $(0,1)$.

4)

a) Calcular el área determinada por la curva $y=\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}$, las rectas $x=1, x=4$ y el eje de abscisas(usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

b) Obtener una primitiva de la función $f(x)=\log^2(x)$ y estudiar si $\int_0^1 f(x)\,dx$ es impropia convergente o impropia divergente.

(1.2p.+0.8p.)

Solución.

a) La función $f(x)=\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}$ es continua en el intervalo $[1,4]$ y toma valores positivos.

$$A=\int_1^4 \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{cambio de variable } x=t^2,\ t\in[1,2]$$

$$A=\int_1^2 \frac{t^2}{t^2+t}2t\,dt=2\int_1^2 \frac{t^2}{t+1}\,dt=2\int_1^2\left[t-1+\frac{1}{t+1}\right]dt=\left[t^2-2t+2\log|t+1|\right]_1^2=2\log(3)+1-2\log(2)=2\log\left(\frac{3}{2}\right)+1$$

b)

Aplicamos el método de integración por partes dos veces

Sea $u=\log^2(x)$, $du=2\log(x)\dfrac{1}{x}dx$; $dv=dx$, $v=x$

$$\int\log^2(x)\,dx=x\log^2(x)-2\int\log(x)dx+\text{constante}$$

Sea $u=\log(x)$, $du=\dfrac{1}{x}dx$; $dv=dx$, $v=x$

$$\int\log(x)\,dx=x\log(x)-\int dx=x\log(x)-x+\text{constante}$$

Resulta $\quad \int\log^2(x)\,dx=x\log^2(x)-2x\log(x)+2x+C$

Una primitiva de la función $\log^2(x)$ es $x\log^2(x)-2x\log(x)+2x$

$$\int_0^1\log^2(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\log^2(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2-\varepsilon\log^2(\varepsilon)+2\varepsilon\log(\varepsilon)-2\varepsilon\right]$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\log(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log(\varepsilon)}{1/\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2}=-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \log^2(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log^2(\varepsilon)}{1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{2\log(\varepsilon)/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\varepsilon\log(\varepsilon) = 0$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \log^2(x)\,dx = 2 \qquad \text{impropia convergente}$$

5) Razonar si cada una de las siguientes sucesiones es convergente, divergente u oscilante. Obtener el límite, en su caso.

$$\{a_n\} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} \quad , \quad \{b_n\} = n\,sen(n\pi/2)$$

(1p..)

Solución.

Si $\frac{c_{n+1}}{c_n} \to l$ entonces $\sqrt[n]{c_n} \to l$

Sea $c_n = 2^n/n^2$; $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1}/(n+1)^2}{2^n/n^2} = \frac{2^{n+1}n^2}{2^n\,(n+1)^2} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 2$

Por tanto, $\{a_n\} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}$ es convergente a 2.

$sen(n\pi/2) = 0$ si n es par ; $sen(n\pi/2) = 1$ si $n = 1, 5, 9, ...$; $sen(n\pi/2) = -1$ si $n = 3, 7, 11, ...$

$b_n = 0$ si n es par ; $b_n = n$ si $n = 1, 5, 9, ...$; $b_n = -n$ si $n = 3, 7, 11, ...$

La subsucesión de los n pares es convergente a cero y la subsucesión de los n impares es divergente sin límite. Por tanto la sucesión $\{b_n\}$ no tiene límite y es oscilante.

6)

a) Usar el teorema de comparación en el límite para estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}$

b) Sumar las series siguiente, justificando en algún momento la convergencia de las mismas.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

(0.6p.+1.2p.)

Solución.

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n\,3^n)}{1/3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ es convergente por ser geométrica de razón $r = \frac{1}{3} \in (-1, 1)$. Aplicando el teorema de comparación se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}$ es convergente.

b) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ es convergente por ser geométrica de razón $r = -\frac{1}{3} \in (-1,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{-1/3}{1+1/3} = 1 + \frac{-1/3}{4/3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1/2}{2n+1} - \frac{1/2}{2n+3} = b_n - b_{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1/2}{2n+1} - \frac{1/2}{2n+3} \right)$$ serie telescópica

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + b_3 - b_4 + \dots + b_{n-1} - b_n + b_n - b_{n+1} =$$

$$= b_1 - b_{n+1} = \frac{1}{6} - \frac{1/2}{2n+3} \to \frac{1}{6}$$

La serie es convergente pues la sucesión de sumas parciales es convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{6}$$